

Analiza danych rzeczywistych przy pomocy  
modelu ARMA

Komputerowa analiza szeregów czasowych

Paweł Wojarnik 276027  
Bartłomiej Mielcarz 264347

# 1 Wstęp

W tej pracy przyjrzymy się danym o zużyciu energii elektrycznej w Krajowym Systemie Elektroenergetycznym (KSE). Sprawdzimy, jakie są trendy i sezonowe zmiany w zużyciu energii oraz czy da się przewidzieć przyszłe zużycie. Do analizy użyjemy modeli ARIMA i ocenimy ich skuteczność za pomocą wskaźników takich jak AIC, BIC i HQIC.

Dane pochodzą z oficjalnych pomiarów zużycia energii w Polsce, zebranych przez Polskie Sieci Elektroenergetyczne (PSE). Zawierają godzinowe pomiary, co pozwala dokładnie przeanalizować zmiany w zużyciu energii na przestrzeni czasu. Badany okres to czas od 1 września 2022 roku do 28 października 2022 roku, a całkowita liczba pomiarów wynosi 1392. To pozwala na zauważenie cykli dobowych i tygodniowych. Szczegółowe dane są dostępne na stronie <https://www.pse.pl/dane-systemowe/funkcjonowanie-kse/raporty-dobowe-z-pracy-kse/zapotrzebowanie-mocy-kse>.

W dalszej części pracy pokażemy, jak rozłożyliśmy dane na składowe czasowe, dopasowaliśmy modele ARIMA i przeanalizowaliśmy rozkład reszt. To pomoże ocenić jakość prognoz i wykryć ewentualne błędy w danych.

Analiza ta może być przydatna dla operatorów systemów energetycznych, planistów oraz instytucji monitorujących stabilność dostaw energii. Lepsze zrozumienie wzorców zużycia energii może pomóc w optymalizacji pracy sieci oraz zarządzaniu zasobami. Wyniki tej pracy mogą także być wykorzystane do tworzenia bardziej efektywnych polityk energetycznych i wspierania inicjatyw z zakresu zrownoważonej energetyki. Wnioski płynące z analizy mogą również posłużyć jako baza do dalszych badań nad modelowaniem i prognozowaniem zużycia energii w Polsce. Ostatecznie, praca ta ma na celu lepsze zrozumienie zmienności zużycia energii oraz wsparcie dla decyzji opartych na danych.

Analiza została w całości wykonana w języku programowania Python.

## 1.1 Wizualizacja danych

Wykres przedstawia rzeczywiste, godzinowe zużycie energii w dniach o 1.09.2022 do 18.10.2022:

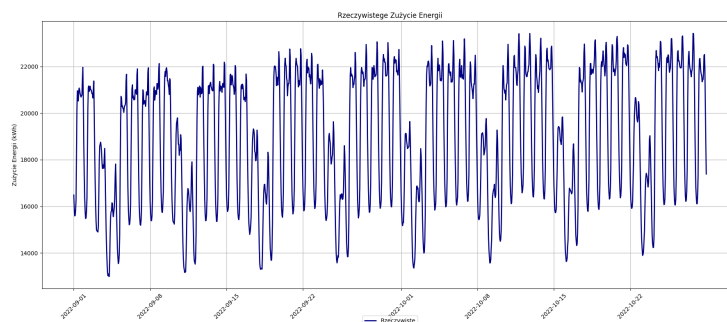


Figure 1: Rzeczywiste zużycie energii

## 2 Przygotowanie danych do analizy

### 2.1 Zbadanie jakości danych

Dane mają 1392 obserwacji i zostały sprawdzone pod względem ewentualnych braków przy użyciu funkcji wbudowanej funkcji `isnull().sum()`. Dane nie mają braków i są gotowe do analizy.

### 2.2 Wyodrębnienie danych testowych

Dane podzielono na zbiór treningowy - pierwsze 80% (1113 obserwacji) oraz na zbiór testowy - ostatnie 20% danych (279 wartości). Dane testowe użyjemy do oceny dopasowania modelu ARMA w dalszej części raportu.

Podzielone dane prezentują się na wykresie w następujący sposób:

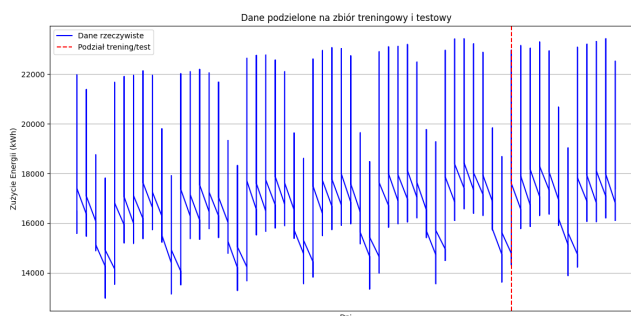


Figure 2: Dane podzielone na wartości treningowe oraz testowe

Po lewej stronie czerwonej linii znajdują się dane treningowe, a po prawej stronie dane testowe.

## 2.3 Dekompozycja szeregu czasowego

Dekompozycja szeregu czasowego polega na rozbiciu danych na składowe, które umożliwiają lepsze zrozumienie struktury czasowej. Wyróżnia się trzy główne komponenty:

- **Trend** – długoterminowa tendencja zmian w czasie,
- **Sezonowość** – okresowe wahania o stałej częstotliwości,
- **Szum** – składnik losowy, zawierający nieregularne fluktuacje.

Klasyczną dekompozycją szeregu czasowego możemy opisać następująco:

$$X_t = T_t + S_t + R_t \quad (1)$$

gdzie:

- $X_t$  – obserwowana wartość szeregu czasowego w chwili  $t$ ,
- $T_t$  – komponent trendu,
- $S_t$  – komponent sezonowy,
- $R_t$  – składnik losowy, szereg stacjonarny w słabym sensie.

## 2.4 Wykres ACF i PACF dla surowych danych

Autokorelacja pozwala na określenie zależności między wartościami szeregu czasowego w różnych momentach. W analizie szeregów czasowych kluczowe są dwa wykresy:

- **Autokorelacja (ACF, Autocorrelation Function)** – mierzy korelację między wartościami szeregu w różnych opóźnieniach (lagach). Pomaga określić, czy występują zależności długoterminowe w danych.
- **Częściowa autokorelacja (PACF, Partial Autocorrelation Function)** – mierzy autokorelację dla danego opóźnienia, eliminując wpływ wcześniejszych lagów. Jest używana do określenia rzędu części autoregresyjnej modelu (AR).

Na poniższym wykresie przedstawiono wartości ACF oraz PACF, wykres został wygenerowany przy pomocy biblioteki `statsmodels` i funkcji `plot_acf` oraz `plot_pacf`:

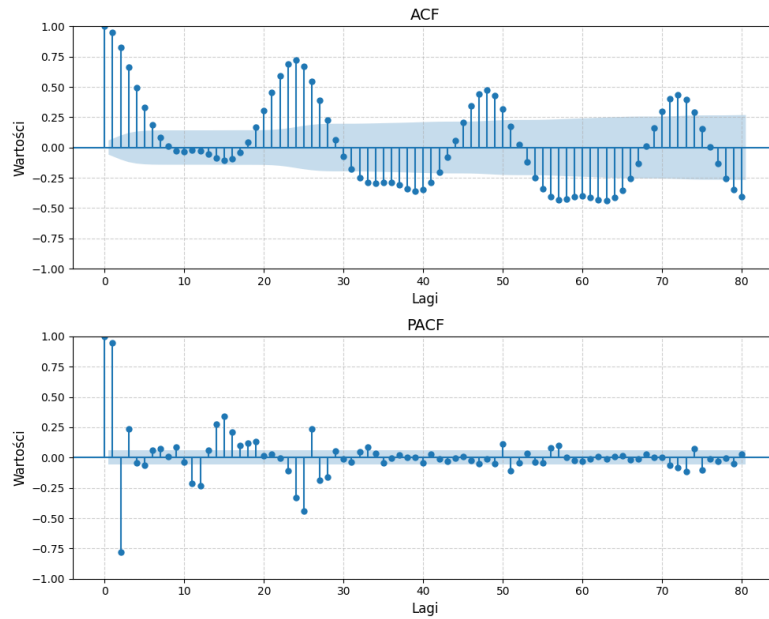


Figure 3: Wykres autokorelacji ACF i częściowej autokorelacji PACF

### 2.4.1 Test Augmented Dickey-Fuller (ADF)

Test ADF jest stosowany do sprawdzenia, czy szereg czasowy jest stacjonarny. Hipotezy testu:

- $H_0$ : Szereg czasowy ma jednostkowy pierwiastek (niestacjonarność).
- $H_1$ : Szereg czasowy jest stacjonarny.

Wartość testu ADF jest porównywana z wartościami krytycznymi, a jeśli p-wartość jest mniejsza niż 0.05, możemy odrzucić hipotezę  $H_0$  i uznać szereg za stacjonarny. Wyznaczamy statystykę oraz p-wartość korzystając z funkcji `adfuller` z biblioteki `statsmodels`.

Table 1: Wyniki testu ADF dla danych

<b>Statystyka ADF</b>	-2.91502
<b>p-wartość</b>	0.04363

P-wartość testu ADF jest mniejsza od 0.05 z czego możemy wnioskować, że już szereg danych surowych jest stacjonarny. Należy jednak pamiętać że test ADF dotyczy głównie trendu, a w mniejszym stopniu sezonowości, co widać na naszych danych (trend jest mało znaczący). Dlatego należy odpowiednio zdekomponować nasze dane.

## 2.5 Dekompozycja

Do dekompozycji danych użyta została biblioteka `stats.model.tsa.seasonal` i funkcja `seasonal_decompose` z parametrami `model='additive'` oraz `period=168`, który określa długość cyklu sezonowego, ustawiony on został na 168 z powodu co tygodniową sezonowością związaną z różnym zużyciem energii w zależności od dnia tygodnia. Następnie wyznaczamy trend, sezonowość i reszty, używając funkcji `trend`, `seasonal` i `resid`. Wyniki prezentują się następująco:

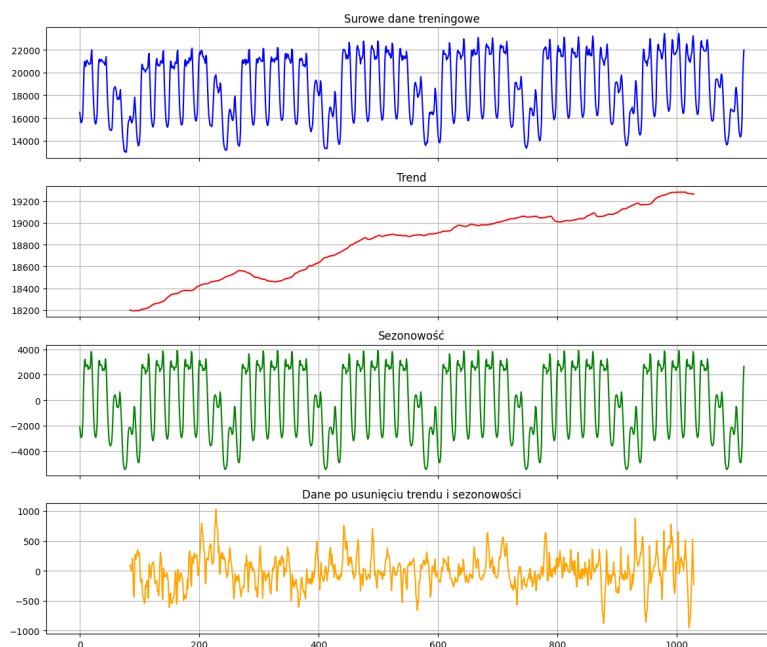


Figure 4: Wykres trendu, sezonowości oraz danych po dekompozycji

Następnie wykonujemy jeszcze raz różnicowanie sezonowe używając funkcji `diff(period=24)` z biblioteki `pandas`, aby sezonowość związaną z cyklem dnia. Ostatecznie dane wraz z ich ACF oraz PACF prezentują się następująco:

Test ADF na danych po dekompozycji:

Table 2: Wyniki testu ADF dla danych

<b>Statystyka ADF</b>	-7.1546
<b>p-wartość</b>	$3e^{-10}$

P-wartość statystyki jest bliska zera co wskazuje na stacjonarność stacjonarność zdekomponowanego szeregu.

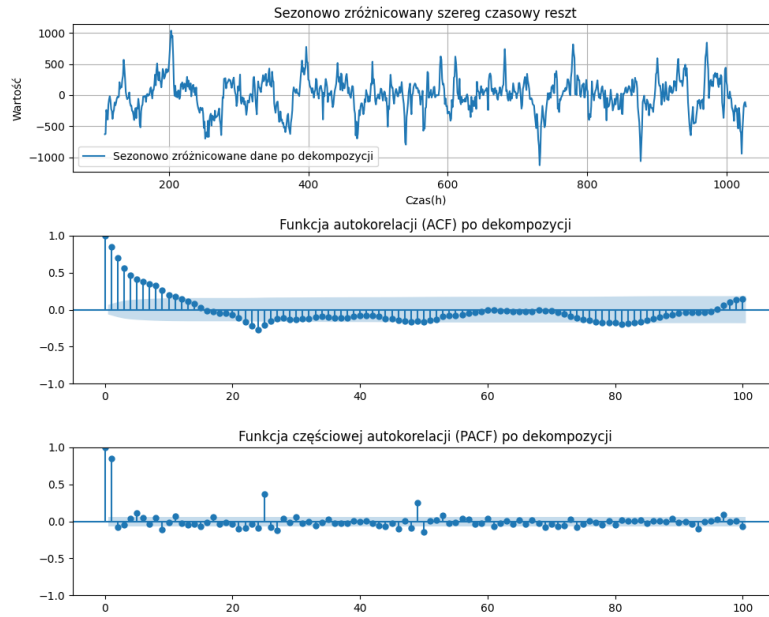


Figure 5: Wykres danych, ACF oraz PACF po pełnej dekompozycji

### 3 Modelowanie danych przy pomocy ARMA

#### 3.1 Model ARMA

Model  $\text{ARMA}(p, q)$  (Autoregressive Moving Average) jest jednym z podstawowych modeli stosowanych w analizie szeregów czasowych. Łączy w sobie dwa procesy:

- **Autoregresję ( $\text{AR}(p)$ )** – bieżąca wartość szeregu czasowego zależy liniowo od jego przeszłych wartości.
- **Średnią ruchomą ( $\text{MA}(q)$ )** – bieżąca wartość szeregu uwzględnia wpływ losowych zakłóceń z poprzednich okresów.

Formalnie model  $\text{ARMA}(p, q)$  można zapisać jako:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad (2)$$

gdzie:

- $X_t$  – wartość szeregu czasowego w chwili  $t$ ,
- $\phi_i$  – współczynniki autoregresji (AR),
- $\theta_j$  – współczynniki średniej ruchomej (MA),
- $Z_t$  – składnik losowy (biały szum).

### 3.2 Dobranie rzędu modelu

Jednym z kluczowych etapów budowy modelu ARMA jest określenie optymalnych wartości parametrów  $p$  (rzędu autoregresji) oraz  $q$  (rzędu średniej ruchomej). W celu ich doboru stosuje się analizę wykresów autokorelacji (ACF) i częściowej autokorelacji (PACF) oraz kryteria informacyjne, które pozwalają na wybór najlepszego modelu.

#### Kryteria informacyjne

Wybór najlepszego modelu ARMA opiera się na minimalizacji kryteriów informacyjnych, takich jak:

- **Kryterium informacyjne Akaike (AIC)** – preferuje modele dobrze dopasowane do danych, ale może faworyzować bardziej złożone struktury.
- **Kryterium Bayesowskie Schwarz (BIC)** – wprowadza silniejszą karę za liczbę parametrów niż AIC, co sprzyja prostszym modelom.
- **Kryterium Hannan-Quinna (HQIC)** – balansuje między AIC a BIC, nadając umiarkowaną karę za liczbę parametrów.

Matematycznie kryteria te są definiowane jako:

$$AIC = -2 \ln L + 2k \quad (3)$$

$$BIC = -2 \ln L + k \ln n \quad (4)$$

$$HQIC = -2 \ln L + 2k \ln \ln n \quad (5)$$

gdzie:

- $L$  – funkcja log-wiarygodności oszacowanego modelu,
- $k$  – liczba estymowanych parametrów modelu,
- $n$  – liczba obserwacji w szeregu czasowym.

Minimalizacja wartości  $AIC$ ,  $BIC$  lub  $HQIC$  pozwala na wybór modelu, który najlepiej równoważy dopasowanie do danych i złożoność.

W celu znalezienia optymalnego modelu przeanalizowano różne kombinacje wartości  $p$  i  $q$  w zakresie od 1 do 7 dla obu parametrów. W analizie wykorzystaliśmy funkcje `aic`, `bic` i `hqic` z biblioteki `statsmodels`.

Analiza wartości tych kryteriów wykazała, że najniższe wartości AIC, BIC oraz HQIC uzyskano dla  $p = 5$  i  $q = 6$ , co sugeruje, że jest to optymalny model dla analizowanych danych.



### 3.3 Estymacja Parametrów Modelu

W celu dopasowania modelu ARMA(5,6) do danych wykorzystana została wbudowana funkcja `ARIMA` dostępna w pakiecie `statsmodels`. do analizy szeregów czasowych. Parametry modelu zostały oszacowane metodą największej wiarygodności. Która polega na maksymalizacji funkcji wiarygodności.

Otrzymane parametry:

Table 3: Oszacowane wartości parametrów modelu ARMA(5,6)

Parametr	1	2	3	4	5	6
$\phi_i$	0.8399	-0.6015	0.5364	-0.9039	0.7734	-
$\theta_i$	0.0877	0.6764	0.0178	0.8097	0.0471	-0.0459

## 4 Ocena dopasowania analizy

### 4.1 Porównanie ACF i PACF dopasowanego modelu

Aby ocenić dopasowany model porównamy wykres ACF i PACF dla dopasowanego modelu oraz dla naszych danych.

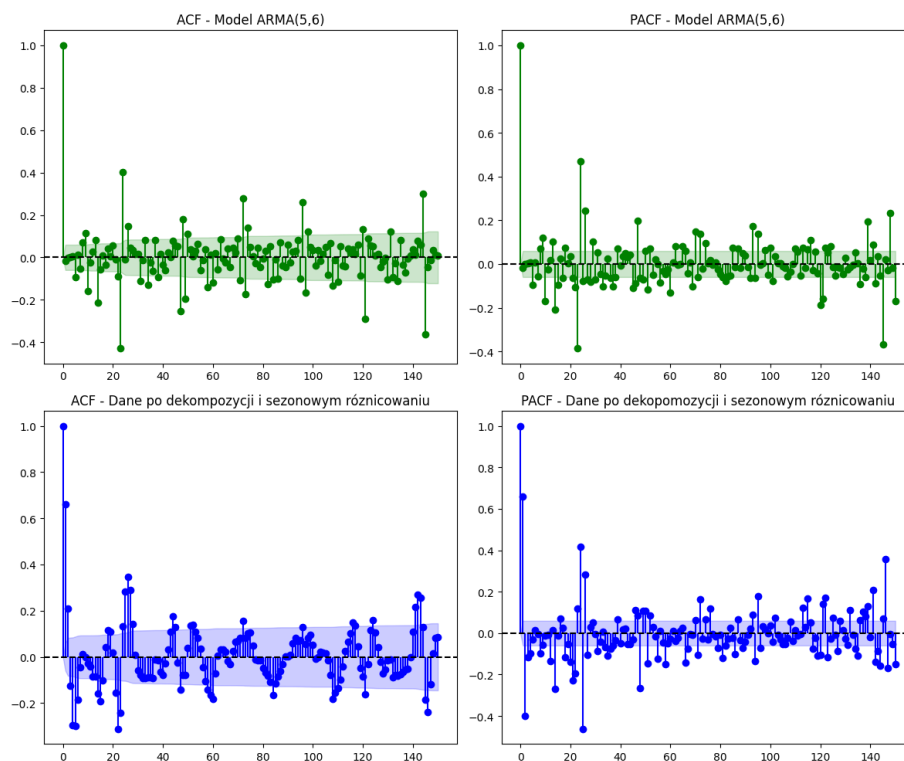


Figure 6: Wartości ACF i PACF dla modelu ARMA(5, 6) oraz naszych danych.

Na wykresie widać podobieństwo w autokorelacji oraz autokowariancji dla obu przypadkach. Model ARMA(5, 6) dobrze odwzorowuje strukturę naszych danych po dekompozycji i różnicowaniu sezonowym.

## 4.2 Porównanie lini kwantylowych z trajektorią

Na rysunku przedstawiono przedziały kwantylowe dla szeregu czasowego po usunięciu trendu i sezonowości. Wykres przedstawia zakresy wartości, w których mieści się określony procent obserwacji, co pozwala na ocenę rozkładu zmienności danych.

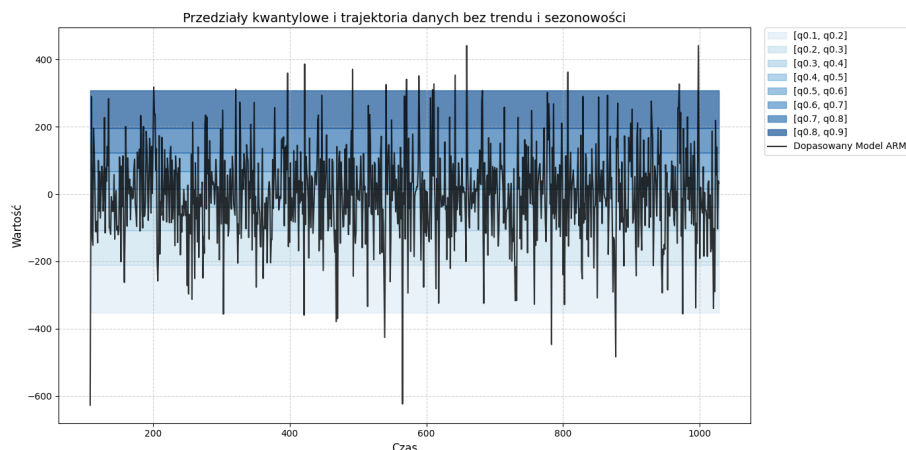


Figure 7: Wartości ACF i PACF dla modelu ARMA(5, 6) oraz naszych danych.

Kolory od jasnego do ciemnego odpowiadają kolejnym przedziałom kwantylowym:

- Najjaśniejsza strefa obejmuje wartości pomiędzy pierwszym ( $q_{0.1}$ ) a drugim ( $q_{0.2}$ ) decylem,
- Kolejne pasma reprezentują wyższe przedziały kwantylowe aż do zakresu ( $q_{0.8}, q_{0.9}$ ), który jest zaznaczony najciemniejszym odcieniem.

Na wykresie czarną linią przedstawiono trajektorię dopasowanego modelu ARMA(5,6). A linie kwantylowe zostały utworzone na podstawie naszych zdekomponowanych danych. Można zaobserwować, że większość wartości mieści się w środkowych przedziałach kwantylowych, natomiast sporadyczne skoki poza te zakresy mogą wskazywać na występowanie wartości odstających lub chwilowych anomalii w danych. Wizualizacja kwantylowa umożliwia lepsze zrozumienie danych oraz identyfikację obszarów o większej niepewności predykcji.

## 4.3 Prognoza dla przyszłych obserwacji

Aby sprawdzić czy model został poprawnie dopasowany sprawdzimy czy jego trajektorie pokrywają się z trajektorią danych testowych. W tym celu użyliśmy funkcji `forecast` z pakietu `statsmodel`

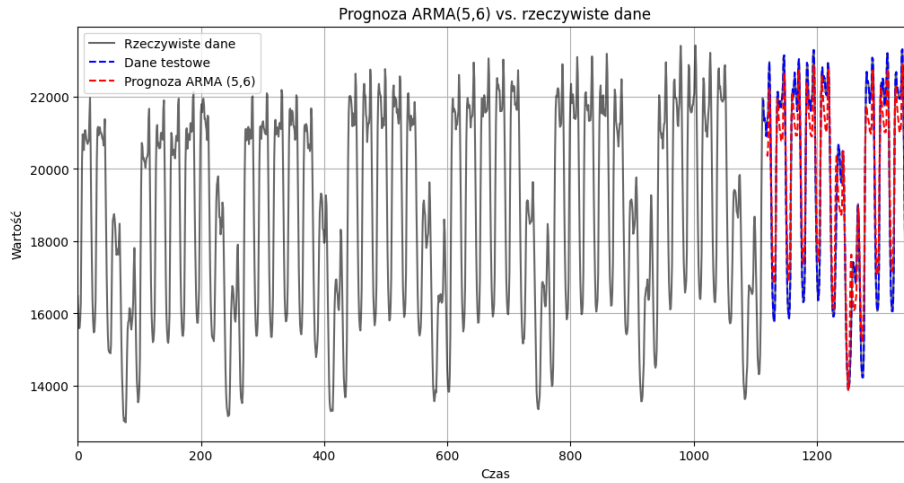


Figure 8: Porównanie trajektorii ARMA(5, 6) oraz naszych testowych.

## 5 Weryfikacja założeń dotyczących szumu

### 5.1 Założenie dotyczącej średniej

Wizualizacja wartości resztowych modelu ARMA(5,6):

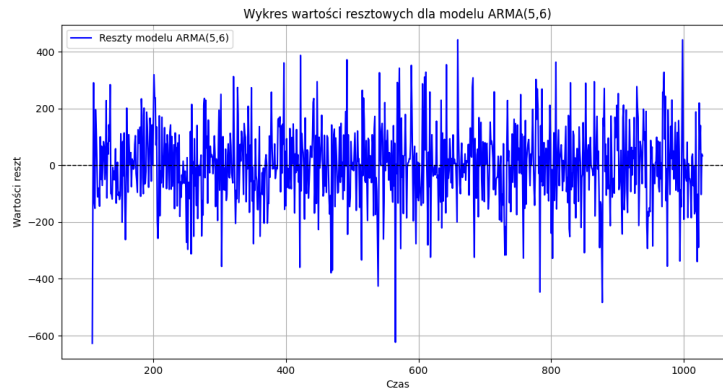


Figure 9: Wartości resztowe ARMA(5, 6)

Analizując wykres wartości resztowych modelu ARMA, można zauważyć, że wartości te oscylują wokół zera, co sugeruje, że ich średnia jest równa 0. Aby jednak potwierdzić to statystycznie, przeprowadzono test t-Studenta dla hipotezy zerowej:

$$H_0 : E(\varepsilon_i) = 0$$

przy poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ .

Do testu t-studenta użyta została funkcja `ttest_1samp` z biblioteki `stats`. Wynik testu t-Studenta dla wartości reszt wyniósł:

- Statystyka testowa: -0.0356
- p-wartość: 0.9715

P-wartość jest wystarczająco duża, więc nie mamy podstaw do odrzucenia  $H_0$ , co świadczy o tym, że model spełnia założenie o średniej.

## 5.2 Założenie dotyczące wariancji

Poniżej przedstawiony jest wykres kwadratów reszt. Wykres pomoże określić czy wariancja jest stała co stanowi podstawowe założenie homoskedastyczności.

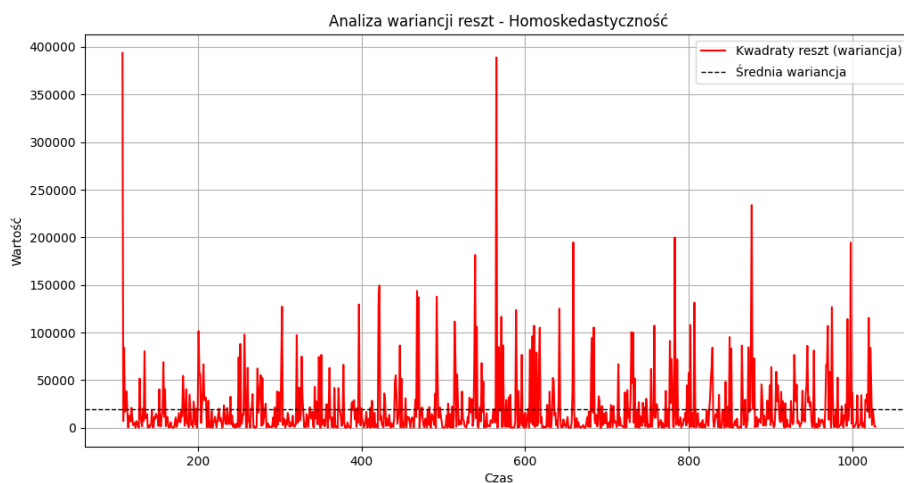


Figure 10: Kwadraty wartości resztowych ARMA(5, 6)

Po wykresie możemy spodziewać że wariancja jest stała.

### Zmodyfikowany test Levene'a

Zmodyfikowany test Levene'a jest testem statystycznym służącym do weryfikacji założenia homoskedastyczności, czyli stałości wariancji reszt modelu. W przeciwieństwie do klasycznej wersji testu Levene'a, zmodyfikowana wersja opiera się na wartościach bezwzględnych reszt względem mediany, co sprawia, że jest bardziej odporny na wartości odstające.

### Hipotezy testu:

- $H_0$ : Wariancja reszt jest stała (dane są homoskedastyczne).
- $H_1$ : Wariancja reszt różni się między grupami (dane są heteroskedastyczne).

**Statystyka testowa:**

$$W = \frac{(N - k)}{(k - 1)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^k N_i (Z_{i\cdot} - Z_{\cdot\cdot})^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (Z_{ij} - Z_{i\cdot})^2} \quad (6)$$

gdzie:

- $W$  – wartość statystyki testu,
- $N$  – całkowita liczba obserwacji,
- $k$  – liczba grup,
- $N_i$  – liczba obserwacji w grupie  $i$ ,
- $Z_{ij} = |X_{ij} - \tilde{X}_i|$  – wartość bezwzględna odchylenia od mediany w grupie  $i$ ,
- $Z_{i\cdot}$  – średnia wartości  $Z_{ij}$  w grupie  $i$ ,
- $Z_{\cdot\cdot}$  – ogólna średnia wartości  $Z_{ij}$  dla wszystkich grup.

**Interpretacja wyników:**

- Jeśli  $p > 0.05$ , brak podstaw do odrzucenia  $H_0$  – reszty modelu są homoskedastyczne.
- Jeśli  $p < 0.05$ , odrzucamy  $H_0$  – dane są heteroskedastyczne, co oznacza, że wariancja reszt zmienia się w czasie.

Wynik testu Levene’a pozwala ocenić, czy model ARMA spełnia założenie stałości wariancji reszt.

Do przeprowadzenia tego testu została użyta funkcja `levене` z biblioteki `scipy.stats`. Wynik testu:

- **Statystyka testowa:** 0.4962
- **p-wartość:** 0.4813

P-wartość test jest większa od 0.05 co oznacza że wariancja reszt modelu nie zmienia się w czasie - dane są homoskedastyczne.

**Test ARCH**

Test ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) jest statystycznym testem wykorzystywanym do wykrywania heteroskedastyczności warunkowej w resztach modelu. Jest szczególnie istotny w analizie szeregów czasowych, ponieważ pozwala sprawdzić, czy wariancja reszt zmienia się w czasie w sposób systematyczny.

### Hipotezy testu:

- $H_0$ : Brak efektu ARCH – wariancja reszt jest stała w czasie (homoskedastyczność).
- $H_1$ : Występuje efekt ARCH – wariancja reszt zależy od wcześniejszych wartości (heteroskedastyczność warunkowa).

**ARCH** Test ARCH polega na estymacji pomocniczej regresji reszt podniesionych do kwadratu:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + u_t \quad (7)$$

gdzie:

- $\varepsilon_t$  – reszty modelu ARMA,
- $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$  – współczynniki regresji,
- $u_t$  – składnik losowy,
- $p$  – liczba opóźnień reszt (zwykle dobierana na podstawie AIC/BIC).

### Interpretacja wyników:

- Jeśli  $p > 0.05$ , brak podstaw do odrzucenia  $H_0$  – wariancja reszt jest stała (brak efektu ARCH).
- Jeśli  $p < 0.05$ , odrzucamy  $H_0$  – wariancja reszt zmienia się w czasie - efekt ARCH obecny.

Do przeprowadzenia testu skorzystamy z funkcji `het_arch` z biblioteki `statsmodels`. Wynik testu:

- **Statystyka testowa:** 29.2257
- **p-wartość:** 0.0011

### Porównanie wyników testu Levene’a i testu ARCH

W celu oceny stałości wariancji reszt modelu ARMA przeprowadzono test Levene’a oraz test ARCH. Wyniki obu testów były rozbieżne.

Test Levene’a wykazał, że wariancja reszt jest stała w całym zbiorze danych, co oznacza brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Z kolei test ARCH wykazał heteroskedastyczność warunkową, co oznacza, że wariancja reszt zmienia się w czasie w sposób zależny od wcześniejszych wartości reszt.

Różnice w wynikach wynikają z odmiennych założeń obu testów. Test Levene’a sprawdza ogólną homoskedastyczność, czyli stałość wariancji w różnych

podzbiorach danych, natomiast test ARCH bada, czy wariancja reszt zmienia się dynamicznie w czasie w sposób zależny od przeszłych wartości reszt.

Możliwe wyjaśnienie wyników sugeruje, że wariancja może być globalnie stała, ale lokalnie zmienna, co test ARCH wykrywa jako heteroskedastyczność warunkową. Efekt ARCH może być obecny, nawet jeśli wariancja między różnymi grupami obserwacji nie różni się znacząco, co powoduje, że test Levene'a nie wykazuje heteroskedastyczności.

### 5.3 Założenie dotyczące niezależności

Wykresy ACF i PACF dla wartości resztowych modelu ARMA(5,6):

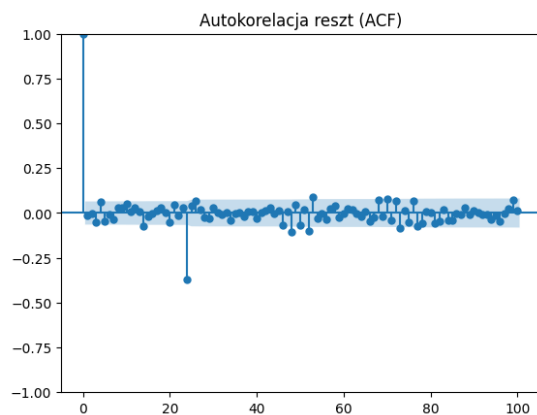


Figure 11: ACF reszt ARMA(5, 6)

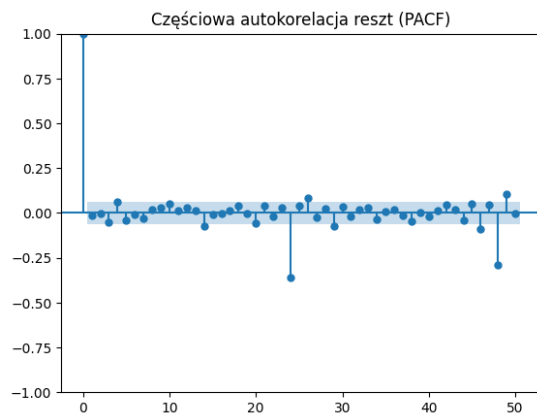


Figure 12: PACF reszt ARMA(5, 6)



Wykresy ACF i PACF nie wskazują na istotne zależności reszt. Większość wartości mieści się w przedziale ufności dla poziomu istotności  $\alpha=0.05$ .

### Test Ljunga-Boxa

Test Ljunga-Boxa jest statystycznym testem służącym do oceny autokorelacji reszt modelu. Jego celem jest sprawdzenie, czy reszty modelu są niezależne, co jest kluczowym założeniem poprawnie dopasowanego modelu szeregów czasowych.

Hipotezy testowe są następujące:

- $H_0$ : Reszty są niezależne, brak autokorelacji – model dobrze opisuje dane.
- $H_1$ : Reszty wykazują autokorelację – model nie uchwycił wszystkich zależności w danych.

Statystyka testowa Ljunga-Boxa jest obliczana według wzoru:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \quad (8)$$

gdzie:

- $Q$  – wartość statystyki testowej,
- $n$  – liczba obserwacji,
- $m$  – liczba opóźnień (lagów), dla których testowana jest autokorelacja,
- $\hat{\rho}_k$  – oszacowana autokorelacja reszt dla opóźnienia  $k$ .

Statystyka  $Q$  ma asymptotycznie rozkład  $\chi^2$  z  $m$  stopniami swobody.

Interpretacja wyników testu:

- Jeśli  $p > 0.05$ , brak podstaw do odrzucenia  $H_0$  – reszty są nieskorelowane, co oznacza, że model spełnia założenie białego szumu.
- Jeśli  $p < 0.05$ , odrzucamy  $H_0$  – reszty wykazują autokorelację, co sugeruje, że model może wymagać poprawy poprzez dodanie dodatkowych opóźnień lub zmianę jego struktury.

Do przeprowadzenia testu wykorzystana została funkcja `acorr_ljungbox` z biblioteki `statsmodels`, wynik testu:

W tabelce z wynikami testu można zaobserwować, że p-wartość w każdym przypadku są większe od 0.05 z czego można wnioskować, że założenie o niezależności jest spełnione.

Table 4: Wyniki testu Ljunga-Boxa dla reszt modelu

Opóźnienie	Statystyka testowa	p-wartość
1	0.1239	0.7249
2	0.1291	0.9375
3	2.6809	0.4435
4	6.1160	0.1907
5	7.9057	0.1615
6	7.9461	0.2421
7	9.2389	0.2360
8	9.9833	0.2662
9	10.6681	0.2991
10	13.3451	0.2050
15	19.3339	0.1990
20	22.8983	0.2938

#### 5.4 Założenie dotyczące normalności rozkładu

Aby zbadać normalność rozkładu wartości resztowych, pokażemy wykresy gęstości, dystrybuanty i wykres kwantylowy z empirycznymi wartościami dla naszego modelu z gęstością rozkładu normalnego z taką samą wariancją i średnią.

Skorzystamy z funkcji: `cdf` i `pdf` z pakietu `scipy.stats` do utworzenia teoretycznych wartości. Oraz z funkcji `ecdfplot` i `histplot` z biblioteki `seaborn` do stworzenia wykresu dystrybuanty i gęstości naszego modelu. Do wykresu kwantylowego wykorzystamy funkcję `qqplot` z biblioteki `statsmodels.api`.

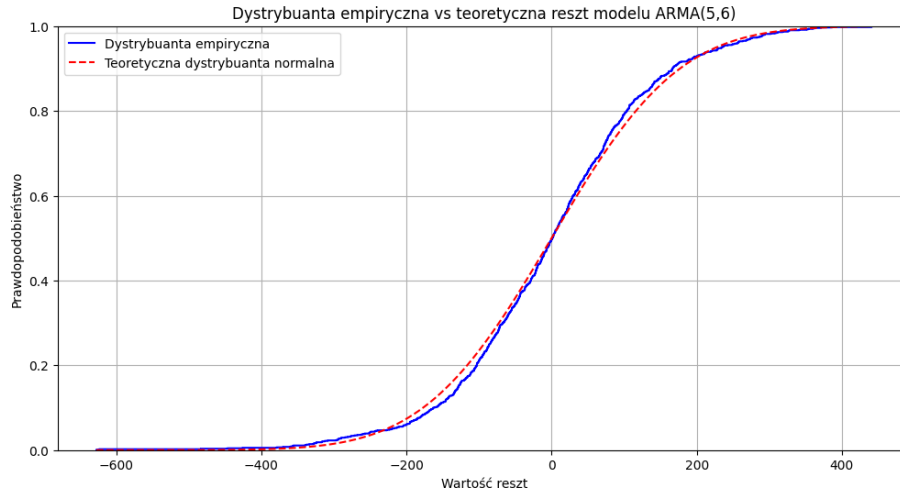


Figure 13: Dystrybuanta reszt ARMA(5, 6) vs Teoretyczna dystrybuanta rozkładu normalnego

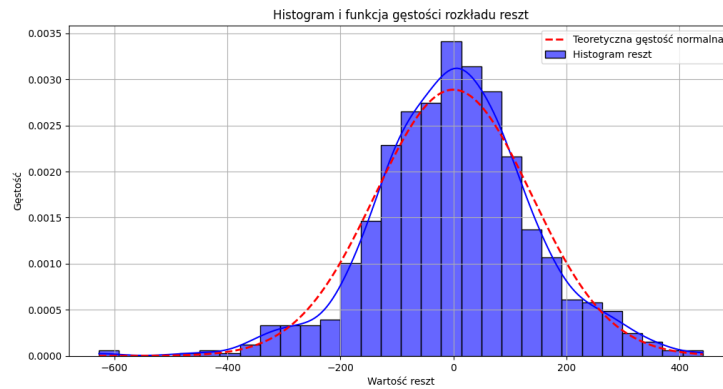


Figure 14: Gęstość reszt ARMA(5, 6) vs Teoretyczna gęstość rozkładu normalnego

Wykres kwantylowy (kwantyl-kwantyl) - porównywane są kwantyle reszt modelu ARMA(5,6) oraz kwantyle rozkładu normalnego:

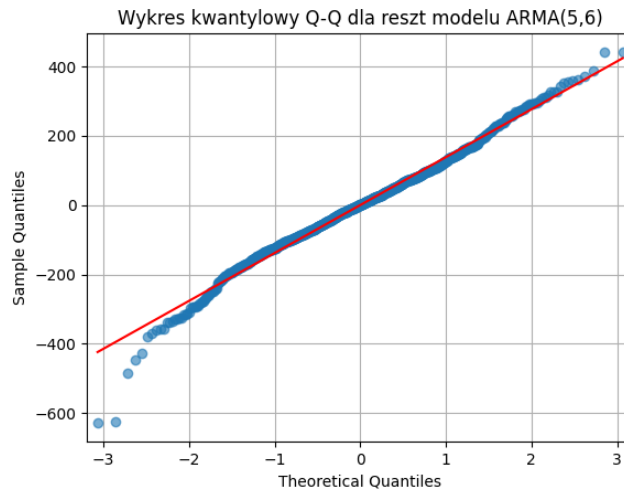


Figure 15: Wykres kwantylowy Q-Q reszt ARMA(5, 6) vs Teoretyczny wykres kwantylowy Q-Q rozkładu normalnego

Na wykresach widać podobieństwo między resztami modelu, a odpowiednim rozkładem normalnym. Jednak widać też spore różnice szczególnie na wykresie gęstości. Aby sprawdzić założenie o normalności rozkładu przeprowadzimy Test Shapiro-Wilka.

## Test Shapiro-Wilka

Test Shapiro-Wilka jest testem normalności, który sprawdza, czy próbka pochodzi z rozkładu normalnego. Jest często stosowany do analizy reszt modelu, ponieważ wiele metod statystycznych, w tym modele ARMA, zakłada normalność błędów.

Hipotezy testowe są następujące:

- $H_0$ : Dane pochodzą z rozkładu normalnego.
- $H_1$ : Dane nie pochodzą z rozkładu normalnego.

Statystyka testowa  $W$  testu Shapiro-Wilka jest obliczana według wzoru:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (9)$$

gdzie:

- $x_{(i)}$  – uporządkowane wartości próbki (od najmniejszej do największej),
- $a_i$  – współczynniki zależne od oczekiwanych wartości zmiennej losowej w rozkładzie normalnym,
- $\bar{x}$  – średnia próbki,
- $n$  – liczba obserwacji.

Interpretacja wyników testu:

- Jeśli  $p > 0.05$ , brak podstaw do odrzucenia  $H_0$  – dane są zgodne z rozkładem normalnym.
- Jeśli  $p < 0.05$ , odrzucamy  $H_0$  – dane nie są normalnie rozłożone.

Do przeprowadzenia testu skorzystamy z funkcji `shapiro` z biblioteki `scipy.stats`.  
Wynik testu:

- **Statystyka testowa:** 0.988884
- **p-wartość:**  $1.904e^{-6}$

P-wartość bliska zera, mniejsza od poziomu istotności. Wartości resztowe modelu ARMA(5,6) nie mają rozkładu normalnego, więc nie spełnia model nie spełnia warunków dotyczących normalności.

## 6 Podsumowanie i wnioski

### 6.1 Podsumowanie

W niniejszej pracy przeprowadzono analizę szeregu czasowego przedstawiającego zużycie energii elektrycznej w Krajowym Systemie Elektroenergetycznym (KSE). Dane obejmowały godzinowe pomiary i pozwoliły na identyfikację trendów oraz sezonowości. W celu modelowania danych zastosowano model ARMA, a optymalne wartości parametrów  $p$  i  $q$  dobrano na podstawie kryteriów informacyjnych.

Przeprowadzono następujące etapy analizy:

- Sprawdzenie jakości danych i ich podział na zbiór treningowy i testowy.
- Dekompozycję szeregu czasowego na składowe: trend, sezonowość i szum, a następnie zastosowanie różnicowania w celu uzyskania stacjonarności.
- Weryfikację stacjonarności danych przy użyciu testu Augmented Dickey-Fullera (ADF).
- Dopasowanie modelu ARMA(5,6) oraz estymację jego parametrów metodą największej wiarygodności.
- Ocenę dopasowania modelu poprzez analizę wykresów ACF i PACF oraz porównanie trajektorii modelu z przedziałami kwantylowymi danych.
- Weryfikację założeń dotyczących reszt modelu, w tym ich średniej, wariancji, niezależności oraz normalności rozkładu.

### 6.2 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy można sformułować następujące wnioski:

- Model ARMA(5,6) został uznany za optymalny na podstawie minimalizacji wartości kryteriów informacyjnych (AIC, BIC, HQIC).
- Wykresy ACF i PACF dla modelu oraz danych wykazały, że model poprawnie odwzorowuje strukturę autokorelacji.
- Test Ljunga-Boxa potwierdził brak istotnej autokorelacji reszt, co wskazuje na ich niezależność i spełnienie założeń białego szumu.
- Test t-Studenta dla wartości reszt wykazał, że ich średnia nie różni się istotnie od zera, co oznacza spełnienie tego założenia modelu.
- Wyniki zmodyfikowanego testu Levene’a potwierdziły homoskedastyczność reszt, jednak test ARCH wykazał obecność heteroskedastyczności warunkowej, co może sugerować, że wariancja reszt zmienia się w czasie w zależności od wcześniejszych wartości.

- Test Shapiro-Wilka wykazał, że rozkład reszt nie jest zgodny z rozkładem normalnym, co oznacza, że model nie spełnia w pełni tego założenia.

Podsumowując, model ARMA(5,6) poprawnie odwzorowuje dynamikę zużycia energii, jednak wykryta heteroskedastyczność warunkowa oraz brak normalności reszt mogą wskazywać na możliwość dalszej poprawy modelu, np. poprzez zastosowanie modeli uwzględniających zmienną wariancję, takich jak GARCH.