

Odporność testów na odchyłki od założeń

Kacper Skwarek 275992, Paweł Wojarnik 276027

Wstęp

W niniejszym raporcie przedstawiono analizę odporności testów statystycznych na odchylenia od założeń. Każde z zadań zawiera trzy przypadki, w których kolejno wszystkie założenia są spełnione, a następnie założenia są stopniowo osłabiane. Celem jest porównanie funkcji mocy w celu identyfikacji najlepszego testu w danej sytuacji.

Omówione testy to:

- Test t-Studenta przy założeniu równości wariancji ($\sigma_1 = \sigma_2$);
- Test t-Welcha, który nie zakłada równości wariancji;
- Test sumy rang Wilcoxona, będący testem nieparametrycznym.

Lista pakietów R używanych w raporcie znajduje się w sekcji końcowej.

Zadanie 1: Wszystkie założenia spełnione

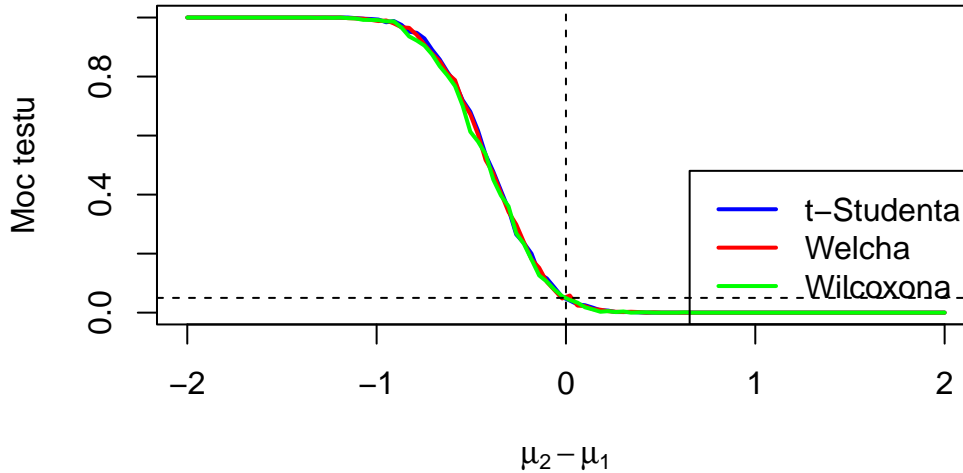
Rozważamy testy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ dla hipotez:

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

Próba X_1, \dots, X_{100} pochodzi z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu_1, 2^2)$, a próba Y_1, \dots, Y_{200} z rozkładu $\mathcal{N}(\mu_2, 2^2)$. Korzystając z symulacji Monte Carlo, generujemy wykres funkcji mocy w zależności od $\mu_2 - \mu_1$ na przedziale $(-2, 2)$ dla wszystkich trzech testów.

Wykres funkcji mocy

Porównanie funkcji mocy testów (Zadanie 1)



Dyskusja na temat mocy testów

- **Test t-Studenta:** Jest najbardziej efektywny, gdy założenia o równości wariancji są spełnione.
- **Test t-Welcha:** Charakteryzuje się większą odpornością na różnice w wariancjach próbek.
- **Test Wilcoxona:** Działa najlepiej w przypadku odchylenia od normalności, ale może mieć mniejszą moc w idealnych warunkach.

Na podstawie wykresu można zaobserwować, który test osiąga wyższą moc w różnych sytuacjach.

Wykres mocy dla każdego testu spełnia hipotezę zerową dla $\alpha = 0,05$, jednak żaden nie jest jednostajnie najmocniejszy, ponieważ moc żadnego z nich nie jest większa na całym przedziale spełniającym hipotezę alternatywną czyli $(-2, 0)$.

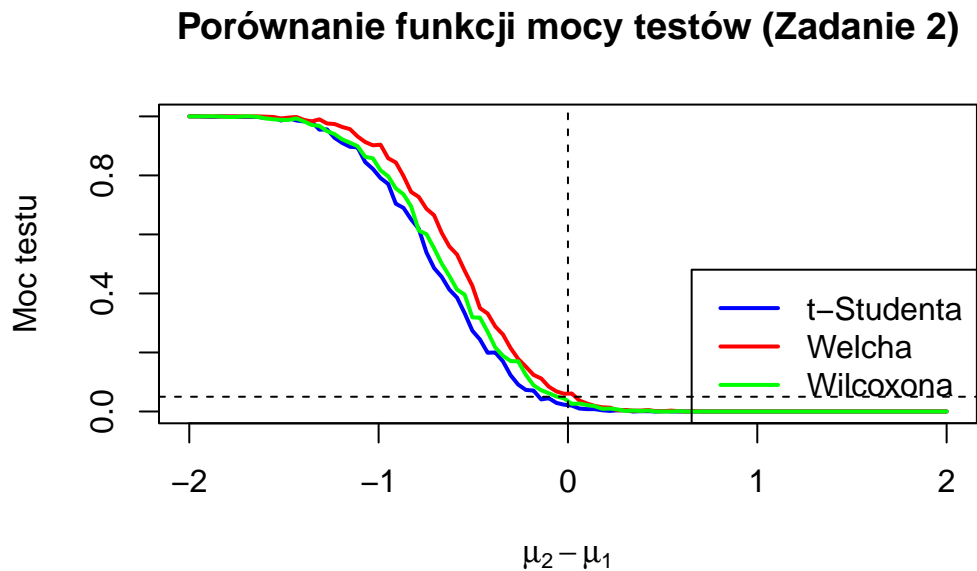
Zadanie 2: Różne wariancje w próbach

Rozważamy testy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ dla hipotez:

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

Próba X_1, \dots, X_{100} pochodzi z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu_1, 2^2)$, a próba Y_1, \dots, Y_{200} z rozkładu $\mathcal{N}(\mu_2, 4^2)$. Korzystając z symulacji Monte Carlo, generujemy wykres funkcji mocy w zależności od $\mu_2 - \mu_1$ na przedziale $(-2, 2)$ dla wszystkich trzech testów.

Wykres funkcji mocy



Dyskusja na temat mocy testów

- **Test t-Studenta:** W tym przypadku jego moc może być znacznie osłabiona ze względu na brak równości wariancji w próbach.
- **Test t-Welcha:** Wykazuje większą odporność na różnice wariancji i może osiągnąć wyższą moc w tym scenariuszu.
- **Test Wilcoxona:** Nadal działa poprawnie, ale moc może być ograniczona w porównaniu do testu Welcha w przypadku dużych różnic wariancji.

Na podstawie wykresu można zaobserwować, że najbardziej skutecznym testem w przypadku różnych wariancji okazuje się test t-Welcha.

Żaden z testów nie jest jednostajnie najmocniejszy, ponieważ dla $\alpha=0,05$ żaden z nich nie spełnia hipotezy zerowej. Test t-Welcha jest bardzo bliski spełnienia tego założenia oraz

funkcja mocy jest największa na przedziale $(-2, 0)$, dlatego możemy wnioskować, że jest najlepszy.

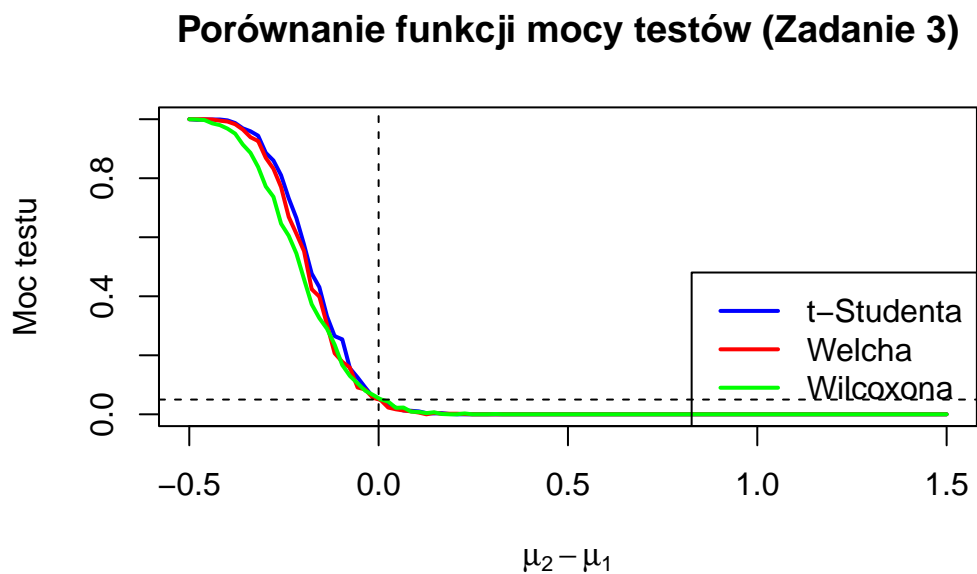
Zadanie 3: Rozkłady wykładnicze

Rozważamy testy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ dla hipotez:

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

Próba X_1, \dots, X_{100} pochodzi z rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}(1/\mu_1)$, a próba Y_1, \dots, Y_{200} z rozkładu $\mathcal{E}(1/\mu_2)$. Korzystając z symulacji Monte Carlo, generujemy wykres funkcji mocy w zależności od $\mu_2 - \mu_1$ na przedziale $(-2, 2)$ dla wszystkich trzech testów.

Wykres funkcji mocy



Dyskusja na temat mocy testów

- **Test t-Studenta:** W przypadku rozkładów wykładniczych moc tego testu może być znacząco obniżona, gdyż założenia o normalności są naruszone.

- **Test t-Welcha:** Również może mieć problemy z dokładnością, ale jest bardziej odporny niż test t-Studenta.
- **Test Wilcoxona:** Jako test nieparametryczny może wykazać większą moc w przypadku rozkładów nienormalnych.

Żaden test nie jest jednostajnie najmocniejszy, ponieważ funkcja mocy dla żadnego z nich nie jest większa od pozostałych na całym przedziale spełniającym hipotezę alternatywną $(-0,5, 0)$. Każdy z nich spełnia jednak hipotezę zerową dla $\alpha = 0,05$, a dla prawie całego przedziału $(-0,5, 0)$ najwyższe wartości funkcji mocy osiąga test t-Studenta, więc można wnioskować, że to on jest jednak najlepszy w tych warunkach.

Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych analiz można wyciągnąć następujące wnioski:

- Test t-Studenta działa najlepiej, gdy spełnione są założenia o normalności i homoscedastyczności.
- Test t-Welcha lepiej radzi sobie w przypadku różnic wariancji.
- Test Wilcoxona jest bardziej odporny na odstępstwa od normalności, co czyni go bardziej uniwersalnym w analizach z rozkładami nienormalnymi. Chociaż dla rozkładu wykładniczego najlepszym testem okazał się test t-Studenta.

Lista pakietów R

Do uruchomienia kodów w raporcie wymagane są następujące pakiety R:

- stats
- base
- tinytex

Wszystkie kody powinny działać po zainstalowaniu tych pakietów.