Expressions regulars

Josep M. Miret
Grup de Recerca en Criptografia i Grafs

Escola Politècnica Superior
Universitat de Lleida

Index

Expressions regulars

Els llenguatges regulars (aquells que són acceptats per autòmats finits) es poden descriure per expressions regulars

Expressions regulars

S'anomena expressió regular sobre un alfabet Σ a tota expressió que satisfà la definició recursiva següent:

- $\emptyset$ i λ són expressions regulars
- a és una expressió regular, $\forall a \in \Sigma$
- Si E_1 i E_2 són expressions regulars, $E_1 + E_2$ i $E_1 \cdot E_2$ també ho són
- Si E és una expressió regular, E^+ i E^* també ho són
- No hi ha més expressions regulars que les que s'obtenen aplicant aquestes regles

Llenguatge associat a una expressió regular

Llenguatge associat

S'anomena llenguatge associat a una expressió regular E al llenguatge $L(E)$, que també denotarem per E, definit per:

- $L(\emptyset) = \emptyset$ i $L(\lambda) = \{\lambda\}$
- $L(a) = \{a\}, \forall a \in \Sigma$
- $L(E_1 + E_2) = L(E_1) \cup L(E_2)$
- $L(E_1 \cdot E_2) = L(E_1) \cdot L(E_2)$
- $L(E^+) = L(E)^+$
- $L(E^*) = L(E)^*$

Exemples

Exemples d'expressions regulars sobre $\Sigma = \{a, b\}$

$$(a+b)^*, \quad (b+ba)^*, \quad (a+b)^*aa(a+b)^*$$

Exemples

Els llenguatges associats són:

- $(a+b)^* = \{a,b\}^*$: llenguatge universal
  $L((a+b)^*) = L(a+b)^* = (L(a) \cup L(b))^* = (\{a\} \cup \{b\})^* = \{a,b\}^*$
- $(b+ba)^* = \{b,ba\}^*$: paraules que comencen amb b i no tenen dos a's consecutives
  $L((b+ba)^*) = L(b+ba)^* = (L(b) \cup L(ba))^* = (L(b) \cup L(b) \cdot L(a))^* = (\{b\} \cup \{ba\})^* = \{b,ba\}^*$
- $(a+b)^* aa (a+b)^*$: paraules que tenen dos a's consecutives

Equivalència entre expressions regulars i autòmats finits

Donat que els llenguatges regulars són els acceptats per autòmats finits, veurem l'equivalència entre:

- Llenguatge acceptat per un Autòmat Finit (AF)
- Llenguatge associat a una Expressió Regular (ER)

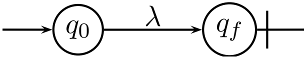
Ho farem en dos passos:

- Pas ER a AF (mètode de Thompson)
- Pas AF a ER (mètode d'Arden)

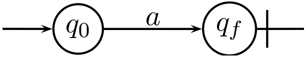
Mètode de Thompson

Aquest mètode, donada una expressió regular E construeix un AFN amb λ-transicions associat a E:

- Construcció d'un AFN per a les parts d'E més simples:
- $E = \lambda$

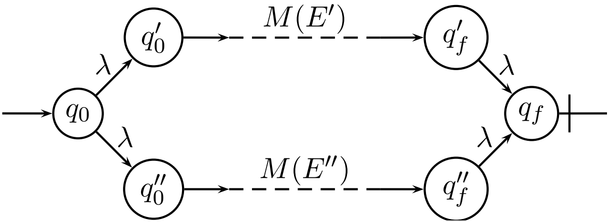


- $E = a$

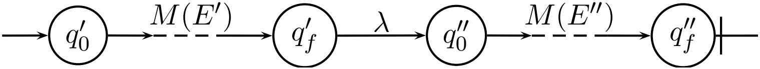


Mètode de Thompson

- Aplicació mètode per als operadors d'E:
- $E = E_1 + E_2$

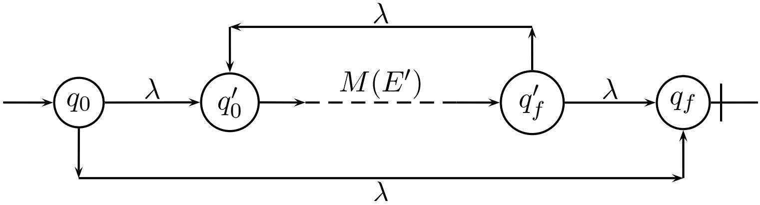


- $E = E_1 \cdot E_2$



Mètode de Thompson

- Aplicació mètode per als operadors d'E:
- $E = (E')^*$



Exercici

Dissenyeu un AFN amb λ-transicions que reconegui el llenguatge

$$L = (a + ba)^* b$$

Equacions amb llenguatges

Veurem un mètode, que donat un AF M construeix una ER E tal que $L(E) = L(M)$ basat en un sistema d'equacions lineals amb llenguatges

- Donada una equació

$$X = AX + B,$$

on A i B són llenguatges sobre un alfabet Σ, un llenguatge L és una solució de l'equació si satisfà:

$$L = AL \cup B.$$

Exemple

Sobre l'alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ considerem l'equació

$$L = (a + b)L + \lambda$$

El llenguatge

$$L = (a + b)^*$$

és solució de l'equació

Mètode d'Arden

Lema d'Arden. El llenguatge A^*B és una solució de

$$L = AL + B$$

Per trobar l'Expressió Regular seguirem els passos:

- Establir, donat un AF, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, un sistema d'equacions lineals amb els llenguatges

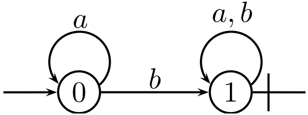
$$L_i = \{\omega \in \Sigma^* \mid (q_i, \omega) \overset{*}{\vdash} (q, \lambda),\ q \in F\}$$

- Resoldre el sistema mitjançant el lema d'Arden fins obtenir una expressió regular per al lleguatge

$$L_0 = L(M)$$

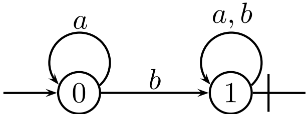
Exemple 1

Autòmat finit M:



Exemple 1

Autòmat finit M:

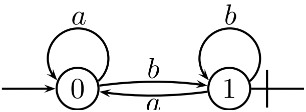


- Sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} L_0 &= aL_0 + bL_1 \\ L_1 &= (a+b)^* \end{aligned}$$

Exemples 2 i 3

Autòmat finit M_2:



Autòmat finit M_3: