Modelamento matemático para o controle de veículos robóticos terrestres

Outubro de 2011

Nomenclatura

$\mathcal{F}_0$	referencial fixo (NED)
$\mathcal{F}_1$	referencial local do veículo
$\mathcal{F}_2^i$	referencial da roda i
i	índice superior associado a cada uma das 4 rodas: 1: frente-esquerda, 2: frente-direita, 3: trás-esquerda e 4: trás-direita
$\Phi = (\phi, \theta, \psi)$	ângulos de Euler da transformação de $\mathcal{F}_0$ para $\mathcal{F}_1$
S	transformação do referencial fixo $\mathcal{F}_0$ para o refrencial local $\mathcal{F}_1$
R	matriz de conversão entre a velocidade angular e as derivadas dos ângulos de Euler
a	distância longitudinal entre c.g. e eixo dianteiro
b	distância longitudinal entre c.g. e eixo traseiro
c	distância lateral entre c.g. e a roda
d	distância entre c.g. e o solo ao descanso (com peso virtualmente nulo)
δ	ângulo de comando da direção (esterçamento)
δ_L, δ_R	ângulos de esterçamento das rodas esquerda e direita (em torno do seu eixo vertical)
q^i	projeção do ponto de contacto da roda i no plano Oxy local
r^i	posição do ponto de contacto sem peso da roda i no referencial local
m	massa total do veículo
J	matriz de inércia do veículo em torno do c.g. no referencial do carro
R_w, J_w	raio e momento de inércia da roda
$V = (u, v, w)$	velocidade do c.g. expressa no referencial local
$\omega = (p, q, r)$	velocidade angular expressa no referencial local
Ω^i	velocidade de rotação da roda i
$P = (X, Y, Z)$	posição do c.g. no referencial fixo
F_w, T_w	força e binário resultantes no c.g. gerado na interação piso/pneu
F_a, T_a	força e binário de atrito atuando no c.g.
b_ω	amortecimento de rotação de atitude
b_x	amortecimento de translação
T^i	binário de tração aplicado na roda i
$T_{a\Omega}^i$	binário de atrito atuando na roda i
b_Ω^i	amortecimento de rotação na roda i
$G = (0, 0, g)$	vector da aceleração da gravidade expresso no referencial fixo
Z_G	cota na direção Z do ponto de contato das rodas
G^i	ponto de contato calculado da roda com o solo
$_{dx}, _{dy}$	índice referente a deslocamentos infinitesimais aplicados em x e y respectivamente
d_1	deslocamento infinitesimal aplicado
d_z^i	deformação (compressão) da mola na roda i
k^i, b^i	constantes de rigidez e amortecimento da suspensão da roda i

F_m	força gerada na mola e amortecedor
F_z	força de reação normal do piso sobre a suspensão
F_x, F_y	forças longitudinal e lateral geradas na interação piso/pneu
M_z	momento de autoalinhamento gerado na interação piso/pneu
σ	taxa de escorregamento (longitudinal)
α	ângulo de derrapagem (lateral)
C_σ, C_α, C_M	declives de F_z, F_y, M_z para escorregamento ou derrapagem pequenos
V_x	velocidade longitudinal do pneu
B, C, D, E	parâmetros da fórmula de Pacejka
S_v, S_h	offset das curvas de Pacejka
μ^i	coeficiente de atrito pneu-piso
σ_m	taxa de escorregamento para a qual a força $F_x(\sigma)$ atinge o máximo
α_m	ângulo de derrapagem para o qual a força $F_y(\alpha)$ atinge o máximo
σ_x	taxa de escorregamento normalizada pelo máximo $\sigma_x = \sigma/\sigma_m$
α_x	ângulo de derrapagem normalizada pelo máximo $\sigma_y = \alpha/\alpha_m$
ρ	taxa de derrapagem total
λ	parâmetro de ajuste do modelo de Dugoff
F_R	força total combinada (lateral-longitudinal) do modelo Dugoff
T_L, T_R	binários de tração nas rodas esquerda e direita
$\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$	estado, entrada e saída do sistema

Capítulo 1

Introdução

Existem numerosas variantes para a modelação da dinâmica de um veículo de quatro rodas do tipo carro, mas a diversidade da opções consideradas em termos de nomenclatura e pormenores considerados justificou a criação do presente relatório, como forma de clarificar as noções e a construção do modelo e do simulador do veículo. O simulador desejado pretende ter uma complexidade suficiente para descrever de forma bem aproximada o movimento de um veículo em ambiente exterior do tipo todo terreno, por forma a poder servir de plataforma de desenvolvimento de controladores, planeamento de ensaios experimentais ou análise a posteriori de resultados de ensaios.

Capítulo 2

Modelo do movimento

2.1 Hipóteses

O veículo será considerado como um corpo rígido, apoiado sobre um a suspensão com quatro rodas independentes modeladas com um conjunto mola amortecedor para cada uma. Algumas hipóteses simplificadoras serão consideradas:

1. o contato com o piso é pontual e a deformação de cada suspensão efetua-se segundo o eixo vertical do veículo;
2. a rotação das rodas da direção efetua-se em torno do seu eixo vertical;
3. o piso será de cota variável mas rígido;
4. será desprezado o efeito da deformação do pneu, tanto no eixo normal ao piso, como no plano tangente.

2.2 Definições

2.2.1 Referenciais

São considerados dois referenciais usuais em robótica móvel, o referencial fixo, ligado ao ambiente onde evolui o veículo, e o referencial local (referencial do carro), ligado ao corpo do veículo, considerado corpo rígido [1]

- referencial fixo, $\mathcal{F}_0$, XYZ ou NED: referencial tangente ao elipsoide terrestre, com origem no piso, e eixos orientados para norte, este e baixo;
- referencial local, $\mathcal{F}_1$, xyz: referencial centrado no centro de massa do veículo, ou c.g., com eixos orientados para a frente, direita e baixo.

A conversão de um vector do referencial fixo para o referencial local é expressa por uma rotação, S, que pode ser expressa em função dos ângulos de Euler, $(\phi,\ \theta,\ \psi)$:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um terceiro referencial é igualmente considerado para cada pneu para descrever as forças de interação piso/pneu:

[1] Serão aqui adotados os referenciais definidos em robótica aérea, nomeadamente por serem os que mais naturalmente se adaptam às definições dos ângulos a partir do GPS.

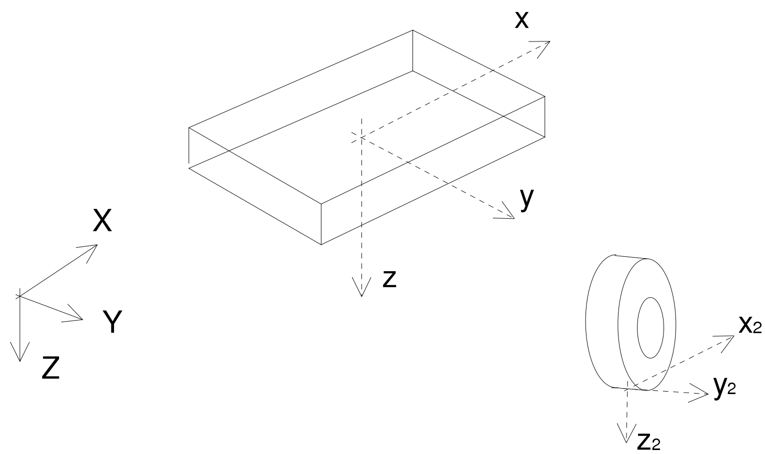

Figura 2.1: Referenciais

- referencial do pneu, $\mathcal{F}_2^i$, centrado no ponto de contato entre o pneu e o piso, ou centro da área de contato (*contact patch*), com os eixos orientados para a frente da roda, para a direita e para baixo; o plano Oxy de $\mathcal{F}_2^i$ é tangente ao piso no ponto de contato.

2.2.2 Geometria

Como indicado acima, o veículo é modelado como um corpo rígido apoiado em quatro suspensões, de acordo com a figura 2.2.

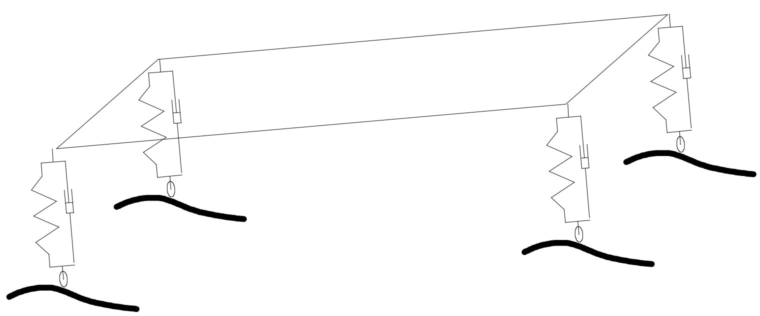

Figura 2.2: Modelo de suspensão e terreno.

Se o veículo pousar no solo com peso nulo (hipoteticamente), os pontos de contato a partir da posição do c.g. são dados pelas seguintes coordenadas em $\mathcal{F}_1$ (ver figura 2.3):

1. roda da frente esquerda (Front-Left FL): $r^1 = [a, \, -c, \, d]^T$
2. roda da frente direita (Front-Right FR): $r^2 = [a, \, c, \, d]^T$
3. roda traseira esquerda (Rear-Left RL): $r^3 = [-b, \, -c, \, d]^T$
4. roda traseira direita (Rear-Right RR): $r^4 = [-b, \, c, \, d]^T$

Temos assim:

- a é a distância horizontal entre c.g. e eixo dianteiro
- b é a distância hoizontal entre c.g e eixo traseiro

- $2c$ é a distância entre rodas (assume-se que igual para os dois eixos)
- d é a altura do c.g. com as molas no descanso (peso nulo)

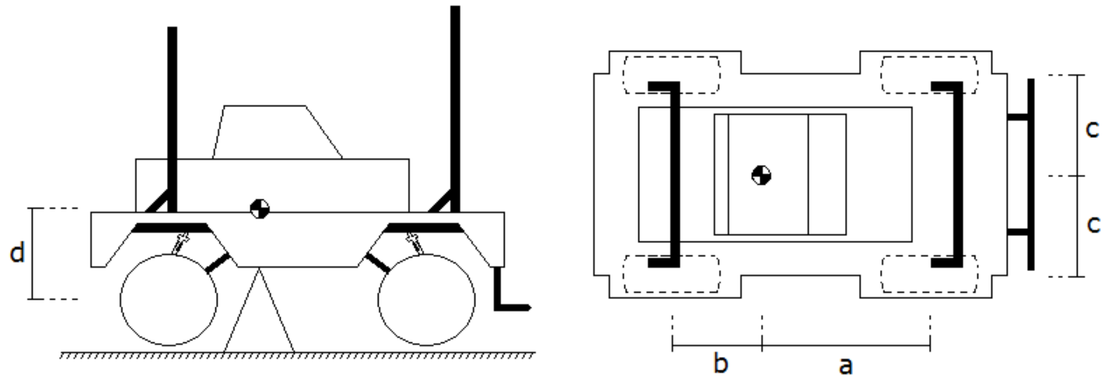

Figura 2.3: Parâmetros da posição dos pneus no referencial local (no descanso).

2.2.3 Direção

É inicialmente considerada uma direção de Ackerman ideal.

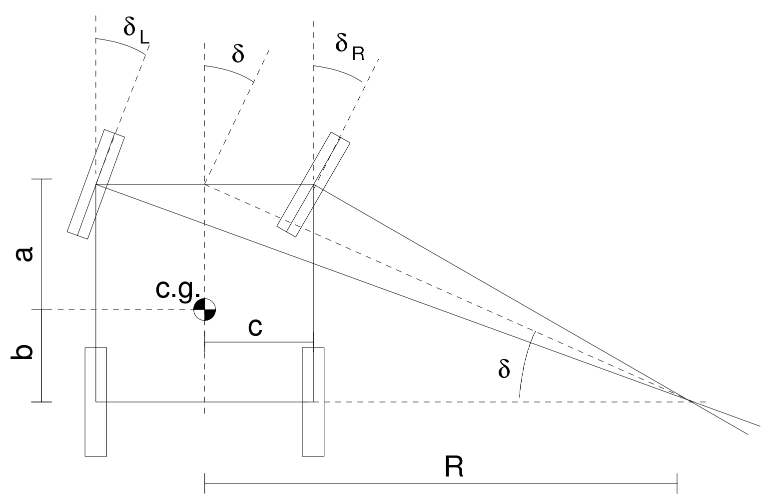

Figura 2.4: Modelo de direção Ackerman.

A partir do ângulo da direção deduzem-se os ângulos rodados pelas rodas dianteiras δ_L e δ_R de acordo com:

$$\tan(\delta_L) = \frac{(a+b)\tan(\delta)}{a+b+c\tan(\delta)}$$

$$\tan(\delta_R) = \frac{(a+b)\tan(\delta)}{a+b-c\tan(\delta)}$$

Conhecendo a geometria real da direção podem deduzir-se leis mais próximas da realidade, ou intervalo de validade da lei acima.

2.3 Equações

2.3.1 Cinemática

Considera-se S a matriz de passagem (rotação) do referencial fixo para o referencial local e R a matriz de conversão (não é uma rotação) da velocidade angular definida por:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}$$

onde $c_\theta = \cos(\theta)$ e $s_\theta = \sin(\theta)$. As equações da cinemática são então:

$$\dot{P} = S^T V$$

$$\dot{\Phi} = R^{-1}\omega$$

onde P é a posição do c.g. no referencial fixo, $\Phi = [\phi,\, \theta,\, \psi]^T$ é o vetor com os ângulos de Euler e V e ω são, respectivamente, a velocidade linear e a velocidade angular (em relação ao c.g.) do veículo.

2.3.2 Dinâmica do corpo rígido

Considerando a 2ª lei de Newton aplicada ao corpo rígido, para os movimentos de translação e rotação, obtemos as duas leis da dinâmica:

$$m\dot{V} = -m\omega \times V + F_w + mSG - F_a$$

$$J\dot{\omega} = -\omega \times J\omega + T_w - T_a$$

onde:

- m e J são a massa e a matriz de inércia do veículo em torno do c.g.
- F_w e F_a são as resultantes das forças geradas pelas rodas e de atrito
- G é o vector da aceleração da gravidade
- T_w e T_a são os binários resultantes gerados a partir das rodas e de atrito
- $F_a = b_x V\,|V|$ e $T_a = b_\omega \omega\,|\omega|$ definem os atritos de forma quadrática

Forças e binários resultantes são a calcular no referencial do veículo a partir das forças de interação piso/pneu, e estas são calculadas no referencial $\mathcal{F}_2^i$.

2.3.3 Rotação das rodas

Cada uma das rodas gira sob o efeito do binário de tração, eventualmente nulo, e da força longitudinal gerada no contato com o piso. Pode aplicar-se a lei de Newton para cada roda:

$$J_w^i \Omega^i = T^i - \dot{R}_w^i F_x^i - T_{a\Omega}^i$$

onde:

- J_w^i e R_w^i são o momento de inércia e o raio da roda i
- T^i é o binário de tracção ou travagem aplicado na roda
- $T_{a\Omega}^i = b_\Omega^i \Omega^i \left|\Omega^i\right|$ é o binário de atrito (quadrático) de rotação da roda i
- F_x^i é a força longitudinal gerada no contacto com o piso

2.3.4 Suspensão e modelo do piso

O piso onde o veículo evoluirá será aqui definido como uma superfície. Esta superfície é modelada a partir de um *grid* de pontos (X, Y) no plano 0XY e, para cada ponto do *grid*, existe uma cota Z_G e um coeficiente de atrito μ associado. Desta forma, a cota do ponto de contato do pneu $\left(Z_G^i\right)$ e o coeficiente de atrito ao qual este esta submetido $\left(\mu^i\right)$ serão interpolados no *grid* a partir da coordenada $\left(X_G^i, Y_G^i\right)$ do ponto de contato.

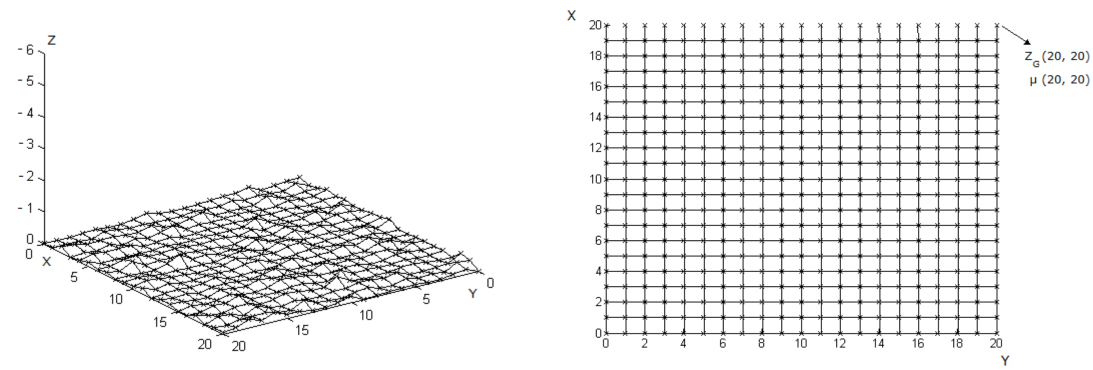

Figura 2.5: Modelagem do piso.

Assume-se que a compressão da mola da suspensão se efectua segundo o seu eixo assim como a força elástica e de amortecimento geradas. Inicialmente, para uma melhor compreensão, consideremos o caso particular do cálculo da compressão da mola para um terreno *plano*, quando o seguinte procedimento pode ser adotado (ver figura 2.6):

1. P é a posição do CG do carro no referencial fixo NED.
2. Determina-se o vetor r^i, no referencial local, correspondente à posição do ponto inferior da respectiva roda $(i = 1, 2, 3, 4)$ na condição de descanso (molas no descanso ou peso nulo).
3. Determina-se o vetor R^i, correspondendo a cada r^i, no referencial fixo, para cada roda, computando-se $R^i = P + S^T r^i$
4. Usando-se as coordenadas X e Y do vetor R^i, e interpolando-se a função que define a superfície do piso $Z_G(X, Y)$, encontra-se o valor de Z , chamado Z_{G_i}, correspondente ao ponto de contato no solo G^i.
5. Como nesse caso particular a orientação da normal ao solo coincide com a vertical da roda, essa distância $Z_G^i = \left\|R^i - G^i\right\|$ corresponde exatamente à compressão da mola.

Para o caso de um terreno *inclinado*, um procedimento alternativo é utilizado para o cálculo aproximado da compressão da mola d_z^i (ver figura 2.7):

1. Encontra-se o vetor P correspondente à posição do CG em relação ao referencial fixo NED.
2. Determina-se o vetor r^i, no referencial local, correspondente à posição do ponto inferior da respectiva roda $(i = 1, 2, 3, 4)$ na condição de descanso (molas no descanso ou peso nulo).
3. Determina-se a posição de cada roda R^i no referencial fixo: $R^i = P + S^T r^i$.
4. Usando-se as coordenadas X e Y do vetor R^i, e interpolando-se a função que define a superfície do piso $Z_G(X, Y)$, encontra-se o valor de Z correspondente ao ponto de contato no solo, chamado Z_{G^i}, que junto com as coordenadas X e Y define o ponto de contato virtual G^i. Observe-se que este ponto pode não coincidir com o contato real da roda sobre o solo, introduzindo um pequeno erro que, para pequenas inclinações pode ser desprezado.

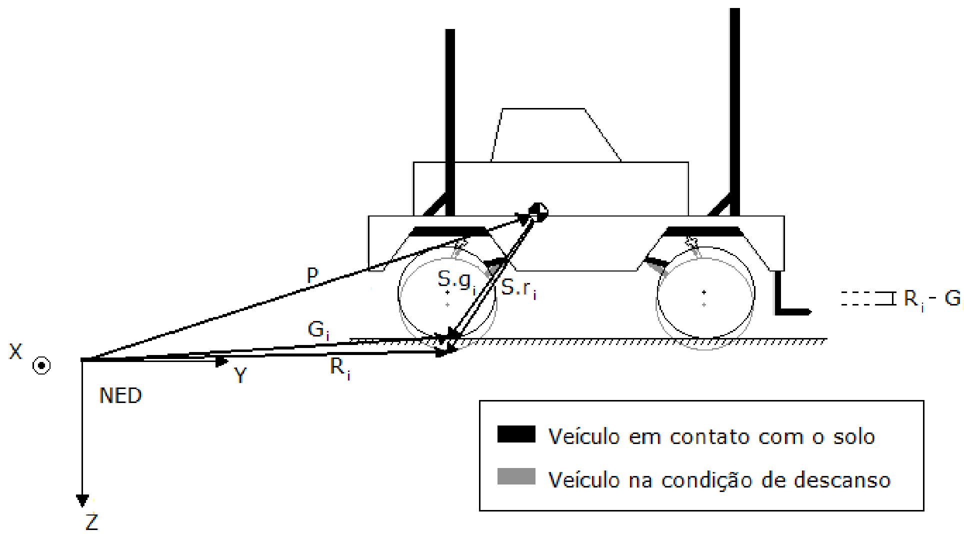

Figura 2.6: Definição dos pontos G^i e R^i no referencial fixo.

5. O próximo passo é encontrar o sistema de coordenadas da roda $\mathcal{F}_2^i$, formado pelos vetores unitários U_2^i, V_2^i e W_2^i. Para isso, determina-se, a partir do ponto de referência r^i da roda, dois pequenos deslocamentos, um no sentido longitudinal da roda (seu eixo x) e outro no sentido transversal (seu eixo y). Ou seja:

$$r_{dx}^i = r^i + d_1 \left[\cos\delta^i,\ \sin\delta^i,\ 0\right]^T \tag{2.1}$$

$$r_{dy}^i = r^i + d_1 \left[-\sin\delta^i,\ \cos\delta^i,\ 0\right]^T \tag{2.2}$$

onde δ^i é o ângulo de esterçamento da roda e d_1 é uma distância infinitésima ao longo da respectiva orientação (x ou y da roda). Computa-se então os pontos R_{dx}^i e R_{dy}^i no referencial fixo:

$$R_{dx}^i = P + S^T r_{dx}^i \tag{2.3}$$

$$R_{dy}^i = P + S^T r_{dy}^i \tag{2.4}$$

Com as coordenadas X e Y de cada um desses dois vetores, e interpolando-se a função que define a superfície do piso $Z_G(X,Y)$, encontra-se o valor da coordenada Z dos pontos no solo correspondente a cada um deles, e assim os vetores que definem ambos os pontos, ou seja, G_{dx}^i e G_{dy}^i. Assim é possível encontrar os vetores que definem os eixos do sistema de coordenadas $\mathcal{F}_2^i$ da roda i:

$$U_2^i = \frac{G_{dx}^i - G^i}{\left\|G_{dx}^i - G^i\right\|} \tag{2.5}$$

$$V_2^i = \frac{G_{dy}^i - G^i}{\left\|G_{dy}^i - G^i\right\|} \tag{2.6}$$

$$W_2^i = U_2^i \times V_2^i \tag{2.7}$$

6. Finalmente, para se encontrar a compressão da mola normal ao solo, determina-se a projeção do vetor $R^i - G^i$ sobre o vetor normal ao solo W_2^i.

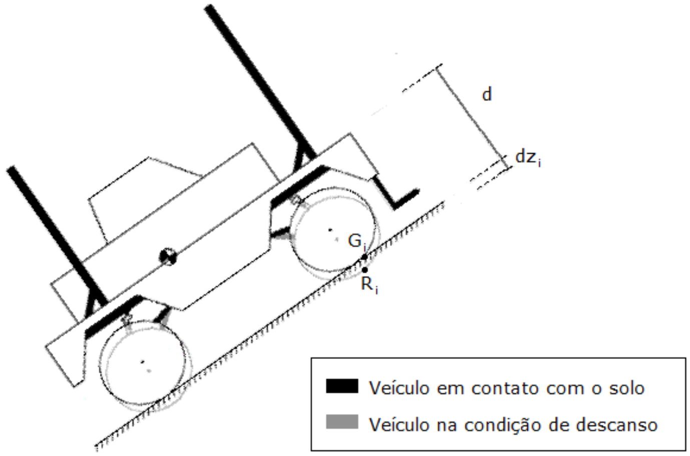

Figura 2.7: Cálculo da compressão da mola dz_i aproximada.

Assim temos que a compressão normal da mola e sua derivada são dadas por:

$$d_z^i = W_2^{iT}(R^i - G^i).$$

$$\dot{d}_z^i = W_2^{iT}\dot{R}^i$$

onde

$$\dot{R}^i = S^T V + S^T(\omega \times r_i)$$

e a força normal produzida pela mola/amortecedor sobre o piso é dada finalmente por:

$$F_z^i = -k^i d_z^i - b^i \dot{d}_z^i$$

onde k^i e b^i são a rigidez e constante de amortecimento da suspensão.

Capítulo 3

Modelos de interação piso/pneu

As forças e os momentos resultantes do contato entre piso e pneu influenciam fortemente a dinâmica do veículo. Descreve-se nesta seção, os dois principais modelos matemáticos utilizados na literatura para a descrição dessas forças e momentos (Rajamani, 2006), (Kiencke and Nielsen, 2000). Os pneus podem desenvolver forças longitudinais e laterais, permitindo ao veículo realizar curvas e acelerar/frear. As forças de contato desenvolvidas são função dos parâmetros físicos do pneu, da força normal sobre a roda, e de sua velocidade. Ao contrário de um corpo não-deformável, o pneu se deforma pela ação da força vertical e faz contato com o piso em uma área denominada em inglês *contact patch*. As forças recebidas do piso são decompostas nos 3 eixos da roda (ver figura 3.1), e são:

- F_x a força ao longo do eixo longitudinal da roda.
- F_y a força ao longo do eixo lateral da roda.
- M_z o momento em torno do eixo vertical da roda, também chamado de momento de autoalinhamento.

Há também os momentos de resistência de rolagem M_y e momento de sobreguinada M_x, que aparecem quando a linha de ação da força peso não coincide com a linha de reação aplicada pelo piso ao pneu. Estes contudo possuem valores comparativos muito menores, e serão aqui desprezados.

3.1 Força longitudinal

A fim de se produzir frenagem e aceleração, forças de atrito longitudinais devem ser geradas no contato pneu-piso, as quais dependem dos seguintes parâmetros:

- taxa de escorregamento (definida abaixo).
- força vertical sobre a roda.
- coeficiente de atrito da interação pneu-piso.

A diferença entre a velocidade rotacional equivalente do pneu e a velocidade longitudinal da roda é a chamada taxa de escorregamento longitudinal, definida como:

$$\sigma = \frac{R_w \Omega - V_x}{V_x}$$

onde:

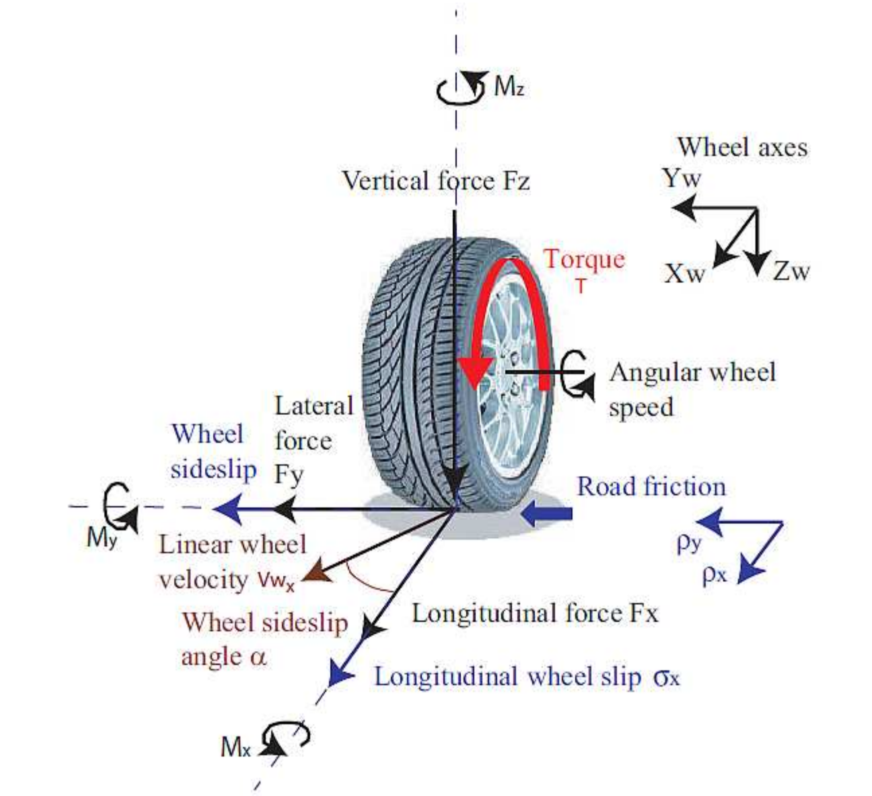

Figura 3.1: Variáveis do modelo do pneu. Fonte: Doumiati, (2009).

- R_w é o raio efetivo da roda
- Ω é a velocidade angular da roda
- V_x é a velocidade longitudinal da roda.

Para pequenos valores de taxa de escorregamento, observa-se que a força longitudinal é diretamente proporcional ao valor da taxa, ou:

$$F_x = C_\sigma \sigma$$

onde C_σ é o coeficiente de rigidez longitudinal do pneu. Para o caso geral, com a possibilidade de altos valores de taxa de escorregamento, uma curva típica de força longitudinal gerada é mostrada na figura 3.2 abaixo.

3.2 Força lateral

Durante a execução de uma curva, uma força lateral é desenvolvida no centro da área de contato, no plano horizontal, e perpendicular à orientação longitudinal da roda (Milliken and Milliken, 1995). O ângulo originado entre o vetor velocidade linear da roda e a orientação longitudinal da mesma é denominado ângulo de derrapagem lateral α. A força lateral desenvolvida durante uma curva, é dependente:

- do ângulo de derrapagem,
- da força vertical,
- do coeficiente de atrito com o piso.

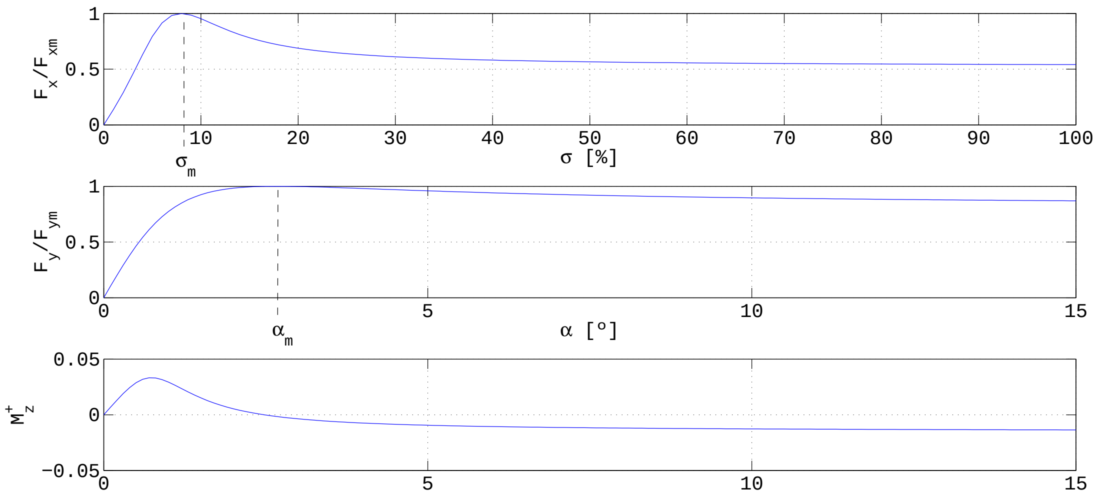

Figura 3.2: Curvas de forças e momento do modelo de Pacejka utilizadas no simulador.

Assim como no caso longitudinal, para pequenos valores do ângulo, pode considerar-se que a força lateral é proporcional ao ângulo α, ou seja:

$$F_y = C_\alpha \alpha$$

onde C_α é o coeficiente de rigidez lateral do pneu. A curva completa da força lateral em função do ângulo de derrapagem é similar ao caso longitudinal e mostra uma saturação da força para ângulos elevados.

3.3 Momento de autoalinhamento

O momento de autoalinhamento, ou momento em torno do eixo vertical, denotado por M_z é o momento resultante da deformação lateral de um movimento longitudinal do pneu com um ângulo de derrapagem não nulo, bem como das características geométricas do pneu e da curva executada. A força resultante desse movimento atua atrás do centro da roda no plano do piso como mostrado (Figura 3.3), criando um torque cuja tendência é o alinhamento do plano da roda com a direção do movimento de navegação do veículo. Assim, o momento de autoalinhamento força o pneu esterçado a voltar para a sua posição original após uma manobra de guinada, constituindo-se em fator importante para a estabilidade e dirigibilidade do veículo.

O momento de autoalinhamento M_z é função do ângulo de derrapagem α, sendo proporcional à este para a condição de pequenos ângulos, ou seja:

$$M_z = C_M \alpha$$

onde C_M é o coeficiente de rigidez de momento do pneu. Contudo, para valores elevados de α a relação se torna não linear, onde o momento apresenta um valor máximo, seguido de uma drástica diminuição para valores de ângulo muito elevados (ver figura 3.2).

3.4 Modelo de Pacejka

Um dos modelos mais conhecidos e utilizados para representar as forças de interação pneu-piso é o modelo semi-empírico proposto por Pacejka (Pacejka et al., 1987), (Pacejka, 2002), conhecido em inglês por “Magic Tire”, desenvolvido através de uma cooperação entre Volvo Car Corporation e a Delft University of Technology. Algumas das características desse modelo são:

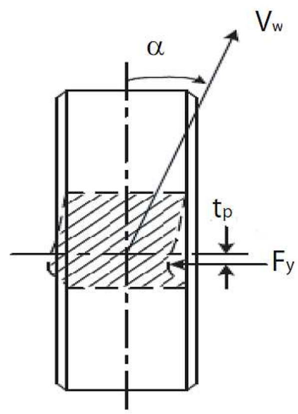

Figura 3.3: Deformação do pneu durante uma curva. (Doumiati, 2009).

- habilidade para descrever as características de regime permanente do pneu.
- facilmente obtido através de dados experimentais.
- parâmetros com significado físico, permitindo tipificar medidas do pneu, para investigar mudanças que alterem a estabilidade ou dirigibilidade do veículo.

A fórmula básica do modelo de Pacejka, usada para se estimar tanto F_x como F_y quanto M_z, é dada por:

$$y = D\sin[C\arctan[Bx - E(Bx - \arctan Bx)]]$$

com

$$Y(x) = y(x) + S_v$$

$$x = X + S_h$$

onde

- Y é a variável de saída (F_x, F_y ou F_z)
- X é a variável de entrada (α ou σ)

Referindo-se à figura 3.4, os parâmetros B, C, D, E, S_v, S_h da fórmula de Pacejka possuem os seguintes significados:

- D é o valor de pico da curva (força máxima ou momento máximo);
- O produto BCD corresponde à inclinação da curva na origem (fator de rigidez), e o parâmetro B é utilizado para ajustar esta inclinação;
- O valor de y_s é o valor assintótico da saída para valores elevados de x;
- O fator de forma (shape) C limita a função seno na equação, e portanto determina a forma resultante da curva: $C = \frac{2}{\pi}\arcsin(\frac{y_s}{D})$;
- Os valores de offset S_h e S_v permitem a consideração de efeitos de conicidade e cambagem das rodas, além de momentos de resistência de rolagem M_y, o que faz com que a curva final não passe pela origem. No modelo *vero0*, considera-se $S_h = 0$ e $S_v = 0$.

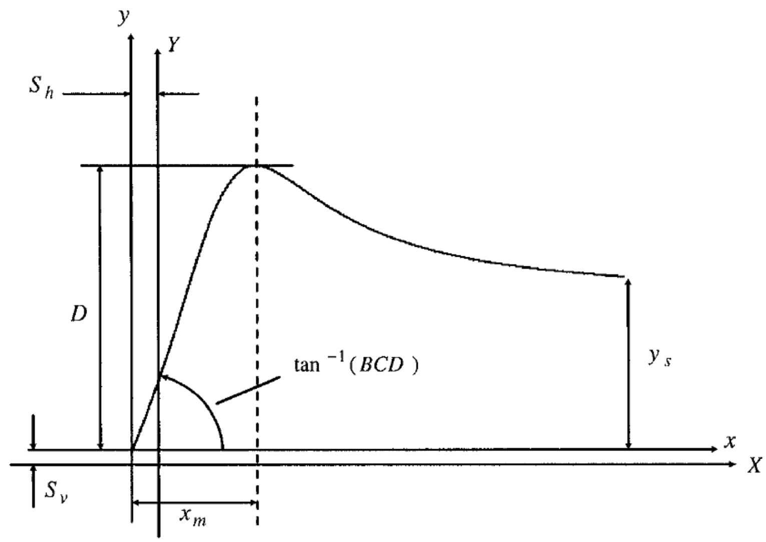

Figura 3.4: Parâmetros de uma curva típica de Pacejka (Rajamani, 2006).

- O fator E é chamado fator de curvatura, e é usado para mudar a forma ou curvatura da função próximo do valor de pico. O fator também controla o valor de abscissa x_m onde ocorre esse máximo;
- Finalmente, o valor assintótico da saída y para altos valores de taxa de escorregamento ou ângulo de derrapagem, é dado por $y_s = D\sin(\frac{\pi}{2}C)$;

Finalmente, destaca-se que os parâmetros B, C, D, E, S_v, S_h da fórmula de Pacejka são funções da força normal F_z, do ângulo de cambagem das rodas, do coeficiente de atrito μ, além de vários outros parâmetros associados à características físicas do pneu (Pacejka e Bakker, 1993). No modelo *vero0*, estes valores são considerados como constantes.

3.5 Acoplamento longitudinal e lateral

Nas definições apresentadas até o momento, não descrevemos explicitamente o efeito de acoplamento entre as forças longitudinais e laterais nos pneus, especialmente importante quando se solicita simultaneamente um movimento de aceleração/frenagem e guinada. Nesse caso, deve-se observar que a força de atrito total resultante no pneu não pode exceder o valor de μF_z, onde μ é o coeficiente de atrito com o piso (vide exemplos na Tabela 3.1).

tipo de terreno	coeficiente de atrito μ
asfalto seco	0.9-1.1
concreto seco	0.85-1
asfalto molhado	0.5-0.8
concreto molhado	0.5-0.8
neve compactada	0.2-0.3
gelo	0.15-0.2

Tabela 3.1: Valores típicos de coeficiente de atrito

Este fato é consequência da limitação de força que pode ser gerada na área de contato do pneu. A capacidade de adesão do pneu usada para gerar uma força longitudinal limita, portanto, a força lateral disponível, e vice-versa. Essa ação combinada é descrita pelo chamado "círculo de atrito" (figura 3.5).

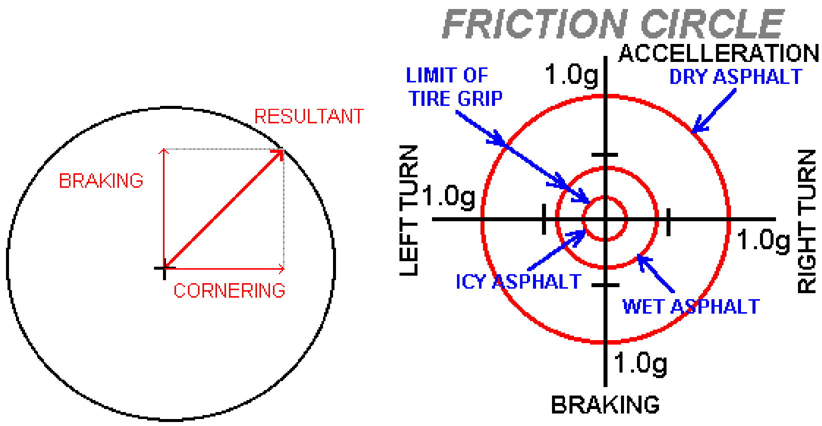

Figura 3.5: Círculos de atrito frenagem-guinada.
Fonte: http://prohibitiontimes.piratenews.org/friction.html

Para o cálculo das forças combinadas, ou seja, a geração simultânea de forças lateral e longitudinal, é utilizado o seguinte procedimento, adaptado a partir de Rajamani (2006).

1. Inicialmente, calcula-se a taxa de escorregamento longitudinal e o ângulo de derrapagem lateral normalizados, da seguinte forma:
$$\sigma = \frac{R_w\Omega - V_x}{V_x} \qquad \sigma_x = \sigma/\sigma_m$$
$$\sigma_y = \alpha/\alpha_m$$
onde σ_m e α_m são os valores de σ e α para os quais as funções $F_x(\sigma)$ e $F_y(\alpha)$ de Pacejka atingem o valor de máximo, respectivamente (figura 3.4).

2. Define-se então a taxa de derrapagem total, como sendo:
$$\rho = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

3. E finalmente, calcula-se o valor das forças e momentos efetivos, em função da derrapagem total:
$$F_x = \frac{\sigma_x}{\rho}F_x(\rho\sigma_m) \qquad F_y = \frac{\sigma_y}{\rho}F_y(\rho\alpha_m) \qquad M_z = \frac{\sigma_y}{\rho}M_z(\rho\alpha_m)$$

3.6 Modelo de Dugoff

O modelo de Dugoff (Dugoff et al., 1969) fornece uma formulação mais simples do que o modelo de Pacejka, e assume uma distribuição de pressão vertical uniforme na área de contato do pneu, ao contrário da hipótese de uma distribuição parabólica como no modelo de Pacejka. Apesar disso, o modelo de Dugoff permite também descrever, com razoável precisão, os movimentos de guinada simples, aceleração/frenagem, e o movimento combinado desses dois. O modelo de Dugoff é um modelo analítico, ao invés do modelo semi-empírico de Pacejka, e em sua forma simplificada, depende apenas de quatro parâmetros, que são o coeficiente de rigidez longitudinal C_σ, o coeficiente de rigidez lateral C_α, a força normal F_z, e o coeficiente de atrito μ. Outra diferença entre esses dois modelos é o fato de que Dugoff apresenta apenas as equações das forças F_x e F_y e não apresenta equações para o momento de autoalinhamento M_z. Em sua forma mais simplificada (Guntur e Sankar, 1980), o modelo de Dugoff fornece as seguintes equações para as forças lateral e longitudinal:
$$F_x = C_\sigma \frac{\sigma}{1+\sigma} f(\lambda)$$

$$F_y = C_\alpha \frac{\tan\alpha}{1+\sigma} f(\lambda)$$

onde a variável λ é definida como:

$$\lambda = \frac{\mu F_z (1+\sigma)}{2\sqrt{(C_\sigma \sigma)^2 + (C_\alpha \tan\alpha)^2}}$$

e a função $f(\lambda)$ é dada por:

$$f(\lambda) = (2-\lambda)\lambda \text{ se } \lambda < 1$$

$$f(\lambda) = 1 \text{ se } \lambda \geq 1$$

Note-se que o modelo considera o acoplamento entre as forças lateral e longitudinal, que limita a força máxima disponível na área de contato (círculo de atrito). Curvas típicas de força lateral F_y em função do ângulo de derrapagem F_z para o modelo de Dugoff podem ser vistas na figura 3.6 a seguir. Uma observação importante é que as curvas de Dugoff não capturam o sobresinal ou valor de pico existente nas curvas de Pacejka.

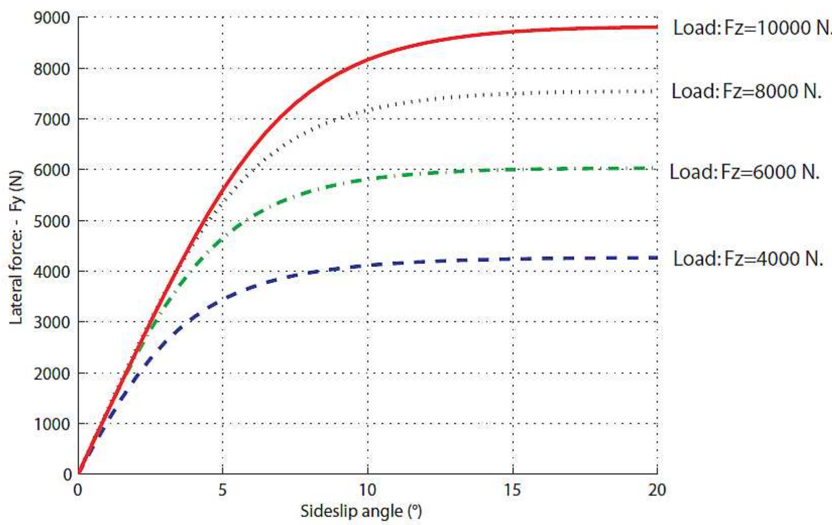

Figura 3.6: Curvas típicas para o modelo de Dugoff. (Doumiati, 2009).

Outra obervação interessante é a seguinte. Na equação que define a variável λ, se dividirmos o numerador e o denominador pelo termo $(1+\sigma)$, obtemos:

$$\lambda = \frac{\mu F_z}{2(F_x^2 + F_y^2)}$$

e se chamarmos de $F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ a força total solicitada, então a condição crítica $\lambda = 1$ torna-se equivalente a:

$$F_R = \mu F_z / 2$$

Ou seja, se a força total solicitada for menor do que $\mu F_z/2$ então $f(\lambda) = 1$ e as forças F_x, F_y solicitadas são atendidas na sua porção linear, caso contrário a função $f(\lambda)$ irá impor uma limitação aos valores de F_x, F_y até uma eventual saturação.

Capítulo 4

Simulador do veículo robótico

4.1 Simulador

O simulador do movimento do veículo é desenvolvido em Simulink, com solução de integração das equações de dinâmica e cinemática apresentadas anteriormente.

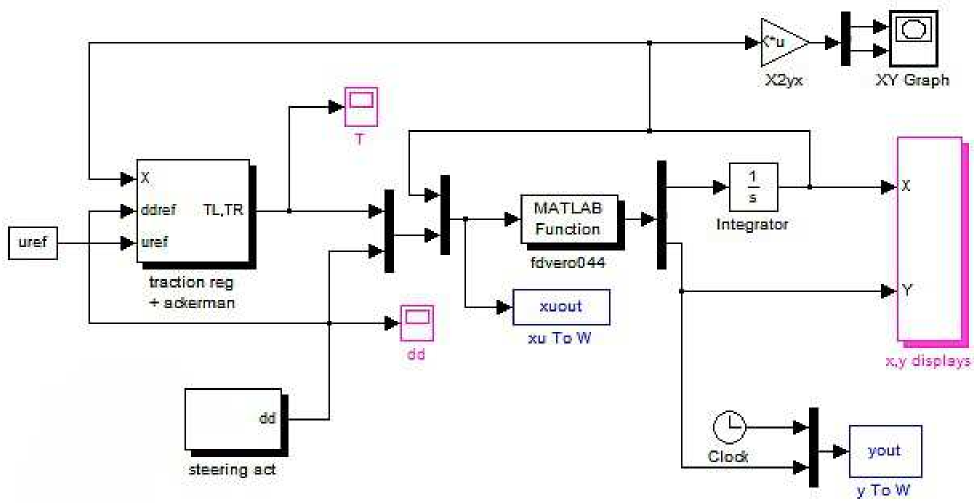

Figura 4.1: Diagrama de blocos do modelo *vero044* em Simulink/Matlab .

Estas equações estão escritas no bloco *fdvero044* de acordo com uma formulação de um sistema em espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

onde $\mathbf{x} = [V, \omega, P, \Phi, \Omega]$ e $\mathbf{u} = [T_L, T_R, \delta]$ são o estado e a entrada do sistema, e $\mathbf{y}$ é a saída:

- $V = [u, v, w]$ e $\omega = [p, q, r]$ são os vetores da velocidade linear e angular no referencial do veículo F_1
- $P = [X, Y, Z]$ é a posição do c.g. no referêncial fixo F_0
- $\Phi = [\phi,\ \theta,\ \psi]$ é o vetor dos ângulos de Euler

- $\Omega = \left[\Omega^1,\, \Omega^2,\, \Omega^3,\, \Omega^4\right]$ é o vetor das velocidades angulares das 4 rodas
- T_L e T_R são os binários de tração aplicados pelos motores nas rodas traseiras esquerda e direita
- δ é o ângulo do comando da direção

Na saída, são incluídas as seguintes variáveis internas:

- $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ é o vetor das derivadas de $\mathbf{x} = [V, \omega, P, \Phi, \Omega]$
- d_z^i é o vetor contendo a compressão normal das molas das 4 suspensões
- $\sigma^i = \left[\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\right]$ é o vetor com as taxas de escorregamento das 4 rodas
- $\alpha^i = \left[\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\right]$ é o vetor com os ângulos de derrapagem nas 4 rodas
- F_x^i são as forças longitudinais na roda i
- F_y^i são as forças laterais na roda i
- M_z^i são os momentos de autoalinhamento da roda i

No diagrama de blocos da figura 4.1, consta também um bloco de realimentação implementado no veículo robótico VERO: trata-se de um bloco de regulação da velocidade convertendo um pedido de velocidade u_{ref} nos binários necessários nas rodas traseiras, incluindo a correção devida ao ângulo da direção de acordo com uma lei de Ackerman. O algoritmo implementado na função da dinâmica *fdvero044* segue os seguintes passos:

1. Conhecendo a posição P e a atitude S, calcular a posição das rodas R^i e Q^i
2. A partir de R^i, deduzir o ponto de contato com o piso G^i
3. No ponto de contato, encontrar o referencial da roda $F_2^i = [U_2^i, V_2^i W_2^i]$
4. Calcular a compressão normal da mola d_z^i por projeção no eixo W_2^i da normal ao plano de contato.
5. Com a compressão da mola d_z^i e a sua taxa de variação $\dot{z}^i$ calcular a força em cada roda F_z^i
6. Determinar a taxa de escorregamento σ^i e o ângulo de derrapagem α^i de cada roda
7. Utilizar o modelo de interação piso/pneu para calcular $\left(F_x^i, F_y^i, M_z^i\right)$ no referencial da roda
8. Deduzir a força e momento resultante no c.g. no referencial do veículo (F_w, T_w)
9. Determinar as derivadas do estado com base nas equações da dinâmica e cinemática

4.2 Sensores

4.3 Caracterização da atuação

Capítulo 5

Identificação e validação do modelo

Planeamento e simulação comportamento longitudinal comportamento lateral Ensaios experimentais Caraterização da dinâmica Trim longitudinal Linearização da dinâmica longitudinal Linearização da dinâmica lateral

Referências

Rajamani, R. (2006). *Vehicle Dynamics and Control.* New York: Springer, 2006.

Doumiati, M. (2009). *Embedded estimation of vehicle's vertical and lateral tire forces for behavior diagnosis on the road.* Tese de Doutorado, Université de Technologie de Compiègne, França.

http://prohibitiontimes.piratenews.org/friction.html. *The friction circle: the secret of vehicle control,* by John Lee. Site visitado em 26-outubro-2010.

Kiencke, U. and Nielsen, L. (2000). *Automotive Control Systems*, Springer.

Milliken, W.F. and Milliken, D.L. (1995). *Race car vehicle dynamics.* Warrendale: Society of Automotive Engineers.

Pacejka, H.B., Baker, E. and Nyborg, L. (1987). *Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies*, SAE Technical Paper Series, paper no. 870421, pp. 1-15, 1987.

Pacejka, H.B. (2002). *Tyre and vehicle dynamics.* Elsevier Butterworth-Heinemann.

Pacejka, H.B. and Bakker, E. (1993). *The magic formula tyre model.* Vehicle System Dynamics. Vol. 21, Supplement, Tyre Models for Vehicle Dynamics Analysis, p. 1-18, 1993.

Dugoff, H., Fancher, P.S. and Segal, L. (1969). *Tyre performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking control inputs.* Final Report, Contract CST-460, Office of Vehicle Systems Research, US National Bureau of Standards, 1969.

Guntur, R. and Sankar, S. (1980). *A friction circle concept for Dugoff's tyre friction model.* International Journal of Vehicle Design, vol. 1, no. 4, pp. 373-374, 1980.