Jordan A Caraballo-Vega
Asignación #1 - Análisis Numérico
12 sept 2019

Ejercicio 1.4: *Para n >= 1, sea t(n) el tiempo de ejecución para evaluar el polinomio*

$$p_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n$$

Dibuje en un mismo sistema de coordenadas las t(n) que resultan al usar los algoritmos (1.15), (1.16), y (1.17) para evaluar el polinomio.

Adjunto el código para cada una de estas representaciones.

```
% Variables globales
n = 2048;              % valores de n que deseo evaluar
x = linspace(0,1,n); % valor en el que deseo evaluar el polinomio

t115 = zeros(1,n); % arreglo de tiempo para algoritmo 115
t116 = t115;       % arreglo de tiempo para algoritmo 116
t117 = t115;       % arreglo de tiempo para algoritmo 117

% Loop to iterate over algorithms
for k=1:n

    a = (-1).^(0:k);      % arreglo de los coeficientes

    tic; p = algoritmo115(a,x);
    t115(k) = toc;

    tic; p = algoritmo116(a,x);
    t116(k) = toc;

    tic; p = algoritmo117(a,x);
    t117(k) = toc;

end

plot(1:n,t115,1:n,t116,1:n,t117);
xlabel('n'); xlim([0 n]);
ylabel('t(n)');
title({'Performance of Polynomial Evaluation Algorithms'; 'Time as a function of n >= 1'},'FontWeight','Normal')
legend({'Algoritmo 1.15','Algoritmo 1.16','Algoritmo 1.17'},'Location','northwest');
```

Funciones llamadas por el algoritmo principal.

```
function p=algoritmo115(a,z)
    n = length(a) - 1;
    p = a(1) * ones(size(z));
    for j=2:n+1
        p = p + a(j) * z.^(j-1);
    end
end
```

```
function p=algoritmo116(a,z)
    n = length(a) - 1;
    p = a(1) * ones(size(z));
    y = z;
    for j=2:n+1
        p = p + a(j) * y;
        y = y.*z;
    end
end
```

```
function p=algoritmo117(a,z)
    m = length(a);
    n = m-1;
    p = a(n+1) * ones(size(z));
    for k=n:-1:1
        p = a(k) + z.*p;
    end
end
```

Jordan A Caraballo-Vega
Asignación #1 - Análisis Numérico
12 sept 2019

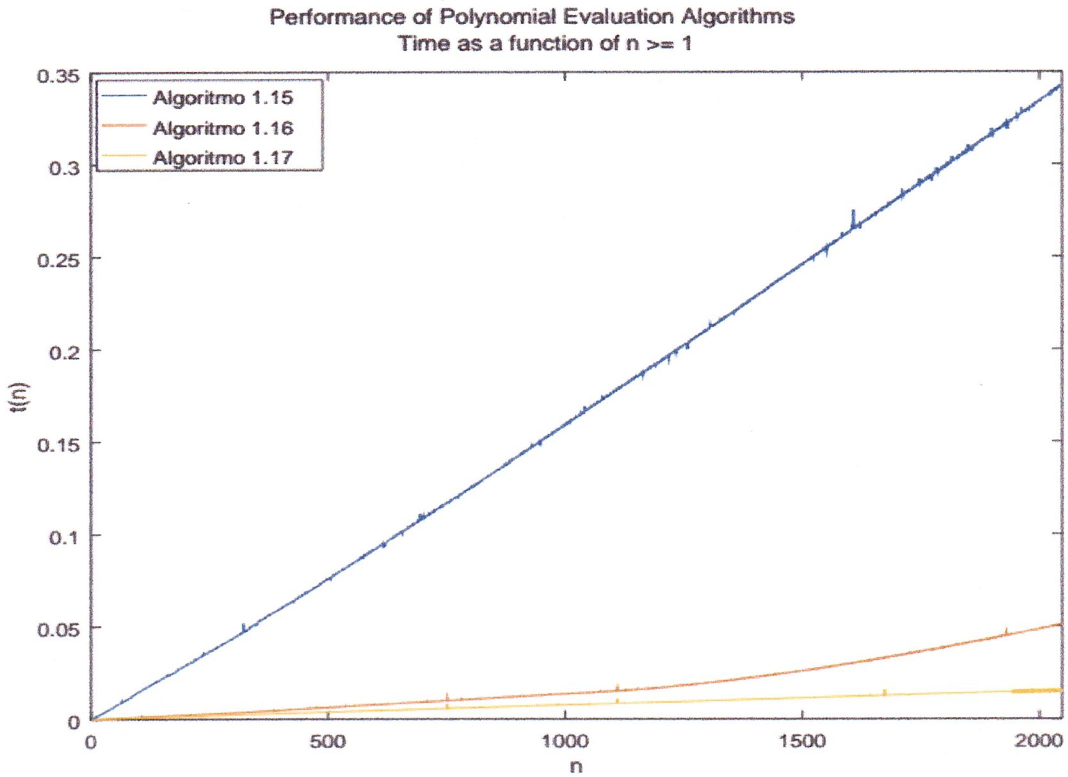

Figura 1. Gráfica de tiempo como función de n. Cada representación coincide con un algoritmo distinto que evalua el polinomio $p_n(x)$ para un arreglo de tamaño n.

Jordan A Caraballo-Vega
Asignación #1 - Análisis Numérico
12 sept 2019

***Ejercicio 1.8:** Considere la función f(x) = ln (x).*

a) Halle el polinomio de Taylor de grado tres para f(x) alrededor de a = 1.
b) Usando el polinomio en (a), aproxime ln(1.1).
c) Usando la fórmula 1.8 para el residual, halle un estimado del error en la aproximación.

(a) Observe que:

$f(x) = \ln(x)$, $f(1) = \ln(1) = 0$;
$f'(x) = 1/x$, $f'(1) = 1$;
$f''(x) = -1/x^2$, $f''(1) = -1$;
$f'''(x) = 2/x^3$, $f'''(1) = 2$.

Sea

$$p_{3,1}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

Observe que por sustitución:

$$p_{3,1}(x) = \ln(1) + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$

$$p_{3,1}(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

(b) Aproximando observe que:

$$p_{3,1}(1.1) = (1.1-1) - \left(\frac{1}{2}\right)(1.1-1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)(1.1-1)^3$$

$$p_{3,1}(1.1) = 0.095\overline{3}$$

(c) Observe que:

$f^{iv}(x) = -6/x^4$.

Tomando el intervalo de $[1, 1.1]$ vea que

$|f^{iv}(1)| = |-6| = 6$ y $|f^{iv}(1.1)| = |-4.098| = 4.098$.

Por lo tanto, tomamos M como 6, es decir

$$E_3(x) \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{(n+1)}$$

$$E_3(1.1) \leq \frac{6}{4!}|1.1-1|^4$$

$$E_3(1.1) \leq 0.000025$$

Es decir, el error es del orden de 10^{-4}, más precisamente menor que 0.000025.

R. I. P.

Jordan A Caraballo-Vega
Asignación #1 - Análisis Numérico
12 sept 2019

Ejercicio 1.13: *Usando la fórmula (1.8) para el residual, halle el entero n mas pequeño para aproximar f(x) = 1/x en x = 1.25 con una precisión de 10^{-8} usando el polinomio de Taylor de grado n alrededor de a = 1.*

Tomando a x = 1.25 y utilizando el algoritmo que se presenta en la parte inferior se pudo calcular que el n mas pequeño para aproximar f(x) = 1/x en x = 1.25 es n=12.

```
t=8;
n=1;
R=1.25;
tol=10^(-t);

while R>tol
    n=n+1;
    R=(1.25)^n/gamma(n+2);
end
disp(num2str(n));

Display:
12
```

R.I.P

Jordan A Caraballo-Vega
Asignación #1 - Análisis Numérico
12 sept 2019

Ejercicio 1.25: *Usando el Teorema de la Función Implícita, verifique que la ecuación*

$$x + y^3 - y = 0,$$

puede despejarse para y en términos de x cerca del punto (0,-1). Halle el polinomio de Taylor de grado tres que aproxima a la función implícita cerca del punto x = 0.

Observe que:

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = \frac{-1}{3y^2-1} = F_1$$

$$F_1(x,y) = F_1(0,-1) = \frac{-1}{3(-1)^2-1} = -1/2$$

$$\phi''(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\, F_1(x,y) = F_2$$

$$\phi''(x) = 0 + \frac{6y}{(3y^2-1)^2} \cdot \frac{-1}{3y^2-1} = F_2$$

$$\phi''(x) = \frac{-6y}{(3y^2-1)^3} \quad ; \quad F_2(x,y) = F_2(0,-1) = \frac{-6(-1)}{(3(-1)^2-1)^3} = 3/4$$

$$\phi'''(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\, F_1(x,y) = F_3$$

$$\phi'''(x) = 0 + \left(\frac{90y^2+6}{(3y^2-1)^4}\right) \cdot \frac{-1}{3y^2-1} = F_3$$

$$\phi'''(x) = -\left(\frac{90y^2+6}{(3y^2-1)^5}\right) = F_3$$

$$F_3(x,y) = F_3(0,-1) = -\left(\frac{90(-1)^2+6}{(3(-1)^2-1)^5}\right) = -\frac{96}{32} = -3$$

Creando el polinomio de Taylor observe que:

$$P_{3,-1}(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\phi''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}\phi'''(a)(x-a)^3$$

$$= -1 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6}\right)(-3)\,x^3$$

$$P_{3,-1}(x) = -1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor queda expresado como:

$$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

R.I.P.