

Calcul Moulien, Arborification, Symétries et Applications

Jordy Palafox

Sous la direction de Jacky Cresson (Université de Pau)

Université de Pau et des Pays de l'Adour

25 Juin 2018



Partie 1 -

- Calcul moulien
- Arborification
- Linéarisation de champs de vecteurs
- Problème du centre

Partie 2 -

- Tissus du plan
- Groupe de symétries
- Polynômes de Darboux

Calcul Moulien, Arborification et Champs de vecteurs

Normalisation des champs de vecteurs

Prenons un champ de vecteurs analytique dans \mathbb{C}^d :

$$X = X_{lin} + P,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^d$ le spectre de X_{lin} .

Existe-t-il un changement de variables (analytique) qui ramène X à sa partie linéaire ?



H. Poincaré 1854-1912



A.D. Brjuno 1940-... ¹

1. Analytical form of differential equations (I, II). Trans. Moscow Math. Soc. 25, 131-288 (1971), 26, 199-239 (1972)

Le Théorème de Poincaré (1899)

Théorème de H. Poincaré

Soit X un champ de vecteurs, non résonant et dont le spectre est dans le domaine de Poincaré alors X est analytiquement linéarisable.

- Non résonant : il n'existe pas de relation $\langle \lambda, m \rangle = \lambda_i$, $m \in \mathbb{N}^d$ et $|m| \geq 2$
- Domaine de Poincaré : enveloppe convexe ne contenant pas 0.

La démonstration de H. Poincaré

Analyse directe du changement de variables.

→ Une démonstration par le formalisme du **Calcul Moulien** de J. Ecalle.

Forme préparée d'un champ

$$X = X_{lin} + \sum_{n \in \mathbf{A}(X)} B_n,$$

où :

- X_{lin} est la partie linéaire du champs (**diagonale**), de spectre λ ,
- $n \in \mathbf{A}(X) \subset \mathbb{Z}^d$ l'alphabet,
- B_n un opérateur différentiel homogène de degré n , i.e.
 $\exists \beta_{n,m} \in \mathbb{C}$ tel que $B_n(x^m) = \beta_{n,m} x^{n+m}$.

Exemple de forme préparée

On considère le champ quadratique :

$$X = X_{lin} + X_2,$$

où

$$X_2 = (p_{1,0}x^2 + p_{0,1}xy + p_{-1,2}y^2) \partial_x \\ + (q_{-1,2}x^2 + q_{1,0}xy + q_{0,1}y^2) \partial_y,$$

Les opérateurs et l'alphabet sont donnés par :

- $B_{(1,0)} = x(p_{1,0}x\partial_x + p_{0,1}y\partial_y),$
- $B_{(2,-1)} = p_{2,-1}x^2\partial_y,$
- $B_{(0,1)} = y(p_{0,1}x\partial_x + p_{0,1}y\partial_y),$
- $B_{(-1,2)} = p_{-1,2}y^2\partial_x.$
- $A(X) = \{(2, -1), (1, 0), (0, 1), (-1, 2)\},$

Automorphisme de substitution

Soit h un changement de variables, l'automorphisme de substitution Θ_h est défini par :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\{x\} &\rightarrow \mathbb{C}\{y\} \\ \varphi &\mapsto \Theta_h(\varphi) = \varphi \circ h.\end{aligned}$$

Développement moulien de Θ_h :

$$\Theta_h = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} \Theta^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}},$$

où

- \mathbf{n} est un mot de l'ensemble $\mathbf{A}(X)^*$ construit sur l'alphabet $\mathbf{A}(X)$ par concaténation,
- Θ^{\bullet} est un moule, i.e. une application de $\mathbf{A}(X)^* \rightarrow \mathbb{C}$,
- $B_{\mathbf{n}} = B_{n_1} \circ \cdots \circ B_{n_r}$ est un comoule, i.e. une application de $\mathbf{A}(X)^*$ dans \mathcal{B} .

Conjugaison et linéarisation

$$\Theta_h^{-1} X \Theta_h = X_{lin},$$

$$\left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} (\Theta^{-1})^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \right) (X_{lin} + \sum_{n \in \mathbf{A}(X)} B_n) \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} \Theta^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \right) = X_{lin},$$

plus précisément,

$$\nabla \Theta^\bullet = I^\bullet \times \Theta^\bullet,$$

où $\nabla \Theta^\bullet = \omega(\bullet) \Theta^\bullet$ avec $\omega(n) = \langle \lambda, n \rangle$ le **poids** de $n \in \mathbf{A}(X)$ et I^\bullet est le moule $I^{\mathbf{n}} = 1$ si $\ell(\mathbf{n}) = 1$ et 0 sinon.

- Le moule Θ^\bullet est une solution d'une **équation moulienne**,
- Aspect universel du moule Θ^\bullet .

Démonstration du théorème de Poincaré

- Le moule Θ^\bullet est donné explicitement par :

$$\Theta^n = \frac{1}{\omega(n) \cdots \omega(n_{r-1} n_r) \omega(n_r)},$$

pour tout $n = n_1 \cdots n_r$, $\ell(n) = r$.

- On a $\|\cdot\|_U$ norme du sup et on introduit la norme d'opérateur différentiel $\|B_n\|_{U,V} = \sup_{\phi \in \mathbb{C}\{x\}, \|\phi\|_U \leq 1} \|B_n \cdot \phi\|_V$.

- $|\Theta^n| \leq \frac{1}{r! C_1^r},$

- $\|B_n\|_{U,V} \leq r! C_{U,V}^{p(n)} C_2^r,$

où $C_1, C_2, C_{U,V}$ constantes positives et $p(n_i) = \sum_{j=1}^d n_i^d$ est la **profondeur** de la lettre n_i .

$$\left\| \sum_{n \in A(X)^*, \ell(n)=r} \Theta^n B_n \right\|_{U,V} \leq \sum_{n \in A(X)^*, \ell(n)=r} C_{U,V}^{p(n)} C^r < +\infty.$$

Théorème de Brjuno (1971)

Condition diophantienne de Brjuno

On définit $\omega(k) = \inf \{ \langle \lambda, \mathbf{n} \rangle, p(\mathbf{n}) < 2^{k+1} \text{ et } \langle \lambda, \mathbf{n} \rangle \neq 0 \}$.

La condition de Brjuno est :

$$\text{La série } S = \sum_{k \geq 0} \frac{\log(\frac{1}{\omega(k)})}{2^k} \text{ est convergente.}$$

Théorème de Brjuno

Soit X un champ dont le spectre satisfait la condition de Brjuno alors X est analytiquement linéarisable.

- Démonstration de Brjuno : méthode classique et très technique,
- On va suivre la démarche proposée par J. Ecalle.

1. J. Ecalle, *Singularités non abordables par la géométrie*, Ann. Inst. Fourier, 42 (1-2), p. 73-164 (1992)

Une approche directe ?

- $|\Theta^n| \leq C_1^{p(n)}$, (estimation polynomiale)
- $\|B_n\|_{U,V} \leq r! C_{U,V}^{p(n)}$,

$$\| \sum_{n \in A(X)^*, \ell(n)=r} \phi^n B_n \|_{U,V} \leq \sum_{n \in A(X)^*, \ell(n)=r} r! (C_1 C_{U,V})^{p(n)}.$$

⇒ On ne peut pas conclure !

⇒ J. Ecalle propose la **méthode d'arborification**.

Arbres et Forêts

Un arbre enraciné T est un graphe orienté non planaire avec un nombre fini de sommets avec un sommet particulier : la racine.

Une forêt est une collection d'arbres enracinés.

Un arbre est décoré par un ensemble \mathbf{A} si on associe à chaque sommet un élément de \mathbf{A}

Algèbre de Hopf de Connes-Kreimer

L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$ est l'algèbre des arbres enracinés décorés par \mathbf{A} .

F. Fauvet, F. Menous, *Ecalles' arborification-coarborification transforms and Connes-Kreimer Hopf algebra*, Annales scientifiques de l'ENS 50, fascicule 1, 39-83, (2017)

Arborification

L'arborification est un morphisme π_0 d'algèbres de Hopf de $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$ dans $\mathcal{H}_{\sqcup}^{\mathbf{A}}$.



$$\pi_0\left(\begin{array}{c} n_2 \quad n_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ n_1 \end{array}\right) = n_1 n_2 n_3 + n_1 n_3 n_2.$$

- On note $\mathcal{L}(T)$ l'ensemble des mots apparaissant dans l'expression de $\pi_0(T)$.

Un moule étant donné, on peut définir son équivalent sur les arbres dit **moule arborifié**.

$$\begin{aligned}\Theta^T &= \sum_{n \in \mathcal{T}} \Theta^n, (\text{arborification}) \\ B_n &= \sum_{T \in \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}(X)} B_T^<. (\text{coarborification})\end{aligned}$$

En regroupant les termes, on a :

$$\sum_{n \in \mathbf{A}(X)^*} \Theta^n B_n = \sum_{T \in \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}(X)}} \Theta^T B_T.$$

-
1. R. Grossman, R. J. Larson, *Hopf-algebraic structure of combinatorial objects and differential operators*, Israel J. Math., Vol 72, 1990, no 1-2, 109–117.

Que donne cette réécriture ?

- $\| B_F \|_{U,V} \leq C_2^r C_{U,V}^{p(T)}$,
- $|\Theta^T| \leq C_1^{p(T)}$,

où $p(T) = p(\mathbf{n})$ si T est décoré par \mathbf{n} , $C_1, C_2, C_{U,V}$ des constantes et $r = \ell(T)$ nombre de sommets.

Conclusion

L'arborification restaure la convergence !

Comment expliquer ce phénomène ?

Suivant J. Ecalle :

- "Il n'y a pas d'accroissement concomitant du nombre de termes",
- Le moule arborifié vérifie une équation de même nature que le moule classique.

⇒ Un moule peut-il être invariant par arborification ?

⇒ Quand une équation sur les moules est-elle préservée par arborification ?

- $\ell(T) = \ell(\mathbf{n})$,
- $\omega(T) = \omega(\mathbf{n})$,
- $p(T) = p(\mathbf{n})$,

où $\mathbf{n} \in \mathcal{L}(T)$.

Théorème (J. Cresson, D. Manchon, J. P.)

Soit M^\bullet ne dépendant que de la longueur $\ell(\bullet)$, du poids $\omega(\bullet)$ ou de la profondeur $p(\bullet)$, autrement dit :

$$M^\bullet = F(\ell(\bullet), \omega(\bullet), p(\bullet)),$$

où $F : \mathbb{N} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Alors le moule arborifié $M_{<}^\bullet$ est donné par :

$$M_{<}^T = \#\mathcal{L}(T) F(\ell(T), \omega(T), p(T)).$$

Le moule I^\bullet ne dépend que de la longueur, $I^n = f(\ell(\mathbf{n}))$ donc $I_{<}(T) = f(\ell(T))$.

On a démontré que l'équation :

$$\nabla \Theta^\bullet = I^\bullet \times \Theta^\bullet,$$

s'arborifie :

$$\nabla^< \Theta_\prec^\bullet = I_\prec \times \Theta_\prec^\bullet.$$

• $\nabla^< M_\prec^T = \omega(T) M_\prec^T$ et I^\bullet invariant donc :

$$\Theta^n = \frac{1}{\omega(\mathbf{n}) \cdots \omega(n_{r-1} n_r) \omega(n_r)},$$

$$\Theta^T = \sum_{(i_1, \dots, i_{r-1})} \frac{1}{w(T) w(T_{i_1}^{>1}) w((T_{i_1}^{>1})_{i_2}^{>1}) \cdots w((\dots(((T_{i_1}^{>1})_{i_2}^{>1}) \dots)_{i_{r-1}}^{>1})}.$$

• Couvre la plupart des exemples connus.

On en déduit :

Théorème

Sous la condition de Brjuno, si le moule Θ^\bullet satisfait :

$$|\Theta^n| \leq c_0 c^{p(n)},$$

alors son arborifié vérifie :

$$|\Theta_{<}^n| \leq c_1 c^{p(T)}.$$

On ne peut pas encore conclure à la convergence !

Le passage au moule inverse : un Lemme fondamental

Soit M^\bullet un moule avec $M^\emptyset \neq 0$ satisfaisant l'estimation polynomiale :

$$|M^n| \leq c_0 c^{p(n)},$$

avec c, c_0 des constantes positives. Alors le moule N^\bullet inverse de M^\bullet pour la multiplication de moules satisfait :

$$|N^n| \leq \tilde{c}_0 c^{p(n)}.$$

Soit un moule arborifié $M_\<^\bullet$ avec $M_\<^1 \neq 0$, satisfaisant :

$$|M_\<^n| \leq c_0 c^{p(n)},$$

avec c, c_0 des constantes positives. Alors le moule $N_\<^\bullet$ inverse de $M_\<^\bullet$ pour la multiplication de moules arborifiés satisfait :

$$|N_\<^n| \leq \tilde{c}_0 c^{p(n)}.$$

L'estimation polynomiale est préservée et l'arborification restaure la convergence !

Le calcul moulien fait apparaître :

- une partie universelle : le moule,
- une partie dépendante des coefficients du champ : le comoule.

Cette représentation permet d'analyser le rôle spécifique de la forme de la perturbation du champ.

⇒ C'est le cas dans le problème du centre.

Le problème du centre

On considère **représentation complexe** d'un *champ de vecteur du plan réel* avec un centre en 0 :

$$X_{lin} = i(x\partial_x - y\partial_y)$$

où $x, y \in \mathbb{C}$ avec $y = \bar{x}$.

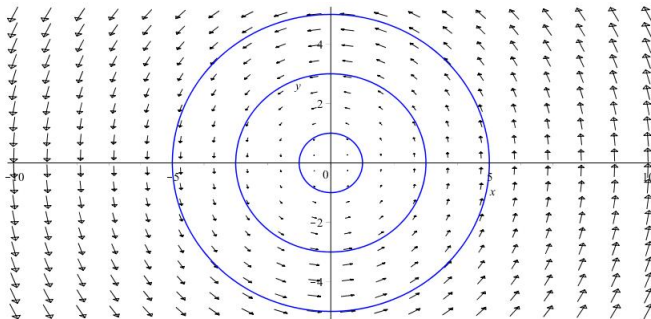


Figure – Le point d'équilibre 0 est un centre

Problème du centre

Quelles sont les propriétés préservées par une perturbation polynomiale de X_{lin} ?

$$X = X_{lin} + P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y$$

Problème du centre

Quelles conditions sont nécessaires sur P et Q pour préserver la propriété d'être un centre ?

- Un centre est dite isochrone si toutes les orbites ont la même période.

Problème du centre isochrone

Quelles conditions sur P et Q sont nécessaires pour conserver l'isochronisme ?

Si X est en plus Hamiltonien, on a la conjecture suivante :

Conjecture de Jarque-Villadelprat (2002)²

Tout centre d'un champ réel planaire polynomial Hamiltonien de degré pair est non isochrone.

- Loud (1964) : dans le cas quadratique,
- Schuman (2001) : dans le cas homogène,
- Jarque-Villadelprat (2002) : dans le cas quartique.

2. X. Jarque, J. Villadelprat, *Nonexistence of Isochronous Centers in Planar Polynomial Hamiltonian Systems of Degree Four*, Journal of Differential Equations 180, 334–373, (2002).

- Chen, Romanovski, Zhang (2008) :

Conjecture, version faible

Un champ de vecteurs X Hamiltonien réel de degré pair $2n$ de la forme $X = X_{lin} + X_2 + X_4 + \dots + X_{2n}$ n'est pas isochrone.

- Autres cas : la conjecture est toujours ouverte ! La complexité des méthodes classiques augmente trop vite avec le degré !

Condition d'isochronisme³

L'isochronisme est équivalent à la linéarisabilité du champ.

Comment étudier cette propriété ?

3. M. Sabatini, J. Chavarriga , *A survey of Isochronous centers*, Qualitative Theory of Dynamical Systems 1 (1999)

- La **Correction** d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs formel solution de⁴ :

Soit X un champ analytique et X_{lin} sa partie linéaire.

Trouver un champ de vecteurs Z solution du problème suivant :

- $X - Z$ formellement conjugué à X_{lin} ,
- $[X_{lin}, Z] = 0$.

Critère de linéarisation [J. Ecalle, B. Vallet]

Un champ de vecteurs est linéarisable si et seulement sa correction est nulle.

4. J. Ecalle, B. Vallet, *Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms*, Math. Z. 229, 249-318, (1998).

4. F. Menous, *From dynamical systems to renormalization*, J. Math. Phys. 54, no. 9, 092702, 24 p., (2013).

Nos résultats

On considère une perturbation polynômiale de la forme :

$$X = X_{lin} + \sum_{r=k}^l X_r,$$

avec

- $X_r = P_r(x, y)\partial_x + Q_r(x, y)\partial_y,$
- $P_r(x, y) = \sum_{j=0}^r p_{r-j-1,j} x^{r-j} y^j, \quad Q_r(x, y) = \sum_{j=0}^r q_{r-j,j-1} x^{r-j} y^j.$
- $p_{r-j-1,j}, q_{r-j,j-1} \in \mathbb{C}$ avec les conditions suivantes :

Condition de réalité : $p_{j,k} = \bar{q}_{k,j}$ avec $j + k = r - 1,$

Condition Hamiltonienne : $p_{j-1,r-j} = -\frac{r-j+1}{j} q_{j-1,r-j}$ avec $j = 1, \dots, r.$

Théorème 1

Soit X un champ de vecteurs Hamiltonien réel de degré $2n$ de la forme :

$$X = X_{lin} + \sum_{r=2}^{2n} X_r,$$

Si X satisfait l'une des conditions suivantes :

- ❶ il existe $1 \leq j < n - 1$ tel $p_{i,j} = 0$ pour $i = 1, \dots, j - 1$ et $\mathcal{I}m(p_{j,j}) > 0$,
- ❷ $p_{i,i} = 0$ pour $i = 1, \dots, n - 1$,

Alors le champ X n'est pas isochrone.

- $X = X_{lin} + X_2$,
- $X = X_{lin} + X_2 + X_3 + X_4$ avec $\mathcal{I}m(p_{1,1}) > 0$,
- $X = X_{lin} + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$ avec $\mathcal{I}m(p_{1,1}) > 0$ ou $p_{1,1} = 0$ et $\mathcal{I}m(p_{2,2}) > 0$,
- etc...

sont non isochrones.

Un champ réel Hamiltonien polynomial de la forme :

$$X = X_{lin} + X_j + \dots + X_{2n},$$

pour $j \geq 2$ et $n \leq j - 1$, n'est pas isochrone.

- $X = X_{lin} + X_2$,
- $X = X_{lin} + X_3 + X_4$,
- $X = X_{lin} + X_4 + X_5 + X_6$,
- $X = X_{lin} + \sum_{r=47}^{92} X_r$,
- etc...

sont non isochrones.

Soit X un champ de vecteurs Hamiltonien réel non trivial de la forme :

$$X = X_{lin} + X_k + \cdots + X_{2l} + X_{2l+1} + \sum_{n=1}^m \sum_{j=c_n}^{2(c_n-1)} X_j,$$

où $k \geq 2$, $l \leq k-1$ et la suite (c_n) est donnée par $c_1 = 4l$ et $\forall n \geq 2$, $c_n = 4(c_{n-1} - 1)$ alors X n'est pas isochrone.

Un exemple donné par ce théorème est :

$$X = X_{lin} + X_2 + X_4 + X_5 + X_6.$$

Soient $k \geq 2$ et $l \leq k - 1$. Soit X un champ Hamiltonien polynomial réel de l'une des deux formes :

$$i) \quad X = X_{lin} + X_k + \cdots + X_{2l} + X_{2l+1} + \sum_{m=r}^{r+n} X_m,$$

avec $r \geq 2l + 2$ et $\mathcal{I}m(p_{l,l}) \geq 0$,

$$ii) \quad X = X_{lin} + X_k + \cdots + X_{2l} + X_{4l-1} + \sum_{m=r}^{r+n} X_m,$$

où X_{2l} est non trivial, $r \geq 4l$ et $\mathcal{I}m(p_{2l-1,2l-1}) > 0$,
alors X n'est pas isochrone.

Démonstrations

Théorème [J .Ecalte, B. Vallet]

La correction peut s'écrire :

$$Carr(X) = \sum_{\mathbf{n} \in A^*(X)} Carr^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in A^*(X) \\ \ell(\mathbf{n})=k}} Carr^{\mathbf{n}} [B_{\mathbf{n}}]$$

, où :

- $Carr^{\bullet}$ est le moule de la correction, calculable par récurrence grâce à la formule (règle de la variance) :

$$\omega(n_1) Carr^{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r} + Carr^{n_1 + n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_r} = \sum_{n_1 \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{n}} Carr^{n_1 \cdot \mathbf{c}} Carr^{\mathbf{b}},$$

- $[B_{\mathbf{n}}] = [B_{n_1 \cdot \dots \cdot n_r}] = [[\dots [[B_{n_1}, B_{n_2}], B_{n_3}], \dots], B_{n_r}]$.

Si $\omega(\mathbf{n}) \neq 0$, $Carr^{\mathbf{n}} = 0$. Pour $\omega(\mathbf{n}) = 0$, si $\ell(\mathbf{n}) = 1$, $Carr^{\mathbf{n}} = 1$, et pour $\ell(\mathbf{n}) = 2$, $Carr^{\mathbf{n}} = \frac{-1}{\omega(n_1)}$.

Forme des crochets

Pour tout mot \mathbf{n} , $[B_{\mathbf{n}}] = (xy)^{\frac{p(\mathbf{n})}{2}} [P(\mathbf{n})x\partial_x + Q(\mathbf{n})y\partial_y]$.

Structure algébrique

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le terme $Carr_{2p}(X)$ de la correction est :

$$Carr_{2p}(X) = (xy)^p [Ca_{2p}x\partial_x + \overline{Ca_{2p}}y\partial_y],$$

où

$$Ca_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=2p, \ell(\mathbf{n})=k}} Carr^{\mathbf{n}} P(\mathbf{n}).$$

- Considérons $X = X_{lin} + \sum_{r=m}^{2n} X_r$,

Deux cas : $m = 2l$ ou $m = 2l + 1$.

- Comment calculer $Carr_{2p}(X)$?

| | | | | |
|--------------|----------|------------|-----|----------|
| Perturbation | X_{2l} | X_{2l+1} | ... | X_{2n} |
| Profondeur | $2l - 1$ | $2l$ | ... | $2n - 1$ |

Pour une profondeur p donnée, quels X_r contribuent à $Carr_{2p}(X)$?

- Notation : $Carr_{p,\ell}(X_i)$ la contribution de X_i en profondeur p et ℓ la longueur du mot associé.

$$Carr_{2m,1}(X_{2m+1}) = p_{m,m}(xy)^m(x\partial_x - y\partial_y),$$

$$Carr_{2m,2}(X_{m+1}) = \frac{1}{2} \sum_{n \in A(X_{m+1})} Carr^{n, ping(n)}[B_n, B_{ping(n)}],$$

où $ping(n) = ping(n^1, n^2) = (n^2, n^1)$.

En utilisation les conditions de réalité et Hamiltonienne, on a :

$Carr_{2m}(X) = F \times (xy)^k (x\partial_x - y\partial_y)$ avec :

$$F = p_{m,m} + i \left(\sum_{j=\lfloor \frac{2l+1}{2} \rfloor + 1}^{2l} \frac{2l(2l+1)}{(2l-j+1)^2} |p_{j-1,2l-j}|^2 + \frac{2l}{2l+1} |p_{-1,2l}|^2 \right)$$

- Si $Carr_{2m}(X) = 0$, on a une sphère de Birkhoff liant X_{2l} et $X_{2m+1} = X_{4l-1} \Rightarrow$

(C1) Si $\text{Im}(p_{m,m}) > 0$, on a une obstruction à la linéarisation !

(C2) Si $p_{m,m} = 0$, la sphère est réduite à 0 $\Rightarrow X_{2l} = 0$.

Démonstration du Théorème 1

Soit $X = X_{lin} + \sum_{r=2}^{2n} X_r$:

- 1 Si il existe un entier $1 \leq m < n - 1$ tel que $p_{j,j} = 0$ pour $j = 0, \dots, m - 1$ et $\mathcal{I}m(p_{m,m}) > 0$,
 \Rightarrow par **(C1)**, X ne peut être isochrone.
- 2 Si $p_{m,m} = 0$ pour $1 \leq k \leq n - 1$,
 \Rightarrow La condition **(C2)** implique X non isochrone ou X_r est trivial.

Démonstration du Théorème 2

Considérons $X = X_{lin} + X_m + \dots + X_{2n}$ pour $m \geq 2$ et $n \leq m - 1$.

- Si m est *pair*, comme $n \leq m - 1$ on a :

| | | | | |
|--------------|---------|-----------|-----|----------|
| Perturbation | X_m | X_{m+1} | ... | X_{2n} |
| Profondeur | $m - 1$ | m | ... | $2n - 1$ |

On a : $2(m - 1) \geq 2n > 2n - 1$,

\Rightarrow Pas d'interaction entre les longueurs 1 et 2 pour une profondeur donnée,

\Rightarrow Chaque X_r est trivial ou X est non isochrone.

- Si k est impair, on a un résultat analogue.

Les Tissus du plan

Définition d'un d -tissu

Un d -tissu $\mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$ est une collection de d feuilletages holomorphes F_i de codimension 1 dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ tels que les espaces tangents sont en position générale.



Figure – 2-tissu

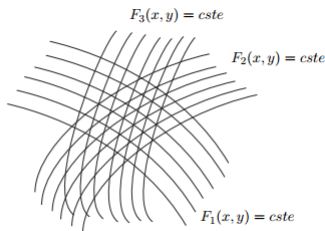


Figure – 3-tissu

Tissus implicites

Un d -tissu implicite de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est donné par l'équation différentielle analytique :

$$\begin{aligned} F(x, y, y') &= a_0(x, y)(y')^d + a_1(x, y)(y')^{d-1} + \dots + a_d(x, y) = 0, \\ &= a_0(x, y) \prod_{i=1}^d (y' - p_i(x, y)), \end{aligned}$$

avec $F \in \mathcal{O}[y']$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $a_i \in \mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$ et

$$\text{Result}_{y'}(F, \partial_{y'} F) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \Delta \neq 0.$$

p_i racines $\iff X_i = \partial_x + p_i(x, y)\partial_y$ ou $y' = p_i(x, y)$,

\iff feuilletages de courbes intégrales F_i avec $p_i = -\frac{\partial_x(F_i)}{\partial_y(F_i)}$.

$\mathcal{W}_1 \sim \mathcal{W}_2 \Leftrightarrow$ il existe un germe de biholomorphismes de $(\mathbb{C}^2, 0)$
qui envoie \mathcal{W}_1 sur \mathcal{W}_2 .

Tissu linéaire et linéarisation

Si toutes les feuilles d'un tissu sont des droites, on parle de tissus **linéaires**.

$\mathcal{W}_1 \sim \mathcal{W}_2$ avec \mathcal{W}_2 d -tissu linéaire $\Leftrightarrow \mathcal{W}_1$ est linéarisable.

Groupes de symétries

Soit \mathcal{S} un système d'équations différentielles. Un groupe de symétrie de \mathcal{S} est un groupe local de transformation G_ε agissant sur un sous ensemble ouvert M du produit $D \times U$ avec les variables indépendantes dans D et les dépendantes dans U tel que si $f : M \rightarrow U$ est une solution de \mathcal{S} alors $g_\varepsilon \cdot f$ est encore une solution.

$$G_\varepsilon : x \in M \mapsto g_\varepsilon \cdot (x, f(x)) \rightsquigarrow X = \left. \frac{d(g_\varepsilon \cdot x)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \partial_x + \left. \frac{d(g_\varepsilon \cdot y(x))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \partial_y.$$

avec $y = y(x)$.

Le champ X est appelé **générateur infinitésimal** de G_ε .

4. P.J. Olver, *Applications of Lie groups to Differential Equations*, Second Edition, Springer, (1998).

Prolongement d'une symétrie

On définit $pr^{(n)}X$ le prolongateur d'un générateur infinitésimal comme un nouveau champ prenant en compte les dérivées des solutions f .

Critère d'invariance

Soit $\Omega_i(x, f(x)^{(k)}) = 0$ avec $i = 1, \dots, d$ et $k = 1, \dots, n$ un système d'équations différentielles de rang maximal sur $M \subset D \times U$. Si G_ε est un groupe de transformation local agissant sur M et

$$pr^{(n)}X[\Omega_i(x, f(x)^{(k)})] = 0, \quad i = 1, \dots, d, \text{ whenever } \Omega_i(x, f(x)^{(k)}) = 0$$

pour tout générateur infinitésimal X de G_ε , alors G_ε est un groupe de symétrie du système.

Théorème de structure

L'ensemble des générateurs infinitésimaux forme une algèbre de Lie dite des symétries.

Définition

Soit \mathcal{W} un d -tissu, un groupe de symétrie de \mathcal{W} est un groupe local de transformations qui laisse invariant chaque feuilles des feuilletages.

Théorème des symétries

Un champ de vecteurs $X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(x, y)\partial_y$ est une symétrie du système d'équations différentielles equations :

$$y' = p_i(x, y(x)), \quad i = 1, \dots, d,$$

si et seulement

$$\alpha_1 \partial_x(p_i) + \alpha_2 \partial_y(p_i) - \partial_x(\alpha_2) - (\partial_y(\alpha_2) + \partial_x(\alpha_1))p_i + \partial_y(\alpha_1)p_i^2 = 0, \\ i = 1, \dots, d.$$

Définition

Un d -tissu est dit **parallèle** s'il est donné par la superposition de d pincesaux de droites parallèles en position générale :

$$\mathcal{W}(a_1x - b_1y, \dots, a_dx - b_dy), \quad (a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2.$$

Les pentes $p_i = -\frac{a_i}{b_i}$ sont constantes.

Lemme

L'algèbre des Lie des symétries d'un d -tissu parallèle est :

$$\mathfrak{g} = \{\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y\}.$$

Définition

Le 3-tissu de Clairaut est donné par les feuilletages

$$F_1(x, y) = y - x, \quad F_2(x, y) = x + y \quad \text{et} \quad F_3(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Lemme

L'algèbre des symétries du tissu de Clairaut est de dimension 3 et donnée par :

$$\begin{aligned} X &= x\partial_x + y\partial_y, & Y &= y\partial_x + x\partial_y, \\ Z &= \left(x \ln(|x^2 - y^2|) + y \ln\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|\right) \right) \partial_x \\ &\quad + \left(y \ln(|x^2 - y^2|) + x \ln\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|\right) \right) \partial_y. \end{aligned}$$

Définition

Le 3-tissu de Zariski est implicitement définie par l'équation différentielle $F(x, y, y') = (y')^3 + x^m y^n = 0$.

Lemme

Le 3-tissu de Zariski admet l'algèbre de Lie des symétries suivantes :

- si $n \neq 3$, $\mathfrak{g} = \{x^{-\frac{m}{3}}\partial_x, y^{\frac{n}{3}}\partial_y, (3-n)x\partial_x + (m+3)y\partial_y\}$,
- si $n = 3$, $\mathfrak{g} = \{x^{-\frac{m}{3}}\partial_x, y\partial_y, \frac{3x}{m+3}\partial_x + y \ln(y)\partial_y\}$.

Théorème [A. Hénaut]

La dimension de l'algèbre de Lie des symétries d'un d -tissu, $d \geq 3$, est égale à 0, 1 ou 3.

Supposons que l'algèbre soit générée par deux champs X_1 et X_2 .

On les redresse pour considérer ∂_x et ∂_y .

Le système des symétries est alors $\partial_x(p_i) = \partial_y(p_i) = 0$, les pentes p_i sont des constantes \Rightarrow C'est un tissu parallèle $\Rightarrow \dim(\mathfrak{g}) = 3$.

Théorème [A. Hénaut]

Pour un 3-tissu implicite \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$,

$$\dim(\mathfrak{g}) = 3 \Leftrightarrow \mathcal{W} \sim \mathcal{W}(x, y, x + y).$$

Module de dérivation

Soit \mathcal{C} une courbe algébrique définie par un polynôme g dans $\mathbb{C}[x, y]$.

$$Der(\mathcal{C}) = \{X \in Der(\mathbb{C}[x, y]) \mid \exists K \in \mathbb{C}[x, y] \ X.g = K.g\},$$

est appelé Polynôme de Darboux et K le cofacteur.

Théorème [A. Hénaut]

Soit \mathcal{W} un d -tissu implicitement défini par $F = a_0 p^d + \dots + a_d$. Si le champ de vecteurs $X = \alpha_1 \partial_x + \alpha_2 \partial_y$ est une symétrie de \mathcal{W} alors X appartient à $Der(\Delta)$.

Théorème

L'algèbre de Lie des symétries est une sous-algèbre de Lie de $Der(\Delta)$.

Arborification et convergence

- Equations différentielles rugueuses (M.Gubinelli, K. Ebrahimi-Fard, F.Patras, D.Manchon),
- Equations aux dérivées partielles stochastiques (M.Hairer),
- Les séries Gevrey.

Vers une résolution de la conjecture de Jarque-Villadelprat

- Analyse la répercussion des sphères de Birkhoff quand la profondeur augmente,
- Des aspects plus géométrique : la variété du centre isochrone.

Les Tissus

- Les G-structures et méthode d'équivalence de Cartan,
- Nature des symétries et théorèmes de type Maillet.

Merci de votre attention !