

**INSTITUTO FEDERAL  
ESPÍRITO SANTO**  
Campus Cariacica

# Pesquisa Operacional I

PROGRAMAÇÃO INTEIRA  
MÉTODO BRANCH AND BOUND

Prof. Dr. FABRÍCIO BROSEGHINI BARCELOS

## **PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA**

O método de resolução do modelo de programação inteira, em geral, é pior e mais complexo que o método Simplex.

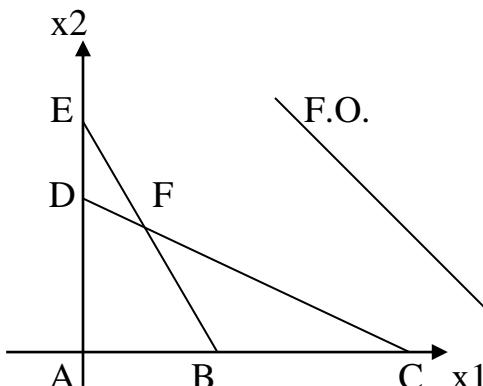
$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$$

$$x \geq 0 \text{ (contínuo)} \quad x \in \text{Inteiro +}$$

### **MODELAGEM DE APLICAÇÕES COM VARIÁVEIS BINÁRIAS:**

- EXEMPLO 01: Problema uma restrição **OU** a outra ( $\neq$  do problema **e**).



$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \\ \text{ou} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases} \\ &x_1; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Região Viável do problema "**e**": **ABDF**

Ponto Ótimo do problema "**e**": **F**

Ponto Ótimo do problema "**ou**": **C**

Modelagem do problema “OU” com variável binária:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} \text{OU } & \begin{cases} (a) \quad 2x_1 + x_2 \leq 4 + yM \\ (b) \quad x_1 + 2x_2 \leq 4 + (1 - y)M \end{cases} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & y = \{0; 1\} \end{aligned}$$

Logo:

- |            |               |                          |
|------------|---------------|--------------------------|
| se $y = 0$ | $\rightarrow$ | (a) = ativa (desativa b) |
| se $y = 1$ | $\rightarrow$ | (b) = ativa (desativa a) |

## ➤ EXEMPLO 02: Inclusão de Custo Fixo

Modelagem com variável binária  $y = \{0; 1\}$

### Modeling fixed cost

- In several situations, a company may have a fixed cost to assume (ex : warehouse renting, manufacturing plant to build, machine to buy, location of a distribution center, startup cost, etc.).
- Suppose a situation where a fixed cost  $\$ F$  must be assumed if  $x > 0$ . We only need to define an additional binary variable  $y$ , add the term  $Fy$  in the objective function and add the following **linking constraint** :

$$x \leq My$$

where  $M$  is a large value.

- Comments :

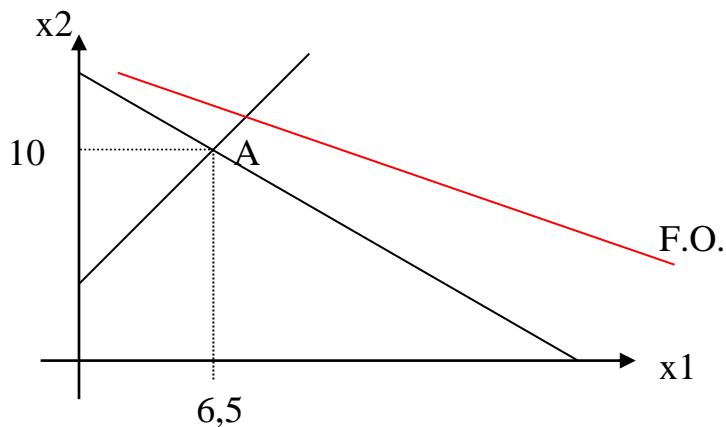
- The linking constraint forces  $x$  to be less than or equal to 0 (since  $x \geq 0$ , then  $x = 0$ ) if  $y$  equals 0.
- The value of  $M$  must be large enough to have a redundant constraint on  $x$  when  $y = 1$  but it must be small enough to ensure having a good LP relaxation.
- CPLEX uses indicator variables for doing so (see logical constraints in OPL).

## **MÉTODO DE RESOLUÇÃO: ARREDONDAR NÃO FUNCIONA!!!**

1. Primeiro problema do arredondamento: perde-se a viabilidade do problema

$$\text{Ex.1: Max } Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 16,5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3,5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \text{ (inteiro)} \end{aligned}$$



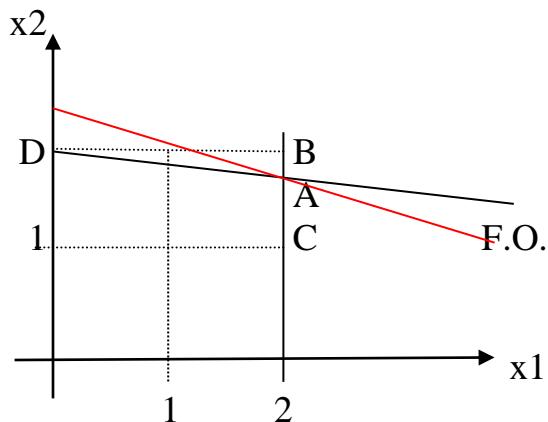
Ponto A = (6,5; 10) Ponto ótimo solução contínua

Arredondando:  $\begin{cases} B = (6; 10) \\ C = (7; 10) \end{cases} \rightarrow$  não faz parte da região convexa

2. Segundo problema do arredondamento: perde a otimalidade do problema

$$\text{Ex.2: Max } Z = x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ (\text{inteiro}) \end{aligned}$$

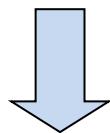


$$\text{Ponto A} = (2; 1,8) \text{ Ponto ótimo solução contínua} \rightarrow \text{F.O. (A)} = 11$$

$$\text{Arredondando:} \quad \begin{cases} B = (2; 2) \text{ inviável} \\ C = (2; 1) \text{ não ótimo} \end{cases} \rightarrow \text{F.O. (C)} = 7$$

$$\text{Ponto D} = (0; 2) \text{ Ponto ótimo solução inteira} \rightarrow \text{F.O. (D)} = 10$$

*O que funciona???*



**Branch and Bound**

## ***MÉTODO DE RESOLUÇÃO: BRANCH AND BOUND***

Exemplo: Max Z = 2x1 + x2

$$\text{s.t. } 2x_1 + 2x_2 \leq 9$$

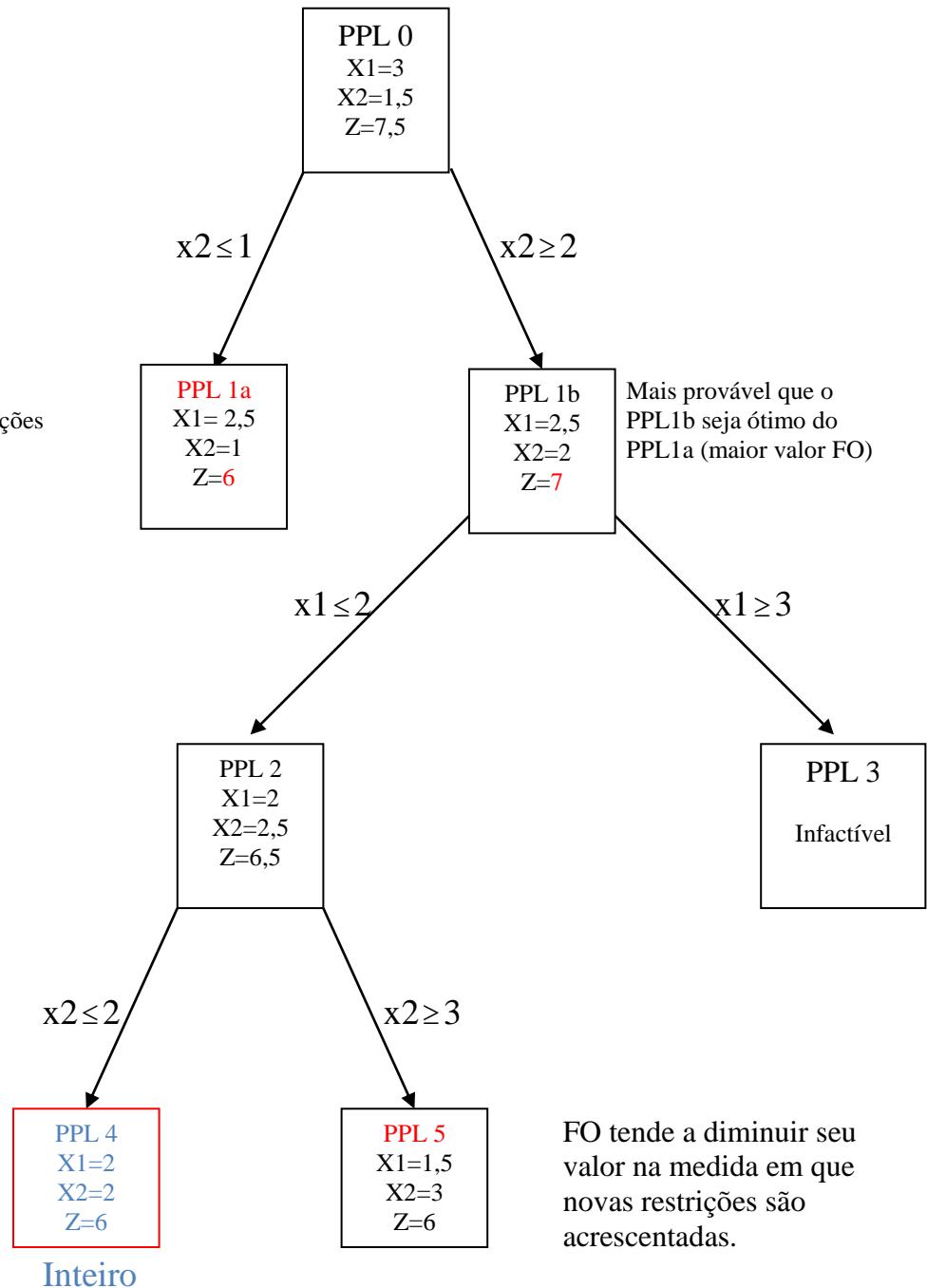
$$-2x_1 - 2x_2 \leq 5$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$  (inteiro)

### ***BRANCH***

1ª Iteração:  
Os dois ramos com soluções  
não inteiras



## BOUND

---

**Se queremos somente uma solução ótima inteira, podemos parar por aqui e não precisamos desenvolver os PPL's 1a e 5 devido ao Bound (limite = 6 do PPL4).**

Bound = valor da F.O. que serve como limite inferior (problemas de maximização) quando achamos uma solução inteira.

Solução do problema inteiro é necessariamente menor do que a solução do problema contínuo.

PPL's 1a e 5 apresentam F.O. = 6 com valores das variáveis não inteiros (solução não ótima). Dessa forma, ao acrescentarmos restrições para tornar as variáveis inteiras, o máximo valor que a F.O. poderá assumir = 6 (valor já encontrado no PPL4).

Obs.: Se Z do PPL1a for qualquer valor acima de 6, deve-se continuar com o BRANCH do PPL1a.