MOCA B2
ED 1
Programmation dynamique

1 Problème du sac à dos

Nous considérons le programme linéaire en variables $0-1$ suivant :

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

$$x_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq n$$

où les paramètres a_i, c_i, b sont entiers. Notre objectif est de résoudre ce problème en utilisant la programmation dynamique.

Le problème est décomposé en n phases de la faon suivante :

à la phase k, $1 \leq k \leq n$, on calcule

$$z_k(d) = \max\{\sum_{i=1}^{k} c_i x_i | \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \leq d, x_i \in \{0,1\}\}$$

pour toutes les valeurs de d, $0 \leq d \leq b$.

Question 1 *On note $z(b)$ la solution optimale du problème. Montrer que $z(b) = z_n(b)$*

Notre objectif est alors de calculer $z_n(b)$ à partir des valeurs de z_{n-1} qui seront elles-même calculées à partir de z_{n-2} et ainsi de suite.

Question 2 *Montrer que la récurence est initialisée par* $z_1(d) = \begin{cases} c_1 & si\ a_1 \leq d \\ 0 & si\ a_1 > d \end{cases}$

Supposons qu'à la phase k, pour la valeur d, $x_k = 1$ soit dans une solution optimale.

Question 3 *Montrer que $d - a_k \geq 0$. En déduire que dans ce cas $z_k(d) = c_k + z_{k-1}(d - a_k)$*

Supposons maintenant qu'à la phase k, pour la valeur d, $x_k = 0$ soit dans une solution optimale.

Question 4 *Montrer que dans ce cas $z_k(d) = z_{k-1}(d)$*

Question 5 *Déduire des deux questions précédentes que pour $k = 2, \ldots, n$ et $d = 0, \ldots, b$ on a :*

$$z_k(d) = \begin{cases} z_{k-1}(d) & si\ a_k > d \\ \max(z_{k-1}(d), c_k + z_{k-1}(d - a_k)) & si\ a_k \leq d \end{cases}$$

Considérons l'exemple suivant :

$$\max 16x_1 + 19x_2 + 23x_3 + 28x_4$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 7$$

$$x_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq 4$$

Question 6 *Appliquer l'algorithme de programmation dynamique à l'exemple. Commencer par calculer z_1 puis z_2 puis z_3 et $z_4(7)$.*