

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Pesquisa Operacional I

PROGRAMAÇÃO INTEIRA
MÉTODO BRANCH AND BOUND

Prof. Dr. FABRÍCIO BROSEGHINI BARCELOS

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

O método de resolução do modelo de programação inteira, em geral, é pior e mais complexo que o método Simplex.

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$$

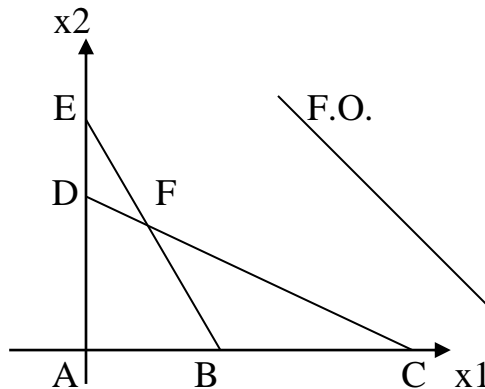
$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$$

$$x \geq 0 \text{ (contínuo)}$$

$$x \in \text{Inteiro} +$$

MODELAGEM DE APLICAÇÕES COM VARIÁVEIS BINÁRIAS:

➤ EXEMPLO 01: Problema uma restrição OU a outra (\neq do problema e).



$$\text{Max } Z = 3 x_1 + 2 x_2$$

s.t.

$$\text{ou} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

Região Viável do problema "e": **ABDF**

Ponto Ótimo do problema "e": **F**

Ponto Ótimo do problema "ou": **C**

Modelagem do problema “OU” com variável binária:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$\text{OU } \begin{cases} (a) & 2x_1 + x_2 \leq 4 + yM \\ (b) & x_1 + 2x_2 \leq 4 + (1 - y)M \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$y = \{0, 1\}$$

Logo:

se $y = 0 \rightarrow (a) = \text{ativa (desativo b)}$

se $y = 1 \rightarrow (b) = \text{ativa (desativo a)}$

➤ EXEMPLO 02: Inclusão de Custo Fixo

Modelagem com variável binária $y = \{0, 1\}$

Modeling fixed cost

- In several situations, a company may have a fixed cost to assume (ex : warehouse renting, manufacturing plant to build, machine to buy, location of a distribution center, startup cost, etc.).
- Suppose a situation where a fixed cost \$ F must be assumed if $x > 0$. We only need to define an additional binary variable y , add the term Fy in the objective function and add the following **linking constraint** :

$$x \leq My$$

where M is a large value.

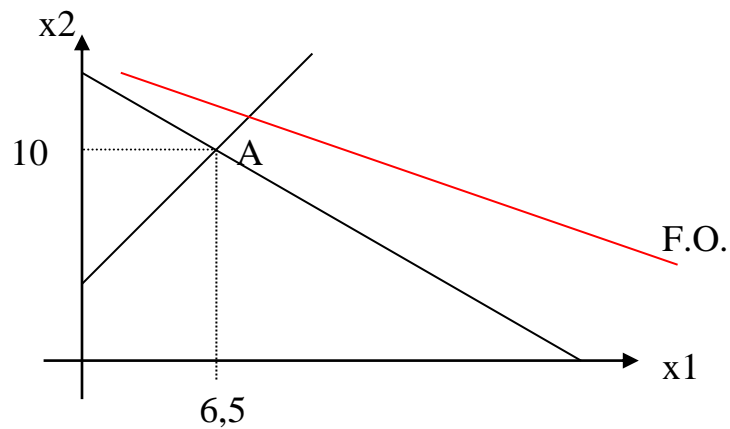
- Comments :
 - The linking constraint forces x to be less than or equal to 0 (since $x \geq 0$, then $x = 0$) if y equals 0.
 - The value of M must be large enough to have a redundant constraint on x when $y = 1$ but it must be small enough to ensure having a good LP relaxation.
 - CPLEX uses indicator variables for doing so (see logical constraints in OPL).

MÉTODO DE RESOLUÇÃO: ARREDONDAR NÃO FUNCIONA!!!

1. Primeiro problema do arredondamento: perde-se a viabilidade do problema

Ex.1: $\text{Max } Z = x_1 + 2 x_2$

s.t. $x_1 + x_2 \leq 16,5$
 $-x_1 + x_2 \leq 3,5$
 $x_1; x_2 \in \mathbb{Z}^+$ (inteiro)



Ponto A = (6,5; 10) Ponto ótimo solução contínua

Arredondando: $\begin{cases} B = (6;10) \\ C = (7;10) \end{cases} \rightarrow$ não faz parte da região convexa

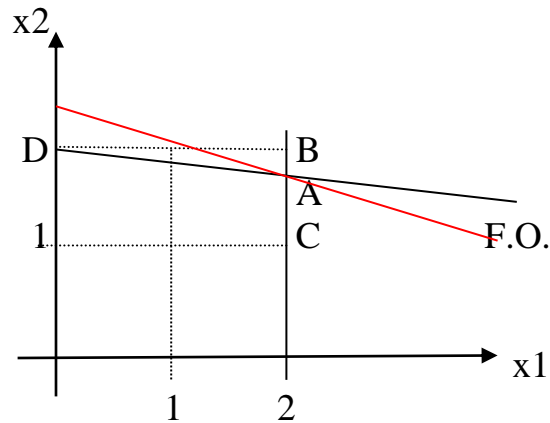
2. Segundo problema do arredondamento: perde a otimalidade do problema

Ex.2: $\text{Max } Z = x_1 + 5 x_2$

s.t. $x_1 + 10 x_2 \leq 20$

$x_1 \leq 2$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$ (inteiro)

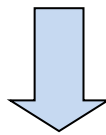


Ponto A = (2; 1,8) Ponto ótimo solução contínua $\rightarrow F.O. (A) = 11$

Arredondando: $\begin{cases} B = (2; 2) \text{ inviável} \\ C = (2; 1) \text{ não ótimo} \end{cases} \rightarrow F.O. (C) = 7$

Ponto D = (0; 2) Ponto ótimo solução inteira $\rightarrow F.O. (D) = 10$

O que funciona???



Branch and Bound

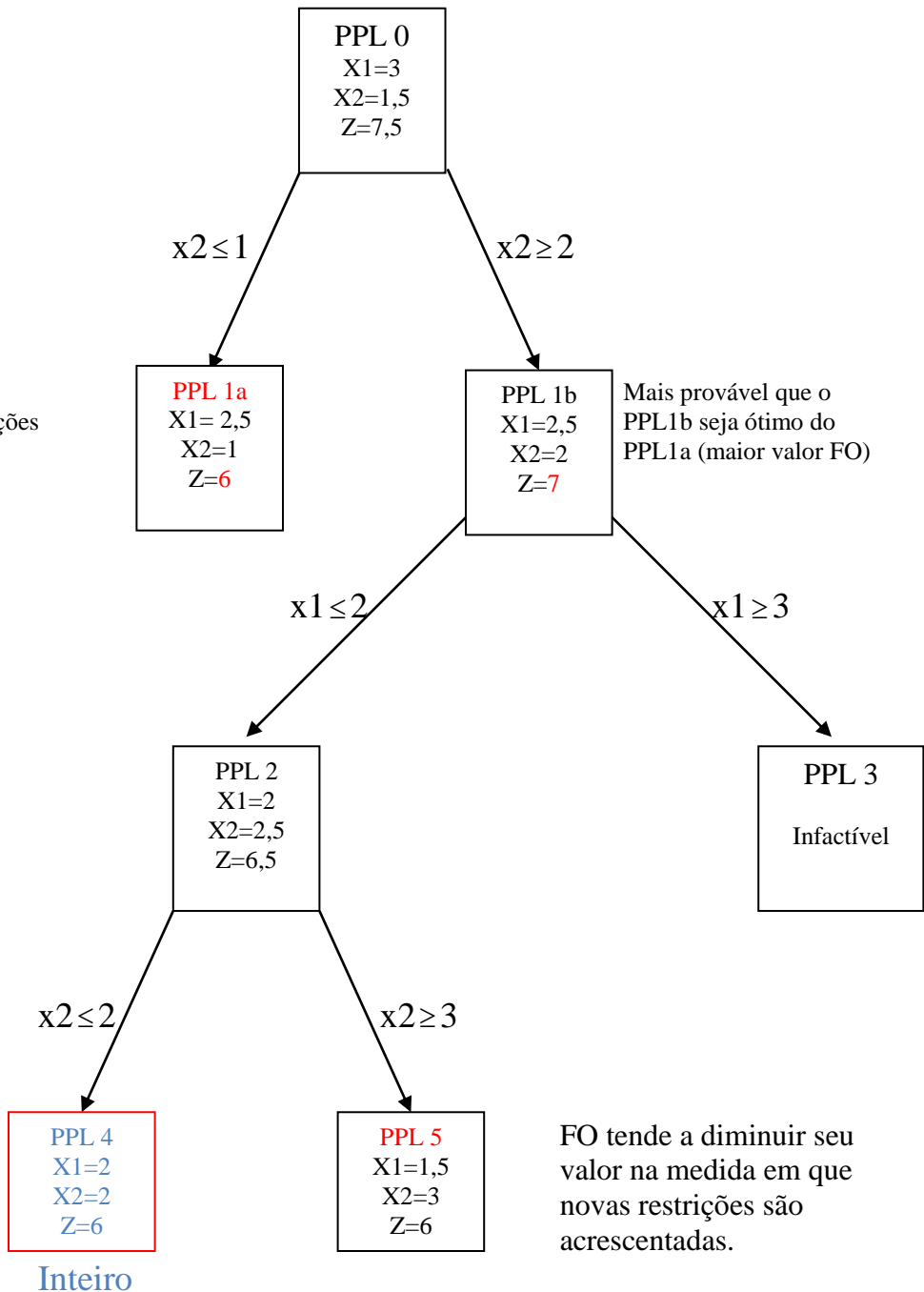
MÉTODO DE RESOLUÇÃO: BRANCH AND BOUND

Exemplo: Max $Z = 2x_1 + x_2$

s.t. $2x_1 + 2x_2 \leq 9$
 $-2x_1 - 2x_2 \leq 5$
 $2x_1 - 2x_2 \leq 3$
 $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$ (inteiro)

BRANCH

1ª Iteração:
Os dois ramos com soluções
não inteiras



BOUND

Se queremos somente uma solução ótima inteira, podemos parar por aqui e não precisamos desenvolver os PPL's 1a e 5 devido ao Bound (limite = 6 do PPL4).

Bound = valor da F.O. que serve como limite inferior (problemas de maximização) quando achamos uma solução inteira.

Solução do problema inteiro é necessariamente menor do que a solução do problema contínuo.

PPL's 1a e 5 apresentam F.O. = 6 com valores das variáveis não inteiros (solução não ótima). Dessa forma, ao acrescentarmos restrições para tornar as variáveis inteiras, o máximo valor que a F.O. poderá assumir = 6 (valor já encontrado no PPL4).

Obs.: Se Z do PPL1a for qualquer valor acima de 6, deve-se continuar com o BRANCH do PPL1a.