1 Metodologia

Muitas séries de preços possuem duas características importantes que devem ser consideradas em estudos estatísticos: (i) movimentos comuns entre séries de preços ao longo do tempo, (ii) preços altamente voláteis com a volatilidade variando com o tempo. Considerando estas propriedades é necessário cuidado para especificar e estimar a média e variância das séries. Desenvolvido por Herwartz e Lütkepohl (2011) e usado por Cabrera e Schulz (2015), neste trabalho usamos um estimador de mínimo quadrados generalizados factível para estimar conjuntamente a média condicional, por meio de um modelo de correção de erros, e a volatilidade, através de um modelo heterocedástico multivariado.

1.1 Modelo de Correção de Erros

Séries de preços que possuem movimentos comuns ao longo do tempo são ditas cointegradas. Engle e Granger (1987) introduziu o conceito para séries não estacionárias e integradas de mesma ordem. Posteriormente Campbell e Perron (1991) generalizou a definição permitindo cointegração de séries com diferentes ordens. A cointegração de séries temporais indica uma relação de causalidade de longo prazo, porém não indica a direção dessa causalidade temporal entre as séries. Tal direção de causalidade pode ser determinada com um vetor de correção de erros (VECM) que acomoda tanto a dinâmica de curto como a dinâmica de equilíbrio de longo prazo na sua estrutura.

$$\Delta p_t = c + \Pi p_{t-1} + \Gamma \Delta p_{t-1} + u_t \tag{1}$$

$$\Delta p_t = c + \alpha \beta^T p_{t-1} + \Gamma \Delta p_{t-1} + u_t \tag{2}$$

Onde Δ é um operador de primeira diferença, tal que $\Delta p_t = p_t - p_{t-1}$ denota a mudança de preços p de tempo $t-1$ para tempo t (variações de preço de curto prazo), c é uma constante, α dá a velocidade de ajuste com a qual Os preços retornam ao equilíbrio de longo prazo, Γ mede as reações a mudanças de preços de curto prazo e u_t é um termo de erro que capta potenciais efeitos da volatilidade.

1.2 Modelo GARCH Multivariado

Uma commoditie pode sofrer de momentos de alta e baixa instabilidade de preços ao longo do tempo. Além disso, a instabilidade de preços de uma commoditie pode levar a uma instabilidade de preços de outra commoditie. Em outras palavras, as volatilidades de algumas séries podem estar inter relacionadas. Para estudar estas relações e possíveis transmissões de volatilidade entre as séries ao longo do tempo usamos um Modelo Multivariado GARCH. Denota-se um vetor n variado de T observações , no qual $E(u_t|F_{t-1})$ é gerado pelo passado até F_{t-1}. Assume-se que u_t é um vetor dos resíduos do VECM. O modelo Multivariado Garch é definido como:

$$u_t = H_t^{1/2} z_t, z_t \sim iid(0, I_n), t = 1, 2, \ldots, T, \tag{3}$$

onde H_t é uma matriz positiva definida tal que $H_t^{1/2}(H_t^{1/2})^T = H_t$ e $H_t = Var(u_t|F_{t-1})$ é matriz de covariância de u_t sobre campo sigma F_{t-1}. A variância não condicional é assumida constante ao longo do tempo. Muitas especificações da matriz de covariância condicional são propostas na literatura. Seguindo Cabrera e Schulz (2015) utilizamos o modelo de correção condicional constante (CCC) e o modelo de correlação condicional dinâmica (DCC). Os modelos produzem resultados facilmente interpretáveis e mantêm o número de parâmetros a ser estimado relativamente baixo. O interessante de modelos de correlação condicional é que a matriz H_t pode ser decomposta em variâncias condicionais e uma matriz de correlação condicional, no qual pode ser especificada separadamente. Definimos o modelo como:

$$H_t = D_t R_t D_t \tag{4}$$

$$D_t = diag(h_{11t}^{1/2}, \ldots, h_{nnt}^{1/2}) \tag{5}$$

$$R_t = (I_n \odot Q_t)^{-1/2} Q_t (I_n \odot Q_t)^{-1/2} \tag{6}$$

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{Q} + a\xi_{t-1}\xi_{t-1}^T + bQ_{t-1} \tag{7}$$

Em que $\odot$ denota o produto de Hadamard, $\xi_{it} = \frac{u_{it}}{\sqrt{h_{it}}}$ são os resíduos u_t padronizados por seus desvios padrões condicionais, $\bar{Q}$ é a matriz de covariância incondicional de ξ_t e a e b são parâmetros escalares não-negativos que satisfazem $a + b < 1$. D_t é matriz diagonal variante no tempo dos desvios padrões dos processos GARCH univariados. O modelo correlação condicional constante é um caso especial do modelo DCC, onde as matrizes D e R são constantes. O modelo de correlação condicional dinâmica pode ser realizado em duas etapas. Primeiramente as variâncias condicionais são estimadas usando-se uma especificação GARCH univariada. Na segunda etapa, os resíduos padronizados são usados para estimar os parâmetros das correlações dinâmicas. Assumindo que z_t in Eq. (3) seja normalmente distribuídas, é possível obter estimativas consistentes por meio de estimador de quasi-máxima verossimilhança em dois estágios.

1.3 Estimação Conjunta dos Parâmetros de Cointegração e GARCH

A abordagem mais conhecido para estimar parâmetros de cointegração é que foi desenvolvido por Johansen (1995). No entanto, este procedimento é ineficiente na presença de heterocedasticidade condicional generalizada, como mostrado por Seo (2007).

Para superar a problema Seo (2007) propôs um procedimento de máximo verossimilhança que leva em consideração a estrutura GARCH para os resíduos. Mais este procedimento sofre grande sensibilidade quando ocorre má especificação do processo GARCH e, além disso, possui fracas propriedades em pequenas amostras. O estimador de Mínimos Quadrados Generalizados Factível proposto por Herwartz e Lütkepohl (2011) aborda todos esses inconvenientes. Como em Cabrera e Schulz (2015) adotamos a última abordagem. Consiste em duas etapas: (i) estima-se um VECM por Mínimos Quadrados Ordinários e salva os resíduos para, posteriormente, utilizar na estimação do MGARCH por Máximo Verossimilhança, (ii) as estimativas de Mínimos Quadrados Generalizados Factível são derivadas usando a matriz de covariância estimada a partir da primeira etapa.

1.4 Modelo Multivariável de Volatilidade Multiplicativa

A hipótese central dos modelos de MGARCH é que a matriz de covariância incondicional é constante ao longo do tempo. Porém, mudanças no ambiente de mercado podem fazer com que a matriz de covariância incondicional mude ao longo do tempo. Para permitir tais mudanças, como em Cabrera (2016) e Serra (2015), usamos um modelo de volatilidade multiplicativo desenvolvido por Hafner e Linton (2010), que permite mudanças suaves na matriz de covariância incondicional através de uma componente multiplicativo. a ideia do modelo de volatilidade multiplicativa é decompor a matriz de covariância condicional de u_t em um componente que pode mudar suavemente ao longo do tempo (componente de longo prazo) e um componente de curto prazo que captura variações em torno do nível que varia levemente. O componente de longo prazo é modelado como uma função suave em relação ao tempo e corresponde à covariância incondicional. O componente de curto prazo captura a dinâmica potencial de processos GARCH multivariados. Segue o modelo:

$$H_t = \sum(t/T)^{1/2} G_t^{1/2} (G_t^{1/2})^T [\sum(t/T)^{1/2}]^T = \sum(t/T)^{1/2} G_t [\sum(t/T)^{1/2}]^T \quad (8)$$

Ao assumir $E(G_t) = I_n$ para identificação, segue-se que

$$Var(u_t) = E(H_t) = \sum(t/T)^{1/2} E(G_t) [\sum(t/T)^{1/2}]^T = \sum(t/T) \quad (9)$$

onde $\sum(t/T) = \sum t$ é matriz de covariância não condicional de u_t. Deixe $\varepsilon = \sum(t/T)^{-1/2} u_t$ o vetor de resíduos padronizado por sua covariância incondicional. Segue-se que $Var(\varepsilon_t) = I_n$ e $Var(\varepsilon_t | F_{t-1}) = G_t$. Portanto, ε_t é um vetor com uma matriz de covariância incondicional constante e com G_t como sua matriz de covariância condicional. No caso dos resíduos padronizados ε_t mostrarem efeitos ARCH, eles podem ser modelados usando um modelo GARCH multivariável como descrito anteriormente.

Devido à padronização, eles seguem uma hipótese de uma matriz de covariância incondicional constante. De acordo com Hafner e Linton (2010), a matriz de covariância incondicional $\sum(t/T)$ pode ser estimada eficientemente pelo Nadaraya-Watson não paramétrico:

$$\hat{\sum}(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{T} K_h(\tau - \frac{t}{T}) u_t u_t^T}{\sum_{t=1}^{T} K_h(\tau - \frac{t}{T})}, \tag{10}$$

o $\tau = \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \ldots, 1, K_h(.)$ é uma função do kernel e h é um parâmetro de suavização positivo que separa o componente de longo e curto prazo da matriz de covariância. Para escolher o parâmetro de suavização utiliza-se um critério de validação cruzada de verossimilhança como proposto por (Yin et al., 2010):

$$CV(h) = \frac{1}{n} \sum_{1}^{T} [u_t^T \sum_{(-t)}^{-1} (t/T) u_t] + log[| \sum_{-t} (t/T)|], \tag{11}$$

onde $\sum_{-t}$ é o estimador matriz de covariância incondicional. Ou seja, a Eq. (10) é estimada com a t-ésima observação deixada de fora. O parâmetro de suavização ótimo é determinado minimizando a Eq. (11) e por simplicidade um kernel gaussiano é escolhido.