

algorithms capstone AM1

November 2025

1 Circular Restricted Three Body Problem (CRTBP)

Dado el vector de estado $\mathbf{U} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)^T$, el problema restringido circular de los tres cuerpos viene dado por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, & \dot{v}_x = x + 2v_y - \frac{1-\mu}{d_1^3}(x - \mu) - \frac{\mu}{d_2^3}(x - \mu + 1), \\ \dot{y} = v_y, & \dot{v}_y = -2v_x + y - \left(\frac{1-\mu}{d_1^3} + \frac{\mu}{d_2^3}\right)y, \\ \dot{z} = v_z, & \dot{v}_z = -\left(\frac{1-\mu}{d_1^3} + \frac{\mu}{d_2^3}\right)z, \end{cases} \quad (1)$$

donde μ es la masa reducida, $d_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}$ y $d_2 = \sqrt{(x - \mu + 1)^2 + y^2 + z^2}$.

2 Estabilidad

Para estudiar la estabilidad de las órbitas de Lyapunov, necesitamos primero conocer cuánto se desvía nuestra solución. Esto se consigue definiendo $\delta\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(t) - \mathbf{U}_0(t)$. Las ecuaciones variacionales describen cómo esta desviación evoluciona a primer orden. $\delta\mathbf{U}(t) = \mathbf{J}(t)\delta\mathbf{U}(t)$, donde \mathbf{J} es el Jacobiano de $\mathbf{F}(\mathbf{U}, \mu, t)$. Conocer la estabilidad requiere resolver un sistema de problemas de valor inicial "doble", con el CRTBP por un lado y la ecuación variacional por el otro

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{U}, \mu, t), \\ \mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0, \\ \dot{\Phi} = \mathbf{J}(t)\Phi(t), \\ \Phi(t_0) = \text{Id}_6 \end{cases}, \quad (2)$$

donde Φ es una matriz 6×6 llamada matriz de transición de estados. Si la órbita de Lyapunov tiene un periodo T , la matriz de monodromía M se define como $M = \Phi(T)$, y sus autovalores nos permiten conocer la estabilidad de la órbita. En particular, si todos los autovalores están dentro del círculo unidad $|\lambda_i| \leq 1$ para $i \in \{1, \dots, 6\}$, entonces la órbita será estable. En caso contrario será inestable. Como dato importante para validar resultados, si λ es valor propio, $\bar{\lambda}$, λ^{-1} y $\bar{\lambda}^{-1}$ también lo son. Esto es una propiedad del CRTBP que viene de que es un problema simpléctico.

Para la implementación, se puede calcular el Jacobiano del CRTBP analíticamente, aquí dejo el cálculo que hice en mi TFG:

$$\mathbf{J}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 - U_{xx} & -U_{xy} & -U_{xz} & 0 & 2 & 0 \\ -U_{yx} & 1 - U_{yy} & -U_{yz} & -2 & 0 & 0 \\ -U_{zx} & -U_{zy} & -U_{zz} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

donde: $U_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$ $i, j = \{1, 2, 3\}$ y $U_{x_i x_j} = U_{x_j x_i}$ para todo $i \neq j$. Las derivadas segundas de los potenciales (las U_{x_i, x_j} son)

$$U_{xx} = \frac{3(1-\mu)(x-\mu)^2}{d_1^5} - \frac{1-\mu}{d_1^3} + \frac{3\mu(x-\mu+1)^2}{d_2^5} - \frac{\mu}{d_2^3}, \quad (4)$$

$$U_{xy} = \left[3\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{d_1^5} + 3\frac{\mu(x-\mu+1)}{d_2^5} \right] y, \quad (5)$$

$$U_{xz} = \left[3\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{d_1^5} + 3\frac{\mu(x-\mu+1)}{d_2^5} \right] z, \quad (6)$$

$$U_{yy} = - \left[\frac{1-\mu}{d_1^3} + \frac{\mu}{d_2^3} \right] + 3y^2 \left[\frac{1-\mu}{d_1^5} + \frac{\mu}{d_2^5} \right], \quad (7)$$

$$U_{yz} = 3yz \left[\frac{1-\mu}{d_1^5} + \frac{\mu}{d_2^5} \right], \quad (8)$$

$$U_{zz} = - \left[\frac{1-\mu}{d_1^3} + \frac{\mu}{d_2^3} \right] + 3z^2 \left[\frac{1-\mu}{d_1^5} + \frac{\mu}{d_2^5} \right]. \quad (9)$$

Definiendo \mathbf{V} como un vector de 42 coeficientes, $\mathbf{V} = (\mathbf{U}, \Phi_v)$, de forma que Φ_v sea la matriz de monodromía pero en forma de vector, es decir, de 36×1 , podemos reducir el sistema de ecuaciones a $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mu, t)$, donde $\mathbf{G} = (\mathbf{F}, \mathbf{J}\Phi)$ en forma de tensor 42×1 . Para la implementación, hará falta una función `variational_equations(V, mu, t)` que devuelva \mathbf{G} .

3 Esquemas Temporales

Las integraciones de órbitas en el CRTBP cerca de los puntos de Lagrange (especialmente los colineales) suelen ser complicadas dada la inestabilidad de estos puntos, que genera efectos caóticos que se acumulan en el tiempo. En el caso de las órbitas planares de Lyapunov, estos efectos no son tan graves, pero siguen existiendo. Aunque el programa debería permitir que se elija el esquema temporal, hará falta implementar un Runge Kutta embebido. Hará falta una función `Cauchy_problem(ode, temporal_scheme, initial_condition, t, mu, **kwargs)`, en los kwargs pasaremos cosas como tolerancias etc según hagan falta para métodos numéricos específicos. Cauchy problem debería calcular y devolver todos los pasos de la solución del problema para la array de pasos de tiempo `t` dada a partir de la condición inicial.

4 Encontrando órbitas de Lyapunov

Las condiciones iniciales raramente dan lugar a órbitas cerradas en el CRTBP, con lo que en general es necesario encontrar primero una condición inicial que nos dé una órbita de Lyapunov. Como las órbitas de Lyapunov son planas, y existen en el plano XY, esto simplifica mucho el trabajo. Empezando por una condición inicial de CRTBP, de la forma $\mathbf{U}_0 = (x_0, 0, 0, 0, v_{y,0}, 0)^T$, el objetivo es ajustar la condición inicial para que la órbita cruce perpendicularmente el eje X en un tiempo T_m , que corresponderá a medio periodo por simetría (todo esto solo vale en general cuando nos restringimos en el plano, en 3D no hay tantas simetrías en el CRTBP). Es importante darse cuenta que para tener el cruce perpendicular, el vector velocidad en el cruce debe estar sobre el eje Y, es decir $\dot{x}(T_m) = 0$.

Si se define $\delta\dot{x}$ como $\dot{x}(\tau)$ donde τ es el tiempo que tarda la integración del problema variacional (es decir, CRTBP + ecuación variacional) des de la condición inicial hasta la intersección de la órbita en $y = 0$ (es decir, cuando y cambie de signo), encontrar la órbita es equivalente a imponer que $\delta\dot{x} = F(\dot{y}_0) = 0$, hay que encontrar la raíz de esta función. Esto se puede hacer por Newton-Raphson:

$$\dot{y}_0^{nueva} = \dot{y}_0 - \frac{F(\dot{y}_0)}{F'(\dot{y}_0)}, \quad (10)$$

donde $F'(\dot{y}_0)$ no es más que el coeficiente correspondiente a $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_0}$ de la matriz de transición de estados, es decir $\Phi_{3,4}$ (o 2^a fila 3^a columna en python). Reintegrandola para \dot{y}^{nueva} obtenemos un $\delta\dot{x}$ más pequeño. Iterando hasta que $\delta\dot{x} < \varepsilon$ se llega al resultado.

Para la condición inicial a refinar se suele usar $x_0 = x_{L_i} + \alpha$, donde x_{L_i} es la posición en X del punto de Lagrange que queremos orbitar y α es un valor muy pequeño. Para obtener familias de órbitas planares de Lyapunov (sería interesante hacerlo para tener muchos "riñones" de golpe y no una órbita ahí sola, huérfana y sin amigos con los que jugar...), bastaría con hacer un loop de este procedimiento pero variando la x_0 un Δx muy pequeño partiendo de la primera que el método encuentre en órbita periódica.