Modelos de Volatilidade

João Carlos de Carvalho   Lucca Simeoni Pavan

Professor:Marcos Minoru Hasegawa

Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico (PPGDE)
Universidade Federal do Paraná

Novembro, 2016.

1. Séries Tempo Econômicas: os Fatos Estilizados

1. Muitas das séries contêm uma clara tendência.
2. A volatilidade de muitas séries não é constante ao longo do tempo.
3. Choques para uma série pode exibir um alto grau de persistência.
4. Algumas séries parecem serpentear.
5. Algumas séries compartilham comovimentos com outras séries.
6. Algumas das séries exibem quebras.

Processos ARCH

- É convencional em modelos econométricos assumir a variância do erro constante. Muitas séries de tempo econômicas exibem periodos de grande volatilidade e períodos de relativa tranquilidade.
- Como detentor de ativos, você estaria interessado nas previsões de taxa de retorno e sua variação durante o período de detenção.
- A variância incondicional (longo prazo) não importa se você planeja comprar o ativo em t e pretende vender em t_{t+1}. Uma abordagem para prever a variância e introduzir explicitamente uma variável independente que ajuda prever a volatilidade.

Processos ARCH

Exemplo:

$$y_{t+1} = \epsilon_{t+1} x_t \tag{1}$$

Em que, y_{t+1} é a variável de interesse, ϵ_{t+1} é erro do tipo ruído branco com variância igual a $\sigma 2$ e x_t é a variável independente que pode ser observada no período t.
Caso $x_t = x_{t+1} = x_{t+2} = \cdots = constante$, a sequência y_t é o familiar ruído branco com uma variância constante. No entanto, quando as realizações da sequência x_t não são todas iguais, a variância de y_t condicional ao valor observável torna-se

$$Var(y_{t+1}/x_t) = x_t^2 \sigma^2 \tag{2}$$

A variância condicional de y_{t+1} é dependente do valor realizado de x_t.

Processos ARCH

Na prática, você pode querer modificar o modelo básico introduzindo os coeficientes e estimando a equação de regressão na forma logarítmica:

$$ln(y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 ln(x_{t-1} + e_t) \tag{3}$$

onde e_t é o termo de erro, formalmente $e_t = ln(\epsilon_t)$.
Este procedimento é simples de implementar uma vez que a transformação logarítmica resulta numa equação de regressão linear; MQO pode ser usado para estimar os parâmetros diretamente.

Processos ARCH

- Uma grande dificuldade com esta estratégia é que ela assume uma causa específica para a mudança de variância. Além disso, a metodologia também força x_t também afetar a média de $ln(y_t)$.
- A técnica necessita de uma transformação dos dados de modo que a série resultante tenha uma variância constante. No exemplo, assume-se que a sequência e_t possui uma variância constante. Se esta suposição é violada, alguma outra transformação dos dados é necessária.

Processos ARCH

- Em vez de usar opções de variáveis ad hoc parx_t e / ou transformações de dados, Engle (1982) mostra que é possível modelar simultaneamente a média e a variância de uma série.
- Importante passo preliminar para compreender a metodologia de Engle, é notar que as previsões condicionais são muito superiores às previsões incondicionais.

Suponha um modelo ARMA estacionário $y_t = \alpha_0 + \alpha_0 y_{t-1} + \epsilon_t$ e deseja prever y_{t+1}. A média condicional de y_{t+1} é

$$E_t y_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 y_t \tag{4}$$

Processos ARCH

Se usarmos essa média condicional para prever y_{t+1}, a variância do erro de previsão é $E_t[(y_{t+1} - \alpha_0 + \alpha_1 y_t)]^2 = \sigma^2$. No entanto, se forem utilizadas previsões incondicionais, a previsão incondicional é sempre a média de longo prazo da sequência y_t igual a $frac\alpha_0 1 - \alpha_1$. A variância do erro de previsão incondicional é

$$Var_t y_{t+1} = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha_1^2}$$

Desde $\frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2} > 1$, a previsão incondicional tem uma maior variação do que a previsão condicional. Assim, as previsões condicionais (uma vez que levam em consideração as realizações conhecidas correntes e passadas das séries) são claramente preferíveis.

Da mesma forma, se a variância de $_t$ não for constante, pode-se estimar qualquer tendência para movimentos sustentados na variância usando um modelo ARMA. Por exemplo, vamos $_t$ representar os resíduos estimados a partir do modelo $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \epsilon_t$ de modo que a variância condicional de y_{t+1} seja

$$Var(y_{t+1}|y_t) = E_t(y_{t+1} - \alpha_0 - \alpha_0 y_t)^2$$

$= \mathrm{E}_t(\epsilon_{t+1})^2$

Nesse ponto, definimos $E_t(\epsilon_{t+1})^2$ igual à constante σ^2. Agora, suponha que a variância condicional não é constante. Uma estratégia simples é modelar a variância condicional como um processo de AR (q) usando quadrados dos resíduos estimados.

Processos ARCH

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q e_{t-q}^2 + v_t \tag{5}$$

Onde v_t é um processo de ruído branco. Se os valores de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ são todos iguais a zero, a variância estimada é simplesmente a constante α_0. Caso contrário, a variância condicional de y_t evolui de acordo com o processo autorregressivo dado na equação acima. Como tal, você pode usar a equação para prever a variância condicional em t + 1 como

$$E_t e_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_t^2 + \alpha_2 e_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q e_{t+1-q}^2$$

A equação 5 chamada um modelo heterocedástico condicional autorregressivo (ARCH). Existem muitas aplicações possíveis para modelos ARCH já que os resíduos na equação 5 podem vir de uma autorregressão, um modelo ARMA, ou um modelo de regressão padrão.

Processos ARCH

A especificação linear na equação 5 não é a mais conveniente. A razão é que o modelo para y_t e a variância condicional são melhores estimados simultaneamente usando técnicas de máxima verossimilhança.
Além disso, em vez da especificação dada pela equação 5, é mais tratável especificar v_t como uma perturbação multiplicativa. O exemplo mais simples da classe de modelos multiplicativos condicionalmente heteroscedásticos propostos por Engle (1982) é

$$E_t \epsilon_t = v_t \alpha_0 + \alpha_0 \epsilon_{t-1}^2$$

Onde v_t processo de ruído branco tal que variância e igual a 1, v_t e ϵ_{t-1} são independentes um do outro, e α_0 e α_1 são constantes tais que $\alpha_0 > 0$ e $0 \alpha_1 1$.

Modelo GARCH

O Modelo GARCH Bollerslev (1986) estendeu o trabalho original de Engle desenvolvendo uma técnica que permite que a variância condicional seja um processo ARMA:

$$\epsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

onde $\sigma_v^2 = 1$ e

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \tag{6}$$

Uma vez que v_t é um processo de ruído branco, as médias condicionais e incondicionais de ϵ_t são iguais a zero. Assim, a variância condicional de ϵ_t é o processo ARMA dado pela expressão h_t. Este modelo generalizado de ARCH (p, q) - chamado GARCH (p, q) - permite tanto a componente autoregressivo como a média móvel na variância heteroscedástica.

Modelo GARCH

- Os benefícios do modelo GARCH devem ser claros. Um modelo ARCH de alta ordem pode ter uma representação GARCH mais parcimoniosa que é muito mais fácil de identificar e estimar. Isto é particularmente verdadeiro uma vez que todos os coeficientes na equação 6 forem ser positivos. O modelo mais parcimonioso implicará menos restrições dos coeficientes.
- Além disso, para garantir que a variância é finita, todas as raízes características da equação 6 devem estar dentro do círculo unitário(processo estável).

- A característica chave dos modelos GARCH é que a variância condicional dos distúrbios da sequência y_t age como um processo ARMA.
- Portanto, é de se esperar que os resíduos de um modelo ARMA ajustado exibam esse padrão característico. Para explicar, suponha que você estime y_t como um processo ARMA. Se o seu modelo de y_t for adequado, o ACF e o PACF dos resíduos devem ser indicativos de um processo de ruído branco.
- No entanto, o ACF dos resíduos quadrados pode ajudar a identificar a ordem do processo GARCH. Se houver heterocedasticidade condicional, o correlograma deve ser sugestivo de tal processo.

Referênias

BAUWENS, L.;HAFNER,C.;LAURENT,S.Handbook of Volatility Models and Their Applications.John Wiley Sons,Inc,Hoboken,NJ, 2012.

ENDERS, W. Appied Econometric Times Series.John Wiley Sons,Inc, New York, 2014.