Универзитет Св. Кирил и Методиј - Скопје

Факлутет за информатички науки и компјутерско инженерство

Семинарска работа по предметот

Вовед во случајни процеси

Примена на Маркови вериги за предвидување на случајни процеси

Ментор

Проф. Д-р Верица Бакева

Изработил

Јордан Иванов 206010 КН

Скопје, Мај 2022

Содржина

Вовед

Марковите вериги се едноставна и корисна алатка за моделирање на временско и просторно зависни стохастички процеси. Таа може да се користи во најразлични домени за лесно и прецизно да се направат предвидувања.

Доменот на употреба на Марковите вериги е голем и тој се користи во физиката, хемијата, медецината, музиката, game theory, спортовите и секако во информатиката.

Например тие се користат за:

- Предвидувања на промена на цените на берзата.
- Во бизниси да се предвиде количината која ќе биде продадена.
- Во NLP алгоритми(Трандуктори со конечни состојби и Скриен марков модел)
- За предвидување на времето,температурата и слично.
- Предвидување на однесувањето на потрошувачите
- Како и на многу други полиња.

Најважната причина поради која се корисни марковите вериги е тоа што со еден чекор се бриши многу од меморијата, па затоа е полесно да се користат, Но сепак не сите процеси се маркови процеси, за еден процес да е марков треба да го задоволува марковото својство, тоа гласи:

Идните чекори не зависат од минатите чекори туку само од состојбата во која се наоѓаме во моментот. Или накратко, иднината не зависи од минатото во однос на сегашноста.

Марковите вериги во суштина се состојат од збир на транзиции, кои се определени со одредена распределба на веројатностите, кои го задоволуваат Марковото својство.

Во продолжение подетално ќе ги разгледаме и ќе сфатиме како работат марковите вериги и кои се суштински делови на истите и на крај ќе дадеме пример за апликација.

Дефеиниции

Дискретна верига на Марков е случаен процес во кој параметарското множество е $T = N = \{0, 1, . . . \}$ и притоа секој $n \in N$ и за секој избор на $x_1, x_2, . . . , x_{n+1} \in R_X$, точно е марковото својство $P\{X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, . . . , X_1 = x_1\} = P\{X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n\}$.

Марковата верига преставува класа од стохастички процеси во кои иднината не зависи од минатото,таа зависи од сегашноста.

Ако$\{X_n = i\}$, тогаш велиме дека во n-тиот момент процесот се наога во состојбата i.

Преку пример ќе ја преставам важноста на состојбата:
Во класа на студенти имаме студенти кои положиле Калкулус 1 и студенти кои не положиле Калкулус 1, интуитивно веројаноста дека студентот кој се наоѓа во состојбата положил Калкулус 1 ќе положи Калкулус 2 ќе биде поголема од веројаноста дека студент кој не го положил Калкулус 1 ќе го положи Калкулус 2.

Веројатноста за премин од една во друга состојба се нарекува преодна веројатност.
Означуваме : $p_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\}$.
Сите преодно веројатности определуваат матрица на премин $P^{(n)} =[p^{(n)}_{ij}]$
За било која преодна веројатност важи дека таа е поголема или еднаква од 0 а помала или еднаква од 1 од основните принципи на веројатност.
И дека сумата по редици во матрицата на премин е 1, т.е. од една почетна состојба се преминува во било која(вклучувајки и останување во истата) со веројатност 1.

Веројатноста во n-ти момент да се наоѓаме во некоја состојба може да се престави како производ од веројатноста во n-1 момент да сме во некоја состојба и од таа состојба во n-тиот момент да преминеме во посакуваната состојба $p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P^{(n)}$,
Со разложување може да дојдеме до $p^{(n)} = p^{(0)}P^{(1)} . . . P^{(n-1)}P^{(n)}$.
Доколку ја знаеме почетната состојба и матриците за премин може да ја обределиме веројатноста каде би се наогале после n чекори(моменти).

Веригата на Марков е Хомогена или временски инварijнтна ако важи:
$p^{(n)}_{ij} = P\{X_{n+1} = j|X_n = i\} = P\{X_2 = j|X_1 = i\} = pij$.
Доколку ова е исполнето со оглед дека сите $P^{(i)}$ се исти т.е. $P^{(i)}=P^{(0)}=P$
Веројатноста во n-ти момент да се наоѓаме во некоја состојба може да се престави:
$p^{(n)} = p^{(0)}P^n$
P(0) = E – од некоја состојба за 0 моменти може само да се остане во таа состојба.

Краток пример за како да се предвиде настан со користење на својствата погоре:
Првата матрица е дали положил К1,
Втората е преодна ако не положил веројаности и ако положил веројаности.
Третата, предвидување за тоа дали ќе положи К2.

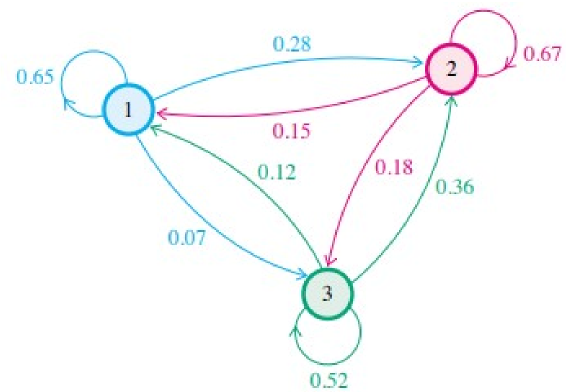
$$[0.2 \quad 0.8]*\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}=[0.31 \quad 0.69]$$

Предвидување на времето со помош на веригите на Марков

Ќе се обидеме со помош на веригите на Марков да предвидиме какво ќе биде времето, утре, задутре или за неколку денови, ќе разгледуваме случај во кој времето може да биде во три состојби сончево, облачно или врнежливо, за тоа ќе ни биде потребна матрица на премин(P) и веројаностите за какво би било времето денес(X_0) ,веројатносни вектори.

Ќе означуваме:

1-Сончево 2-Облачно 3-Врнежливо



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.65 & 0.28 & 0.07 \\ 0.15 & 0.67 & 0.18 \\ 0.12 & 0.36 & 0.52 \end{bmatrix} = P. \end{array}$$

Граф и матрица на Премин од една во друга состојба

Имајки ги графот, т.е. матрицата на преодни веројатности, ни недостасува само веројатносните вектори за какво ќе биде времето денеска, можеме да земеме произволни вредности на веројатности само треба да внимаваме тие да се позитивни и збирот да им е 1 за да ги задоволува потребните услови на веројатност и Маркови вериги.

Пример X_0=[0.21 0.68 0.11],

Сега може да ги предвидиме веројатностите за какво ќе биде времето утре.

$$X_0 \cdot P = [0.21 \quad 0.68 \quad 0.11] \begin{bmatrix} 0.65 & 0.28 & 0.07 \\ 0.15 & 0.67 & 0.18 \\ 0.12 & 0.36 & 0.52 \end{bmatrix} \approx [0.25 \quad 0.55 \quad 0.19].$$

Според ова 25% ќе биде сончево 55% ќе биде облачно и 19% ќе биде врнежливо

За да видиме какво ќе биде времето задутре ни треба матрицата за премин за време 2:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.28 & 0.07 \\ 0.15 & 0.67 & 0.18 \\ 0.12 & 0.36 & 0.52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.65 & 0.28 & 0.07 \\ 0.15 & 0.67 & 0.18 \\ 0.12 & 0.36 & 0.52 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.47 & 0.39 & 0.13 \\ 0.22 & 0.56 & 0.22 \\ 0.19 & \mathbf{0.46} & 0.34 \end{bmatrix}.$$

Сега може да ги предвидиме веројатностите за какво ќе биде времето задутре.

$$X_0 \cdot P^2 = [0.21 \quad 0.68 \quad 0.11] \begin{bmatrix} 0.47 & 0.39 & 0.13 \\ 0.22 & 0.56 & 0.22 \\ 0.19 & 0.46 & 0.34 \end{bmatrix} \approx [0.27 \quad 0.51 \quad 0.21].$$

Според ова 27% ќе биде сончево 51% ќе биде облачно и 21% ќе биде врнежливо

Вака може да правиме за колку денови сакаме но после неколку денови поради Хомогеноста на веригата се добиваат следните резултати:

После колку денови:	Сончево	Облачно	Врнежливо
0	0.210	0.680	0.110
1	0.252	0.554	0.194
2	0.270	0.512	0.218
3	0.278	0.497	0.225
4	0.282	0.490	0.226
5	0.285	0.489	0.225
6	0.286	0.489	0.225
7	0.286	0.489	0.225

Дури и за различен почетен вектор на веројатности пример X_0=[0.75 0.15 0.1] добиваме:

После колку денови:	Сончево	Облачно	Врнежливо
0	0.75	0.15	0.1
1	0.552	0.347	0.132
2	0.407	0.426	0.167
3	0.349	0.459	0.192
4	0.318	0.475	0.207
5	0.303	0.482	0.215
6	0.295	0.485	0.220
7	0.291	0.487	0.222
8	0.289	0.488	0.225
9	0.286	0.489	0.225

Одовде може да согледаме дека после неколку денови веројатносниот вектор тежи кон некоја константна вредност, т.е. Тој нема да се менува со зголемување на деновите.

Доколку сакаме да почнеме од било која состојба само векторот на веројатност би бил X_0=[1 0 0] 1 на позицијата какво е времето денеска.

Забелешка:

Сепак во реалноста не е така, сведоци сме на климатските промени, на секакви природни непогоди, како и на човечкиот фактор, на најразлични циклонски активности кои се случуваат непредвидливо.

Колку гледаме подалеку во иднината поголема е веројатноста дека некој ваков фактор значително би предизвикал промена во првичната матрица на преодни веројатности, по што ќе сватиме дека таа би требало да се менува после забележувањето на било каква промена. Во реалноста процесот не е Хомоген.

Примеров е правен само врс основа на некоја статисичка матрица за премин од една во друга состојба, во реалноста прогнозата на времето е многу покомлексна, но сепак може да кажеме дека е поверојатно да погодиме какво ќе биде времето со користење на овој принцип наместо случајно да погаѓаме.

Податоците не се точни, туку само служат да се илустрира начинот.

На ваков начин можат да се вржат и претпоставки за најразлични процеси, например што би јадел еден студент, каде сончево, облачно, врнежливо би се замениле со пица, хамбургер, хотдок.

Дополнително не е важен бројот на состојби, со што доменот на проблеми кои може да се предвидат со оваа постапка е огромен. Потребни и доволни услови се само да е исполнето Марковото својство и веригите да се хомогени.

Заклучок

Предностите на Марковите вериги е тоа што тие не треба да ги помнат сите претходни состојби туку само претходната, тоа овозможува полесно, побрзо и пресметување со помала меморија(се намалува просторната и временската комплексност). Поради ова како што кажав и погоре доменот каде се применува е огромен.

Како што видовме не е тешко да се разберат и да се употребат Марковите вериги, дополнително лесно може да се имлементира во некоја програма. Лесно може да правиме промени во системот,да го зголемуваме или намалуваме (Да додаваме нови состојби и да ја менуваме матрицата на преодни веројатности, сепак при ваквите промени треба да внимаваме на правилата од веројатност, излезните ребра од секое теме треба да имаа сума на верojаности која ќе изнесува 1).

Бенефитите од неговото користење може да бидат огромни бидејки предвидувања на иднината може да ни заштедат најразлични средства, во зависност од каков тип е проблемот.

Референци:

1. https://analyticsindiamag.com/a-guide-to-markov-chain-and-its-applications-in-machine-learning/
2. https://brilliant.org/wiki/markov-chains/#:~:text=A Markov chain is a,possible future states are fixed.
3. Презентација за вериги на марков по предметот ВвСП
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain