

UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

## Thèse

Présentée par

**Jordy Palafox**

---

# Calcul Moulien, Arborification, Symétries et Applications

---

Directeur de thèse : **Jacky Cresson**

### Rapporteurs

Kurusch Ebrahimi-Fard	Professeur associé (IMF-NTNU)
Frédéric Patras	Directeur de Recherche (Université de Nice Sophia-Antipolis)
Jacques-Arthur Weil	Professeur des Universités (Université de Limoges)

Thèse soutenue le 25 juin 2018 devant :

### Jury

Jacky Cresson	Professeur des Universités (Université de Pau)	Directeur de thèse
Aziz Hamdouni	Professeur des Universités (Université de La Rochelle)	Examineur
Alain Hénaut	Professeur Emerite (Université de Bordeaux)	Président du jury
Dominique Manchon	Chargé de Recherche (Université de Clermont-Ferrand)	Examineur
Frédéric Menous	Maître de conférence (Université Paris-Sud)	Examineur
Jacques-Arthur Weil	Professeur des Universités (Université de Limoges)	Rapporteur

---

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau (LMAP)  
dans l'école doctorale des sciences exactes et leurs applications de l'UPPA



---

# Remerciement

Ma première pensée va à Jacky Cresson que je remercie chaleureusement de m'avoir permis de réaliser cette thèse en partageant sa passion débordante pour les Mathématiques à l'occasion de nombreuses discussions, lectures dans son bureau, en salle de cours ou en conférence mais aussi lors des activités du Mathematicum qui m'ont donné un goût prononcé pour la vulgarisation. Ses nombreux conseils m'ont permis de progresser continuellement ("il faut faire un tour" ou "il faut voler" me resteront à l'esprit).

Je remercie le LMAP et notamment son directeur Jacques Giacomoni pour m'avoir permis de réaliser ma thèse dans de très bonnes conditions notamment en m'ayant soutenu dans mes nombreux déplacements. Certains membres du LMAP ont une part dans la passion que je porte aujourd'hui pour les Mathématiques, notamment Daniel Delabre que j'ai eu l'honneur d'avoir comme professeur durant mes années d'études dont la pédagogie et la rigueur me resteront en mémoire.

Vient le tour des membres de mon jury de thèse. En premier lieu je voudrais remercier mes trois rapporteurs Jacques-Arthur Weil, Frédéric Patras et Kurusch Ebrahimi-Fard qui ont accepté cette tâche malgré un timing serré.

Je remercie également Aziz Hamdouni et Frédéric Menous pour leur disponibilité.

Merci également à Dominique Manchon qui a eu une place importante dans une partie de mon travail sur l'arborification avec qui j'ai eu plusieurs occasions de travailler et de discuter.

Un dernier mot va à mon président de jury Alain Hénaut. Sa passion pour les tissus m'a particulièrement marqué. Ses remarques et suggestions ont été source d'améliorations du manuscrit et de motivation pour ces objets si particuliers que sont les tissus.

Je voudrais conclure en remerciant globalement les membres de mon jury, qui par leurs intérêts à ce travail, leurs remarques et différentes questions qui m'ont fait avancer dans ce travail et affiner mon point de vue et mes connaissances sur ces différents sujets.

Cette thèse s'est construite grâce à de nombreuses rencontres et deux m'ont particulièrement marquées à la conférence de FELIM. Celles de Islam Boussaada et Guillaume Chèze dont l'enthousiasme, la bienveillance et la motivation m'auront marqué au cours de ces trois années.

Je remercie également tous les doctorants que j'ai pu rencontrer au cours de ces différentes années : Zeina pour son accueil chaleureux dans le bureau 3 qui est je ne sais où, Nicolas pour les nombreuses discussions que nous avons eu, Juan mon grand frère mathématiques pour ses nombreux conseils, Mohammed et Saad, mes compagnons de bureau ainsi que Abdel Kader pour nos très nombreuses

discussions. Je remercie également mes confrères de vulgarisation au sein du Mathematicum qu'ont été Justine, Mamadou et Aurélien. J'ai aussi une pensée pour Gabriel pour ces heures en cours d'anglais. Enfin et non des moindres je remercie Laurène Hume, "compagnon de galère", durant toutes ces années depuis la licence avec qui j'ai pu partager autant mes doutes que ma motivation.

Je conclurais en remerciant ma famille, mes parents pour leurs soutiens indéfectibles, ainsi que mes sœurs qui ont une part non négligeable dans mon parcours. Le soutien de mes amis depuis si longtemps a aussi joué un rôle évident. Enfin mes derniers mots vont pour Myriam qui partage ma vie et qui m'a supporté au quotidien pendant ces années.

# Table des matières

## Remerciement

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Calcul moulien, arborification et applications</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2 Rappels de calcul moulien</b>	<b>13</b>
2.1 Moules et notations . . . . .	13
2.2 Moules et séries formelles . . . . .	14
2.3 Opérations et structure sur les moules . . . . .	14
2.4 Symétries de moules et aspects algébriques . . . . .	15
2.5 Rappel sur le théorème de projection . . . . .	17
2.6 Champs de vecteurs et écriture moulienne . . . . .	18
2.7 Formes prénormales d'un champ de vecteurs . . . . .	19
<b>3 Arborification et coarborification</b>	<b>21</b>
3.1 Algèbre de Hopf de Connes-Kreimer . . . . .	21
3.1.1 Définitions . . . . .	21
3.1.2 Notations . . . . .	24
3.2 Arborification . . . . .	25
3.3 Moules et Arborification . . . . .	26
3.4 Arborification de moules élémentaires . . . . .	27
3.5 Propriétés algébriques de l'arborification . . . . .	29
3.5.1 Arborification et produit de moules . . . . .	29
3.5.2 Arborification et moules symétraux/alternaux . . . . .	30
<b>4 Invariance de moules sous arborification : une approche directe</b>	<b>33</b>
<b>5 Equations fonctionnelles de moules et arborification</b>	<b>35</b>
5.1 Equations fonctionnelles de moules et symétries . . . . .	35
5.1.1 Dérivations élémentaires et composites sur les moules . . . . .	35
5.1.2 Sur la variance de moule et une dérivation associée . . . . .	37

5.1.3	Dérivations et symétries . . . . .	39
5.1.4	Automorphismes élémentaires . . . . .	39
5.2	Equations fonctionnelles de moules et arborification . . . . .	40
5.2.1	Dérivations et automorphismes sur les moules arborescents . . . . .	40
5.2.2	Arborification de dérivations et d'automorphismes . . . . .	42
5.2.3	Invariance d'équations fonctionnelles sous arborification . . . . .	43
5.2.4	Exemples sur des moules élémentaires . . . . .	43
5.2.5	Sur les moules "tough" . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Arborification et convergence</b>	<b>47</b>
6.1	Un Lemme fondamental . . . . .	47
6.2	Structure de la démonstration du théorème de Brjuno . . . . .	50
6.2.1	Automorphisme de substitution et conjugaison de champs de vecteurs . . . . .	50
6.2.2	Comoules et estimations . . . . .	52
6.2.3	Le cas de Poincaré - convergence sans arborification . . . . .	54
6.2.4	Le cas de Brjuno - convergence et arborification . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Arborification et approche de Butcher des schémas numériques de Runge-Kutta</b>	<b>59</b>
7.1	Solution d'une équation différentielle et automorphisme de substitution . . . . .	60
7.2	Arborification de l'automorphisme de substitution . . . . .	61
7.2.1	Arborification de $V_f$ et du moule $Tay^\bullet$ . . . . .	62
7.2.2	Codage des arbres : l'approche de Butcher . . . . .	63
7.3	Approche de Butcher des schémas de Runge-Kutta et arborification . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>69</b>
<b>II</b>	<b>Correction de champs de vecteurs, problème du centre isochrone et conjecture de Jarque-Villadelprat</b>	<b>71</b>
<b>9</b>	<b>Introduction</b>	<b>75</b>
9.1	Principaux résultats . . . . .	76
9.2	Plan . . . . .	78
<b>10</b>	<b>Correction de champs de vecteurs</b>	<b>79</b>
10.1	Introduction à la correction de champs de vecteurs . . . . .	79
10.1.1	Définition de la correction . . . . .	79
10.1.2	Le moule de la correction . . . . .	82
10.1.3	Quelques calculs du moule de la correction . . . . .	82
10.2	Correction d'un champ de vecteurs polynomial . . . . .	83
10.2.1	Forme préparée et alphabet . . . . .	83
10.2.2	Profondeur . . . . .	85
10.2.3	Expression de la correction et critère de linéarisation . . . . .	86
10.3	Correction d'un champ de vecteurs Hamiltonien polynomial réel . . . . .	87

10.3.1	Propriétés générales . . . . .	87
10.3.2	Calcul explicite et lemme fondamental . . . . .	89
10.3.3	Exemple de calculs . . . . .	91
<b>11</b>	<b>Variété isochrone</b>	<b>95</b>
11.1	Variété affine de centre isochrone . . . . .	95
11.1.1	Démonstration du théorème 20 . . . . .	96
11.2	$\mathbb{C}^*$ -invariance . . . . .	97
<b>12</b>	<b>Algèbre de Lie, complexité géométrique des conditions de centre isochrone</b>	<b>99</b>
12.1	Centre isochrone quadratique . . . . .	100
12.2	Algèbre de Lie engendrée par un champ de vecteurs polynomial . . . . .	102
12.2.1	Série centrale descendante et algèbre de Lie nilpotente . . . . .	102
12.2.2	Preliminaires . . . . .	102
12.2.3	Algèbre de Lie Nilpotente - Conditions uniformes . . . . .	102
12.2.4	Sous-ensemble résonant - Conditions holomorphes . . . . .	103
12.3	Isochronisme uniforme . . . . .	104
12.4	Centre isochrone holomorphe . . . . .	105
12.5	Linéarisation et complexité . . . . .	105
<b>13</b>	<b>Démonstrations de la partie 2</b>	<b>107</b>
13.1	Démonstration du Théorème 12 . . . . .	107
13.2	Démonstration du Théorème 13 . . . . .	109
13.3	Démonstration du théorème 14 . . . . .	110
<b>14</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>113</b>
14.1	Vers une démonstration complète de la conjecture de Jarque-Villadelprat . . . . .	113
14.2	Base de Hilbert effective et variété affine de centres isochrones . . . . .	113
14.3	Isochronisme de systèmes Hamiltoniens complexes . . . . .	114
<b>III</b>	<b>Symétries et linéarisation des tissus du plan - Un point de vue dynamique</b>	<b>115</b>
<b>15</b>	<b>Introduction</b>	<b>119</b>
15.1	Tissus . . . . .	119
15.1.1	Les différentes représentations d'un tissu . . . . .	120
15.1.2	Forme préparée d'une équation différentielle polynomiale . . . . .	121
15.1.3	Construction du tissu explicite associé à une forme préparée . . . . .	122
15.2	Linéarisation des tissus . . . . .	123
15.2.1	Equivalence de tissus . . . . .	123
15.2.2	Tissus linéaires et linéarisation . . . . .	124
15.2.3	Linéarisation des tissus implicites et groupes de symétries . . . . .	125
15.3	Plan . . . . .	125

<b>16 Groupe de symétrie</b>	<b>127</b>
16.1 Groupes de symétries et générateurs infinitésimaux . . . . .	127
16.2 Prolongement et critère d'invariance . . . . .	129
16.3 Structures des symétries et propriétés du groupe de symétries . . . . .	131
<b>17 Symétrie des tissus</b>	<b>133</b>
17.1 Définition de symétries de tissus planaires . . . . .	133
17.2 Théorèmes sur les symétries . . . . .	134
17.3 Groupes de symétries de tissus particuliers . . . . .	136
17.3.1 Cas des 1-tissu et 2-tissu . . . . .	136
17.3.2 Le cas parallèle . . . . .	137
17.3.3 Un 3-tissu donné par Élie Cartan . . . . .	138
17.3.4 Sur un tissu linéarisable . . . . .	139
17.4 Régularité des symétries et tissu de Clairaut . . . . .	141
17.4.1 Tissu de Clairaut . . . . .	141
17.4.2 Autour des théorèmes de type Maillet . . . . .	143
17.5 Dimension du groupe de symétries d'un tissu . . . . .	144
17.5.1 Un théorème d'Alain Hénaut . . . . .	144
17.5.2 Le tissu de Zariski . . . . .	145
17.5.3 Groupe des symétries d'un tissu hexagonal standard . . . . .	147
<b>18 Arrangement de droites et tissus algébriques</b>	<b>149</b>
18.1 Arrangements de droites de $\mathbb{P}^2$ et tissus algébriques . . . . .	149
18.2 Relations abéliennes et rang d'un tissu . . . . .	150
18.3 Algébrisation et linéarisation de tissus . . . . .	151
18.4 Caractérisation des 3-tissus hexagonaux . . . . .	152
<b>19 Symétrie d'un tissu et module de dérivations de la courbe discriminante du polynôme de présentation</b>	<b>153</b>
19.1 Autour du Théorème de Darboux . . . . .	153
19.2 Groupe de symétries d'un tissu et facteurs intégrants . . . . .	155
19.3 Polynôme de Darboux et courbe discriminante du polynôme de présentation d'un tissu implicite . . . . .	156
19.4 Module de dérivations et courbes discriminantes . . . . .	157
19.5 Lien avec les arrangements de droites . . . . .	158
<b>20 Algorithme de P.J. Olver</b>	<b>161</b>
20.1 Invariants du groupe de symétries . . . . .	161
20.2 Algorithme d'Olver . . . . .	161
20.3 Exemples . . . . .	162
20.3.1 Tissus parallèles . . . . .	162
20.3.2 Tissu de Clairaut . . . . .	163



<b>21 Perspectives</b>	<b>165</b>
<b>Annexes : Implémentation Maple</b>	<b>169</b>
<b>Annexes : Démonstration sur l'arborification</b>	<b>175</b>
<b>Annexes : Résultats techniques sur le moule de la correction</b>	<b>179</b>
21.1 Définition du moule de la correction . . . . .	179
21.2 Construction du moule de la variance . . . . .	179
21.3 Démonstration du Lemme 34 . . . . .	181
21.4 Démonstration du Lemme 35 . . . . .	183
21.5 Démonstration du Théorème 21 . . . . .	184
21.6 Démonstration du Lemme 47 . . . . .	184

# Introduction

Ce mémoire est constitué de trois parties qui traitent toutes de **problèmes de dynamique continue ou discrète** en utilisant des **outils algébriques et combinatoires**. L'outil essentiel pour les deux premières est le **calcul moulien** introduit par Jean Ecalle dans les années 70 et en particulier la **méthode d'arborification**. La troisième partie analyse le rôle des **groupes de symétries** pour les **tissus du plan** en suivant un travail prépublié de Alain Hénaut (voir [52]).

La **partie I** étudie l'**arborification** et ses applications dans les systèmes dynamiques et en analyse numérique. Bien que de provenances différentes, chacun de ces domaines fait apparaître des séries formelles non commutatives qu'il est possible de mettre en forme dans le cadre du **calcul moulien**. L'intérêt de ces séries est que leurs coefficients, appelés moules, sont donnés par des formules permettant de les calculer explicitement. Pour la plupart, ils vérifient même des équations fonctionnelles. Ce caractère algorithmique se paie parfois par une difficulté à démontrer la convergence des objets associés, par exemple l'automorphisme de normalisation dans le cas de la linéarisation analytique des champs de vecteurs. Ici se mêlent l'analyse et la combinatoire. Les difficultés dans l'étude de la convergence des séries proviennent du fait que certaines compensations s'effectuent dans les différentes parties de la série, compensations provenant des symétries des coefficients.

Jean Ecalle a développé la méthode d'arborification afin de prendre en compte ces symétries. Grossièrement, elle consiste à regrouper certains termes de la série. Une formalisation de cette méthode est donnée par Frédéric Fauvet et Frédéric Menous dans [36] à l'aide de l'algèbre de Hopf des arbres enracinés de Connes et Kreimer. Bien que le cadre algébrique de l'arborification soit précisé, ce travail ne permet pas d'expliquer les raisons profondes du succès de la méthode d'arborification dans différents domaines. Dans les chapitres 3 à 5 de la partie I nous explicitons divers critères sous lesquels la méthode d'arborification permet de démontrer la convergence des séries formelles. Ces critères sont en quelque sorte une formalisation d'une remarque de Jean Ecalle sur cette méthode (voir [30, p.95-96]), à savoir que la méthode d'arborification fonctionne lorsque les coefficients de la série arborifiée vérifient des estimations de même nature que les coefficients de la série initiale. Ceci n'a rien d'évident puisqu'ils sont obtenus par regroupement des anciens coefficients. Cette idée se formalise par la notion d'**invariance sous arborification** d'un moule donné et la manière dont les différentes symétries et équations satisfaites par les moules sont préservées sous arborification. Dans le cadre de la linéarisation des champs de vecteurs analytiques ces résultats fournissent une **démonstration complète** du **théorème de Brujno de linéarisation analytique** suivant les étapes esquissées par Jean Ecalle dans son article [30]. L'ensemble de ce travail a donné lieu à un article avec Dominique Manchon et Jacky Cresson intitulé "*Arborification, invariance and convergence of normalizing series*".

Les équations différentielles ainsi que les méthodes numériques associées sont une source importante de séries formelles. En effet, à toute solution  $\phi_t$  d'une équation (déterministe ou non) est attaché l'**automorphisme de substitution**  $\phi_t^*$  sur une certaine algèbre  $\mathcal{H}$ , à savoir pour tout  $g \in \mathcal{H}$ ,  $\phi_t^*(g) = g \circ \phi_t$ . Ces objets s'écrivent naturellement comme séries formelles sur une algèbre de Hopf qu'il est possible d'expliciter. Cette écriture repose sur une forme itérée de la formulation intégrale de l'équation différentielle. Ici aussi, l'analyse des séries ainsi construites fait intervenir l'arborification. Par exemple, le **développement de Taylor intégral** de  $\phi_t$ , bien que contenu dans la série, n'est pas explicite et seule la méthode d'**arborification** donne **accès aux coefficients de ce développement**. Ce point est d'une importance capitale car il précise le cadre algébrique dans lequel on écrit le flot d'une équation mais aussi les **éléments universels** qui entrent en compte dans sa description. Il est par ailleurs fondamental dans l'étude des méthodes numériques, en particulier les méthodes de Runge-Kutta [11]. En effet, une méthode numérique à un pas  $h > 0$ , définie par un difféomorphisme  $\psi_h$  est d'ordre  $k$  si son développement de Taylor en  $h$  coïncide avec celui de  $\phi_h$  jusqu'à l'ordre  $k$ . Comme nous l'avons vu, il suffit pour cela de comparer les deux séries dont l'une est naturellement codée par l'algèbre des arbres enracinés de Connes-Kreimer par le procédé d'arborification. Il est donc naturel de chercher une représentation dans ce formalisme de  $\psi_h$ . Ce faisant, nous sommes conduits à la formalisation obtenue par Butcher [11] dans les années 60 dans son étude des propriétés algébriques des méthodes de Runge-Kutta. Néanmoins, l'approche est ici toute différente puisque le formalisme algébrique n'est pas seulement lié aux méthodes numériques de Runge-Kutta mais provient du besoin d'analyse des séries formelles construites par représentation intégrale via la méthode d'arborification. En ce sens, les différents résultats obtenus sur les méthodes de Runge-Kutta, la normalisation des champs de vecteurs, ou plus récemment sur les équations différentielles stochastiques, peuvent tous s'envisager comme des études de convergence de séries associées aux automorphismes de substitution sur certaines algèbres de Hopf via la méthode d'arborification de Jean Ecalle. Ces éléments sont discutés dans le chapitre 7.

La **partie II** continue l'exploration de l'utilisation du calcul moulien pour aborder des questions de dynamique. Cette partie est centrée sur une **conjecture due à Jarque et Villadelprat** (voir [55]) et qui peut se formuler de la manière suivante : Soit  $X$  un champ de vecteurs polynomial Hamiltonien réel de la forme :

$$X(x, y) = -\partial_y H(x, y)\partial_x + \partial_x H(x, y)\partial_y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

où  $H(x, y)$  est un polynôme réel en les variables  $x$  et  $y$ . Le degré maximal des polynômes  $\partial_x H$  et  $\partial_y H$  est le degré du champ de vecteurs Hamiltonien.

**Conjecture 1.** *Tout centre d'un système polynomial Hamiltonien planaire de degré pair est non isochrone, c'est à dire qu'il n'est pas analytiquement linéarisable.*

Cette conjecture est ouverte sauf dans le cas quadratique et quartique. On renvoie au Chapitre 9 pour plus de détails. Essentiellement, ce problème a été abordé de deux façons différentes. La première consiste à vérifier la condition de linéarisation explicitement en fonction des coefficients du champ  $X$ .

Cette méthode est a priori pénible et difficilement manipulable pour des degrés élevés. La seconde est d'utiliser des techniques géométriques. Là encore, la complexité des polynômes mis en jeu, ne permet pas d'espérer une approche générale du problème.

Dans ce mémoire, nous **démontrons la version faible de la conjecture de Jarque-Villadelprat**, à savoir que si toutes les composantes de la perturbation polynomiale  $H$  sont paires alors le champ est non isochrone. Nous démontrons par ailleurs la **validité de la conjecture** pour une **large classe de perturbation** et ceci en **degré quelconque**. L'outil essentiel est la **correction** introduite par Jean Ecalle et Bruno Vallet dans [33, 34] et initiée par Giovanni Gallavotti dans [40]. Le calcul moulien montre ici sa pleine puissance en décomposant ce qui dans le problème de linéarisation est universel et ce qui dépend explicitement des valeurs des coefficients de la perturbation. En particulier, on obtient une description explicite de la **variété algébrique isochrone**, c'est à dire de l'ensemble des coefficients de polynômes donnant lieu à un champ isochrone. L'étude détaillée de ces variétés fait apparaître le rôle clef de certaines algèbres de Lie et permet de mettre en forme une notion de **complexité géométrique** des conditions de centre isochrone.

L'ensemble de ces résultats a fait l'objet d'une publication "*Lie algebras and geometric complexity of an isochronous center*", Proceedings Monografias Matemáticas "Garcia De Galdenao", p.75-83, 2018 (avec Jacky Cresson) et d'un preprint soumis "*Isochronous centers of polynomial Hamiltonian systems and a conjecture of Jarque and Villadelprat*", Arxiv 1605.07775, 32.p, 2017.

La **partie III** concerne la **classification des équations différentielles de degré  $n$  du premier ordre** en étudiant le tissu du plan associé. Un  $d$ -**tissu** est caractérisé par la donnée de  $d$  feuilletages holomorphes de codimension 1 en position générale. Parmi ces tissus, on distingue les tissus dits **parallélisables** et **linéarisables**. Pour les premiers, il existe un biholomorphisme tel que toutes les feuilles soient des droites parallèles et pour les seconds, les feuilles sont des droites non nécessairement parallèles. La caractérisation des tissus linéarisables a une longue histoire et nous renvoyons le lecteur au livre de L. Pirio et J. V. Pereira [72] ainsi que le séminaire Bourbaki de Arnaud Beauville [2]. Dans un preprint récent [52], **Alain Henaut** propose de **lire la linéarisation ou parallélisation des tissus** dans le **groupe de symétries** qui leur est associé. Ses résultats n'utilisent pas le formalisme des groupes de symétries des équations différentielles exposé par exemple dans le livre classique de Peter Olver [68]. Comme dans la Partie II, certaines algèbres de Lie vont jouer un rôle essentiel. Certains **résultats obtenus par Alain Henaut** sont **précisés et détaillés** dans le **cadre** classique de l'action des groupes de symétries sur les équations différentielles tel que formalisé dans le livre **d'Olver**. En particulier, nous discutons les relations existantes entre symétries, polynômes de Darboux, modules de dérivations et arrangements de droites.

Chaque partie contient en conclusion une liste de perspectives ouvertes par nos travaux.



Première partie

Calcul moulien, arborification et  
applications



# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Rappels de calcul moulien</b>	<b>13</b>
2.1	Moules et notations . . . . .	13
2.2	Moules et séries formelles . . . . .	14
2.3	Opérations et structure sur les moules . . . . .	14
2.4	Symétries de moules et aspects algébriques . . . . .	15
2.5	Rappel sur le théorème de projection . . . . .	17
2.6	Champs de vecteurs et écriture moulienne . . . . .	18
2.7	Formes prénormales d'un champ de vecteurs . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Arborification et coarborification</b>	<b>21</b>
3.1	Algèbre de Hopf de Connes-Kreimer . . . . .	21
3.2	Arborification . . . . .	25
3.3	Moules et Arborification . . . . .	26
3.4	Arborification de moules élémentaires . . . . .	27
3.5	Propriétés algébriques de l'arborification . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Invariance de moules sous arborification : une approche directe</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Equations fonctionnelles de moules et arborification</b>	<b>35</b>
5.1	Equations fonctionnelles de moules et symétries . . . . .	35
5.2	Equations fonctionnelles de moules et arborification . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Arborification et convergence</b>	<b>47</b>
6.1	Un Lemme fondamental . . . . .	47
6.2	Structure de la démonstration du théorème de Brjuno . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Arborification et approche de Butcher des schémas numériques de Runge-Kutta</b>	<b>59</b>
7.1	Solution d'une équation différentielle et automorphisme de substitution . . . . .	60



7.2	Arborification de l'automorphisme de substitution . . . . .	61
7.3	Approche de Butcher des schémas de Runge-Kutta et arborification . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>69</b>

---

# Chapitre 1

## Introduction

La linéarisation analytique d'un champ de vecteurs satisfaisant les conditions diophantiennes de Brjuno peut être démontrée de différentes manières. Dans cette partie, on discute de la preuve donnée par J. Ecalle en utilisant le formalisme moulien et ce qu'il appelle *méthode d'arborification*. Le calcul moulien permet de construire des applications linéarisantes qui sont des séries formelles non-commutatives de la forme :

$$\sum_{\bullet} M^{\bullet} B_{\bullet}, \quad (1.1)$$

où les quantités  $M^{\bullet}$  et  $B_{\bullet}$  représentent respectivement un scalaire et un opérateur différentiel indexés sur un alphabet  $\mathbf{A}$ . Ces quantités peuvent être calculées algorithmiquement.

Démontrer la convergence de ces séries et leurs inverses n'est pas directement possible en général. En effet, les estimations classiques donnent pour un mot  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}^*$  :

$$\| B_{\mathbf{n}} \| \leq \ell(\mathbf{n})! C^{w(\mathbf{n})}, \quad (1.2)$$

où  $\ell(\mathbf{n})$  (resp.  $w(\mathbf{n})$ ) est la *longueur* (resp. le *poids*) du mot  $\mathbf{n}$  et  $\| - \|$  est la norme d'opérateur construite sur une norme appropriée sur l'espace des fonctions analytiques (voir par exemple [23, Section 2.2]). Dans la plupart des exemples, les moules satisfont une *estimation polynomiale* de la forme :

$$| M^{\mathbf{n}} | \leq Q^{w(\mathbf{n})}, \quad (1.3)$$

qui implique le même type d'estimation polynomiale pour le moule inverse. Ce point est important notamment pour les équations de conjugaison.

En utilisant ces estimations on obtient directement que les séries associées (directe et son inverse) satisfont :

$$\left\| \sum_{\mathbf{n}; \ell(\mathbf{n})=r, w(\mathbf{n})=N} M^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \right\| \leq r! (QC)^N, \quad (1.4)$$

ce qui ne permet pas de conclure à la convergence des séries. Le point principal est que l'estimation précédente est plus ou moins *optimale*, signifiant que l'on doit travailler directement sur l'expression de la série pour obtenir des résultats.

Toutefois, sous un regroupement de termes approprié appelé *arborification*, la convergence peut être démontrée. L'origine de cette méthode est précisément liée avec l'analyse de la convergence de série. On renvoie à [21, p.387-393] pour un exposé détaillé. Dans cette partie nous utilisons la présentation algébrique de l'arborification proposée par F. Fauvet et F. Menous dans [36].

Brièvement, les bons regroupements peuvent être encodés en utilisant l'ensemble des *forêts décorées*  $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  sur l'alphabet initial  $\mathbf{A}$ , amenant à des séries formelles non commutatives sur  $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  satisfaisant par construction :

$$\sum_{\bullet \in \mathbf{A}^*} M^\bullet B_\bullet = \sum_{\bullet \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}}} M_\bullet^\bullet B_\bullet^<. \quad (1.5)$$

Ici  $M_\bullet^\bullet$  est appelé *arborification* du moule  $M^\bullet$  et le comoule  $B_\bullet^<$  est dit *co-arborification* du comoule  $B_\bullet$ . Les deux peuvent être calculés explicitement à partir de la donnée des  $M^\bullet$  et  $B_\bullet$ .

Sous cette réécriture on obtient par construction les estimations suivantes sur les comoules arborifiés :

$$\| B_t^< \| \leq C^{\ell(t)} Q_1^{w(t)}, \quad (1.6)$$

où  $\ell(t)$  est la *taille*, *longueur* des forêts, i.e. le nombre de ses sommets. Cette nouvelle estimation est intéressante car le factoriel de la longueur disparaît. Toutefois par construction on pourrait s'attendre à un "accroissement concomitant" sur le moule. C'est la partie intéressante (voir le commentaire de J. Ecalle dans [30, p.95-96]) car lorsque la technique d'arborification marche, on peut démontrer que le moule arborifié satisfait aussi une estimation polynomiale, i.e.

$$| M_\bullet^t | \leq Q_3^{w(t)}. \quad (1.7)$$

En conséquence, notre principal objectif est de *comprendre sous quelles conditions un moule satisfaisant une estimation polynomiale satisfera encore le même type d'estimation après arborification*.

Dans la plupart des exemples, la raison pour laquelle l'arborification marche est très simple et tient du fait que les moules conservent la même forme sous l'effet de l'arborification (ce que J. Ecalle appelle *stabilité sous arborification* dans [31, p.1434]). Ce point est d'ailleurs mis en évidence par J. Ecalle dans son article [30].

Dans cette partie nous donnerons plusieurs critères pour qu'un moule soit invariant par arborification. L'un de ces critères suppose que la forme explicite du moule soit connue. Un second utilise le fait que le moule satisfait une *équation fonctionnelle* qui est invariante par arborification. Ces critères couvrent tous les résultats connus dans la littérature. En particulier on retrouve le fait que l'arborification peut être utilisée pour démontrer le Théorème de linéarisation de Brjuno pour les champs de vecteurs ou difféomorphismes aussi bien que pour l'analyticité de la correction d'un champ de vecteurs.

Le plan de cette partie est le suivant :

---

Dans le chapitre 2 nous rappelons quelques éléments de base du calcul moulien.

Ensuite dans le chapitre 3, nous donnons une introduction à la méthode d'Arborification-Coarborification, mixant la présentation classique donnée par Jean Ecalle et celle donnée par F. Fauvet et F. Menous dans [36] utilisant l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer.

Dans le chapitre 4, nous étudions les moules qui sont invariants dans un certain sens par arborification.

Le chapitre 5 nous permet de nous concentrer sur les moules satisfaisant des équations fonctionnelles ce qui implique directement leur invariance par arborification. Le moule de linéarisation est un exemple de ce type.

Dans le chapitre 6, nous rassemblons ces résultats dans le but d'expliquer comment l'arborification marche dans le cas de la linéarisation analytique de champs de vecteurs satisfaisant une équation de Brjuno.

Enfin un dernier chapitre sera consacré à montrer comment l'arborification peut être utilisée en application pour retrouver les résultats classiques de J.C. Butcher en analyse numérique sur les schémas de Runge-Kutta.

Nous prenons le parti de donner des preuves constructives dans la plupart des théorèmes, propositions et lemmes, même si elles pourraient être simplifiées en utilisant des résultats abstraits sur les algèbres de Hopf. La raison est que les moules sont conçus pour fournir un outil algorithmique efficace dans les calculs. Nous donnerons de nombreux exemples pour illustrer nos résultats.



## Chapitre 2

# Rappels de calcul moulien

Dans ce chapitre, nous donnons plusieurs rappels sur le *calcul moulien* suivant la présentation de J. Ecalle qui l'a introduit dans les années 70. On fera ainsi le lien entre les formalismes classiques des séries formelles et les fameux *moules* qui sont des *fonctions à un nombre variable de variables*.

Pour un exposé détaillé, on renvoie aux nombreux articles de J. Ecalle, principalement [29, 30]. On pourra aussi consulter les articles de J. Cresson [21] ou encore de F. Fauvet et F. Menous [36].

### 2.1 Moules et notations

Dans l'ensemble de ce manuscrit, l'ensemble  $\mathbf{A} = \{n_1, n_2, \dots\}$  désigne un alphabet fini ou infini. On note  $\mathbf{A}^*$  l'ensemble des mots construits sur l'alphabet  $\mathbf{A}$ . Un mot est une suite totalement ordonnée de lettres noté  $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$  ou  $n_1 n_2 \cdots n_r$  où  $\cdot$  est l'opération de concaténation de lettres.

La longueur  $\ell$  d'un mot  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  est le nombre de ses lettres, ainsi  $\ell(\mathbf{n}) = \ell(n_1 \cdots n_r) = r$ .

La longueur désigne donc un entier naturel. Par convention, l'unique mot de longueur nulle est le mot vide souvent noté  $\emptyset$ .

L'ensemble des mots de longueur  $r$  est noté  $\mathbf{A}_r^*$ .

L'ensemble  $\mathbf{A}$  est souvent muni d'une structure de semi-groupe additif, c'est-à-dire muni d'une loi de composition interne associative, notée traditionnellement  $+$  dans les travaux de J. Ecalle. Cette structure est nécessaire pour additionner des lettres et en particulier définir la composition de moules que nous verrons dans les sections suivantes.

**Définition 1.** Soit  $\mathbf{A}$  un alphabet additif, alors on définit l'application  $\|\cdot\|: \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{A}$  qui à un mot  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  associe la lettre  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$  qui est la somme des lettres.

**Remarque 1.** L'application  $\|\cdot\|$  n'est pas une norme, cependant ici nous conserverons la notation de J. Ecalle (voir [29]).

On peut maintenant définir les moules :

**Définition 2.** Soient  $\mathbb{K}$  un anneau commutatif et  $\mathbf{A}$  un alphabet. Un moule  $M^\bullet$  sur  $\mathbf{A}$  est une application de  $\mathbf{A}^*$  dans  $\mathbb{K}$ . La notation classique de J. Ecalle pour l'évaluation d'un moule  $M^\bullet$  en un mot  $\mathbf{n}$  est  $M^\mathbf{n}$ .

L'ensemble des moules sur  $\mathbf{A}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ .

## 2.2 Moules et séries formelles

Un moule peut être vu et interprété de manière plus naturelle comme coefficient de série formelle non commutative.

On note  $\mathbb{K}\langle\mathbf{A}\rangle$  l'anneau des combinaisons linéaires finies à coefficients dans  $\mathbb{K}$  d'éléments de  $\mathbf{A}^*$ , autrement dit des polynômes non commutatifs sur  $\mathbf{A}^*$  et  $\mathbb{K}_r\langle\mathbf{A}\rangle$  l'anneau des polynômes non commutatifs homogènes de degré  $r$ .

L'ensemble  $\mathbb{K}\langle\mathbf{A}\rangle$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre non commutative munie d'une graduation naturelle par la longueur des mots :

$$\mathbb{K}\langle\mathbf{A}\rangle = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathbb{K}_r\langle\mathbf{A}\rangle.$$

La complétion  $\mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle$  de  $\mathbb{K}\langle\mathbf{A}\rangle$  est l'algèbre des séries formelles non commutatives à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Dans une telle algèbre, un élément s'écrit :

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}^*} M^{\mathbf{n}} \mathbf{n}, \text{ où } M^{\mathbf{n}} \in \mathbb{K},$$

ou encore

$$\sum_{r \in \mathbb{N}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}_r^*} M^{\mathbf{n}} \mathbf{n}.$$

A l'inverse pour un moule donné  $M^{\bullet}$  sur l'alphabet  $\mathbf{A}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , on définit sa série génératrice  $\phi_M$  qui est un élément de  $\mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle$  par :

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}^*} M^{\mathbf{n}} \mathbf{n}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'alphabet, on pourra utiliser les notations abrégées de J. Ecalle, à savoir :

$$\sum_{\bullet} M^{\bullet} \bullet.$$

On a alors l'identification :

**Proposition 1.** *L'application de  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$  dans  $\mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle$  qui à un moule associe sa série génératrice est bijective.*

## 2.3 Opérations et structure sur les moules

L'identification entre moules et séries formelles permet un transfert des opérations connues sur les séries vers les moules. On introduit ainsi trois opérations de base sur les moules : somme, multiplication et composition.

**Définition 3.** La somme de deux moules  $M^\bullet$  et  $N^\bullet$  est le moule  $M^\bullet + N^\bullet$  donné par :

$$(M^\bullet + N^\bullet)^{\mathbf{n}} = M^{\mathbf{n}} + N^{\mathbf{n}}, \text{ où } \mathbf{n} \in \mathbf{A}^*.$$

Cette opération correspond à la somme classique de séries formelles et a pour élément neutre le moule  $O^\bullet$  qui vaut 0 pour tout mot  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}^*$ . L'opération de multiplication de séries formelles elle donne une multiplication naturelle sur les moules :

**Définition 4.** Le produit de deux moules  $M^\bullet$  et  $N^\bullet$  est un moule noté  $(M \times N)^\bullet$  défini par :

$$(M \times N)^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}^1 \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}} M^{\mathbf{n}^1} N^{\mathbf{n}^2},$$

qui est la somme sur toutes les décompositions en deux sous-mots de  $\mathbf{n}$ .

Cette opération est évidemment non commutative et a pour élément neutre le moule  $1^\bullet$  défini par :

$$1^{\mathbf{n}} = 1 \text{ si } \mathbf{n} = \emptyset \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Il existe des formules explicites de moules inverses pour le produit de moules. Nous y reviendrons en détails dans les chapitres suivants notamment le chapitre 6.

Si l'alphabet  $\mathbf{A}$  est muni d'une structure de semi-groupe additif alors on peut définir la composition de moules qui correspond à l'opération de substitution de séries formelles.

**Définition 5.** Soient  $M^\bullet$  et  $N^\bullet$  deux moules sur  $\mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\mathbb{K})$ . On définit alors le moule composé  $M \circ N^\bullet$  par :

$$\begin{aligned} 1) \quad (M \circ N)^\emptyset &= M^\emptyset, \\ 2) \quad (M \circ N)^{\mathbf{n}} &= \sum_{k=1}^{\ell(\mathbf{n})} \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^k =^* \mathbf{n}} M^{\|\mathbf{n}^1\| \dots \|\mathbf{n}^k\|} N^{\mathbf{n}^1} \dots N^{\mathbf{n}^k}, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^k =^* \mathbf{n}$  correspond à la somme sur toutes les partitions en  $k$  mots du mot  $\mathbf{n}$  telles que  $\mathbf{n}^i \neq \emptyset$ .

Pour cette composée de moules, on dispose d'un élément neutre, le moule  $I^\bullet$  défini par  $I^{\mathbf{n}} = 1$  si  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}$  et 0 sinon.

On a ainsi :

**Proposition 2.** L'ensemble  $\mathcal{M}_{\mathbf{A}}(\mathbb{K})$  muni de la multiplication par un scalaire et des opérations  $+$ ,  $\times$  et  $\circ$  est une algèbre à composition, c'est à dire :

$$\forall M^\bullet, N^\bullet, U^\bullet, \text{ on a } (M \times N) \circ U^\bullet = (M \circ U) \times (N \circ U)^\bullet.$$

## 2.4 Symétries de moules et aspects algébriques

Pour cette section, nous donnons quelques rappels sur les algèbres de Lie libres. On renvoie à [73] pour un exposé détaillé sur le sujet.



Soit  $\mathbf{A}$  un ensemble, on note  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$  l'algèbre de Lie libre engendrée par  $\mathbf{A}$ . Ses éléments sont des crochets de Lie formels  $[\cdot, \cdot]$ .

On a l'inclusion  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle$  où cette dernière algèbre des séries formelles est en fait l'algèbre universelle de  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ .

De plus, on note  $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$  le groupe de Lie associé à  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ .

On définit l'application  $\Delta : \mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle$  qui est un morphisme d'algèbre défini par  $\Delta(1) = 1 \otimes 1$  et  $\Delta(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{n}$  pour  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}$  qui donne une structure de bigèbre graduée.

**Définition 6.** Soient  $P, Q \in \mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle$ . Alors  $P$  est dit primitif si  $\Delta(P) = P \otimes 1 + 1 \otimes P$ , et  $Q$  est dit group-like si  $\Delta(Q) = Q \otimes Q$ .

On peut alors caractériser les éléments de l'algèbre de Lie libre et ceux du groupe :

**Proposition 3.** Soient  $P, Q \in \mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle$ . On a :

$$\begin{aligned} P \text{ est primitif si et seulement } P &\in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}), \\ Q \text{ est group-like si et seulement } Q &\in \mathcal{G}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Nous rappelons l'opération de *shuffle* ou *battage* entre deux mots qui permet de lier moules et séries group-like et primitives.

**Définition 7.** L'application de *shuffle* ou *battage*  $\sqcup : \mathbf{A}^* \times \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{A}^*$  est défini par récurrence sur  $\mathbf{A}^*$  pour tout mot  $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbf{A}^*$  telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \sqcup \emptyset &= \emptyset \sqcup \mathbf{n} = \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}\mathbf{n} \sqcup \mathbf{m}\mathbf{m} &= \mathbf{m}\mathbf{m} \sqcup \mathbf{n}\mathbf{n} = n(\mathbf{n} \sqcup \mathbf{m}\mathbf{m}) + m(\mathbf{n}\mathbf{n} \sqcup \mathbf{m}), \end{aligned}$$

où  $n$  et  $m$  sont de lettres de  $\mathbf{A}^*$ .

Donnons un exemple :

**Exemple 1.** Soient les mots  $\mathbf{n} = n_1n_2$  et  $\mathbf{m} = n_3$  où  $\mathbf{n}$  est le mot composé des deux lettres  $n_1$  et  $n_2$  et  $\mathbf{m}$  est le mot composé d'une seule lettre  $n_3$ . Alors on a :

$$\mathbf{n} \sqcup \mathbf{m} = n_1n_2n_3 + n_1n_3n_2 + n_3n_1n_2.$$

Le *battage* est donc la somme de tous les mots possibles en mélangeant les lettres de chaque mot mais en respectant leur ordre interne.

Le *battage* permet d'introduire les deux principales symétries sur les moules :

**Définition 8.** Un moule  $M^\bullet$  est dit :

$$\begin{aligned} \text{alternant si } M^{\mathbf{n}\sqcup\mathbf{m}} &= 0 \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbf{A}^* - \{\emptyset\}, \\ \text{symétral si } M^{\mathbf{n}\sqcup\mathbf{m}} &= M^{\mathbf{n}}M^{\mathbf{m}} \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbf{A}^*. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

**Proposition 4.** *Un moule  $M^\bullet$  est alternal si et seulement sa série génératrice est un élément primitif de  $\mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle$ .*

*Un moule  $M^\bullet$  est symétral si et seulement si sa série génératrice est un élément group-like de  $\mathbb{K}\langle\langle\mathbf{A}\rangle\rangle$ .*

Ainsi un moule  $M^\bullet$  alternal vérifie  $M^\emptyset = 0$  et un moule symétral  $M^\emptyset = 1$ .

On a le Lemme suivant :

**Lemme 1.** *L'ensemble des moules  $M^\bullet$  tels que  $M^\emptyset \neq 0$  forment un groupe  $\mathcal{M}_\times(\mathbf{A})$  pour les multiplications de moules.*

En particulier pour les moules symétraux on a :

**Théorème 1.** *L'ensemble des moules symétraux muni de la multiplication est un sous-groupe non distingué de  $\mathcal{M}_\times(\mathbf{A})$ .*

En particulier le produit de moules symétraux est un moule symétral et l'inverse d'un moule symétral l'est aussi.

## 2.5 Rappel sur le théorème de projection

Dans ce courte section on rappelle différents résultats sur les algèbres de Lie notamment un Lemme permettant de lier l'écriture d'un élément primitif de l'algèbre universelle  $U\mathcal{L}_\mathbb{K}(X)$  et son écriture sous forme de série de Lie appelé *théorème de projection*<sup>1</sup> par J. Ecalle (on renvoie à [76, p.28] ou [21, p.315] pour plus de détails).

Considérons un ensemble fini  $X = \{X_1, \dots, X_N\}$ . Alors à partir de  $X$  on peut construire l'algèbre  $Ass_X$  qui est "l'ensemble des polynômes associatifs mais non commutatifs".

On construit dans un premier temps l'ensemble  $\Omega^*$  des suites  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$  avec  $n_i \in \{1, \dots, N\}$  pour  $1 \leq i \leq r$ . A toute suite  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$  on associe un mot  $X_{\mathbf{n}}$  de  $Ass_X$  de la forme  $X_{\mathbf{n}} = X_{n_1} \cdots X_{n_r}$ . Alors un élément  $m$  de  $Ass_X$  s'écrit :

$$m = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega^*} M^{\mathbf{n}} X_{\mathbf{n}},$$

où les coefficients  $M^{\mathbf{n}}$  sont des complexes presque tous nuls. Les résultats classiques sur les algèbres de Lie (voir [76, p.20]) montre l'isomorphisme entre  $Ass_X$  et l'algèbre universelle  $U\mathcal{L}_\mathbb{K}(X)$  de  $\mathcal{L}_\mathbb{K}(X)$  introduite précédemment.

On introduit  $\mathcal{M}$  l'idéal de  $Ass_X$  engendré par l'ensemble  $X$ , défini comme l'idéal de tous les polynômes (non commutatifs) sans termes constants. Il est donc engendré par l'ensemble des monômes autres que 1.

On définit l'application  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}_\mathbb{K}(X)$  par :

$$\psi(X_{n_1} \cdots X_{n_r}) = \frac{1}{r} [[\cdots [X_{n_1}, X_{n_2}], X_{n_3}] \cdots, X_{n_{r-1}}], X_{n_r}],$$

sur tous les monômes et étendue par linéarité à tout  $\mathcal{M}$ .

---

1. Il semble que ce théorème corresponde au Lemme dit de Dynkin-Specht-Wever, voir [61].

Sachant que l'on a les inclusions  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X) \subset \text{Ass}_X$  et  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X) \subset \mathcal{M}$ , on peut restreindre  $\psi$  à  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X)$ , on obtient le théorème (voir [76, p.28]) :

**Théorème 2** (Théorème de projection). *L'application  $\psi$  est une rétraction de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X)$ , autrement dit :*

$$\psi|_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X)} = \text{Id}_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X)}.$$

Dans les applications, ce théorème nous permettra de réécrire les éléments primitifs (donc les champs de vecteurs), en particulier dans le cas de la correction et des formes prénormales de la partie 2.

## 2.6 Champs de vecteurs et écriture moulienne

On considère un champ de vecteurs  $X$  sur  $\mathbb{C}^d$  défini par :

$$X = \sum_{i=1}^d X_i(x) \partial_{x_i},$$

où  $X_i(x)$  est une série formelle en la multivariable  $x = (x_1, \dots, x_d)$  et  $\partial_{x_i}$  est la dérivée partielle en la variable  $x_i$ .

Pour obtenir une écriture moulienne d'un champ de vecteurs nous devons lui associer un alphabet, c'est ce que nous allons faire en l'écrivant sous **forme préparée**. Cette forme consiste à regrouper les termes qui ont le même degré en terme d'opérateurs différentiels. Nous allons préciser cette écriture et nous y reviendrons en détails au chapitre 6 ainsi qu'au chapitre 10.

**Définition 9.** *Un opérateur différentiel est un polynôme en les dérivées partielles  $\partial_{x_i}$  dont les coefficients sont des séries formelles en les variables  $x_1, \dots, x_d$ . L'ordre d'un tel opérateur différentiel est le degré du polynôme en les variables  $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d}$ .*

*Un opérateur différentiel  $B_n$  est dit homogène de degré  $n$  si pour tout monôme  $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_d^{m_d}$ , avec  $n \in \mathbb{C}^d$  et  $m \in \mathbb{Z}^d$ , il existe un nombre complexe  $\beta_{n,m}$  tel que  $B_n(x^m) = \beta_{n,m} x^{n+m}$ .*

Le degré d'un opérateur différentiel homogène amène alors à une graduation naturelle que nous conserverons pour l'utilisation des moules.

On peut donc expliciter la **forme préparée** d'un champ de vecteurs (voir [34]) :

**Définition 10.** *Un champ de vecteurs formel  $X$  de  $\mathbb{C}^d$  est dit sous forme préparée si on peut l'écrire :*

$$X = X_{lin} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)} B_{\mathbf{n}}$$

où  $X_{lin}$  est la partie linéaire du champ de vecteurs  $X$  que l'on supposera sous forme diagonale et  $\mathbf{A}(X) \subset \mathbb{Z}^d$  est l'ensemble des degrés des opérateurs différentiels homogènes  $B_n$ .

**Exemple 2.** On considère le champ de vecteurs  $X = X_{lin} + X_2 + X_3$  où

$$\begin{aligned} X_2 &= (p_{1,0}x^2 + p_{0,1}xy + p_{-1,2}y^2) \partial_x + (q_{-1,2}x^2 + q_{1,0}xy + q_{0,1}y^2) \partial_y, \\ X_3 &= (p_{2,0}x^3 + p_{1,1}x^2y + p_{0,2}xy^2 + p_{-1,3}y^3) \partial_x + (q_{3,-1}x^3 + q_{2,0}x^2y + q_{1,1}xy^2 + q_{0,2}y^3) \partial_y. \end{aligned}$$

On obtient les deux alphabets suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(X_2) &= \{(2, -1), (1, 0), (0, 1), (-1, 2)\}, \\ \mathbf{A}(X_3) &= \{(3, -1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (-1, 3)\}. \end{aligned}$$

On a aussi les éléments de l'ensemble  $\mathcal{B}(X_3)$  :

$$\begin{aligned} B_{(3,-1)} &= q_{3,-1}x^3\partial_y, \\ B_{(2,0)} &= x^2(p_{2,0}x\partial_x + q_{2,0}y\partial_y), \\ B_{(1,1)} &= xy(xp_{1,1}x\partial_x + q_{1,1}y\partial_y), \\ B_{(0,2)} &= y^2(p_{0,2}x\partial_x + q_{0,2}y\partial_y), \\ B_{(-1,3)} &= p_{-1,3}y^3\partial_x. \end{aligned}$$

Dans le langage du calcul moulien, un opérateur différentiel homogène  $B_n$  est un **comoule** (voir [30]).

L'opération de concaténation sur les mots peut se transférer sur les opérateurs différentiels homogènes grâce à la composition usuelle d'opérateurs différentiels.

On note  $\mathbf{A}(X)^*$  l'ensemble des mots construits sur l'alphabet  $\mathbf{A}(X)$ .

Alors pour un mot  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r \in \mathbf{A}(X)^*$ , on note  $B_{\mathbf{n}} = B_{n_1} \circ \cdots \circ B_{n_r}$  dont l'ordre est donné par le nombre de lettres et le degré est par  $\|\mathbf{n}\|$ .

Dans la suite, nous omettrons le symbole de composition  $\circ$  pour les opérateurs différentiels s'il n'y a pas de confusions possibles.

Si un champ de vecteurs  $X$  est sous forme préparée  $X = X_{lin} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)} B_{\mathbf{n}}$ , on peut aussi l'écrire  $X = X_{lin} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} I^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}$  ou de manière condensée  $X = X_{lin} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet}$  avec  $I^{\bullet}$  le moule neutre pour la composition de moules.

## 2.7 Formes prénormales d'un champ de vecteurs

Suivant [34], [21] nous allons rappeler la définition de **forme prénormale** et **prénormale continue** d'un champ de vecteurs.

**Définition 11.** Soit  $X$  un champ de vecteurs dont la partie semi-simple  $X_{lin}$  est diagonale. Alors une forme prénormale de  $X$  est un champ de vecteurs  $X_{pran}$  tel que :

$$X_{pran} = X_{lin} + X_r, \text{ avec } [X_{lin}, X_r] = 0,$$

où  $X_r$  est un champ de vecteurs constitué uniquement de monômes résonants.

On utilisera dans le chapitre 12 la définition suivante d'une forme prénormale continue suivante :

**Définition 12.** Soit  $X$  un champ de vecteurs local de  $\mathbb{C}^d$  dont la partie linéaire  $X_{lin}$  est diagonale, dont l'alphabet est  $\mathbf{A}(X)$ . Une forme prénormale continue de  $X$  est un champ  $X_{pran}$  défini par :

$$X_{pran} = X_{lin} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} Pran^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}},$$

où le moule  $Pran^{\bullet}$  est alternal et vérifie :

$$Pran^{\mathbf{n}} = 0 \text{ si } w(\mathbf{n}) \neq 0.$$

**Remarque 2.** Le mot continue peut se comprendre de la manière suivante : si les coefficients intervenant dans les comoules  $B_n$  sont considérés comme des variables alors la partie  $X_r$  d'une forme prénormale d'un champ  $X$  peut être vue comme une fonction continue de ces variables.

## Chapitre 3

# Arborification et coarborification

L'objectif de ce chapitre est de définir l'**arborification-coarborification** (erborification-coerborification) introduite par J. Ecalle dans ses travaux sur la linéarisation analytique des champs de vecteurs analytiques (voir par exemple [30]).

Dans un premier temps, nous rappelons les résultats classiques sur l'algèbre de Connes-Kreimer des arbres enracinés décorés. On définit ensuite le morphisme d'arborification qui à un arbre enraciné décoré associe une somme de mots dont les lettres sont les décorations de l'arbre. On fera aussi le lien entre les notations usuelles sur les algèbres de Hopf utilisées par la communauté combinatoire et les notations introduites par J. Ecalle. Le début de cette partie suit la présentation algébrique de l'arborification donnée dans [36].

On montre ensuite comment l'arborification agit sur un moule donnant ainsi naissance à la notion de **moules arborifiés**. On illustrera l'effet de l'arborification sur quelques moules classiques. On démontrera ensuite que le morphisme d'arborification commute avec les multiplications des moules classiques et arborescents. Ce résultat sera essentiel dans la suite pour démontrer l'invariance d'équations fonctionnelles sur les moules.

Enfin on conclura ce chapitre sur les liens existants entre les symétries sur les moules (symétral, alternal) et celles connues sur les moules arborescents (séparatif, antiséparatif).

### 3.1 Algèbre de Hopf de Connes-Kreimer

Cette section rappelle quelques résultats classiques sur l'algèbre de Hopf dite de Connes-Kreimer des arbres enracinés introduite par A. Connes et D. Kreimer dans le cadre de leurs travaux sur la renormalisation dans [18].

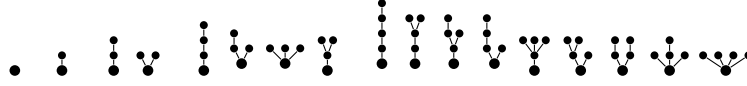
#### 3.1.1 Définitions

Commençons avec la définition d'arbres enracinés :

**Définition 13.** *Un arbre enraciné  $t$  est un graphe orienté non planaire avec un nombre fini de sommets parmi lesquels un particulier est appelé la racine sur laquelle aucune arête n'arrive.*

**Notation 1.** *Soit  $T$  un arbre enraciné, on note  $\ell(t)$  le nombre de sommets de l'arbre  $t$ .*

**Exemple 3.** Arbres enracinés de longueur 1 à 5 :



Soient  $\mathbf{A}$  un ensemble muni d'une loi de semi-groupe et  $t$  un arbre. On note  $\mathcal{V}(t)$  l'ensemble des sommets de l'arbre  $t$ .

**Définition 14.** Un arbre  $\mathbf{A}$ -décoré est un arbre enraciné  $t$  et une application de  $\mathcal{V}(t)$  dans  $\mathbf{A}$ . Autrement dit chaque sommet de l'arbre est représenté par un élément de  $\mathbf{A}$ .



On peut alors généraliser la notion d'arbre à celle de forêt :

**Définition 15.** Une forêt enracinée  $\mathbf{A}$ -décoré est une collection finie d'arbres enracinés  $\mathbf{A}$ -décorés avec des répétitions possibles. On note  $\mathbf{1}$  l'arbre vide sans sommet,  $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$  désigne l'ensemble des arbres enracinés  $\mathbf{A}$ -décorés et  $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  l'ensemble des forêts enracinées  $\mathbf{A}$ -décorées.

Dans la suite nous allons considérer une classe d'arbres et forêts sous la relation d'équivalence :

**Définition 16.** Deux arbres sont équivalents si et seulement si il existe un automorphisme de forêts décorées qui envoie une forêt sur l'autre, c'est-à-dire une application qui respecte le nombre de sommets et les relations d'ordre sur la forêt.

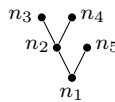
Ainsi nous identifierons les arbres (resp. forêts) qui ont la même structure mais l'ordre des branches (resp. arbres) est différent, on illustre ceci sur un exemple :

**Exemple 4.** La relation d'équivalence précédente permet d'identifier par exemple les deux arbres :  et . On peut aussi identifier les deux forêts  $\bullet \bullet$  et  $\bullet \bullet$ .

Si un arbre enraciné  $t$  est décoré par le sous-ensemble  $\{n_1, \dots, n_s\}$  de  $\mathbf{A}$ , on définit l'application  $\| \cdot \|$  :

$$\| t \| = n_1 + \dots + n_s.$$

**Exemple 5.** Considérons l'arbre enraciné décoré  $t$  par  $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$  :



Alors  $\ell(t) = 5$  et  $\| t \| = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$ .

Soit  $\mathcal{H} = \mathbf{k}[\mathcal{T}_{\mathbf{A}}]$  l'algèbre libre, commutative et unitaire générée par les arbres enracinés  $\mathbf{A}$ -décorés. C'est aussi l'espace vectoriel des forêts enracinées  $\mathbf{A}$ -décorées, car on identifie le produit d'arbres avec la forêt composée par ces arbres. Cette algèbre est une algèbre de Hopf graduée et connexe, appelée *Algèbre de Hopf des forêts enracinées*, munie de la structure suivante. La graduation est donnée par le nombre  $\ell$  de sommets. Le coproduit sur une forêt enracinée  $u$  est décrit de la manière suivante : l'ensemble  $\mathcal{V}(u)$  des sommets de la forêt  $u$  est muni de l'ordre partiel défini par  $x \leq y$  si et seulement si il existe un chemin partant de la racine jusqu'à  $y$  et passant par  $x$ . Un sous-ensemble  $W$  de l'ensemble

des sommets  $\mathcal{V}(u)$  de  $u$  définit une *sous-forêt*  $u|_W$  de  $u$  en conservant les arêtes de  $u$  liant deux éléments de  $W$ . La structure de poset (ensemble partiellement ordonné) est donnée par la restriction de l'ordre partielle à  $W$  et le nombre minimal d'éléments sont les racines de la sous-forêt. Le coproduit est alors défini par :

$$\Delta(u) = \sum_{\substack{V \amalg W = \mathcal{V}(u) \\ V < W}} u|_V \otimes u|_W. \quad (3.1)$$

Ici la notation  $V < W$  signifie que  $x \not\geq y$  pour les sommets  $x$  de  $V$  et les sommets  $y$  de  $W$ . On note que  $\emptyset < V$  et  $V < \emptyset$ . Un couple  $(V, W)$  est aussi appelé *coupe admissible*, avec un *élagage*  $u|_W$  et un *tronc*  $u|_V$ . Une notation alternative connue pour le coproduit est <sup>1</sup> :

$$\Delta(u) = \sum_{\text{admissible cuts } c} R^c(u) \otimes P^c(u). \quad (3.2)$$

On a par exemple :

$$\begin{aligned} \Delta(\bullet) &= \bullet \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \bullet \\ \Delta(\bullet \vee \bullet) &= \bullet \vee \bullet \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \bullet \vee \bullet + 2\bullet \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet \end{aligned}$$

La co-unité est définie par  $\varepsilon(\mathbf{1}) = 1$  et  $\varepsilon(u) = 0$  pour toute forêt non vide  $u$ . La co-associativité du coproduit peut être vérifiée en utilisant la formule itérée de la restriction du coproduit :

$$\tilde{\Delta}(u) = \Delta(u) - u \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes u = \sum_{\substack{V \amalg W = \mathcal{V}(u) \\ V < W, V, W \neq \emptyset}} u|_V \otimes u|_W,$$

où la restriction que  $V$  et  $W$  soient non vides signifie que  $V$  et  $W$  engendrent une partition ordonnée de  $\mathcal{V}(u)$  en deux morceaux. En fait, le coproduit restreint itéré s'écrit sur des partitions ordonnées de  $\mathcal{V}(u)$  en  $n$  morceaux :

$$\tilde{\Delta}^{n-1}(u) = \sum_{\substack{V_1 \amalg \dots \amalg V_n = \mathcal{V}(u) \\ V_1 < \dots < V_n, V_j \neq \emptyset}} u|_{V_1} \otimes \dots \otimes u|_{V_n},$$

et on obtient le coproduit itéré complet  $\Delta^{n-1}(u)$  en autorisant le morceau vide dans la formule au dessus. On notera que la relation  $<$  sur les sous-ensembles de sommets n'est pas transitive. La notation  $V_n < \dots < V_1$  doit être comprise comme  $V_i < V_j$  pour tout  $i < j$ , avec  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Finalement, la compatibilité de  $\Delta$  avec le coproduit est triviale.

Cette algèbre de Hopf apparaît pour la première fois dans les travaux de A. Dür en 1986 [27], une apparition comme algèbre de Hopf incidence dans [75]. Elle a été redécouverte et intensivement étudiée par D. Kreimer en 1998 [56], comme l'algèbre de Hopf décrivant la partie combinatoire de la procédure de renormalisation BPHZ <sup>2</sup> des diagrammes de Feynman en théorie des champs quantiques  $\varphi^3$  scalaires.

On termine avec une dernière opération classique sur les forêts qui est la **greffe**. Cette opération consiste en la greffe de plusieurs arbres en un nouveau sommet (éventuellement sur un arbre). On pourra consulter [37] ou encore [36] pour plus de détails sur les propriétés de cette greffe définie par :

1. Nous avons choisi de mettre le tronc du côté gauche du coproduit pour respecter les notations d'Ecalé qui seront rappelées dans le paragraphe 3.1.2 dessous.

2. après N. N. Bogoliubov, O. S. Parasiuk, K. Hepp et W. Zimmermann



**Définition 17.** On définit sur l'algèbre de Connes-Kreimer  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  l'opérateur de greffe  $\beta_a^+$  avec  $a \in \mathbf{A}$  par :

$$\beta_a^+ : \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$$

$$T_1 \cdots T_k \mapsto \begin{array}{c} T_1 \quad \cdots \quad T_k \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ a \end{array},$$

qui à une forêt  $T_1 \cdots T_k \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  associe l'arbre tel que toutes les racines de  $T_1, \dots, T_k$  soient reliées à la nouvelle racine  $a$ .

**Remarque 3.** La greffe est définie en attachant une racine à une nouvelle racine qui se résume à un unique sommet, cependant on peut naturellement greffer un arbre sur un arbre en n'importe lequel de ses sommets. Dans ce cas on précisera le point et on notera simplement la greffe  $\beta^+$ .

Alors que le coproduit sur les arbres revient à découper un arbre, l'opérateur de greffe revient à rassembler des arbres/forêts. Ces deux opérations sont reliés par la formule classique suivante (voir [37]), appelée *propriété de 1-cocycle* :

**Lemme 2.** Le coproduit  $\Delta$  et la greffe  $\beta^+$  sur  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  vérifient pour tous éléments  $F \in \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  :

$$\Delta \circ \beta^+(F) = Id \otimes \beta^+(F) + (\beta^+ \otimes Id) \circ \Delta(F). \quad (3.3)$$

On trouvera la démonstration dans [37, p. 5].

Ici, nous avons utilisé notations classiques des algèbres de Hopf. La section suivante fait le lien avec les notations de J. Ecalle.

### 3.1.2 Notations

Dans la suite, nous utiliserons les notations de J. Ecalle, qui permettent d'éviter les représentations d'arbres et forêts sous forme de graphes. Ces notations sont construites sur le principe qu'un arbre enraciné  $\mathbf{A}$ -décoré  $t$  n'est rien d'autre qu'une forêt  $\mathbf{A}$ -décorée  $F$  avec une greffe des racines de  $F$  sur une racine  $\mathbf{A}$ -décorée commune. La notation  $F \mapsto \mathcal{N}(F)$  est alors entièrement établie par les règles suivantes :

1. Tout arbre réduit à un unique sommet décoré par  $a \in \mathbf{A}$  est noté  $a$ , en d'autres mots  $\mathcal{N}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \bullet \end{smallmatrix}\right) := a$ .
2. Si un arbre  $t$  est obtenu en greffant une forêt  $F$  sur une racine  $\mathbf{A}$ -décorée  $\begin{smallmatrix} a \\ \bullet \end{smallmatrix}$ , alors

$$\mathcal{N}(t) := a\mathcal{N}(F).$$

3. Si la forêt  $F$  est l'union disjointe  $t_1 \sqcup \cdots \sqcup t_n$  de  $n$  arbres enracinés décorés, alors

$$\mathcal{N}(F) := \mathcal{N}(t_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}(t_n).$$

On a par exemple :

$$\mathcal{N}\left(\begin{array}{c} n_3 \quad n_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ n_2 \quad n_5 \\ \diagdown \quad \diagup \\ n_1 \end{array}\right) = n_1\left(\left(n_2(n_3 \oplus n_4)\right) \oplus n_5\right).$$

La forêt vide  $\mathbf{1}$  est notée par le vide (le mot vide) ou  $\emptyset$  si nécessaire. Nous omettrons le symbole  $\mathcal{N}$  dans la suite et utiliserons indifféremment les deux représentations pour une forêt décorée.

## 3.2 Arborification

Soit  $V$  une algèbre commutative (non nécessaire unitaire) sur un corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique zéro. On munit  $V$  d'un produit commutatif associatif noté  $(a, b) \mapsto [ab]$ . Ce produit n'est pas nécessairement unitaire.

A partir de  $V$ , on définit l'algèbre de Hopf quasi-shuffle<sup>3</sup> (ou stuffle ou encore de battage contractant)  $\mathcal{H}^{\mathbf{A}} = (T(V), st, \Delta)$  et l'algèbre de Hopf shuffle (ou de battage)  $\mathcal{H}_0^{\mathbf{A}} = (T(V), sh, \Delta)$  où  $(T(V), \Delta)$  est la cogèbre tensorielle :

$$T(V) = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$$

Le coproduit de déconcaténation est défini par :

$$\Delta(v_1 \cdots v_k) = \sum_{r=0}^k v_1 \cdots v_r \otimes v_{r+1} \cdots v_k.$$

où  $v_j \in V$ . Le produit stuffle  $st$  est donné par :

$$st(v_1 \cdots v_p, v_{p+1} \cdots v_{p+q}) = \sum_{r \geq 0}^{min(p,q)} \sum_{\sigma \in Qsh(p,q;r)} v_1^\sigma \cdots v_{p+q-r}^\sigma$$

avec  $v_j \in V$ ,  $j \in \{1, \dots, p+q\}$  et  $Qsh(p, q; r)$  est l'ensemble des applications surjectives :

$$\sigma : \{1, \dots, p+q\} \twoheadrightarrow \{1, \dots, p+q-r\}$$

avec  $v_j \in V$ ,  $j \in \{1, \dots, p+q\}$  et  $v_j^\sigma$  est le produit interne des lettres dans l'ensemble  $\sigma^{-1}(\{j\})$  qui contient un ou deux éléments. Pour définir le produit shuffle, on pose  $r = 0$  dans la formule précédente du stuffle, ce qui revient à poser que le produit interne  $[-] = 0$ . Les deux notations  $sh(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  et  $\mathbf{n}_1 \sqcup \mathbf{n}_2$  seront utilisées dans la suite.

**Définition 18** (Arborification-Erborification). *Les applications suivantes définissent l'arborification de l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer dans l'algèbre de Hopf shuffle et l'erborification si l'image est l'algèbre de Hopf stuffle :*

$$\pi_0 : \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} \twoheadrightarrow \mathcal{H}_0^{\mathbf{A}} \quad \text{et} \quad \pi : \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} \twoheadrightarrow \mathcal{H}^{\mathbf{A}}.$$

*L'application  $\pi_0$  associe à une forêt la somme de ses extensions linéaires, i.e. les mots construits à partir des lettres qui décorent la forêt et qui respectent l'ordre partiel. L'application  $\pi$  associe à une forêt la somme de ses extensions linéaires contractées, qui sont les mots respectant l'ordre partiel incluant les mots contractés suivant la règle stuffle, i.e. seulement les lettres incomparables par rapport*

---

3. Cette définition coïncide avec le quasi-shuffle de Hoffman.

à l'ordre partiel de la forêt peuvent être combinées au moyen du produit interne  $[- -]$ .

On notera  $\mathcal{L}(T)$  l'ensemble des extensions linéaires d'un arbre  $T$  et  $\#\mathcal{L}(T)$  le nombre de ses extensions.

L'exemple suivant illustre les applications  $\pi_0$  et  $\pi$  :

**Exemple 6.** Considérons l'arbre  $n_1(n_2 \oplus n_3)$ . Ses images par  $\pi_0$  et  $\pi$  sont respectivement :

$$\pi_0(n_1(n_2 \oplus n_3)) = n_1 n_2 n_3 + n_1 n_3 n_2$$

et

$$\pi(n_1(n_2 \oplus n_3)) = n_1 n_2 n_3 + n_1 n_3 n_2 + n_1[n_2 n_3].$$

**Remarque 4.** La projection  $\pi_0$ , appelée aussi *erborification*, ne préserve pas la taille des arbres/forêt du fait des propriétés du produit *stuffle* comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent.

**Proposition 5.** Les applications  $\pi$  et  $\pi_0$  sont des morphismes surjectifs d'algèbre de Hopf de  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  sur  $\mathcal{H}^{\mathbf{A}}$  et  $\mathcal{H}_0^{\mathbf{A}}$  respectivement.

Nous donnons une démonstration de ce résultat due à Loic Foissy de l'Université du Littoral Côte d'Opale en Annexes.

Dans la suite, l'utilisation de cette propriété simplifie une partie des démonstrations mais nous garderons un *point de vue constructif* pour les faire et donner des formules explicites pour les objets considérés (moules, dérivations, automorphismes).

### 3.3 Moules et Arborification

En utilisant les actions précédentes de  $\pi$  et  $\pi_0$ , nous pouvons définir ce que J. Ecalle appelle l'*arborification* d'un moule.

On rappelle d'abord la définition d'un moule et une moule arborescent :

**Définition 19.** Un moule  $M^\bullet$  est une application linéaire de  $\mathcal{H}_0^{\mathbf{A}}$  dans  $\mathbb{C}$ , autrement dit une collection de nombres complexes  $\{M^n \in \mathbb{C}, n \in \mathbf{A}^*\}$ . Un moule arborescent  $A^\bullet$  est une application linéaire de  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  dans  $\mathbb{C}$ , i.e. une suite de nombres complexes  $\{A^t \in \mathbb{C}, t \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}}\}$ .

**Définition 20.** Soit  $M^\bullet$  un moule. L'*arborification* du moule  $M^\bullet$  est noté  $M_\prec^\bullet$  et est définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\pi_0} & \mathcal{H}_0^{\mathbf{A}} \\ & \searrow M_\prec^\bullet & \downarrow M^\bullet \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

La même chose peut être faite pour les moules définis sur  $\mathcal{H}^{\mathbf{A}}$ , ils sont appelés *arborification contractée* du moule ou *erborification*. L'action de l'*erborification* sur  $M^\bullet$  est notée  $M_\leq^\bullet$ . Dans ce cas, on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}^{\mathbf{A}} \\ & \searrow M_\leq^\bullet & \downarrow M^\bullet \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

Bien que les formules précédentes donnent une manière de calculer l'arborification de n'importe quel moule, il n'est pas toujours évident d'en obtenir une formule explicite. Nous montrerons dans la section suivante plusieurs exemples.

Dans tout ce manuscrit nous partirons des moules classiques pour aller par arborification vers les moules arborescents. Ainsi, dans la suite, nous utiliserons la terminologie suivante :

**Définition 21.** *Un moule  $A^\bullet$  sera dit arborifié (resp. erborifié) si il existe un moule  $M^\bullet$  (au sens classique) tel que :*

$$A^\bullet = M^\bullet_{<} \quad (\text{resp. } A^\bullet = M^\bullet_{\leq}). \quad (3.4)$$

Un moule classique définit ainsi naturellement un moule arborifié. A l'inverse, un moule arborescent peut définir naturellement un moule en l'évaluant les arbres totalement ordonnés.

Nous allons maintenant illustrer l'arborification sur plusieurs moules classiques dans l'étude des champs de vecteurs.

### 3.4 Arborification de moules élémentaires

Soit  $\mathbf{A}$  un alphabet muni d'une structure de semi-groupe abélien et soit  $w : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{C}$  un morphisme de semi-groupe (le *poids*). Considérons une forêt générale :

$$T = n_1 T_1 \oplus n_2 T_2 \oplus \cdots \oplus n_k T_k, \quad (3.5)$$

où  $T_1, \dots, T_k$  sont des éléments arbitraires de  $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  greffés sur les racines  $n_1, \dots, n_k$ .

On introduit les notations suivantes sur un mot quelconque  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  et  $j = 1, \dots, r$  : on note  $\mathbf{n}^{\leq j}$  et  $\mathbf{n}^{\geq j}$  les sous-mots de  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{n}^{\leq j} = n_1 \cdots n_j \text{ et } \mathbf{n}^{\geq j} = n_j \cdots n_r. \quad (3.6)$$

**Remarque 5.** *Dans les applications du calcul moulien aux champs de vecteurs, un poids est défini de la manière suivante : soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d$ , pour  $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{A} \subset \mathbb{Z}^d$ ,  $w(n) = n \cdot \lambda$  et étendu par linéarité aux mots  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}^*$  de la manière suivante :  $w(\mathbf{n}) = w(n^1 \cdots n^r) = n^1 \cdot \lambda + \dots + n^r \cdot \lambda$  où  $n^i \in \mathbf{A}$  et  $r$  est la longueur de  $\mathbf{n}$ .*

*L'élément  $\lambda \in \mathbb{C}^d$  correspond aux valeurs propres de la partie linéaire du champ de vecteurs.*

**Remarque 6.** *Pour les champs de vecteurs, la condition  $w(\mathbf{n}) \neq 0$  correspond au cas non-résonnant (voir [1, p.174]).*

On considère les moules élémentaires  $S^\bullet$  et  $\mathfrak{S}^\bullet$  définis sur un mot  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  par (voir [31, p.1413])  $S^\emptyset = \mathfrak{S}^\emptyset = 1$  et :

$$\begin{aligned} S^\mathbf{n} &= \frac{1}{w(n_1)w(n_1 n_2) \cdots w(\mathbf{n})}, \\ \mathfrak{S}^\mathbf{n} &= \frac{1}{w(\mathbf{n}) \cdots w(n_{r-1} n_r) w(n_r)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

tant que le mot  $\mathbf{n}$  est tel que  $w(\mathbf{n}^{\leq i}) \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$  pour  $S^\bullet$  et  $w(\mathbf{n}^{\geq i}) \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$  pour  $\mathfrak{S}^\bullet$ .

Ces moules satisfont plusieurs relations intéressantes. En particulier, on a la formule récursive sur la longueur d'un mot  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  :

$$\mathfrak{S}^{\mathbf{n}} = \frac{1}{w(\mathbf{n})} \mathfrak{S}^{\mathbf{n}^{\geq 2}}. \quad (3.8)$$

En application la définition de l'arborification, on obtient :

$$\mathfrak{S}_{<}^T = \mathfrak{S}^{n_1 \pi_0(T_1 \oplus n_2 T_2 \oplus \cdots \oplus n_r T_r)} + \mathfrak{S}^{n_2 \pi_0(n_1 T_1 \oplus T_2 \oplus n_3 T_3 \oplus \cdots \oplus n_r T_r)} + \dots + \mathfrak{S}^{n_k \pi_0(n_1 T_1 \oplus \cdots \oplus n_{r-1} T_{r-1} \oplus T_r)}, \quad (3.9)$$

amenant à un calcul par récurrence sur la longueur de la forêt  $T$ . En effet, par définition de  $\mathfrak{S}^\bullet$  on a :

**Lemme 3.** *Pour un arbre enraciné décoré  $nT$  tel que  $T \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  et  $w(nT) \neq 0$ , on a :*

$$\mathfrak{S}^{n\pi_0(T)} = \frac{1}{w(nT)} \mathfrak{S}^{\pi_0(T)}. \quad (3.10)$$

*Démonstration.* Notons  $\pi_0(T) = \sum_i \mathbf{n}_i$ . Alors, on a  $n\pi_0(T) = \sum_i n\mathbf{n}_i$ . Par définition pour chaque  $i$ , on a  $w(n\mathbf{n}_i) = w(nT)$ . En conséquence en utilisant (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{n\pi_0(T)} &= \sum_i \mathfrak{S}^{n\mathbf{n}_i} = \sum_i \frac{1}{w(n\mathbf{n}_i)} \mathfrak{S}^{\mathbf{n}_i}, \\ &= \frac{1}{w(nT)} \sum_i \mathfrak{S}^{\mathbf{n}_i} = \frac{1}{w(nT)} \mathfrak{S}^{\pi_0(T)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{<}^T &= \frac{1}{w(T)} \mathfrak{S}^{\pi_0(T_1 \oplus n_2 T_2 \oplus \cdots \oplus n_r T_r)} \\ &\quad + \frac{1}{w(T)} \mathfrak{S}^{\pi_0(n_1 T_1 \oplus T_2 \oplus n_3 T_3 \oplus \cdots \oplus n_r T_r)} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{w(T)} \mathfrak{S}^{\pi_0(n_1 T_1 \oplus \cdots \oplus n_{r-1} T_{r-1} \oplus T_r)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\mathfrak{S}_{<}^T = \frac{1}{w(T)} \left[ \mathfrak{S}_{<}^{T_1 \oplus n_2 T_2 \oplus \cdots \oplus n_r T_r} + \mathfrak{S}_{<}^{n_1 T_1 \oplus T_2 \oplus n_3 T_3 \oplus \cdots \oplus n_r T_r} + \dots + \mathfrak{S}_{<}^{n_1 T_1 \oplus \cdots \oplus n_{r-1} T_{r-1} \oplus T_r} \right], \quad (3.13)$$

impliquant seulement les moules arborescents.

Suivant ([31, p.1433]), notons  $T^{>i}$  la somme des forêts obtenues de  $T$  qui respectent l'ordre partiel en obtient les  $i$  premières composantes de  $T$  sur  $\pi_0(T)$ . Par exemple :

$$\begin{aligned} T^{>1} &= T_1 \oplus n_2 T_2 \oplus \cdots \oplus n_r T_r + n_1 T_1 \oplus T_2 \oplus n_3 T_3 \oplus \cdots \oplus n_r T_r + \dots \\ &\quad + n_1 T_1 \oplus \cdots \oplus n_{r-1} T_{r-1} \oplus T_r. \end{aligned} \quad (3.14)$$

On en déduit que

$$\mathfrak{S}^T = \frac{1}{w(T)} \mathfrak{S}^{T^{>1}}. \quad (3.15)$$

En utilisant la dernière expression, on obtient la formule explicite suivante pour l'arborification du moule élémentaire  $\mathfrak{S}^\bullet$  :

**Lemme 4.** *L'arborification du moule élémentaire  $\mathfrak{S}^\bullet$  est donnée par :*

$$\mathfrak{S}^T = \frac{1}{w(T)w(T^{>1}) \dots w(T^{>r})}. \quad (3.16)$$

Cette dernière écriture est une simplification, l'écriture exacte est obtenue de la manière suivante. En utilisant la définition de  $T^{>1}$ , on écrit :

$$T^{>1} = \sum_{i_1=1}^{N_1} T_{i_1}^{>1},$$

où  $N_1$  est le nombre d'arbres qui apparaissent dans  $T^{>1}$ . Si on itère l'écriture, on a alors :

$$\begin{aligned} T^{>2} &= (T^{>1})^{>1}, \\ &= \sum_{i_2=1}^{N_2} (T_{i_1}^{>1})_{i_2}^{>1}. \end{aligned}$$

En itérant la procédure d'écriture, on a finalement l'écriture explicite :

$$\mathfrak{S}^T = \sum_{(i_1, \dots, i_{r-1})} \frac{1}{w(T)w(T_{i_1}^{>1})w((T_{i_1}^{>1})_{i_2}^{>1}) \dots w((\dots((T_{i_1}^{>1})_{i_2}^{>1}) \dots)_{i_{r-1}}^{>1})},$$

où  $r$  est la longueur de  $T$ .

## 3.5 Propriétés algébriques de l'arborification

Dans cette section, on redonne la définition du produit de moules et moules arborescents. On montre notamment que la multiplication et l'arborification de moules commutent. On étudie ensuite les symétries des différents moules et leurs liens par arborification.

### 3.5.1 Arborification et produit de moules

Commençons avec la définition du produit de moules et moules arborescents dans le cadre classique des algèbres de Hopf :

**Définition 22.** *Le produit de deux moules  $M^\bullet$  et  $N^\bullet$  est un moule noté  $(M \times N)^\bullet$ . De la même manière, le produit de moules arborescents  $A^\bullet$  et  $B^\bullet$  est un moule arborescent noté  $(A \times B)^\bullet$ . Dans le formalisme des algèbres de Hopf, ces deux produits correspondent aux produits de convolution :*

$$m_{\mathbb{C}} \circ (M^\bullet \otimes N^\bullet) \circ \Delta, \quad m_{\mathbb{C}} \circ (A^\bullet \otimes B^\bullet) \circ \Delta$$

où  $m_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est le produit dans l'algèbre  $\mathbb{C}$  et  $\Delta$  le coproduit de déconcaténation, resp. le coproduit de l'algèbre de Connes-Kreimer.

Le Lemme suivant permet de lier multiplication et arborification :

**Lemme 5.** *L'arborification et le produit de moules commutent sur les moules arborifiés, autrement dit :*

$$(M \times N)_{<}^{\bullet} = M_{<}^{\bullet} \times N_{<}^{\bullet}.$$

*Démonstration.* La preuve est immédiate car l'arborification  $\pi_0$  est un morphisme de cogèbres. Donnons une preuve constructive de ce lemme. Pour une forêt enracinée  $T$ , on note  $\mathcal{L}(T)$  l'ensemble de ses extensions linéaires, ainsi :

$$\pi_0(T) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{L}(T)} \mathbf{n}. \quad (3.17)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} (M_{<} \times N_{<})^T &= \sum_{V \sqcup W = \mathcal{V}(T), V < W} M_{<}^{t|_V} N_{<}^{t|_W} \\ &= \sum_{V \sqcup W = \mathcal{V}(T), V < W} M^{\pi_0(t|_V)} N^{\pi_0(t|_W)} \\ &= \sum_{V \sqcup W = \mathcal{V}(T), V < W} \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{L}(T|_V) \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{L}(T|_W)}} M^{\mathbf{n}_1} N^{\mathbf{n}_2}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned} (M \times N)_{<}^T &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{L}(T)} (M \times N)^{\mathbf{n}} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{L}(T)} \sum_{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}} M^{\mathbf{n}_1} N^{\mathbf{n}_2}. \end{aligned}$$

Les extensions linéaires étant les mêmes les deux sommes coïncident. □

### 3.5.2 Arborification et moules symétriaux/alternaux

Les symétries classiques sur les moules sont la symétralité et l'alternativité, celles-ci correspondent aux séries formelles group-like et primitives pour le coproduit shuffle classique.

On renvoie au chapitre 2 pour la définition des moules symétriaux et alternaux. Des symétries analogues sur les moules arborescents sont données par les notions de moules anti-séparatifs et séparatifs.

**Définition 23.** *Un moule arborescent  $A^{\bullet}$  est dit séparatif si  $A^1 = 1$  et  $A^{T_1 \oplus T_2} = A^{T_1} A^{T_2}$  pour toutes paires de forêts décorées non vides  $(T_1, T_2)$ .*

*Un moule arborescent  $A^{\bullet}$  est dit anti-séparatif si  $A^1 = 0$  et  $A^{T_1 \oplus T_2} = 0$  pour toutes paires de forêts décorées non vides.*

En terme d'algèbres de Hopf, les moules séparatifs et anti-séparatifs sont définis de la manière suivante :

**Définition 24.** *Un moule arborescent séparatif est un caractère de  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$ , i.e. un morphisme d'algèbre unitaire. Un moule arborescent  $T^\bullet$  est anti-séparatif si c'est un caractère infinitésimal  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$ , i.e. une application linéaire  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $T^{t_{\mathbf{n}_1} \oplus t_{\mathbf{n}_2}} = T^{t_{\mathbf{n}_1}} \varepsilon(t_{\mathbf{n}_2}) + \varepsilon(t_{\mathbf{n}_1}) T^{t_{\mathbf{n}_2}}$ , où  $\varepsilon$  est la co-unité de  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$ .*

De la même manière, un moule symétral (resp. alternal) est un caractère (resp. caractère infinitésimal) de l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}_0^{\mathbf{A}}$ . Ces symétries symétrale/alternale et anti-séparatif/séparatif sont reliées par l'arborification de la manière suivante :

**Lemme 6.** *L'arborification d'un moule symétral (resp. alternal) est un moule arborescent séparatif (resp. anti-séparatif).*

*Démonstration.* La démonstration est une conséquence immédiate du fait que l'application d'arborification  $\pi_0$  est un morphisme d'algèbre de Hopf. Soit  $M^\bullet$  un moule symétral et soient  $T_1, T_2$  deux forêts enracinées décorées. Alors,

$$\begin{aligned} M_{<}^{T_1 \oplus T_2} &= M^{\pi_0(T_1 \oplus T_2)} \\ &= M^{\pi_0(T_1) \sqcup \pi_0(T_2)} \\ &= M^{\pi_0(T_1)} M^{\pi_0(T_2)} \\ &= M_{<}^{T_1} M_{<}^{T_2}. \end{aligned}$$

De plus,  $M_{<}^1 = M^{\pi_0(1)} = M^\emptyset = 1$ . Si  $M^\bullet$  est alternal, on a pour toutes paires  $(T_1, T_2)$  de forêts enracinées décorées non vides :

$$\begin{aligned} M_{<}^{T_1 \oplus T_2} &= M^{\pi_0(T_1 \oplus T_2)} \\ &= M^{\pi_0(T_1) \sqcup \pi_0(T_2)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

et  $M_{<}^1 = M^{\pi_0(1)} = M^\emptyset = 0$ . □

**Remarque 7.** Le produit de convolution respecte les caractères d'algèbres de Hopf. En conséquence, symétralité et séparativité sont préservées sous le produit de moules, resp. moules arborescents.

**Remarque 8.** Le moule arborescent  $\mathfrak{S}_{<}^\bullet$  défini dans le paragraphe 3.4 ci-dessus est séparatif. C'est une conséquence immédiate de son expression explicite. Une autre façon de le démontrer est de montrer que le moule  $\mathfrak{S}^\bullet$  est symétral et d'appliquer le Lemme 6.

**Exemple 7.** Le moule alternal  $T^\bullet$  défini dans [30], p.85 est :

$$\begin{aligned} T^\emptyset &= 0, \\ T^n &= 0 \quad \forall n \in \mathbf{A}, \\ T^{\mathbf{n}} &= T^{n_1 \cdots n_r} = \frac{1}{(w(n_1) - w(n_2))(w(n_2) - w(n_3)) \cdots (w(n_{r-1}) - w(n_r))}. \end{aligned}$$



Alors son arborifié  $T_{<}^\bullet$  est anti-séparatif.

Avant de donner un dernier exemple, nous définissons l'opérateur suivant sur les moules (voir [31, p. 1413]) :

**Définition 25.** Soit  $\mathbf{A}$  un alphabet et  $x$  un point de la surface de Riemann du logarithme. On définit l'opérateur  $x^\Delta$  par  $(x^\Delta M)^\mathbf{n} = x^{w(\mathbf{n})} M^\mathbf{n}$  avec  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}^*$  et  $M^\bullet$  un moule.

Suivant [31, p. 1413], on a alors l'exemple suivant :

**Exemple 8.** Soit le moule symétral  $S_{co}^\bullet(x)$  défini par :

$$S_{co}^\bullet(x) = x^\Delta S^\bullet \times \mathfrak{S}^\bullet,$$

avec le moule  $S^\bullet$  défini en section 3.4.

Alors, la symétralité est assurée par la symétralité des deux composantes et la remarque 7. Ainsi la version arborifiée  $S_{co,<}^\bullet(x)$  est séparative.

## Chapitre 4

# Invariance de moules sous arborification : une approche directe

Comme nous l'avons énoncé dans l'introduction, le fait que l'arborification fournit un outil efficace pour restaurer la convergence est relié au fait que certains moules conservent la même forme sous arborification. Dans ce chapitre, nous précisons cette assertion.

Commençons avec un exemple très simple. On considère le moule identité  $I^\bullet$ . Ce moule dépend uniquement de la longueur du mot sur lequel il est évalué. Il est donc défini par :

$$I^\mathbf{n} = E(\ell(\mathbf{n})), \quad (4.1)$$

où  $E : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application définie par  $E(1) = 1$  et  $E(r) = 0$  pour  $r \neq 1$ . La version arborifiée  $I^\bullet_{<}$  est trivialement donnée par :

$$I^T_{<} = E(\ell(\mathbf{T})), \quad (4.2)$$

ainsi le moule  $I^\bullet$  conserve sa forme sous arborification. On peut facilement généraliser ce résultat à tous les moules qui ne dépendent que de la longueur et du poids des mots comme l'énonce le Lemme suivant :

**Lemme 7.** *Soit  $T$  une forêt enracinée décorée. La longueur/taille  $\ell(T)$  et le poids  $w(T)$  sont préservés sous la projection  $\pi_0$ , i.e. on a  $\ell(\mathbf{n}) = \ell(T)$  et  $w(\mathbf{n}) = w(T)$  pour tout  $\mathbf{n} \in \mathcal{L}(T)$ .*

Une conséquence de ce Lemme est que certains moules conservent leur forme à une constante multiplicative près sous arborification.

**Lemme 8.** *Soit  $M^\bullet$  un moule ne dépendant que de  $\ell(\bullet)$  et  $w(\bullet)$  signifiant qu'il existe une fonction  $F : \mathbb{N} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que*

$$M^\bullet = F(\ell(\bullet), w(\bullet)). \quad (4.3)$$

*Alors le moule arborifié  $M^\bullet_{<}$  est explicitement donné par :*

$$M^T_{<} = \#\mathcal{L}(T) F(\ell(T), w(T)). \quad (4.4)$$

*Démonstration.* Sous les hypothèses du Lemme, on peut écrire pour toute forêt  $T$  :

$$\begin{aligned}
 M_{<}^T &= M^{\pi_0(T)}, \\
 &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{L}(T)} M^{\mathbf{n}}, \\
 &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{L}(T)} f(\ell(\mathbf{n}), w(\mathbf{n})) \\
 &= \#\mathcal{L}(T) f(\ell(T), w(T)) \\
 &= \#\mathcal{L}(T) M_{<}^T.
 \end{aligned}$$

□

Comme il nous l'a été suggéré par Loïc Foissy nous pouvons encore généraliser de la manière suivante :

**Définition 26** (Moule invariant par permutation). *Un moule  $M^\bullet$  est dit invariant par permutation si pour tout mot  $\mathbf{n} = n_1 \dots n_r \in \mathbf{A}^*$  et pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, r\}$ , on a  $M^\bullet = M^{n_1 \dots n_r} = M^{n_{\sigma(1)} \dots n_{\sigma(r)}}$ .*

**Exemple 9.** *Un exemple trivial est le moule  $\ell(\bullet)$  qui associe à chaque mot sa longueur. Alors  $\ell(\mathbf{n}) = \ell(n_1 \dots n_r) = r = \ell(n_{\sigma(1)} \dots n_{\sigma(r)})$  pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, r\}$ .*

**Lemme 9.** *Soit  $M^\bullet$  un moule invariant par permutation. Alors sa version arborifiée  $M_{<}^\bullet$  est donnée par :*

$$M_{<}^T = \#\mathcal{L}(T) M^\bullet$$

où  $\mathbf{n}$  sur la partie droite de l'équation est une extension linéaire de  $T$ .

*Démonstration.* La démonstration est exactement la même que le Lemme 8. □

Ces Lemmes impliquent déjà que certains moules classiques sont invariants sous arborification. Mais cette approche ne permet pas d'obtenir l'invariance de moules par arborification qui dépendent de la longueur et du poids du mot sur lequel ils sont évalués mais aussi sur les sous-mots avec les longueurs et poids associés. Par exemple, on ne peut pas obtenir l'invariance des moules suivant :

$$S^\mathbf{n} = \frac{1}{w(n_1)w(n_1 n_2) \dots w(\mathbf{n})}, \quad (4.5)$$

$$w(n_1)Carr^\mathbf{n} + Carr^{n_1+n_2, n_3, \dots, n_r} = \sum_{n_1 \mathbf{bc} = \mathbf{n}} Carr^{n_1 \mathbf{c}} Carr^\mathbf{b}, \quad (4.6)$$

où  $S^\bullet$  est le moule de linéarisation et  $Carr^\bullet$  est le moule de la correction étudié dans la seconde partie de ce manuscrit, les deux moules étant définis pour tout mot  $\mathbf{n} = n_1 \dots n_r$ .

Le Lemme 8, bien qu'intéressant pour les applications, ne permet pas d'obtenir une compréhension suffisante des propriétés d'invariance par arborification. Dans la suite, on montre que les moules solutions d'équations fonctionnelles d'une certaine forme sont automatiquement invariants.

## Chapitre 5

# Equations fonctionnelles de moules et arborification

Dans ce chapitre, on considère deux cas particuliers d'opérateurs agissant sur les moules appelés *dérivations* et *automorphismes*, qui génèrent la plupart des équations fonctionnelles de moules connues. Dans la suite,  $\mathbb{K}$  est le corps des nombres réels ou complexes.

### 5.1 Equations fonctionnelles de moules et symétries

Il existe plusieurs manières de démontrer qu'un moule satisfait une symétrie comme l'alternativité ou la symétrialité. Une de ces manières est de montrer que le moule satisfait une équation fonctionnelle particulière, ceci est expliqué par exemple par J. Ecalle dans [31, p. 1427].

#### 5.1.1 Dérivations élémentaires et composites sur les moules

Rappelons la définition de dérivations sur les moules :

**Définition 27.** Soit  $D$  une application linéaire de l'espace vectoriel des moules  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$  dans lui-même. L'image d'un moule  $M^\bullet$  par  $D$  est noté  $D(M)^\bullet$ . L'application  $D$  est une dérivation sur l'algèbre  $(\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}), \times)$  si elle satisfait :

$$D(M \times N)^\bullet = (D(M) \times N)^\bullet + (M \times D(N))^\bullet, \quad (5.1)$$

pour tous moules  $M^\bullet$  et  $N^\bullet$  de  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ . En d'autres mots, si l'application  $D$  satisfait la règle de Leibniz par rapport au produit de moules.

On peut construire une classe de dérivations simples dites *dérivations élémentaires* de la forme :

$$D_\lambda(M)^\mathbf{n} = \lambda^\mathbf{n} M^\mathbf{n}, \quad (5.2)$$

où  $\lambda^\bullet$  est un moule satisfaisant certaines propriétés. On a le résultat (voir [21, Paragraphe 2.2.1, p. 355]) :

**Théorème 3.** Une application  $D_\lambda$  de la forme (5.2) est une dérivation si et seulement si le moule  $\lambda^\bullet$  satisfait :

$$\lambda^{\mathbf{n}_1} + \lambda^{\mathbf{n}_2} = \lambda^{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}, \quad \forall \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \in \mathbf{A}^* \quad (5.3)$$

*Démonstration.* La démonstration vient d'un simple calcul. On a :

$$D_\lambda(M \times N)^{\mathbf{n}} = \lambda_{\mathbf{n}} \left( \sum_{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}} M^{\mathbf{n}_1} N^{\mathbf{n}_2} \right). \quad (5.4)$$

Par la règle de Leibniz on a aussi :

$$\begin{aligned} D_\lambda(M \times N)^{\mathbf{n}} &= (D_\lambda(M) \times N)^{\mathbf{n}} + (M \times D_\lambda(N))^{\mathbf{n}} \\ &= \sum_{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}} D_\lambda(M)^{\mathbf{n}_1} N^{\mathbf{n}_2} + M^{\mathbf{n}_1} D_\lambda(N)^{\mathbf{n}_2} \\ &= \sum_{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}} (\lambda^{\mathbf{n}_1} + \lambda^{\mathbf{n}_2}) M^{\mathbf{n}_1} N^{\mathbf{n}_2}. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Deux exemples naturels sont les suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet &= \ell(\bullet), \\ \lambda_\bullet &= w(\bullet). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ils correspondent aux dérivations *lang* et  $\nabla$  introduites par J.Ecalte dans ses travaux et apparaissant en particulier dans les problèmes de linéarisation (voir par exemple [29, 30]).

J. Ecalte utilise une autre classe de dérivations dites *dérivations composites*, construites à partir d'un moule donné :

**Proposition 6.** Supposons que l'alphabet possède une structure de semi-groupe. Soit  $A^\bullet$  un moule tel que  $A^\emptyset = 0$ . L'application  $D_A$  définie par :

$$D_A(M^\bullet)^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}^1 \mathbf{n}^2 \mathbf{n}^3 = \mathbf{n}} M^{\mathbf{n}^1} \|\mathbf{n}^2\| \mathbf{n}^3 A^{\mathbf{n}^2}, \quad (5.6)$$

est une dérivation.

*Démonstration.* On pourra consulter [21, Lemme IV. 58, p. 356]). C'est un simple calcul :

$$\begin{aligned} D_A(M \times N)^{\mathbf{n}} &= \sum_{\mathbf{n}^1 \mathbf{n}^2 \mathbf{n}^3 = \mathbf{n}} (M \times N)^{\mathbf{n}^1} \|\mathbf{n}^2\| \mathbf{n}^3 A^{\mathbf{n}^2} \\ &= \sum_{\mathbf{n}^1 \mathbf{n}^2 \mathbf{n}^3 \mathbf{n}^4 = \mathbf{n}} M^{\mathbf{n}^1} N^{\mathbf{n}^2} \|\mathbf{n}^3\| \mathbf{n}^4 A^{\mathbf{n}^3} + \sum_{\mathbf{n}^1 \mathbf{n}^2 \mathbf{n}^3 \mathbf{n}^4 = \mathbf{n}} M^{\mathbf{n}^1} \|\mathbf{n}^2\| \mathbf{n}^3 N^{\mathbf{n}^4} A^{\mathbf{n}^2} \\ &= \sum_{\mathbf{n}^1 \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}} M^{\mathbf{n}^1} D_A(N)^{\mathbf{n}^2} + \sum_{\mathbf{n}^1 \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}} D_A(M)^{\mathbf{n}^1} N^{\mathbf{n}^2} \\ &= (M \times D_A(N) + D_A(M) \times N)^{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Il est important que le mot entre les doubles barres  $\|\cdot\|$  ne s'annule pas dans le calcul ci-dessus, ce qui est assuré par la condition  $A^\emptyset = 0$ . □

### 5.1.2 Sur la variance de moule et une dérivation associée

Introduisons quelques notations :

**Définition 28.** Soit  $i$  un entier. On définit les opérateurs  $\text{conf}_i : \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{A}^*$  et  $\text{comb}_i : \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{A}^*$  par :

$$M^{\text{conf}_i(\mathbf{n})} = M^{\text{conf}_i(n_1 \dots n_r)} = \begin{cases} M^{n_1 \dots [n_i + n_{i+1}] \dots n_r} & \text{if } 1 \leq i < r, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.7)$$

$$M^{\text{comb}_i(\mathbf{n})} = M^{\text{comb}_i(n_1 \dots n_r)} = \begin{cases} M^{n_1 \dots [n_{i-1} + n_i] \dots n_r} & \text{if } 1 < i \leq r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.8)$$

En utilisant ces opérateurs, on peut alors étudier un moule particulier qui est la *variance* d'un moule et qui joue un rôle important dans la linéarisation de champs de vecteurs en théorie KAM (voir [33]) :

**Définition 29.** Soit  $M^\bullet$  un moule. On définit la variance de  $M^\bullet$  par rapport à la  $i$ -ème lettre d'un mot  $\mathbf{n} = n_1 \dots n_r$  comme le moule suivant :

$$\begin{aligned} \text{var}_i(M^\bullet)^\mathbf{n} &= w(n_i)M^\mathbf{n} + M^{n_1 \dots [n_i + n_{i+1}] \dots n_r} - M^{n_1 \dots [n_{i-1} + n_i] \dots n_r}, \\ &= w(n_i)M^\mathbf{n} + M^{\text{conf}_i(\mathbf{n})} - M^{\text{comb}_i(\mathbf{n})}. \end{aligned}$$

où  $w(n_i)$  est le poids de la  $i$ -ème lettre  $n_i$  du mot  $\mathbf{n}$ . On pourra prendre  $i$  plus grand que la longueur du mot considéré, dans ce cas la variance est nulle.

Dans [31, p.1421], les auteurs définissent une dérivation de moules en utilisant la variance de la manière suivante :

**Définition 30.** Soit  $\mathbf{a}$  une lettre d'un alphabet donné et  $M^\bullet$  un moule. On définit l'opérateur :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{a}} M^\mathbf{n} &= \sum_{n_j \in \mathbf{n} \text{ s.t. } n_j = \mathbf{a}} \text{var}_j(M^\bullet)^\mathbf{n}, \\ &= \sum_{n_j \in \mathbf{n} \text{ s.t. } n_j = \mathbf{a}} \left( w(n_j)M^\mathbf{n} + M^{\text{conf}_j(\mathbf{n})} - M^{\text{comb}_j(\mathbf{n})} \right), \end{aligned}$$

et  $\nabla_{\mathbf{a}} M^\mathbf{n} = 0$  si  $\mathbf{a}$  n'apparaît pas dans le mot  $\mathbf{n}$ .

**Proposition 7.** L'opérateur  $\nabla_{\mathbf{a}}$  est une dérivation sur les moules pour toute lettre  $\mathbf{a}$  et tout moule  $M^\bullet$ .

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{a}$  une lettre d'un alphabet  $\mathbf{A}$  et  $M^\bullet, N^\bullet$  deux moules. Montrons que :

$$\nabla_{\mathbf{a}}(M \times N)^\mathbf{n} = (\nabla_{\mathbf{a}} M \times N)^\mathbf{n} + (M \times \nabla_{\mathbf{a}} N)^\mathbf{n}.$$

On commence avec la partie droite de l'égalité :

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{\mathbf{a}} M \times N)^{\mathbf{n}} + (M \times \nabla_{\mathbf{a}} N)^{\mathbf{n}} &= \sum_{\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}} \nabla_{\mathbf{a}} M^{\mathbf{n}^1} N^{\mathbf{n}^2} + M^{\mathbf{n}^1} \nabla_{\mathbf{a}} N^{\mathbf{n}^2}, \\
 &= \sum_{\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}} \left( \sum_{n_i = \mathbf{a}, n_i \in \mathbf{n}^1} w(n_i) M^{\mathbf{n}^1} \right) N^{\mathbf{n}^2} + M^{\mathbf{n}^1} \left( \sum_{n_i = \mathbf{a}, n_i \in \mathbf{n}^2} w(n_i) N^{\mathbf{n}^2} \right) \\
 &+ \sum_{\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}} \left( \sum_{n_i = \mathbf{a}, n_i \in \mathbf{n}^1} M^{\text{conf}_i(\mathbf{n}^1)} \right) N^{\mathbf{n}^2} + M^{\mathbf{n}^1} \left( \sum_{n_i = \mathbf{a}, n_i \in \mathbf{n}^2} N^{\text{conf}_i(\mathbf{n}^2)} \right) \\
 &- \sum_{\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}} \left( \sum_{n_i = \mathbf{a}, n_i \in \mathbf{n}^1} M^{\text{comb}_i(\mathbf{n}^1)} \right) N^{\mathbf{n}^2} - M^{\mathbf{n}^1} \left( \sum_{n_i = \mathbf{a}, n_i \in \mathbf{n}^2} N^{\text{comb}_i(\mathbf{n}^2)} \right).
 \end{aligned}$$

Maintenant nous allons travailler sur l'expression de chaque ligne de la dernière égalité ci-dessus. A la première ligne on peut remarquer que  $w(n_i) = w(\mathbf{a})$  alors dans chaque somme les termes sont indépendants de  $i$  mais dépendent du nombre d'apparitions de la lettre  $\mathbf{a}$  noté  $k$  dans  $\mathbf{n}$  et on peut réécrire la ligne de la manière suivante :

$$kw(\mathbf{a})(M \times N)^{\mathbf{n}}.$$

Ce terme correspond au premier terme qui apparaît dans le développement de  $\nabla_{\mathbf{a}}(M \times N)^{\mathbf{n}}$ .

La seconde et la troisième ligne se travaillent de la même manière, nous allons donc étudier uniquement pour la seconde ligne. Le second terme dans le développement de  $\nabla_{\mathbf{a}}(M \times N)^{\mathbf{n}}$  est :

$$\sum_{n_i = \mathbf{a}} (M \times N)^{\text{conf}_i(\mathbf{n})}.$$

On note  $(i_1, \dots, i_k)$  les indices de lettres telles que  $n_{i_j} = \mathbf{a}$  dans le mot  $\mathbf{n}$ . Alors, on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n_i = \mathbf{a}} (M \times N)^{\text{conf}_i(\mathbf{n})} &= \sum_{n_i = \mathbf{a}} (M \times N)^{n_1 \dots [n_i + n_{i+1}] \dots n_r}, \\
 &= (M \times N)^{n_1 \dots [n_{i_1} + n_{i_1+1}] \dots n_r} + \dots + (M \times N)^{n_1 \dots [n_{i_k} + n_{i_k+1}] \dots n_r}, \\
 &= \sum_{j=1}^k \left( M^{\emptyset} N^{n_1 \dots [n_{i_j} + n_{i_j+1}] \dots n_r} + M^{n_1} N^{n_2 \dots [n_{i_j} + n_{i_j+1}] \dots n_r} + \dots + M^{n_1 \dots n_{j-1}} N^{[n_{i_j} + n_{i_j+1}] \dots n_r} \right) + \\
 &+ \sum_{j=1}^k \left( M^{n_1 \dots [n_{i_j} + n_{i_j+1}]} N^{n_{i_j+2} \dots n_r} + M^{n_1 \dots [n_{i_j} + n_{i_j+1}] n_{i_j+2}} N^{n_{i_j+3} \dots n_r} + \dots + M^{n_1 \dots [n_{i_j} + n_{i_j+1}] \dots n_r} N^{\emptyset} \right).
 \end{aligned}$$

La première somme peut se réécrire par factorisation sous la forme :

$$\sum_{\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}} M^{\mathbf{n}^1} \left( \sum_{n_i = \mathbf{a}} N^{\text{conf}_i(\mathbf{n}^2)} \right),$$

et la seconde :

$$\sum_{\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}} \left( \sum_{n_i = \mathbf{a}} M^{\text{conf}_i(\mathbf{n}^1)} \right) N^{\mathbf{n}^2}.$$

On obtient alors la seconde ligne du développement de  $(\nabla_{\mathbf{a}}M \times N)^{\mathbf{n}} + (M \times \nabla_{\mathbf{a}}N)^{\mathbf{n}}$ . De la même manière on obtient la troisième ligne et ainsi on vérifie l'égalité. Ainsi l'opérateur  $\nabla_a$  est une dérivation sur les moules.  $\square$

D'autres dérivations peuvent être définies et on renvoie aux travaux de J. Ecalle pour de nombreux exemples. On pourra aussi consulter [21, p. 357]).

### 5.1.3 Dérivations et symétries

Nous allons ici nous intéresser aux moules possédant des symétries alternal et symétral. On introduit une classe importante de dérivations qui préservent l'alternativité.

**Définition 31.** *Une dérivation est alternal si l'image d'un moule alternal par celle-ci est toujours un moule alternal.*

Il est facile de voir que les dérivations élémentaires  $lang$  et  $\nabla$ , respectivement définies par :

$$\begin{aligned} lang(M)^{\mathbf{n}} &:= \ell(\mathbf{n})M^{\mathbf{n}}, \\ \nabla(M)^{\mathbf{n}} &:= w(\mathbf{n})M^{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

sont alternales. Un résultat général est donné pour les dérivations composites :

**Lemme 10.** *Une dérivation composite  $D_A$  est alternale si et seulement si le moule  $A^\bullet$  est alternal.*

On renvoie à [21, Lemma IV.59, p. 357] pour la démonstration. Ce résultat est important dans la suite du fait des correspondances entre les moules alternaux et anti-séparatifs.

Les dérivations sur les moules peuvent servir à écrire l'analogue des équations différentielles sur les moules. L'intérêt de telles équations est qu'elles fournissent pour certains moules des symétries. On a le résultat suivant démontré dans [21, Paragraphe 2.3, p. 357] :

**Théorème 4.** *Soit  $D_\lambda$  une dérivation du type (5.2), et soit  $M^\bullet$  un moule satisfaisant une équation différentielle moulienne :*

$$D_\lambda(M)^\bullet = (A \times M)^\bullet,$$

avec :

- i) le moule  $\lambda^\bullet$  satisfait  $\lambda^{\mathbf{n}} \neq 0 \ \forall \mathbf{n}, \ell(\mathbf{n}) \geq 1$ ,
- ii) pour le mot vide,  $M^\emptyset = 1$ ,
- iii) le moule  $A^\bullet$  est alternal,

Alors le moule  $M^\bullet$  est symétral.

### 5.1.4 Automorphismes élémentaires

On introduit les automorphismes de moules :



**Définition 32.** *Un automorphisme de moules est une application linéaire inversible  $A$  de  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$  dans  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$  satisfaisant :*

$$A(M \times N)^{\bullet} = (A(M) \times A(N))^{\bullet}$$

pour toutes paires de moules  $(M^{\bullet}, N^{\bullet}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ .

Comme pour les dérivations, on peut définir des classes simples d'automorphismes appelés *automorphismes élémentaires* de la forme :

$$A_f(M)^{\bullet} = f(\bullet)M^{\bullet}$$

où  $f$  est une application de  $\mathbf{A}^*$  dans  $\mathbb{K}$  vérifiant des conditions que nous allons montrer maintenant. Faisons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} A_f(M \times N)^{\mathbf{n}} &= (A_f(M) \times A_f(N))^{\mathbf{n}} \\ &= \sum_{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}} A_f(M)^{\mathbf{n}_1} A_f(N)^{\mathbf{n}_2} \\ &= \sum_{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}} f(\mathbf{n}_1) M^{\mathbf{n}_1} f(\mathbf{n}_2) N^{\mathbf{n}_2} \end{aligned}$$

Or par définition :

$$A_f(M \times N)^{\mathbf{n}} = f(\mathbf{n})(M \times N)^{\mathbf{n}}.$$

Ainsi l'application  $f$  doit être un morphisme de monoïdes de  $\mathbf{A}^*$  dans  $(\mathbb{K} - \{0\}, \times)$ .

**Théorème 5.** *Une application  $A_f$  de  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$  dans  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$  comme ci-dessus est un automorphisme si et seulement si  $f$  est un morphisme de  $(\mathbf{A}^*, \cdot)$  dans  $(\mathbb{K} - \{0\}, \times)$ .*

Par exemple  $e^{\nabla} = A_{e^{w(\bullet)}} : (\mathbf{A}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}, \times)$ , définie par  $e^{\nabla} M^{\mathbf{n}} = e^{w(\mathbf{n})} M^{\mathbf{n}}$ , est un automorphisme de l'algèbre des moules. Cet automorphisme apparaît naturellement dans l'étude des problèmes de formes normales de difféomorphismes locaux.

## 5.2 Equations fonctionnelles de moules et arborification

Dans cette section, on introduit la notion de dérivations et d'automorphismes sur les moules arborescents. Les définitions sont sensiblement les mêmes que pour les moules. L'intérêt est de montrer les transferts de structure par arborification.

### 5.2.1 Dérivations et automorphismes sur les moules arborescents

Rappelons la définition de dérivations sur l'algèbre des moules arborescents :

**Définition 33.** *Une dérivation  $D^<$  sur l'algèbre des moules arborescents est une application linéaire satisfaisant :*

$$D^<(P \times Q)^{\bullet} = (D^<(P) \times Q)^{\bullet} + (P \times D^<(Q))^{\bullet}$$

pour toutes paires de moules arborescents  $(P^\bullet, Q^\bullet)$ .

**Définition 34.** Un automorphisme de l'algèbre des moules arborescents est une application linéaire inversible  $A^<$  satisfaisant :

$$A^<(P \times Q)^\bullet = (A^<(P) \times A^<(Q))^\bullet$$

pour toutes paires de moules arborescents  $(P^\bullet, Q^\bullet)$ .

On donne dans le même schéma que pour les moules une classe d'automorphismes élémentaires de l'algèbre des moules arborescents.

**Définition 35.** Soit une application  $A_f^<$  de l'algèbre des moules arborescents dans elle-même vérifiant :

$$A_f^<(T)^\bullet = f(\bullet)T^\bullet,$$

où  $f : \mathcal{H}_{CK}^A \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Lemme 11.** L'application  $A_f^<$  est un automorphisme de l'algèbre des moules arborescents si l'application  $f$  rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{CK}^A \times \mathcal{H}_{CK}^A & \xrightarrow{\beta_+} & \mathcal{H}_{CK}^A \\ & \searrow f \times f & \downarrow f \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

L'application  $A_f^<$  est un automorphisme de l'algèbre des moules arborescents si l'application  $f$  est compatible avec le greffe, i.e. si

$$f(T) = f(T_1)f(T_2)$$

dès que la forêt décorée  $T$  est obtenue de  $T_1$  et  $T_2$  par une greffe de certaines composantes connexes de  $T_1$  sur certains sommets de  $T_2$ .

*Démonstration.* L'application  $A_f^<$  est un automorphisme si et seulement si  $A_f^<(P \times Q)^\bullet = (A_f^<(P) \times A_f^<(Q))^\bullet$  pour toutes paires de moules arborescents  $(P^\bullet, Q^\bullet)$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} A_f^<(P \times Q)^T &= f(T)(P \times Q)^T, \\ &= f(T) \sum_{t_{T_1} \otimes t_{T_2} \text{ apparaît dans } \Delta(T)} P^{T_1} Q^{T_2}. \end{aligned}$$

En développant les termes à droite de l'égalité, on a :

$$\begin{aligned} (A_f^<(P) \times A_f^<(Q))^T &= \sum_{t_{T_1} \otimes t_{T_2} \text{ apparaît dans } \Delta(T)} A_f^<(P)^{T_1} A_f^<(Q)^{T_2}, \\ &= \sum_{t_{T_1} \otimes t_{T_2} \text{ apparaît dans } \Delta(T)} f(T_1)f(T_2)P^{T_1}Q^{T_2}. \end{aligned}$$

Ainsi une condition nécessaire est  $f(T) = f(T_1)f(T_2)$  pour tous  $T_1, T_2$  tels que  $T_1 \otimes T_2$  apparaît dans l'expression du coproduit de  $T$   $\Delta(T)$ . Cette condition est assurée par les conditions énoncées dans le Lemme 11.  $\square$

**Exemple 10.** L'application  $A_f^<$  avec  $f(T) = e^{w(T)}$ , i.e.

$$A_f^<(P)^\bullet = e^{w(\bullet)} P^\bullet$$

est un automorphisme de l'algèbre des moules arborescents.

### 5.2.2 Arborification de dérivations et d'automorphismes

Soit  $D : \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$  une dérivation sur l'algèbre des moules. On peut facilement associer à  $D$  une dérivation  $D^<$  sur l'algèbre des moules arborifiés de la manière suivante :

$$D^<(M_<)^\bullet := D(M)^\bullet \quad (5.9)$$

Un problème moins trivial est celui d'étendre  $D^<$  à l'algèbre des moules *arborescents*. D'un autre côté, on peut facilement obtenir une dérivation  $D$  sur l'algèbre des moules à partir de l'algèbre des moules arborescents :

**Lemme 12.** Soit  $D^<$  une dérivation sur les moules arborescents. L'application  $D$  sur les moules définie par :

$$D(M)^{\mathbf{n}} := D^<(M_<)^{T_{\mathbf{n}}}, \quad (5.10)$$

où  $T_{\mathbf{n}}$  est un arbre totalement ordonné  $n_1 \cdots n_r$ , est une dérivation sur les moules.

*Démonstration.* Ceci est une simple conséquence du fait que l'inclusion  $\mathcal{H}_0^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  donnée par  $\mathbf{n} \mapsto T_{\mathbf{n}}$ , qui au mot  $\mathbf{n}$  associe l'arbre totalement ordonné décoré par les lettres de  $\mathbf{n}$ , est un morphisme de cogèbre :

$$\begin{aligned} D(M \times N)^{\mathbf{n}} &= D^<((M \times N)_<)^{T_{\mathbf{n}}} \\ &= D^<(M_< \times N_<)^{T_{\mathbf{n}}} \\ &= (D^<(M_<) \times N_< + M_< \times D^<(N_<))^{T_{\mathbf{n}}} \\ &= \sum_{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}} D^<(M_<)^{T_{\mathbf{n}_1}} N_<^{T_{\mathbf{n}_2}} + M_<^{T_{\mathbf{n}_1}} D^<(N_<)^{T_{\mathbf{n}_2}} \\ &= \sum_{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}} D(M)^{\mathbf{n}_1} N^{\mathbf{n}_2} + M^{\mathbf{n}_1} D(N)^{\mathbf{n}_2} \\ &= (D(M) \times N + M \times D(N))^{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

□

**Remarque 9.** La notation  $D^<$  pour les dérivations de l'algèbre des moules arborescents est naturelle mais trompeuse du fait que l'arborification d'une dérivation  $D$  sur l'algèbre des moules ordinaires donnée par le Lemme 12 est seulement définie sur l'algèbre des moules *arborifiés*. Une extension de cette arborification à l'algèbre entière des moules arborescents à priori mérite la notation  $D^<$ . La plupart des dérivations rencontrées en pratique admettent toutefois une extension "naturelle" unique de leurs arborifications.

### 5.2.3 Invariance d'équations fonctionnelles sous arborification

Considérons une équation fonctionnelle impliquant un moule  $M^\bullet$  :

$$D(M)^\bullet = (A \times M)^\bullet \quad (5.11)$$

où  $A$  est un moule fixé. Le principal résultat de cette section est le Lemme simple suivant :

**Lemme 13.** *L'équation fonctionnelle (5.11) est invariante par arborification, i.e. garde la même forme. Précisément, si  $D^<$  est la dérivation arborifiée associée à  $D$ , le moule arborifié  $M_\<^\bullet$  satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$D^<(M_\<)^\bullet = (A_\< \times M_\<)^\bullet. \quad (5.12)$$

*Démonstration.* Cela vient de la définition de l'arborification d'une dérivation et du Lemme 5. En effet, en arborifiant de chaque côté de l'équation fonctionnelle on obtient :

$$D(M)_\<^\bullet = (A \times M)_\<^\bullet,$$

qui peut se réécrire comme :

$$D^<(M_\<)^\bullet = (A_\< \times M_\<)^\bullet,$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 5.2.4 Exemples sur des moules élémentaires

Les moules élémentaires  $S^\bullet$  et  $\mathfrak{S}^\bullet$  définis par (3.7) satisfont aussi des équations fonctionnelles données par (voir [30], equations (3.43) et (3.44) p.85) :

$$\nabla[S]^\bullet = -(S \times I)^\bullet, \quad \nabla[\mathfrak{S}]^\bullet = (I \times \mathfrak{S})^\bullet. \quad (5.13)$$

En utilisant le Lemme 13, les versions arborifiées de  $S^\bullet$  et  $\mathfrak{S}^\bullet$  notée  $S_\<^\bullet$  et  $\mathfrak{S}_\<^\bullet$  satisfont les équations fonctionnelles :

$$\nabla^<[S_\<]^\bullet = -(S_\< \times I_\<)^\bullet, \quad \nabla^<[\mathfrak{S}_\<]^\bullet = (I_\< \times \mathfrak{S}_\<)^\bullet. \quad (5.14)$$

Ces formules en main, on peut alors récupérer le Lemme 4 directement sans aucun calcul.

### 5.2.5 Sur les moules "tough"

Cet exemple provient de l'article [31], on a besoin d'introduire différentes notations et opérations sur les moules. D'abord on introduit une factorisation sur les mots.

**Définition 36.** *Soit  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  un mot. On définit deux opérations de factorisation sur les mots :*

$$\begin{aligned} f_+(\mathbf{n}) &= \mathbf{n}^1 \cdots \mathbf{n}^{s+} \mathbf{n}^+, & (\text{forward factorisation}), \\ f_-(\mathbf{n}) &= \mathbf{n}^- \mathbf{n}^1 \cdots \mathbf{n}^{s-}, & (\text{backward factorization}). \end{aligned}$$

où chaque  $\mathbf{n}^i$  est un sous-mot de  $\mathbf{n}$  écrit  $\mathbf{n}^i = n_{i_1} \cdot n_{i_2} \cdots n_{i_k}$  tel que  $\|\mathbf{n}^i\| = n_{i_1} + \cdots + n_{i_k} = 0$  mais  $n_{i_1} + \cdots + n_{i_q} \neq 0$ ,  $i_1 < i_q < k$ . Ici  $\mathbf{n}^+$  est le dernier sous-mot de poids non plus à droite obtenu après la factorisation des premières lettres par la droite, il en est de même pour  $\mathbf{n}^-$  sauf que la factorisation se fait en commençant par la dernière lettre du mot.

**Lemme 14.** Soit  $\mathbf{n}$  un mot. On a :

$$f_+(\mathbf{n}) = f_-(\mathbf{n}) \text{ si et seulement si } \|\mathbf{n}\| = 0.$$

**Exemple 11.** Considérons le mot  $\mathbf{n} = -1 \cdot 1 \cdot 2$ . Alors, on a :

$$f_+(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^1 \mathbf{n}^+ \text{ et } f_-(\mathbf{n}) = \mathbf{n},$$

avec  $\mathbf{n}^1 = -1 \cdot 1$  et  $\mathbf{n}^+ = 2$ .

Pour un mot quelconque  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$ , on introduit les moules suivants :

$$\underline{S}_{rest}^{\mathbf{n}} = \prod_{\hat{\omega}_i \neq 0} \frac{1}{\hat{\omega}_i},$$

où  $\hat{\omega}_i = \omega(n_i) + \omega(n_{i+1}) + \cdots + \omega(n_r)$ .

On introduit aussi le moule  $rad^\bullet$  qui dépend de lettres à deux composantes de la manière suivante. L'alphabet sera constitué de lettres  $n_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$  avec  $u_i \in \mathbb{C}$  et  $v_i \in \mathbb{R}^+$ . On définit l'opération suivante :

$$\square_{n_i} M^{\mathbf{n}} = v_i \partial_{u_i} M^{\mathbf{n}} + M^{conf_i(\mathbf{n})} - M^{comb_i(\mathbf{n})}$$

où  $conf_i(\mathbf{n})$  et  $comb_i(\mathbf{n})$  définis comme précédemment. Les opérateurs  $\partial$  sont des dérivées partielles définies de manière usuelle puisque la lettre  $n_i$  est un nombre complexe.

Le moule  $rad^\bullet$  est symétral défini comme la solution de l'équation moulienne :

$$\square_{n_i} rad^\bullet = -(rad \times I_{n_i})^\bullet, \forall i,$$

avec  $rad^\emptyset = 1$ ,  $rad^{\mathbf{n}} = 0$  si  $u_i = 0 \forall i = 1, \dots, \ell(\mathbf{n})$  et  $I_{n_i}^\bullet$  est le moule défini par  $I_{n_i}^{n_j} = 1$  si la lettre  $n_j$  est égale à la lettre  $n_i$  et vaut 0 dans tous les autres cas.

**Lemme 15.** Pour un mot  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \end{pmatrix}$  de longueur  $r$ , le moule  $rad^\bullet$  est un polynôme homogène de degré  $r$  en les variables  $u_i$  et homogène de degré  $r-1$  en les variables  $(v_i + v_{i+1} + \cdots + v_j)^{-1}$  avec  $1 \leq i \leq j \leq r$ .

**Définition 37.** Soit  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  un mot avec  $n_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , on définit l'opérateur :

$$Rad_-^{\mathbf{n}} = rad^{unbre_-(\mathbf{n})},$$

où  $unbre_-$  est une opération sur les mots définie par :

$$unbre_-(\mathbf{n}) = \binom{\partial_{\mathbf{n}^1_1} + \dots \partial_{\mathbf{n}^1_{\ell(\mathbf{n}^1)}}}{\ell(\mathbf{n}^1)} \dots \binom{\partial_{\mathbf{n}^{s-}_1} + \dots \partial_{\mathbf{n}^{s-}_{\ell(\mathbf{n}^{s-})}}}{\ell(\mathbf{n}^{s-})},$$

où les mots  $\mathbf{n}^1, \dots, \mathbf{n}^s$  sont obtenus par la factorisation  $f_-(\mathbf{n})$ .

Dans cette définition, les opérateurs de dérivées partielles sont encore définis de manière classique puisque chaque  $\mathbf{n}^i_j$  est un nombre complexe.

**Remarque 10.** On peut aussi définir l'opérateur  $Rad_+$  avec la factorisation  $f_+$ .

On a alors le Lemme suivant ([31, Lemma 4.4 p.1431]) :

**Lemme 16.** Le moule "tough"  $\underline{S}_{ext}^\bullet$  est défini par :

$$\underline{S}_{ext}^{\mathbf{n}} = Rad_-^{\mathbf{n}} [\underline{S}_{rest}^{\mathbf{n}}]$$

et cette relation est invariante par arborification, autrement dit :

$$\underline{S}_{ext<}^T = Rad_{-<}^T [\underline{S}_{rest<}^T].$$

*Démonstration.* La preuve originale donnée par J. Ecalle et D.Schlomiuk peut être trouvée dans [31, Lemma 4.4 p.1431 à p. 1434]. Pour cela il utilise le fait que les moules sont invariants par arborification.

On a :  $\underline{S}_{ext<}^T = \underline{S}_{ext}^{\pi_0(T)} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{L}(T)} Rad_-^{\mathbf{n}} \underline{S}_{rest}^{\mathbf{n}} = Rad_{-<}^T [\underline{S}_{rest<}^T]$ .

□



## Chapitre 6

# Arborification et convergence

Dans ce chapitre nous montrons comment la convergence de séries construites sur des opérateurs différentiels peut être obtenue grâce à l'arborification en reprenant le théorème de Brjuno sur la linéarisation analytique de champs de vecteurs et la démonstration complète à la façon de J. Ecalle.

### 6.1 Un Lemme fondamental

On commence cette section par donner les expressions de l'inverse de moule ordinaire et arborescent pour le produit de moule associé.

**Lemme 17.** *Soit  $M^\bullet$  un moule tel que  $M^\emptyset \neq 0$ , son moule inverse  $N^\bullet$  est donné par  $N^\emptyset = \frac{1}{M^\emptyset}$  et pour tout mot non vide  $\mathbf{n}$  :*

$$N^\mathbf{n} = \sum_{s=1}^r \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^s = \mathbf{n}} \frac{(-1)^s}{(M^\emptyset)^{1+s}} M^{\mathbf{n}^1} \dots M^{\mathbf{n}^s},$$

et pour l'inverse d'un moule symétral  $M^\bullet$ , on a la formule :

$$N^\mathbf{n} = M^{S(\mathbf{n})}$$

où  $S$  est l'antipode de l'algèbre de Hopf shuffle  $\mathcal{H}_0^\mathbf{A}$ .

L'inverse d'un moule arborescent utilise toutes les décompositions d'un arbre obtenu par le coproduit et ses itérations :

**Lemme 18.** *Soit  $P^\bullet$  un moule arborescent tel que  $P^1 \neq 0$ . Son moule inverse  $Q^\bullet$  est donné, pour toute forêt  $T$ , par :*

$$Q^T = \sum_{s=1}^{\ell(t_\mathbf{n})} \frac{(-1)^s}{(P^1)^{s+1}} \sum_{(T)} P^{T^{(1)}} \dots P^{T^{(s)}} \quad (6.1)$$

où le coproduit réduit itéré  $\tilde{\Delta}^{(s-1)}$  est défini par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^{(0)} &= Id, \\ \tilde{\Delta}^{(1)}(T) &= \tilde{\Delta}(T) = \Delta(T) - T \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes T, \\ \tilde{\Delta}^{(s)} &= \underbrace{\tilde{\Delta} \otimes Id \otimes \dots \otimes Id}_{s \text{ terms}} \circ \tilde{\Delta}^{(s-1)}, \end{aligned}$$



et où on utilise la notation de Sweedler :

$$\tilde{\Delta}^{(s-1)}(T) = \sum_{(T)} T^{(1)} \otimes \dots \otimes T^{(s)}.$$

En d'autres mots, l'inverse d'un moule arborescent évalué sur une forêt  $T$  est donné par la somme signée sur toutes les décompositions possibles de  $T$  qui respectent l'ordre partiel, dans le sens où les sommets de  $T^{(i)}$  sont incomparables ou inférieurs à ceux des sommes de  $T^{(j)}$  dès que  $i < j$ . Pour un moule séparatif  $M_{\prec}^{\bullet}$ , la formule peut être simplifiée :

**Lemme 19.** *Soit  $P^{\bullet}$  un moule séparatif, alors son inverse est donné par :*

$$Q^T = P^{S(T)}$$

où  $S$  est l'antipode de l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer décrite précédemment.

Le Lemme suivant énoncé par J. Ecalle dans [30, Lemme 3.1, p. 82] est fondamental pour démontrer la convergence de séries normalisantes puisqu'il permet de récupérer de "bonnes estimations" sur le moule inverse.

**Lemme 20** (Lemme fondamental). *Soit  $M^{\bullet}$  un moule vérifiant  $M^{\emptyset} \neq 0$  et satisfaisant pour tout mot  $\mathbf{n}$  l'inégalité :*

$$|M^{\mathbf{n}}| \leq c_0 c^{\ell(\mathbf{n})},$$

avec  $c_0, c$  des constantes positives. Alors il existe une constante  $\tilde{c}_0$  explicite déduite de  $c_0$  telle que le moule inverse  $N^{\bullet}$  satisfait l'inégalité :

$$|N^{\mathbf{n}}| \leq \tilde{c}_0 c^{\ell(\mathbf{n})}.$$

Pour un moule arborescent  $P^{\bullet}$  qui satisfait  $P^1 \neq 0$  et l'inégalité suivante pour toute forêt  $T$  :

$$|P^T| \leq c_0 c^{\ell(T)},$$

avec  $c_0$  et  $c$  des constantes positives, alors il existe une constante  $\tilde{c}_0$  explicite déduite de  $c_0$  telle que le moule inverse  $Q^{\bullet}$  satisfait :

$$|Q^T| \leq \tilde{c}_0 c^{\ell(T)}.$$

*Démonstration.* Soient  $M^{\bullet}$  un moule tel que  $M^{\emptyset} \neq 0$  et  $N^{\bullet}$  son moule inverse. On suppose que  $M^{\bullet}$  satisfait  $|M^{\mathbf{n}}| \leq c_0 c^{\ell(\mathbf{n})}$ . Le nombre de termes apparaissant dans le développement de l'inverse est

$2^{\ell(\bullet)-1}$ . Alors pour un mot  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  avec  $\ell(\mathbf{n}) = r$ , on a :

$$\begin{aligned}
 |N^{\mathbf{n}}| &\leq \sum_{s=1}^r \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^s = \mathbf{n}} \frac{1}{|M^{\emptyset}|^{s+1}} |M^{\mathbf{n}^1}| \cdots |M^{\mathbf{n}^s}|, \\
 &\leq \sum_{s=1}^r \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^s = \mathbf{n}} \frac{1}{c_0^{s+1}} c_0^{\ell(\mathbf{n}^1)} \cdots c_0^{\ell(\mathbf{n}^s)}, \\
 &\leq \sum_{s=1}^r \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^s = \mathbf{n}} \frac{1}{c_0^{s+1}} c_0^s c^{\ell(\mathbf{n}^1) + \dots + \ell(\mathbf{n}^s)}, \\
 &\leq \sum_{s=1}^r \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^s = \mathbf{n}} \frac{1}{c_0} c^{\ell(\mathbf{n})}, \\
 &\leq (2^{r-1}) \frac{1}{c_0} c^r.
 \end{aligned}$$

Pour un moule arborescent, la démonstration est similaire, du fait que le nombre de termes dans la partie droite de (6.1) est égale au nombre de manières de choisir un sous-ensemble d'arêtes, donc  $2^{\ell(T)-1}$ .

□

Suivant Ecalte ([30, preuve p. 82]), on note qu'une identité polynomiale est toujours préservée pour l'inverse multiplicatif car on ne prend pas en compte les propriétés particulières d'un moule dans nos calculs.

Maintenant nous allons supposer que l'alphabet  $\mathbf{A}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^d$  de d-uplets  $(n_1, \dots, n_d)$  tels que  $n_i \geq 0$  sauf au plus un qui peut être égal à  $-1$ . En plus du poids d'un mot, nous allons considérer une autre quantité associée à un mot : la profondeur.

**Définition 38.** La profondeur d'une lettre  $n = (n_1, \dots, n_d)$ , notée  $|n|$ , est la somme de chacune de ses composantes. La profondeur d'un mot est la somme des profondeurs de ses lettres.

On étend alors naturellement cette profondeur aux arbres décorés :

**Définition 39.** La profondeur peut aussi se définir sur les arbres enracinés décorés de la même manière, c'est-à-dire en sommant les composantes de chaque lettre décorant l'arbre.

Nous reviendrons en détails sur cette notion de profondeur dans la deuxième partie de ce manuscrit puisqu'elle permet une étude détaillée de la correction d'un champ de vecteurs.

Les majorations données par le Lemme fondamental peuvent être obtenues en utilisant la profondeur :

**Lemme 21.** Soit  $M^\bullet$  un moule satisfaisant  $M^\emptyset \neq 0$  ainsi que l'inégalité :

$$|M^{\mathbf{n}}| \leq c_0 c^{|\mathbf{n}|},$$

pour un mot  $\mathbf{n}$ , où  $c_0$  et  $c$  sont des constantes positives. Alors il existe une constante explicite  $\tilde{c}_0$  obtenue à partir de  $c_0$  telle que le moule inverse  $N^\bullet$  satisfait la majoration :

$$|N^{\mathbf{n}}| \leq 2^{\ell(\mathbf{n})} \tilde{c}_0 c^{|\mathbf{n}|},$$

Pour un moule arborifié  $P^\bullet$  satisfaisant la majoration :

$$|P^T| \leq c_0 c^{|T|},$$

pour toute forêt  $T$ , où  $c_0$  et  $c$  sont des constantes positives, alors il existe une constante explicite  $\tilde{c}_0$  obtenue à partir de  $c_0$  telle que le moule inverse arborifié  $Q$  satisfait :

$$|Q^T| \leq 2^{\ell(T)} \tilde{c}_0 c^{|T|}.$$

*Démonstration.* La démonstration est entièrement similaire à celle du Lemme fondamental remplaçant la longueur par la profondeur. □

Notons que les termes  $2^{\ell(\mathbf{n})}$  et  $2^{\ell(T)}$  ne peuvent être remplacés par les termes analogues impliquant la profondeur dès lors qu'un mot long peut avoir une profondeur petite voire négative. Évidemment, la principale difficulté est en général de démontrer que l'un des moules satisfait une inégalité polynomiale. Toutefois, dans certains cas importants c'est en effet possible d'obtenir des informations comme dans le cas du théorème de Brjuno.

## 6.2 Structure de la démonstration du théorème de Brjuno

La démonstration du théorème de Brjuno sur la linéarisation analytique d'un champ de vecteurs analytique satisfaisant la condition diophantienne de Brjuno découle facilement des résultats précédents, dès lors que l'on peut comprendre ce qu'il se passe au niveau des opérateurs. Cela correspond, d'un point de vue algébrique, à l'action duale de l'arborification sur les opérateurs différentiels, appelée *coarborification* par J. Ecalle et habituellement référencée à l'algèbre de Hopf de Grossman-Larson (on renvoie à [49] pour plus de détails). Dans cette section, on donne une démonstration complète de ce théorème suivant la stratégie proposée par J. Ecalle, en donnant les détails de ce qui est esquissé dans les articles de ce dernier.

### 6.2.1 Automorphisme de substitution et conjugaison de champs de vecteurs

Soit  $X = X_{lin} + \sum_{n \in \mathbf{A}} B_n$  un champ de vecteurs sous forme préparée de  $\mathbb{C}^\nu$ ,  $\nu \geq 1$ , c'est-à-dire tel que  $X_{lin}$  est un champ de vecteurs linéaire avec une matrice diagonale dont le spectre est noté  $\lambda$  et les  $B_n$  sont des *opérateurs différentiels homogènes* satisfaisant pour tout monôme  $x^m$ ,  $B_n(x^m) = \beta_{n,m} x^{n+m}$ . On note  $\mathbf{A}(X) \subset \mathbb{Z}^\nu$  l'ensemble des degrés engendrés par  $X$  et sa décomposition.

On recherche l'existence d'un difféomorphisme tangent à l'identité  $\phi$  tel que

$$\phi^{-1} X \phi = X_{lin}, \tag{6.2}$$

signifiant que  $X$  peut être linéarisé sous un changement de variables approprié. Cette équation est appelée *équation homologique* ou *équation de conjugaison*.

Suivant les travaux fondateurs d'H. Poincaré, il est facile de montrer que si la partie linéaire a un spectre non-résonant, alors on peut *formellement* conjuguer  $X$  à sa partie linéaire  $X_{lin}$ . L'existence d'un changement de variable analytique est plus subtil et reliée au problème classique des *petits diviseurs*.

Une manière d'aborder ce problème est de considérer l'automorphisme associé à un changement de variables  $\phi$ , notés  $\phi^*$  et définis pour tout  $h \in \mathbb{C}[[x]]$  par  $\phi^*(h) = h \circ \phi$ . Afin de construire un tel automorphisme, nous devons préciser le cadre algébrique dans lequel on l'étudie. Une première idée est de comprendre la structure de l'automorphisme de substitution du flot du champ de vecteurs  $X$ .

Notons  $\phi_t$  le flot du champ  $X$ . En utilisant la *formule de Taylor intégrale*, on peut facilement démontrer que  $\phi_t^*$  appartient à une complétion de l'algèbre enveloppante engendrée par  $X_{lin}$  et l'ensemble  $\{B_n, n \in \mathbf{A}(X)\}$ , noté  $\mathcal{B}$ . Les opérateurs  $B_n$  sont définis de la manière suivante :

$$B_n = x^n \sum_{i=1}^{\nu} b_i x_i \partial_{x_i},$$

avec  $x^n = x^{(n_1, \dots, n_\nu)} = x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu}$ . Pour un mot  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ , un opérateur  $B_{\mathbf{n}}$  est donné par  $B_{\mathbf{n}} = B_{n^1 \dots n^r} = B_{n^1} \circ \dots \circ B_{n^r}$  où  $n^i$  est une lettre de  $\mathbf{A}(X)$  et  $\circ$  est la composition usuelle d'opérateurs différentiels. Précisément, suivant les travaux précurseurs de Chen [15], on a :

$$\phi_t^* = \text{Id} + \sum_{r \geq 1} \frac{t^r}{r!} \sum_{O_{\bullet} \in (X_{lin}, \mathcal{B}(X))^*, \ell(O_{\bullet})=r} O_{\bullet}. \quad (6.3)$$

On cherche alors  $\phi^*$  dans l'algèbre enveloppante complétée de  $\mathcal{B}$ , i.e comme une série formelle non commutative donnée par :

$$\phi^* = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} \Phi^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}, \quad (6.4)$$

où  $\Phi^{\mathbf{n}} \in \mathbb{C}$  est le moule associé au changement de variables qui est symétral.

L'équation de conjugaison se lit alors :

$$X = \Phi^{*-1} X_{lin} \Phi^*, \quad (6.5)$$

ce qui donne

$$X_{lin} + \sum_{n \in \mathbf{A}(X)} B_n = \left( \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} \Phi^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \right)^{-1} X_{lin} \left( \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} \Phi^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \right). \quad (6.6)$$

En développant la partie droite de l'équation et en utilisant le lemme suivant (voir [21, p.369]) :

**Lemme 22.** *Pour tout mot  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ , on a :  $[X_{lin}, B_{\mathbf{n}}] = w(\mathbf{n})B_{\mathbf{n}}$ , où  $w(\mathbf{n})$  est le poids du mot  $\mathbf{n}$ .*

On peut alors réécrire l'équation de conjugaison uniquement sur les moules en utilisant la dérivation sur les moules  $\nabla$  comme :

$$\Phi^{\bullet} \times I^{\bullet} = \nabla(\Phi^{\bullet}). \quad (6.7)$$

On reconnaît une équation différentielle moulienne pour laquelle les résultats précédents s'appliquent.

### 6.2.2 Comoules et estimations

Afin de discuter de la convergence normale de séries normalisantes, on doit préciser quelle norme est utilisée sur les opérateurs différentiels  $B_{\mathbf{n}}$ . On donne des démonstrations complètes de ces majorations qui seront utilisées pour la preuve du théorème de Brjuno et qui ne sont pas, à notre connaissance, écrites en détails dans la littérature.

Dans un premier temps, on introduit la norme des germes de fonctions analytiques et celle sur les opérateurs différentiels :

**Définition 40.** Soient  $U$  et  $V$  deux voisinages compacts de 0 dans  $\mathbb{C}^\nu$  tels que  $V \subset U$ . Pour un germe de fonction analytique  $\phi \in \mathbb{C}\{x\}$  défini sur  $U$ , on définit sa norme par :

$$\|\phi\|_U = \sup_{x \in U} |\phi(x)|.$$

De la même manière, pour un opérateur différentiel  $P$  sur l'espace des fonctions analytiques  $\mathbb{C}\{x\}$ , on définit :

$$\|P\|_{U,V} = \sup_{\phi \text{ tel que } \|\phi\|_U \leq 1} \|P.\phi\|_V.$$

La norme de l'opérateur différentiel  $B_n$  pour  $n \in \mathbf{A}(X)$  est donnée par :

**Lemme 23.** Pour  $U$  et  $V$  suffisamment petits, il existe deux constantes  $C_{U,V}$  et  $C$  telles que pour tout  $n \in \mathbf{A}(X)$ , on a :

$$\|B_n\| \leq C_{U,V}^{|n|} C. \quad (6.8)$$

*Démonstration.* Soit  $B_n$  un opérateur différentiel avec  $n \in \mathbf{A}(X)$  de la forme :

$$B_n = x^n b(x),$$

où  $b(x) = \sum_{j=1}^{\nu} a_j x_j \partial_{x_j}$  et  $\phi = \sum_{\mathbf{i}=(i_1, \dots, i_\nu)} \phi_{\mathbf{i}} x^{\mathbf{i}}$  un germe de fonction analytique en 0. Alors on a :

$$B_n(\phi) = x^n \left( \sum_{\mathbf{i}} \phi_{\mathbf{i}} b(x) [x_{\mathbf{i}}] \right).$$

Le terme  $x^n$  peut être majoré par  $C_{U,V}^{|n|}$  où la constante  $C_{U,V}$  dépend des voisinages  $U, V$  et l'autre terme peut être majoré par une constante  $C$  du fait du caractère analytique de  $\phi$  et  $b(x)$ .  $\square$

La principale majoration est la suivante sur les composées des opérateurs  $B_n$  :

**Lemme 24.** Pour  $U$  et  $V$  suffisamment petits, il existe des constantes  $C_{U,V}$  et  $C$  telles que pour tout  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$ ,  $r \geq 1$ , on a :

$$\|B_{\mathbf{n}}\| \leq r! C_{U,V}^{|\mathbf{n}|} C^r, \quad (6.9)$$

où  $|\mathbf{n}| = |n_1| + \dots + |n_r|$ , et  $n_i = (n_i^1, \dots, n_i^\nu)$ ,  $|n_i| = \sum_{j=1}^\nu n_i^j$ .

Ce Lemme suit le précédent reliant la norme de  $B_{\mathbf{n}}$  à la norme de  $B_{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

**Lemme 25.** *Pour tout  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$ ,  $r \geq 1$ , on a :*

$$\|B_{\mathbf{n}}\| \leq r! \|B_{n_1}\| \cdots \|B_{n_r}\| C^r. \quad (6.10)$$

Nous n'avons pas trouvé de démonstrations de ces deux Lemmes dans la littérature, cependant on renvoie à [32, Inégalité (3.10), p. 611] où cette estimation est donnée aussi. En conséquence, dans la suite, nous en donnons les démonstrations complètes. Notre stratégie est de décomposer chaque opérateur  $B_{\mathbf{n}}$  en des opérateurs différentiels plus petits qui peuvent être facilement analysés.

La démonstration se fait de la manière suivante. D'abord on utilise la coarborification afin de construire des opérateurs  $B_F$  sur des forêts définis par :

$$B_{\mathbf{n}} = \sum_{T, \mathbf{n} \in \mathcal{L}(T)} B_T. \quad (6.11)$$

**Remarque 11.** Une procédure standard pour obtenir un comoule coarborifié est la suivante : notons  $\chi(\mathbb{R}^\nu)$  l'espace des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^\nu$ , muni d'une structure standard pré-Lie donnée par :

$$\left( \sum_{i=1}^\nu f_i \partial_i \right) \triangleright \left( \sum_{j=1}^\nu g_j \partial_j \right) = \sum_{j=1}^\nu \left( \sum_{i=1}^\nu f_i (\partial_i g_j) \right) \partial_j.$$

On renvoie à [63] pour un exposé sur les algèbres pré-Lie.

Comme l'espace vectoriel de  $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$  est une algèbre pré-Lie libre engendrée par  $\mathbf{A}$  [14], il existe un unique morphisme d'algèbre pré-Lie  $B : \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rightarrow \chi(\mathbb{R}^\nu)$  tel que  $B(\overset{a}{\bullet}) = B_a$  pour  $a \in \mathbf{A}$ . Maintenant les arbres engendrent  $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  via le produit de Grossman-Larson  $\#$ , obtenu à partir du coproduit de Connes-Kreimer par dualité. Le comoule coarborifié est alors uniquement déterminé par :

$$B_{T_1 \# \dots \# T_r} := B_{T_r} \cdots B_{T_1} \quad (6.12)$$

pour  $T_1, \dots, T_r \in \mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ .

Le principal résultat est le suivant qui apparaît sans démonstration dans [32, Inégalité (3.11), p. 611] :

**Lemme 26.** *Soit  $B_F$  un comoule coarborifié construit à partir de  $B_{n_1}, \dots, B_{n_r}$ , alors on a :*

$$\|B_F\| \leq \prod_{i=1}^r \|B_{n_i}\| C_{U,V}^r. \quad (6.13)$$

Le résultat du Lemme 24 est une conséquence du fait que  $B_{\mathbf{n}}$  se décompose en  $r!$  comoules arborifiés  $B_F$ . Chacun d'eux satisfait l'estimation (6.13) on obtient donc (6.10). Mélangeant l'estimation (6.10) avec (6.8), on obtient (6.9).

Maintenant démontrons le Lemme 26.

*Démonstration.* Pour une forêt donnée  $F$  décorée par  $n_1, \dots, n_r$ , le comoule est de la forme explicite suivante :

$$B_F = B_{n_r}(x) [\epsilon_{r-1} [B_{n_{r-1}}(x) \epsilon_{r-2} [B_{n_{r-2}} \epsilon_{r-3} [\dots \epsilon_1 [B_{n_1}(x)] \dots]]]] \partial_x^{|\epsilon|}, \quad (6.14)$$

où  $\epsilon_i \in \{\text{Id}, \partial_x\}$  et

$$|\epsilon| = \sum_{i=1}^r \mathbb{1}_{\epsilon_i = \text{Id}}. \quad (6.15)$$

Maintenant on a pour tout  $\phi \in \mathbb{C}\{x\}$  défini sur  $U$  et pour tout  $x \in V$  :

$$|B_F(\phi)(x)| \leq |B_{n_r}(x) [\epsilon_{r-1} [B_{n_{r-1}}(x) \epsilon_{r-2} [B_{n_{r-2}} \epsilon_{r-3} [\dots \epsilon_1 [B_{n_1}(x)] \dots]]]]| |\partial_x^\epsilon \phi|. \quad (6.16)$$

Comme  $\phi \in C\{x\}$ , on a une majoration de  $|\partial_x^\epsilon \phi|$  donnée par l'inégalité de Cauchy qui est :

$$|\partial_x^\epsilon \phi| \leq |\epsilon|! \frac{M}{R^\epsilon}$$

où  $M := \sup_{x \in V} |\phi(x)|$  et  $R = (r_1, \dots, r_\nu) \in (\mathbb{R}^+)^d$  est tel que le polydisque centré en  $x$  de rayon  $r_i$  dans chaque direction est inclus dans  $V$ .

De plus pour chaque  $n \in \mathbf{A}(X)$ ,  $B_n(x)$  est une fonction analytique, alors si  $\epsilon_i = \partial_x$ , on a

$$|\partial_x(B_n(x))| \leq \|B_n\| C, \quad (6.17)$$

et donc

$$|\epsilon_i[B_n(x)]| \leq \|B_n\| C, \quad (6.18)$$

pour  $n \in \mathbf{A}(X)$ . On obtient alors par récurrence que :

$$|B_{n_r}(x) [\epsilon_{r-1} [B_{n_{r-1}}(x) \epsilon_{r-2} [B_{n_{r-2}} \epsilon_{r-3} [\dots \epsilon_1 [B_{n_1}(x)] \dots]]]]| \leq \tilde{C} \prod_{i=1}^r \|B_{n_i}\|. \quad (6.19)$$

□

Comme nous allons le voir, ces estimations des  $B_{\mathbf{n}}$  ne sont pas satisfaisantes pour démontrer l'analyticité de l'application de linéarisation sous les conditions de Brjuno.

### 6.2.3 Le cas de Poincaré - convergence sans arborification

Consid rions le *domaine de Poincaré* : on suppose que le spectre de la partie linéaire, noté  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$  est tel que l'enveloppe convexe des valeurs propres ne contienne pas 0. Dans ce cas, il est facile de voir que le champ de vecteurs est non résonant et ainsi formellement conjugué à sa partie linéaire mais on a de plus qu'il ne contient pas de petits diviseurs i.e. il existe une constante  $C > 0$  tel que pour tout mot  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ , on a :

$$|\omega(\mathbf{n})| \geq C. \quad (6.20)$$

On a ainsi le Théorème classique de Poincaré :

**Théorème 6.** *Si un champ de vecteurs est tel que son spectre appartient au domaine de Poincaré et*

ne contient pas de petits diviseurs alors l'application linéarisante est analytique.

C'est une conséquence directe de la forme de l'application linéarisante en utilisant les estimations précédentes et le Lemme suivant seulement valable en l'absence de petits diviseurs :

**Lemme 27.** *Si le champ de vecteurs a son spectre dans le domaine de Poincaré et qu'il ne contient pas de petits diviseurs alors le moule  $S^\bullet$  satisfait pour tout  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$  :*

$$|S^\mathbf{n}| \leq \frac{1}{r!C^r}, \quad (6.21)$$

où  $C$  est la constante provenant de la condition de non existence de petits diviseurs (6.20).

*Démonstration.* La preuve vient directement de la forme explicite du moule  $S^\bullet$ . En effet, comme il n'y a pas de petits diviseurs, il existe  $C > 0$  tel que  $|\omega(n)| > C$  pour tout  $n \in \mathbf{A}(X)$ . De plus, comme le spectre appartient au domaine de Poincaré, on peut supposer, à un changement de variables linéaire près, que toutes les valeurs propres ont leur partie réelle positive. En conséquence, pour tout  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ ,  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$ , on peut supposer que

$$\begin{aligned} |\omega(\mathbf{n})| &\geq \operatorname{Re}(\omega(\mathbf{n})), \\ &\geq \operatorname{Re}(\omega(n_1)) + \cdots + \operatorname{Re}(\omega(n_r)). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Par l'hypothèse de non-existence de petits diviseurs, on a pour tout  $n \in \mathbf{A}(X)$  que  $\operatorname{Re}(\omega(n)) > C$ . Ainsi, on obtient pour tout  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ ,

$$|\omega(\mathbf{n})| \geq \ell(\mathbf{n})C. \quad (6.23)$$

En utilisant la forme explicite de  $S^\bullet$  on en déduit (6.21).  $\square$

Une conséquence du Lemme 20 est que l'inverse du moule  $S^\bullet$  satisfait le même type de majoration. Afin de démontrer l'analyticité de l'application linéarisante et de son inverse, on peut restreindre notre attention aux sommes de la forme  $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} S^\mathbf{n} B_\mathbf{n}$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} S^\mathbf{n} B_\mathbf{n} &= \sum_{r \geq 0} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*, \ell(\mathbf{n})=r} S^\mathbf{n} B_\mathbf{n}, \\ &= \sum_{r \geq 0} \sum_{N \geq 0} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*, \ell(\mathbf{n})=r, |\mathbf{n}|=N} S^\mathbf{n} B_\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

en utilisant les deux graduations, celle par la longueur et l'autre par la profondeur d'un mot  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ .

En utilisant les estimations sur  $\|B_\mathbf{n}\|$  et  $S^\mathbf{n}$ , on en déduit que :

$$\sum_{r \geq 0} \sum_{N \geq 0} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*, \ell(\mathbf{n})=r, |\mathbf{n}|=N} S^\mathbf{n} B_\mathbf{n} \leq \sum_{r \geq 0} \sum_{N \geq 0} (C_1 C_{U,v})^r C_{U,V}^N. \quad (6.25)$$

Comme  $C_{U,V}$  peut être arbitrairement petit pour  $U$  et  $V$  suffisamment petits, on déduit que :

$$\sum_{r \geq 0} \sum_{N \geq 0} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*, \ell(\mathbf{n})=r, |\mathbf{n}|=N} S^\mathbf{n} B_\mathbf{n} < \infty. \quad (6.26)$$



Les mêmes estimations démontrent aussi la convergence de l'inverse.

### 6.2.4 Le cas de Brjuno - convergence et arborification

La même stratégie peut être appliquée au cas de Brjuno. La condition diophantienne de Brjuno contrôle les petits diviseurs et peut être utilisée pour fournir des estimations sur le moule de linéarisation.

**Lemme 28.** *Si un champ de vecteurs est tel que son spectre satisfait la condition de Brjuno alors il existe une constante  $C > 0$  telle que le moule  $S^\bullet$  satisfait pour tout  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$  :*

$$|S^\mathbf{n}| \leq C^{|\mathbf{n}|}. \quad (6.27)$$

On renvoie à [30, p. 94] et à [36, proposition 10, p. 45], pour plus de détails. Toutefois, contrairement au cas de Poincaré, les estimations couplées avec les comoules ne sont pas suffisantes pour assurer la convergence normale de l'application de linéarisation. En effet, on peut simplement montrer, en utilisant les différentes inégalités, que :

$$\left\| \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*, \ell(\mathbf{n})=r, |\mathbf{n}|=N} S^\mathbf{n} B_\mathbf{n} \right\| \leq \left( r! C_1 C_{U,V}^r \right)^N, \quad (6.28)$$

ce qui ne permet pas de conclure sur la convergence.

La principale remarque est que *les inégalités précédentes ne peuvent pas être plus précises*, si bien que *le théorème de Brjuno est hors de portée dans le formalisme classique du calcul moulien*. En effet, l'approche directe possède au moins deux points faibles :

- Premièrement, comme un comoule peut être décomposé en des opérateurs plus petits, on obtiendra alors des estimations plus fines sur les comoules arborifiés pour étudier les séries normalisantes.
- Comme un comoule arborifié donné peut provenir de plusieurs comoules, il a pour coefficient le coefficient correspond du moule arborifié. L'estimation de ce coefficient doit utiliser les propriétés de symétries du moule  $S^\bullet$ .

La dualité entre arborification et coarborification implique l'égalité suivante :

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} S^\mathbf{n} B_\mathbf{n} = \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}(X)}} S_{<}^F B_F. \quad (6.29)$$

Un regard naïf sur cette égalité porte à croire que rien ne change. En effet, le  $r!$  disparaît dans l'égalité (6.28) puisque chaque comoule arborifié satisfait :

$$\|B_F\| \leq C_{U,V}^{|F|} C^r, \quad (6.30)$$

mais une estimation directe du moule arborifié  $\mathfrak{S}_{\prec}^{\bullet}$  donne :

$$|S_{\prec}^F| = \left| \sum_{\mathbf{n} \in \pi_0(F)} S^{\mathbf{n}} \right| \leq r! C^{|F|}, \quad (6.31)$$

si bien que l'on aurait simplement transféré le  $r!$  dans l'estimation du moule arborifié ! La principale remarque de Jean Ecalle est que ce phénomène pour l'estimation de moule arborifié n'arrive pas. Cela n'est absolument pas trivial et provient de la préservation par arborification de l'équation fonctionnelle définissant le moule de linéarisation :

**Lemme 29** (Préservation d'identités polynomiales sous arborification). *Sous la condition diophantienne de Brjuno, le moule  $S^{\bullet}$  et son arborifié  $S_{\prec}^{\bullet}$  satisfont les identités polynomiales suivantes :*

$$\begin{aligned} |S^{\mathbf{n}}| &\leq c_0 c^{|\mathbf{n}|}, \\ |S_{\prec}^T| &\leq c_1 c^{|T|}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

où  $c_0$  et  $c_1$  sont des constantes positives.

La preuve n'est pas donnée en détails dans [30] où il est indiqué que cela provient d'un calcul fait par Brjuno dans ([10], pp. 207–224) sans utiliser les moules. La structure d'un moule  $S^{\bullet}$  provient directement de l'équation fonctionnelle le définissant. Comme cette équation est précisément invariante par arborification par le Lemme 13, on obtient une structure similaire sur le moule arborifié et en conséquence des estimations similaires. Une démonstration complète est donnée dans [36], Proposition 10.

On utilise alors nos résultats sur la préservation d'identités polynomiales sous arborification et sur le moule inverse pour montrer que :

$$\left\| \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}(X)}, l(F)=r, p(F)=N} S_{\prec}^F B_F^{\leq} \right\| \leq (C_1 C_{U,V}^r)^N, \quad (6.33)$$

ce qui implique la convergence sur un voisinage suffisamment petit  $U$ . On obtient alors une démonstration complète du théorème classique de Brjuno comme proposé par Jean Ecalle :

**Théorème 7** (Théorème de Brjuno). *Si un champ de vecteurs satisfait la condition de Brjuno, alors l'application de linéarisation est analytique.*

Il ne reste qu'à démontrer l'inégalité (6.33).

*Démonstration.* La partie de cette inégalité concernant les comoules coarborifiés vient directement de l'arborification/coarborification. En effet, le  $r!$  disparaît naturellement et on a :

$$\|B_F\| \leq C_1^r C_{U,V}^N. \quad (6.34)$$

L'estimation sur le moule  $S^{\bullet}$  et son inverse n'est pas directe et vient de nos résultats. Comme rappelé dans le Lemme 28, si le spectre  $\lambda$  satisfait la condition de Brjuno alors il existe une constante  $C > 0$

telle que pour un mot arbitraire  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$  on a

$$|S^{\mathbf{n}}| \leq C^{|\mathbf{n}|}. \quad (6.35)$$

En utilisant le Lemme fondamental on assure que l'inverse du moule arborifié  $S^\bullet$  satisfait aussi une identité polynomiale.  $\square$

## Chapitre 7

# Arborification et approche de Butcher des schémas numériques de Runge-Kutta

Ce chapitre est une **première exploration** des rapports existants entre arborification et l'émergence de structures arborescentes dans les travaux de Butcher (voir [11]) sur les méthodes de Runge-Kutta. On sait qu'au niveau algébrique, on retrouve bien les algèbres de Hopf de Connes-Kreimer et les divers éléments intervenant dans l'arborification (voir [66]). Nous décrivons ici une relation qui nous semble plus directe entre ces différents objets. En particulier, la mise au point d'une condition **d'ordre effective** pour une méthode numérique demande la comparaison du développement de Taylor et de celui de la solution du système différentiel à un temps donné. Or, l'analyse de ce développement de Taylor se fait via arborification à partir de l'écriture algorithmique sous forme de série à la Chen (on pourra consulter [15]). Ce même procédé permet de retrouver les différents éléments intervenant dans l'étude des B-séries (voir [51]) appliquées aux méthodes de Runge-Kutta.

On notera que des travaux sur les méthodes de Runge-Kutta dans le cadre de la renormalisation ont été déjà entamé par Ch. Brouder, on pourra par exemple consulter [7]. D'autres travaux récents dans cette direction sont aussi menés, on pourra notamment consulter les articles de [6] de G. Bogfjellmo, R. Dahmen et A. Schmedding ou encore [5].

Ce chapitre doit être vu comme une étape pour explorer l'utilisation de l'arborification dans différents contextes où entre en ligne de compte la question de la convergence de solution dont on possède une écriture sous forme de série formelle. En particulier, ce travail doit être mis en perspective avec les résultats récents obtenus dans [28] sur les solutions d'équations différentielles stochastiques pour lesquelles l'arborification doit fournir un bon cadre pour l'étude de la convergence et rejoindre ainsi les travaux de Gubinelli ([50]) où justement interviennent des arborescences.

## 7.1 Solution d'une équation différentielle et automorphisme de substitution

Considérons un champ de vecteurs analytique  $V_f = \sum_{i=1}^d f_i(\cdot) \partial_{y_i}$  dans  $\mathbb{R}^d$  avec  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  ou sa représentation sous forme de système différentiel  $\frac{dy_i}{dt} = f_i(y)$  où  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction analytique.

Par les théorèmes classiques d'existence, il existe un flot noté  $\varphi_t$  associé tel que  $X.\varphi_t = \frac{d\varphi_t}{dt}$  auquel on associe l'automorphisme de substitution :

**Définition 41.** L'application  $\varphi_t^* : \mathbb{C}\langle\langle y \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle x \rangle\rangle$  définie par :

$$\varphi_t^*(g) = g \circ \varphi_t$$

où  $g \in \mathbb{C}[[y]]$  est l'automorphisme de substitution associé au flot  $\varphi_t$  du champ  $V_f$ .

En particulier on remarque que si  $g = Id$ , on obtient précisément le flot mais pour cela il nous faut une expression de cet automorphisme de substitution que l'on peut obtenir en utilisant le développement de Taylor intégral.

**Théorème 8.** Le développement de Taylor de  $\varphi_t^*$  est formellement donné par :

$$\begin{aligned} \varphi_t^*[g](y)_i &= g_i \circ \varphi_t(y) = g_i(y) + \sum_{r \geq 0} \text{Tay}^r V_{f^r}[g_i](y), \quad i = 1, \dots, d, \\ &= \left( Id + \sum_{r \geq 0} \text{Tay}^r V_{f^r}[Id] \right) [g_i](y). \end{aligned}$$

où  $\text{Tay}^{f^r} = \int_{\Delta^r} dt_1 \cdots dt_r = \frac{t^r}{r!}$  avec  $\Delta^r$ , le simplexe défini par  $\Delta^r = \{(s_1, \dots, s_r) : 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_r \leq t\}$  et  $V_{f^r} = \underbrace{V_f \circ \cdots \circ V_f}_{r \text{ fois}}$ .

*Démonstration.* La démonstration se fait de manière récursive. Soit  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction analytique telle que  $g = (g_1, \dots, g_d)$ . La formulation intégrale de l'équation différentielle donne :

$$\begin{aligned} g_i \circ \varphi_t(y) &= g_i \circ \varphi_t(y)|_{t=0} + \int_0^t \frac{d}{ds_1} [g_i \circ \varphi_{s_1}(y)] ds_1, \\ &= g_i \circ \varphi_t(y)|_{t=0} + \int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(\varphi_{s_1}(y)) \frac{d}{ds_1} [\varphi_{s_1}]_j(y) ds_1. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\varphi_t$  est le flot de  $\frac{dy}{dt} = f(y)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} g_i \circ \varphi_t(y) &= g_i \circ \varphi_t(y)|_{t=0} + \int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(\varphi_{s_1}(y)) f_j(\varphi_{s_1}(y)) ds_1, \\ &= g_i \circ \varphi_t(y)|_{t=0} + \int_0^t V_f[g_i](\varphi_{s_1}(y)) ds_1. \end{aligned}$$

En itérant la formule sur  $V_f[g](\varphi_{s_1}(y))$ , on a :

$$V_f[g_i](\varphi_{s_1}(y)) = V_f[g_i](\varphi_{s_1}(y))|_{s_1=0} + \int_0^{s_1} \frac{d}{ds_2} [V_f[g_i](\varphi_{s_2}(y))] ds_2.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_2} [V_f[g_i](\varphi_{s_2}(y))] &= \sum_{j=1}^d \frac{d}{ds_2} \left[ \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(\varphi_{s_2}(y)) f_j(\varphi_{s_2}(y)) \right], \\ &= \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2 g_i}{\partial y_j \partial y_k}(\varphi_{s_2}(y)) f_j(\varphi_{s_2}(y)) f_k(\varphi_{s_2}(y)) + \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(\varphi_{s_2}(y)) \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\varphi_{s_2}(y)) f_k(\varphi_{s_2}(y)), \\ &= V_f[V_f[g_i]](\varphi_{s_3}(y)). \end{aligned}$$

On obtient par itération :

$$g(\varphi_t(y)) = g(\varphi_t(y))|_{t=0} + \sum_{r \geq 1} V_f \circ \dots \circ V_f[g](\varphi_t(y)|_{t=0}) \int_{\Delta^r} ds_1 \dots ds_r.$$

□

Ce développement nous fournit un cadre naturel algébrique pour écrire l'automorphisme de substitution qui est celui de l'algèbre des séries formelles construites sur les opérateurs différentiels  $V_f$ . Et on a l'identification naturelle entre les séries formelles à une variable et l'algèbre générée par  $V_f$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\langle\langle x \rangle\rangle &\rightarrow \mathfrak{U}(V_f) \\ S(x) = \sum_{r \geq 0} a_r x^r &\mapsto \sum_{r \geq 0} a_r \underbrace{V_f \circ \dots \circ V_f}_{r \text{ times}} \end{aligned}$$

On considère ici un alphabet composé d'une unique lettre  $f$  noté  $\mathbf{A} = \{f\}$ . L'ensemble des mots sur  $\mathbf{A}$  est alors :

$$\mathbf{A}^* = \{f^r\}.$$

avec  $f^r = \underbrace{f \cdot f \dots f}_{r \text{ times}}$  qui est la simple concaténation de la lettre  $f$ .

**Définition 42.** Le coefficient de la série  $\int_{\Delta^r} ds_1 \dots ds_r$  est un moule de  $\mathbf{A}$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on notera dans la suite  $\text{Tay}^\bullet$  tel que  $\text{Tay}^r = \text{Tay}^{f^r} = \int_{\Delta^r} ds_1 \dots ds_r$ .

## 7.2 Arborification de l'automorphisme de substitution

En suivant la procédure d'arborification sur l'expression de l'automorphisme de substitution par un développement des composées des opérateurs  $V_f$  puis un regroupement de termes on peut alors

réécrire la série indexée sur les arbres enracinés décorés par la lettre  $f$  de la manière suivante :

$$\varphi_t^* = Id + \sum_{F \in \mathcal{F}_A} Tay_{<}^F V_F$$

où  $Tay_{<}^\bullet$  est l'arborification du moule de Taylor et  $V_F$  est un opérateur différentiel provenant de la décomposition des composées de  $V_f$ .

### 7.2.1 Arborification de $V_f$ et du moule $Tay^\bullet$

On s'intéresse ici à la coarborification de l'opérateur différentiel  $V_f$  dans un premier temps puis à l'arborification du moule  $Tay^\bullet$  :

#### 7.2.1.1 Arborification de $V_f$

Pour cette reformulation, il suffit d'explicitier les composées des  $V_f$  :

$$\begin{aligned} V_f \circ V_f &= \sum_{j=1}^d f_j(\cdot) \partial_y \left[ \sum_{k=1}^d f_k(y) \partial_y \right], \\ &= \sum_{j,k=1}^d f_j(\cdot) \partial_y f_k(y) \partial_y + f_j(y) f_k(y) \partial_y^2. \end{aligned}$$

Il y a ici deux actions de  $V_f$  en tant qu'opérateur différentiel, une sur le coefficient de  $V_f$  et l'ordre sur la dérivée partielle et qui ainsi augmente l'ordre de l'opérateur obtenu.

Cette action de  $V_f$  sur les composées  $V_f \circ \dots \circ V_f$  consiste en une greffe d'un point sur un des sommets des arbres/forêts dans  $V_f \circ \dots \circ V_f$ . On a ainsi une représentation naturelle sous forme d'arbre où les deux actions se traduisent différemment.

Dans le cas de  $V_f \circ V_f$ , l'action de  $V_f$  sur  $f(y)$  se représente par l'arbre

$$\bullet$$

et l'opérateur différentiel d'ordre 1 associé s'écrit  $V_{\bullet}$ , tandis que l'action de  $V_f$  sur la dérivée partielle  $\partial_y$  est représentée par une forêt :

$$\bullet\bullet \text{ que l'on peut aussi noter } \bullet \oplus \bullet$$

et l'opérateur différentiel d'ordre 2 associé est noté  $V_{\bullet\bullet}$ .

Ainsi l'action sur le coefficient laisse l'ordre de l'opérateur différentiel invariant mais ajoute un sommet à l'arbre par greffe alors que l'action sur la dérivée partielle augmente l'ordre en ajoutant une composante à la forêt.

Cela nous amène naturellement à définir l'ordre d'une forêt :

**Définition 43.** *L'ordre d'une forêt  $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$  est le nombre d'arbres enracinés la constituant. On le note  $|F| = |F_1 \oplus \dots \oplus F_n| = n$ .*

**Lemme 30.** *Si une forêt  $F$  est d'ordre  $n$ , alors l'opérateur différentiel  $V_F$  est d'ordre  $n$ .*

Une conséquence de ce lemme est alors la réécriture par arborification du flot de l'équation différentielle :

**Lemme 31.** *Le flot de l'équation différentiel peut s'écrire par arborification comme une série sur les arbres et non sur les forêts de la manière suivante :*

$$\varphi_t^*(id) = \varphi_t = id + \sum_{T \in \mathcal{T}_A} \text{Tay}_{<}^T V_T[id]$$

*Démonstration.* La preuve réside dans le fait que tout opérateur différentiel  $V_F$  d'ordre supérieur ou égal à 2 s'annule si on l'applique à l'identité  $V_F[id] = 0$ . On considère donc seulement les forêts d'ordre  $|F| = 1$  autrement dit les arbres enracinés.  $\square$

### 7.2.1.2 Sur l'arborification du moule $\text{Tay}^\bullet$

Comme nous l'avons écrit dans les chapitres précédents, l'arborification d'un moule et en particulier du moule  $\text{Tay}^\bullet$  est donnée par :

$$\text{Tay}_{<}^T = \sum_{\underline{f}^i \in \pi_0(T)} \text{Tay}_{<}^{\underline{f}^i}.$$

L'application  $\pi_0$  préserve la longueur donc  $\ell(\underline{f}^i) = \ell(T) \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{L}(T)\}$  où  $\mathcal{L}(T)$  est le nombre d'extensions linéaires de  $T$  ainsi le moule qui ne dépend que de la longueur du mot sur lequel il est évalué et son arborifié est donné par :

**Lemme 32.** *Le moule  $\text{Tay}^\bullet$  défini par  $\text{Tay}^{\mathbf{n}} = \frac{t^r}{r!}$  où  $r$  est la longueur de  $\mathbf{n}$  admet pour moule arborifié :*

$$\text{Tay}_{<}^T = \mathcal{L}(T) \times \frac{t^r}{r!}$$

où  $T$  est un arbre de longueur  $r$ .

## 7.2.2 Codage des arbres : l'approche de Butcher

Nous allons ici montrer comment Butcher dans ses travaux (voir [11]) décode ses arbres. Il fait apparaître explicitement les dérivées des composantes de la fonction  $f$ . Commençons par un exemple simple :

**Exemple 12.** *Considérons la composition de trois opérateurs  $V_f$ , alors on a :*

$$\begin{aligned} V_f \circ (V_f \circ V_f) &= V_f \left( \sum_{j,k=1}^d f_j(y) \partial_y f_k(y) \partial_y + f_j(y) f_k(y) \partial_y^2 \right), \\ &= \sum_{i,j,k=1}^d f_i(y) \partial_y f_j(y) \partial_y f_k(y) \partial_y + f_i(y) f_j(y) \partial_y^2 f_k(y) \partial_y + 2f_i(y) f_j(y) \partial_y f_k(y) \partial_y^2 \\ &\quad + f_i(y) \partial_y f_j(y) f_k(y) \partial_y^2 + f_i(y) f_j(y) f_k(y) \partial_y^3. \end{aligned}$$



Chaque terme peut être alors encodé par un arbre de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 f_i(y)\partial_y f_j(y)\partial_y f_k(y)\partial_y & f_i(y)f_j(y)\partial_y^2 f_k(y)\partial_y & f_i(y)f_j(y)\partial_y f_k(y)\partial_y^2 \\
 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{ccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet \\ | & & & & | \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ | & & & & | \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array} \\
 \partial_y f_k & \partial_y^2 f_k & \partial_y f_k \quad f_i \quad \text{ou} \quad f_k \quad f_j
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 f_i(y)\partial_y f_j(y)f_k(y)\partial_y^2 & f_i(y)f_j(y)f_k(y)\partial_y^3 & \\
 \begin{array}{ccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet \\ | & & | & & | \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ | & & & & | \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array} & \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} & \\
 \partial_y f_k \quad f_i \quad \text{ou} \quad \partial_y f_j \quad f_k & f_i \quad f_j \quad f_k & 
 \end{array}$$

**Définition 44.** On note *Deco* la décoration construite sur l'alphabet  $\mathbf{A} = \{f\}$  telle que pour chaque feuille  $Fe$  d'un arbre  $T$  on ait  $\text{Deco}(Fe) = f$ . Ainsi si un nombre  $v(s) \in \mathbb{N}$  branches sont issues d'un sommet  $v$  alors la décoration  $s$  alors  $\text{Deco}(s) = f^{v(s)}$ .

Cela montre le lemme suivant :

**Lemme 33.** L'opérateur  $V_T$  associé à un arbre  $T$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$V_T = \prod_{\text{sommet } s \in T} \text{Deco}(s) \partial_y.$$

Par une simple application à l'identité de  $V_T$ , on obtient le résultat suivant :

**Corollaire 1.** Soit  $V_T$  un opérateur associé à un arbre  $T$  alors on a :

$$V_T[\text{Id}] = \prod_{\text{sommet } s \in T} \text{Deco}(s).$$

**Remarque 12.** Le codage de Butcher utilise la formule de Faà Di Bruno donnant la dérivée à tout ordre de la composée de fonctions .

Ce codage amène alors à la formulation de la solution exacte donnée par le théorème suivant :

**Théorème 9.** Le développement de Taylor de la solution exacte à l'ordre  $n$  en  $t_0$  est donné par :

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + \sum_{i=1}^n h^i \sum_{\substack{T \in \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \\ \ell(T)=i}} \alpha(T) F(y(t_0)) + \mathcal{O}(h^{n+1}),$$

où on définit les quantités  $\sigma(T)$ ,  $\gamma(T)$  et  $F(T)$  de la manière suivante :

- $\alpha(T)$  est un entier naturel dont l'expression est  $\frac{|T|!}{\sigma(T)\gamma(T)}$ ,
- si l'arbre  $T$  est vu comme la greffe de  $m$  arbres en la racine, noté  $T = [T_1 \dots T_m]$  alors la quantité  $\gamma$  d'un arbre est  $\gamma(T) = |\gamma|\gamma(T_1) \dots \gamma(T_m)$ ,
- $\sigma(T)$  est le coefficient de symétrie d'un arbre et est défini comme le nombre de bijections d'un arbre donné, dont on a une expression pour un arbre  $T = [T_1^{m_1} \dots T_k^{m_k}]$  vu comme la greffe de  $m_i$  répétitions de l'arbre  $T_i$  en la racine alors  $\sigma(T) = \prod_{k=1}^{i=1} m_i \sigma(T_i)^{m_i}$ ,
- $F(T)(y_0)$  est la dérivée élémentaire associée à l'arbre  $T$  correspondant à l'action de l'opérateur Déco sur les arbres munis de la décoration de Butcher.

On pourra consulter [51, p.53].

L'important ici est de remarquer que la décoration, bien que différente, ne modifie rien à l'approche puisqu'elle découle en fait naturellement de l'arborification et on a exactement les mêmes structures algébriques.

### 7.3 Approche de Butcher des schémas de Runge-Kutta et arborification

Dans cette section nous discutons de l'approche du schéma numérique de Runge-Kutta et de notre démarche par arborification. On souhaite montrer dans cette section que les structures introduites ainsi que les quantités associées aux arbres ne sont pas inhérentes au problème des schémas numériques mais proviennent du cadre plus large qu'est celui de l'arborification.

Dans un premier temps on explique la démarche à suivre par arborification pour arriver ensuite aux résultats de Butcher sur les schémas et l'écriture de la solution numérique.

On conclut sur l'apport de ce type d'approche pour le calcul d'ordre d'une méthode numérique.

Commençons par rappeler la définition d'un schéma de Runge-Kutta énoncé dans [26, p. 237] :

**Définition 45.** Une méthode de Runge-Kutta à  $s$  étages est un schéma numérique à un pas donné par :

$$y_{n,j} = y_n + h \sum_{k=1}^s a_{j,k} f(y_{n,k}), \quad j = 1, \dots, s,$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j f(y_{n,j}),$$

où  $a_{j,k}$  et  $b_j$  sont des réels et  $h$  est le pas de la méthode.

En formulant ce schéma sous forme continue on est amené à considérer les fonctions suivantes :

$$u_j(y, h) = y + h \sum_{k=1}^s a_{j,k} f(u_k(y, h)),$$

pour  $j = 1$  à  $s$  qui correspondent aux  $y_{n,j}$ . Le flot du schéma de Runge-Kutta quant à lui est donné par :

$$\phi_{RK}(y, h) = y + h \sum_{j=1}^s b_j f(u_j(y, h)).$$

Ici le point intéressant est le terme  $f(u_k(y, h))$  dans l'expression de  $\phi_{RK}$  qui correspond à l'automorphisme de substitution associé à  $u_j$  et appliqué en  $f$ .

Pour écrire explicitement cet automorphisme nous devons faire le développement de Taylor de  $u_j$  par rapport à  $h$  cependant ici et contrairement aux cas des chapitres précédents nous avons affaire à un système différentiel non autonome, autrement dit les fonctions  $u_j$  dépendent explicitement du pas  $h$  ce qui augmente la complexité des calculs pour expliciter les itérations d'un champ de vecteurs  $V_f$  comme dans la partie précédente.

Ainsi si on calcule la dérivée de  $u_j$  par rapport à  $h$  on obtient :

$$\frac{du_j}{dh}(y, h) = \sum_{k=1}^s a_{j,k} f(u_k(y, h)) + h \sum_{k=1}^s a_{j,k} \partial_{u_k} f(u_k(y, h)) \frac{du_k}{dh}, \quad j = 1, \dots, s.$$

On obtient donc des formules implicites où dans chaque ligne  $i$  on a la dérivée  $\frac{du_i}{dh}(y, h)$  qui apparaît ainsi que les autres dérivées  $\frac{du_j}{dh}(y, h)$  pour  $j \neq i$ .

Pour suivre la méthode d'arborification nous souhaitons récupérer un champ de vecteurs, il faut donc résoudre le système par rapport aux dérivées  $\frac{du_j}{dh}(y, h)$  pour en obtenir des formules ne dépendant pas de ces mêmes dérivées. Par exemple :

**Exemple 13.** Pour un schéma de Runge-Kutta à un étage i.e  $s = 1$ , on a :

$$\frac{du_1}{dh}(y, h) = a_{1,1} f(u_1(y, h)) + h a_{1,1} \partial_{u_1} f(u_1) \frac{du_1}{dh}(y, h),$$

en regroupant les dérivées on obtient :

$$(1 - h a_{1,1} \partial_{u_1} f(u_1)) \frac{du_1}{dh}(y, h) = a_{1,1} f(u_1(y, h)),$$

en supposant  $h$  suffisant petit, on obtient :

$$\frac{du_1}{dh}(y, h) = \frac{1}{(1 - h a_{1,1} \partial_{u_1} f(u_1))} a_{1,1} f(u_1(y, h)).$$

On considère alors le champ de vecteurs  $X = \frac{1}{(1 - h a_{1,1} \partial_{u_1} f(u_1))} a_{1,1} f(u_1(y, h)) \partial_{u_1} + \partial_h$  où le second terme  $\partial_h$  vient du fait que l'on travaille sur des systèmes non autonomes.


En généralisant à un nombre arbitraire d'étages, la formulation des champs se complique rapidement et sera la prochaine étape pour étudier leurs itérations.

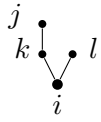
Un premier objectif sera donc de savoir si les deux théorèmes suivant que l'on trouve dans [51] peuvent être obtenus par arborification, le premier Théorème ([51, Théorème 1.5 p.56]) est obtenu en dérivant itérativement par rapport à  $h$  puis en évaluant en  $h = 0$ , on obtient le Théorème suivant [51, Théorème 1.4, p.55] :

**Théorème 10.** *La dérivée  $q$  – ième de la solution numérique de Runge-Kutta  $\phi_{RK}$  en  $h = 0$  a pour expression :*

$$\phi_{RK}^{(q)}|_{h=0} = \sum_{T \in \mathcal{T}_A} \gamma(T) \alpha(T) \phi(T) F(T)(y_0),$$

où  $\phi(T)$  est appelé poids élémentaire associé à l'arbre  $T$  et est obtenu en décorant chaque sommet d'un indice de sommation ( $i$  étant la racine) alors  $\phi(T)$  est la somme sur tous les indices de sommation des produits composés de  $b_i$  et des facteurs  $a_{j,k}$  pour chaque sommet  $j$  directement relié par une branche au sommet  $j$ .

**Exemple 14.** *Donnons un exemple de calcul de poids élémentaire. Prenons l'arbre  $T =$   alors nous allons de décorer de différents indices de la manière suivante :*



alors le poids élémentaire de  $\phi(T) = \sum_{i,j,k,l=1}^s b_i a_{i,j} a_{j,k} a_{i,l}$

L'intérêt de ces formulations est alors de pouvoir comparer jusqu'à un ordre donné du développement les solutions de l'équation différentielle de départ et de l'équation discrétisée par un schéma de Runge-Kutta afin de récupérer des conditions d'ordre sur le schéma numérique. Ceci s'exprime par le théorème suivant que l'on trouvera p.56 de [51] :

**Théorème 11.** *Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre  $p$  si et seulement*

$$\phi(T) = \frac{1}{\gamma(T)},$$

pour tout arbre  $T$  tel que  $\ell(T) \leq p$ .

*Démonstration.* La démonstration repose simplement sur l'égalité entre le développement de Taylor de la solution exacte et de la solution de Runge-Kutta en utilisant l'indépendance des dérivées élémentaires, ce qui est démontrée dans [51]. □

L'arborification ici n'apporte pas de nouveaux résultats, cependant, il est à noter qu'elle permet de replacer toutes ces approches dans un unique et même cadre où l'on souhaite récupérer la convergence d'objets, allant du flot d'une équation différentielle ou d'un schéma numérique associé aux changements de variables en passant par l'écriture.



## Chapitre 8

# Conclusion et perspectives

L'arborification ne se restreint pas uniquement à l'étude de la normalisation de champs de vecteurs (ou de difféomorphismes). Des problèmes reliés à la convergence de séries non commutatives arrivent de la même manière dans différents domaines des mathématiques. Comme nous l'avons vu, on peut aussi l'appliquer à l'étude des schémas numériques de Runge-Kutta correspondant à l'approche de Butcher. Ce travail n'est qu'une première approche mais permettrait sous réserve des bonnes formulations de récupérer une partie des résultats de Butcher. Les méthodes de ce dernier font apparaître une structure de groupe sur les schémas de Runge-Kutta, à savoir que la composition de flots de deux schémas de Runge-Kutta est encore le flot d'un schéma de Runge-Kutta. Pour cela il faut identifier la nature des opérations sur les coefficients de la méthode et ceci est formulé à travers l'utilisation des B-séries et semble pouvoir naturellement s'exprimer via les moules.

De plus dans la démarche d'arborification que nous utilisons ici, on considère la fonction  $f$  définissant notre système différentiel sans aucune décomposition. De la même manière que pour les champs de vecteurs analytiques ou polynomiaux, une démarche naturelle sans besoin d'introduction d'outils supplémentaires serait de décomposer  $f$  en la somme de ses composantes homogènes.

Cette question a déjà été soulevé par Murua et Sanz Serna dans ses articles [66] cependant elle apparaît ici comme une simple extension de l'arborification en utilisant plus champs au lieu d'un seul.

Si les algèbres de Hopf permettent de récupérer les résultats sur les structures et la manipulation des séries, on perd de vue l'origine du problème qui lui est analytique. C'est en particulier vrai dans les articles récents de Gubinelli [50] sur les équations différentielles stochastiques, les travaux de Y. Bruned, C. Curry et K. Ebrahimi-Fard sur la renormalisation des équations différentielles rugueuses [8] ou encore ceux de Martin Hairer [9] sur les équations aux dérivées partielles stochastiques, des structures arborescentes similaires apparaissent. Une perspective serait alors d'appliquer l'arborification à ces équations de nature différente permettant d'unifier le point de vue en une procédure complètement générale que serait l'arborification.

Enfin une dernière question qui nous a été posé par F. Menous serait de savoir comment étendre ces résultats au cas des séries de la classe Gevrey. Plus précisément pourrait-on retrouver les résultats sur le transfert de normes d'un moule au moule arborescent dans le cas des séries Gevrey.



## Deuxième partie

Correction de champs de vecteurs,  
problème du centre isochrone et  
conjecture de Jarque-Villadelprat





# Table des matières

<b>9</b>	<b>Introduction</b>	<b>75</b>
9.1	Principaux résultats . . . . .	76
9.2	Plan . . . . .	78
<b>10</b>	<b>Correction de champs de vecteurs</b>	<b>79</b>
10.1	Introduction à la correction de champs de vecteurs . . . . .	79
10.2	Correction d'un champ de vecteurs polynomial . . . . .	83
10.3	Correction d'un champ de vecteurs Hamiltonien polynomial réel . . . . .	87
<b>11</b>	<b>Variété isochrone</b>	<b>95</b>
11.1	Variété affine de centre isochrone . . . . .	95
11.2	$\mathbb{C}^*$ -invariance . . . . .	97
<b>12</b>	<b>Algèbre de Lie, complexité géométrique des conditions de centre isochrone</b>	<b>99</b>
12.1	Centre isochrone quadratique . . . . .	100
12.2	Algèbre de Lie engendrée par un champ de vecteurs polynomial . . . . .	102
12.3	Isochronisme uniforme . . . . .	104
12.4	Centre isochrone holomorphe . . . . .	105
12.5	Linéarisation et complexité . . . . .	105
<b>13</b>	<b>Démonstrations de la partie 2</b>	<b>107</b>
13.1	Démonstration du Théorème 12 . . . . .	107
13.2	Démonstration du Théorème 13 . . . . .	109
13.3	Démonstration du théorème 14 . . . . .	110
<b>14</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>113</b>
14.1	Vers une démonstration complète de la conjecture de Jarque-Villadelprat . . . . .	113
14.2	Base de Hilbert effective et variété affine de centres isochrones . . . . .	113
14.3	Isochronisme de systèmes Hamiltoniens complexes . . . . .	114



# Chapitre 9

## Introduction

Dans cette partie, nous étudions les centres de systèmes Hamiltoniens polynomiaux dans le cas réel. En particulier on se concentre sur les centres isochrones. Notre principal intérêt est la conjecture suivante énoncée par Jarque et Villadelprat dans [55]. Soit  $X$  un champ de vecteurs polynomial Hamiltonien réel de la forme :

$$X(x, y) = -\partial_y H(x, y)\partial_x + \partial_x H(x, y)\partial_y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

où  $H(x, y)$  est un polynôme réel en les variables  $x$  et  $y$ . Le degré maximal des polynômes  $\partial_x H$  et  $\partial_y H$  est le degré du champ de vecteurs Hamiltonien.

**Conjecture 2.** *Tout centre d'un système polynomial Hamiltonien planaire de degré pair est non isochrone.*

La conjecture est vraie dans le cas de systèmes quadratiques grâce aux résultats de Loud dans [59] et dans le cas quartique par un résultat de Jarque-Villadelprat dans [55]. La démonstration de Jarque et Villadelprat est basée sur une étude attentive des ensembles de bifurcations et semble difficile à étendre en degré arbitraire. La conjecture est ouverte dans les autres cas en dépit des résultats partiels dans cette direction obtenus par B. Schuman dans [78], [79] utilisant le calcul explicite des premiers coefficients de la forme normale de Birkhoff et Chen, etc [16] qui ont démontré ce qu'ils appellent une *version faible* de la conjecture, c'est-à-dire tout champ de vecteurs ayant seulement des composantes paires est non isochrone.

Des stratégies différentes peuvent être utilisées pour aller plus loin dans la résolution de cette conjecture. Une première classe de méthodes peut être appelée *géométrique*, ces méthodes sont liées à certaines caractéristiques spéciales des Hamiltoniens ou des centres isochrones. On peut mentionner par exemple les travaux de L.Gavrilov [41] et P.Mardesic, C.Rousseau et B.Toni [64]. Jusqu'à présent ces méthodes n'ont pas permis de reproduire certains résultats particuliers obtenus par B.Schuman [78], [79] pour des classes de champs de vecteurs polynomiaux en degrés arbitraires. Les autres méthodes peuvent être appelées *analytiques* et elles utilisent toutes plus ou moins le calcul de quantités qui sont obtenues algorithmiquement comme les *constantes de périodes* [38] et les coefficients de formes normales [25] (on pourra aussi consulter [39]). Toutefois de telles méthodes sont généralement *difficiles à étendre* lorsque l'on traite avec des champs de vecteurs en degrés arbitraires (voir par exemple [55]).

p.337). C'est en effet le cas si l'on ne dispose pas d'informations sur la structure algébrique de ces coefficients. On est alors amené à calculer des bases de Grobner ou à utiliser des méthodes d'élimination. On est cependant rapidement limité par la complexité calculatoire et les capacités de mémoire nécessaires pour réaliser ces calculs. Les méthodes existantes sont restreintes aux polynômes de degré 5.

Un problème naturel est alors de chercher des méthodes permettant de surpasser ces limitations techniques. Toutefois, on peut efficacement obtenir plus d'informations sur la structure de ces coefficients. L'idée est de séparer dans les coefficients ce qui est *universel* de ce qui ne l'est pas.

## 9.1 Principaux résultats

Dans ces chapitres, on étudie ce problème en utilisant le formalisme des *moules* introduit par Jean Ecalle (voir [29]) et un objet particulier attaché à un champ de vecteurs appelé la *correction* définie par Ecalle et Vallet dans [34]. En particulier, on obtient une réponse partielle à la conjecture en degrés arbitraires.

Il est bien connu que l'isochronisme d'un centre réel est équivalent à la linéarisabilité (voir [13, Théorème 3.3 p.12]). La principale propriété de la correction est qu'elle donne des critères très utiles de linéarisation. En effet, un champ de vecteurs est linéarisable si et seulement si sa correction est nulle. Comme la correction possède une forme algorithmique et explicite qui est facilement calculable en utilisant le calcul moulien, on est en capacité de donner plus d'informations sur l'ensemble isochrone. Cette stratégie a été déjà utilisée par J. Cresson dans [22].

Dans la suite, on utilise la représentation complexe classique d'un champ de vecteurs réel (voir [57]). Notons  $X_{lin} = i(x\partial_x - \bar{x}\partial_{\bar{x}})$  et  $X_r = P_r(x, \bar{x})\partial_x + \overline{P_r(x, \bar{x})}\partial_{\bar{x}}$  avec  $x \in \mathbb{C}$ ,  $P_r$  un polynôme homogène de degré  $r$ ,  $P_r(x, \bar{x}) = \sum_{j=0}^r p_{r-j-1,j} x^{r-j} \bar{x}^j$ .

**Théorème 12.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs Hamiltonien réel non trivial de degré pair  $2n$  de la forme :*

$$X = X_{lin} + \sum_{r=2}^{2n} X_r$$

*Si  $X$  satisfait l'une des conditions suivantes :*

- a) *il existe un entier  $r$ ,  $1 \leq r < n-1$  tel que  $p_{i,i} = 0$  pour  $i = 1, \dots, r-1$  et  $\text{Im}(p_{r,r}) > 0$ ,*
- b)  *$p_{i,i} = 0$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ ,*

*alors le champ de vecteurs est non isochrone.*

En conséquence de ce théorème, on en déduit que :

$$X = X_{lin} + X_2,$$

$$X = X_{lin} + X_2 + X_3 + X_4 \text{ avec } p_{1,1} \geq 0,$$

$$X = X_{lin} + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \text{ avec } p_{1,1} > 0 \text{ or } p_{1,1} = 0 \text{ et } p_{2,2} > 0,$$

ne sont pas isochrones.

En corollaire, on obtient la *version faible* de la conjecture de Jarque-Villadelprat démontrée par X.Chen et al. [16] :

**Corollaire 2** (Conjecture faible de Jarque-Villadelprat). *Soit  $X$  un champ de vecteurs Hamiltonien réel non trivial de degré pair  $2n$  de la forme*

$$X = X_{lin} + X_2 + X_4 + \cdots + X_{2n},$$

*alors  $X$  est non isochrone.*

La preuve vient facilement du Théorème 12 car pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ , on a  $p_{i,i} = 0$  par non existence de composante impaire.

**Théorème 13.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs Hamiltonien réel non trivial de la forme :*

$$X = X_{lin} + X_k + \cdots + X_{2l},$$

*pour  $k \geq 2$  et  $l \leq k-1$ . Alors  $X$  est non isochrone.*

En utilisant ce dernier théorème, *sans condition* on obtient que :

$$X = X_{lin} + X_2,$$

$$X = X_{lin} + X_3 + X_4,$$

$$X = X_{lin} + X_4 + X_5 + X_6,$$

ou encore

$$X = X_{lin} + \sum_{i=47}^{92} X_i,$$

sont non isochrones. On voit que le Théorème 12 et le Théorème 13 sont complémentaires.

Mixant les preuves des Théorèmes 12 et 13 on obtient :

**Théorème 14.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs Hamiltonien polynomial réel non trivial de la forme :*

$$X = X_{lin} + X_k + \cdots + X_{2l} + \sum_{n=1}^m \sum_{j=c_n}^{2(c_n-1)} X_j,$$

*où  $k \geq 2$ ,  $l \leq k-1$  et la suite  $c_n$  est définie par :  $c_1 = 4l$  et  $\forall n \geq 2$ ,  $c_n = 4(c_{n-1} - 1)$ , alors  $X$  est non isochrone.*

Un premier exemple de champ de vecteurs non isochrone donné par ce dernier théorème est :

$$X = X_{lin} + X_2 + X_4 + X_5 + X_6.$$

**Théorème 15.** Soient  $k \geq 2$  et  $l \leq k - 1$ , un champ de vecteurs Hamiltonien polynomial réel noté  $X$  est de l'une de deux formes suivantes :

$$i) \ X = X_{lin} + X_k + \cdots + X_{2l} + X_{2l+1} + \sum_{m=r}^{r+n} X_m,$$

où  $r \geq 2l + 2$  et  $\text{Im}(p_{l,l}) > 0$  ou

$$ii) \ X = X_{lin}X_k + \cdots + X_{2l} + X_{4l-1} + \sum_{m=r}^{r+n} X_m,$$

où  $X_{2l}$  est non trivial,  $r \geq 4l$ , avec  $\text{Im}(p_{2l-1,2l-1}) > 0$ , sont non isochrones.

En utilisant le Théorème 15 et le Théorème 14, on peut facilement en déduire le résultat classique que les perturbations homogènes d'un centre linéaire sont non isochrones (voir [77]) aussi bien que ses généralisations (voir [79], [22]).

## 9.2 Plan

Dans le chapitre 10, suivant J. Ecalle et B. Vallet [34], on donne la définition de la correction d'un champ de vecteurs et on rappelle certaines de ses propriétés. On s'intéresse ensuite plus particulièrement à la correction de champs de vecteurs polynomiaux. On rappelle sa formule explicite nous permettant d'analyser sa structure.

Dans le chapitre 11, on démontre que l'ensemble des centres isochrones Hamiltoniens est une variété affine qui peut être explicitement décrite. On démontre aussi que cette variété est invariante sous une action non triviale du tore.

Le chapitre 12 permettra de définir et étudier la complexité géométrique de conditions de centre isochrone. Le rôle joué par plusieurs idéaux de Lie engendrés par les comoules est discuté en interaction avec le moule universel de la correction. Cette stratégie entre dans le programme général proposé par J.Ecalle et D.Schlomiuk dans [31] pour étudier la taille et la séparation de certains idéaux de Lie dans le problème de linéarisation.

Dans le chapitre 13, on donne les preuves de nos principaux résultats ainsi que certains lemmes techniques.

On terminera cette partie en donnant quelques perspectives de ce travail.

# Chapitre 10

## Correction de champs de vecteurs

L'objectif de ce chapitre est de faire une étude détaillée de la correction pour l'utiliser dans le cadre de la conjecture de Jarque-Villadelprat. Ainsi, on commence par redonner la définition de la correction d'un champ de vecteurs analytiques et la formule de la variance ([34]) permettant de donner ensuite des calculs explicites du moule.

On rappelle la définition de la forme préparée ainsi que comment l'obtenir dans le cas d'un champ de vecteurs polynomial. On introduit la notion de **profondeur** d'un mot (et d'un champ de vecteurs). Ceci nous permet de réécrire la correction par un regroupement de termes homogènes pour la profondeur. En remarquant que l'on peut uniquement se concentrer sur les profondeurs paires dans le cas d'un champ de vecteurs Hamiltonien polynomial réel, on simplifie l'étude de la correction pour la conjecture de Jarque-Villadelprat. De cette manière, on obtient plusieurs lemmes et théorèmes en section 10.3 qui **répondent à la plupart des cas** de la conjecture.

On conclut ce chapitre en donnant des exemples de composantes de la correction des champs quadratique, cubique et quartique en profondeur 2 et 4. Ce chapitre permet de voir que les conditions de linéarisation sont des relations polynomiales que l'on étudiera plus précisément dans le chapitre suivant. Le point essentiel ici est qu'à l'inverse du chapitre 12, on étudie l'**interaction entre le moule et le comoule**, ceci nous permet d'obtenir des conditions plus fortes et contraignantes sur la linéarisation.

### 10.1 Introduction à la correction de champs de vecteurs

Dans cette section, on rappelle la définition de la correction de champs de vecteurs suivant les travaux de J.Ecalte et B.Vallet [34]. En particulier, on donne le développement moulien de la correction, qui joue un rôle central dans notre approche de l'étude de la linéarisation. Il est à noter que tous les calculs peuvent être réalisés en dimension arbitraire.

#### 10.1.1 Définition de la correction

Soit  $X$  un champ de vecteurs analytique sur  $\mathbb{C}^\nu$  en 0 :

$$X = \sum_{1 \leq j \leq \nu} X_j(x) \partial_{x_j}$$



avec  $X_j(0) = 0$  et  $X_j(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ . On peut écrire le champ de vecteurs  $X$  sous sa forme préparée :

**Définition 46.** Un champ de vecteurs  $X$  est dit sous forme préparée s'il est donné par :

$$X = X_{lin} + \sum_{n \in \mathbf{A}(X)} B_n$$

où  $X_{lin}$  est la partie linéaire de  $X$  de la forme  $X_{lin} = \sum_j \lambda_j x_j \partial_{x_j}$  et  $B_n$  des opérateurs différentiels homogènes de degré  $n$  dans un ensemble donné  $\mathbf{A}(X)$  complètement défini par  $X$ .

Du point de vue de l'Analyse, les opérateurs différentiels homogènes sont plus manipulables. Un opérateur  $B_n$  est dit homogène de degré  $n = (n_1, n_2)$  si pour tout monôme  $x^l y^k$  on a  $B_n(x^l y^k) = \beta_n^{l,k} \cdot x^{n_1+l} y^{n_2+k}$  avec  $\beta_n^{l,k} \in \mathbb{C}$ .

Dans [34], J. Ecalle et B. Vallet introduisent la correction de champ de vecteurs suivant des travaux antérieurs de G. Gallavotti [40] et H. Eliasson [35] dans le cas Hamiltonien.

**Notation 2.** On note  $A \sim B$  si les champs de vecteurs  $A$  et  $B$  sont formellement conjugués.

Considérons un champ de vecteurs dans sa forme préparée. La correction est définie comme la solution du problème suivant ([34], p.258) :

**Définition 47.** Soit  $X$  un champ de vecteurs et  $X_{lin}$  sa partie linéaire. Trouver un champ de vecteurs local  $Z$  tel que :

$$\begin{aligned} X - Z &\sim X_{lin}, \\ [X_{lin}, Z] &= 0. \end{aligned}$$

Alors le champ de vecteurs  $Z$ , solution de ce problème, est la **correction** du champ  $X$ .

Dans [34], J. Ecalle et B. Vallet démontrent que la correction de champs de vecteurs admet un développement moulien. Précisément, notons  $\mathbf{A}(X)^*$  l'ensemble des mots construits sur les lettres de  $\mathbf{A}(X)$  utilisant le morphisme de concaténation *conc* sur les lettres :

$$\begin{aligned} \text{conc} : \mathbf{A}(X)^p &\rightarrow \mathbf{A}(X)^* \\ (n_1, \dots, n_p) &\mapsto n_1 \cdot n_2 \cdots n_p. \end{aligned}$$

pour tout entier  $p$ .

Dans la suite, un mot est noté  $n_1 \cdot n_2 \cdots n_p$  ou  $n_1 n_2 \cdots n_p$ .

**Remarque 13.** La longueur du mot  $n_1 \cdots n_p$  est  $p$ . L'unique mot de longueur 0 est noté  $\emptyset$ .

**Définition 48.** L'ensemble  $\mathbf{A}(X)^*$  est composé de tous les mots de toutes les longueurs, c'est-à-dire, si  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ , il existe un entier  $p \geq 0$  tel que  $\mathbf{n} = \text{conc}(n_1, \dots, n_p)$  où  $n_j \in \mathbf{A}(X)$  pour  $j = 1, \dots, p$ . On note  $A^p(X)$  l'ensemble des mots de longueur  $p$ .

Pour tout  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r \in \mathbf{A}(X)^*$ , on note :

$$B_{\mathbf{n}} = B_{n_1} \circ \cdots \circ B_{n_r}.$$

La correction peut être écrite sous la forme ([34, Lemme 3.2 p.267])

$$Carr(X) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} Carr^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}},$$

ou plus simplement  $Carr(X) = \sum_{\bullet} Carr^{\bullet} B_{\bullet}$  suivant les notations de J. Ecalle.

Le point principal est que le moule  $Carr^{\bullet}$  peut être calculé *algorithmiquement* en utilisant une formule de récurrence sur la longueur des mots. Précisément pour tout  $n \in \mathbf{A}(X)$ , notons  $\omega(n)$  la quantité :

$$\omega(n) = \langle n, \lambda \rangle,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel de  $\mathbb{C}^n$  et  $\lambda$  est le spectre de  $X_{lin}$ . On peut étendre  $\omega$  en un morphisme de  $(\mathbf{A}(X)^*, conc)$  vers  $(\mathbb{C}, +)$ . La quantité  $\omega(n)$  est appelée poids de la lettre  $n$ .

Le théorème suivant, donné dans [34, formule 3.42]), permet un calcul explicite du moule de la correction par récurrence :

**Théorème 16** (Formule de la variance). *Le moule de la correction est défini pour tout mot  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  par la formule :*

$$\omega(n_1) Carr^{n_1 \cdot n_2 \cdots n_r} + Carr^{[n_1 + n_2] \cdot n_3 \cdots n_r} = \sum_{n_1 bc = \mathbf{n}} Carr^{n_1 c} Carr^b.$$

La preuve de ce théorème est non triviale, elle vient de la *formule de variance* d'un champ de vecteurs discutée dans [34, Proposition 3.1 p.270]. La variance d'un champ de vecteurs donne plusieurs manières de calculer le moule de la correction.

On donne une démonstration des principales formules, en particulier le rapport variance-correction en Annexes.

La principale conséquence du théorème précédent est le caractère *universel* du moule de la correction. Précisément, en suivant la définition de l'universalité utilisée dans [21], on a :

**Théorème 17** (Universalité du moule de la correction). *Il existe une famille à paramètre de fonctions complexes  $C_r : \mathcal{D}_r \subset \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $r \in \mathbb{N}$  telles que pour tout  $X$  le moule de la correction  $Carr^{\bullet}$  définie sur  $\mathbf{A}(X)^*$  est donné pour tout  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$  tel que  $\ell(\mathbf{n}) = r$ ,  $r \in \mathbb{N}$  et  $\omega(\mathbf{n}) = 0$  par :*

$$Carr^{\mathbf{n}} = C_r(\omega(n_1), \dots, \omega(n_r)). \quad (10.1)$$

Cette propriété est fondamentale concernant notre problème car le calcul de ces coefficients est fait une fois pour toute et ne dépend pas de la valeur des coefficients des polynômes mais de l'alpha-

bet engendré par le champ de vecteurs. A notre connaissance seul le formalisme moulien est capable de produire un tel type de coefficients permettant d'écrire la correction (ce qui n'est pas le cas par exemple avec le cadre classique de Lie).

Dans la suite, on donne les expressions explicites de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .

### 10.1.2 Le moule de la correction

Le théorème suivant concerne précisément les longueurs 1,2 et 3 :

**Définition 49.** Les fonctions universelles de correction  $C_r : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $r = 1, 2, 3$  sont définies par :

$$C_1(z_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_1 = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad C_2(z_1, z_2) = \begin{cases} -\frac{1}{z_1} & \text{si } z_1 + z_2 = 0, z_1 \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (10.2)$$

$$C_3(z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} \frac{1}{z_1(z_1 + z_2)}, & \text{si } z_1 + z_2 + z_3 = 0, z_1 \neq 0, z_1 + z_2 \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (10.3)$$

La preuve est basée sur les calculs explicites qui sont résumés par le Lemme suivant. Les preuves sont données en Appendice.

On peut remarquer que les valeurs du moule de la correction dépendent du poids des lettres. De plus,

**Définition 50.** Un mot  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$  est dit résonant si  $\omega(\mathbf{n}) = 0$ .

**Lemme 34.** Le moule  $\text{Carr}^\bullet$  vérifie :

- 1)  $\text{Carr}^\emptyset = 0$ ,
- 2) Si  $\mathbf{n}$  n'est pas résonant,  $\text{Carr}^\mathbf{n} = 0$ ,
- 3) Si  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  est tel qu'il existe  $j$  satisfaisant  $\omega(n_j) = 0$  alors  $\text{Carr}^\mathbf{n} = 0$ .

De plus, on a :

- Lemme 35.** 1) Si  $\omega(n) = 0$ ,  $\text{Carr}^n = 1$ ,  
 2) Si  $\omega(n_1 \cdot n_2) = 0$  avec  $\omega(n_1) = -\omega(n_2) \neq 0$ , on a  $\text{Carr}^{n_1 \cdot n_2} = -\frac{1}{\omega(n_1)}$ ,  
 3) Si  $\omega(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3) = 0$  avec  $\omega(n_j) = 0$   $j = 1, 2, 3$ , on a  $\text{Carr}^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} = \frac{1}{\omega(n_1)(\omega(n_1) + \omega(n_2))}$ .

Les démonstrations des Lemmes 34 et 35 sont données en annexe de ce manuscrit.

### 10.1.3 Quelques calculs du moule de la correction

Considérons le cas quadratique :

$$X = X_{lin} + X_2, \quad (10.4)$$

où  $X_{lin}$  est diagonal de spectre  $(i, -i)$ .

L'alphabet engendré par  $X_2$  est donné par :

$$\mathbf{A}(X) = \{n_1 = (1, 0), n_{-1} = (0, 1), n_3 = (2, -1), n_{-3} = (-1, 2)\}. \quad (10.5)$$

Toutes les lettres de  $\mathbf{A}(X)$  sont non résonantes donc le moule de la correction s'annule en longueur

1. Cependant en longueur 2, des combinaisons résonantes sont possibles. On a :

Mot $\mathbf{n}$	$Carr^{\mathbf{n}}$
$n_1 \cdot n_{-1}$	$i$
$n_{-1} \cdot n_1$	$-i$
$n_3 \cdot n_{-3}$	$\frac{i}{3}$
$n_{-3} \cdot n_3$	$\frac{-i}{3}$

En longueur 4, le moule de la correction est donné par :

Mot $\mathbf{n}$	$Carr^{\mathbf{n}}$	Mot $\mathbf{n}$	$Carr^{\mathbf{n}}$
$n_{-3} \cdot n_{-3} \cdot n_3 \cdot n_3$	$\frac{-i}{54}$	$n_1 \cdot n_{-3} \cdot n_{-1} \cdot n_3$	$\frac{-i}{6}$
$n_{-3} \cdot n_{-1} \cdot n_1 \cdot n_3$	$\frac{-i}{12}$	$n_1 \cdot n_{-3} \cdot n_1 \cdot n_1$	$\frac{-i}{2}$
$n_{-3} \cdot n_{-1} \cdot n_3 \cdot n_1$	$\frac{i}{12}$	$n_1 \cdot n_{-3} \cdot n_3 \cdot n_{-1}$	$\frac{i}{6}$
$n_{-3} \cdot n_1 \cdot n_{-1} \cdot n_3$	$\frac{i}{6}$	$n_1 \cdot n_{-1} \cdot n_{-3} \cdot n_3$	$0$
$n_{-3} \cdot n_1 \cdot n_1 \cdot n_1$	$\frac{i}{6}$	$n_1 \cdot n_{-1} \cdot n_{-1} \cdot n_1$	$0$
$n_{-3} \cdot n_1 \cdot n_3 \cdot n_{-1}$	$\frac{-i}{6}$	$n_1 \cdot n_{-1} \cdot n_1 \cdot n_{-1}$	$-i$
$n_{-3} \cdot n_3 \cdot n_{-3} \cdot n_3$	$\frac{i}{27}$	$n_1 \cdot n_{-1} \cdot n_3 \cdot n_{-3}$	$0$
$n_{-3} \cdot n_3 \cdot n_{-1} \cdot n_1$	$0$	$n_1 \cdot n_1 \cdot n_{-3} \cdot n_1$	$\frac{i}{2}$
$n_{-3} \cdot n_3 \cdot n_1 \cdot n_{-1}$	$0$	$n_1 \cdot n_1 \cdot n_{-1} \cdot n_{-1}$	$\frac{i}{2}$
$n_{-3} \cdot n_3 \cdot n_3 \cdot n_{-3}$	$0$	$n_1 \cdot n_1 \cdot n_1 \cdot n_{-3}$	$\frac{-i}{6}$
$n_{-1} \cdot n_{-3} \cdot n_1 \cdot n_3$	$\frac{i}{12}$	$n_1 \cdot n_3 \cdot n_{-3} \cdot n_{-1}$	$\frac{i}{12}$
$n_{-1} \cdot n_{-3} \cdot n_3 \cdot n_1$	$\frac{-i}{12}$	$n_1 \cdot n_3 \cdot n_{-1} \cdot n_{-3}$	$\frac{-i}{12}$
$n_{-1} \cdot n_{-1} \cdot n_{-1} \cdot n_3$	$\frac{i}{6}$	$n_3 \cdot n_{-3} \cdot n_{-3} \cdot n_3$	$0$
$n_{-1} \cdot n_{-1} \cdot n_1 \cdot n_1$	$\frac{-i}{2}$	$n_3 \cdot n_{-3} \cdot n_{-1} \cdot n_1$	$0$
$n_{-1} \cdot n_{-1} \cdot n_3 \cdot n_{-1}$	$\frac{-i}{2}$	$n_3 \cdot n_{-3} \cdot n_1 \cdot n_{-1}$	$0$
$n_{-1} \cdot n_1 \cdot n_{-3} \cdot n_3$	$0$	$n_3 \cdot n_{-3} \cdot n_3 \cdot n_{-3}$	$\frac{-i}{27}$
$n_{-1} \cdot n_1 \cdot n_{-1} \cdot n_1$	$i$	$n_3 \cdot n_{-1} \cdot n_{-3} \cdot n_1$	$\frac{i}{6}$
$n_{-1} \cdot n_1 \cdot n_1 \cdot n_{-1}$	$0$	$n_3 \cdot n_{-1} \cdot n_{-1} \cdot n_{-1}$	$\frac{-i}{6}$
$n_{-1} \cdot n_1 \cdot n_3 \cdot n_{-3}$	$0$	$n_3 \cdot n_{-1} \cdot n_1 \cdot n_{-3}$	$\frac{-i}{6}$
$n_{-1} \cdot n_3 \cdot n_{-3} \cdot n_1$	$\frac{-i}{6}$	$n_3 \cdot n_1 \cdot n_{-3} \cdot n_{-1}$	$\frac{-i}{12}$
$n_{-1} \cdot n_3 \cdot n_{-1} \cdot n_{-1}$	$\frac{i}{2}$	$n_3 \cdot n_1 \cdot n_{-1} \cdot n_{-3}$	$\frac{i}{12}$
$n_{-1} \cdot n_3 \cdot n_1 \cdot n_{-3}$	$\frac{i}{6}$	$n_3 \cdot n_3 \cdot n_{-3} \cdot n_{-3}$	$\frac{i}{54}$

Un module Maple permettant de calculer le moule de la correction est donné en Annexe.

## 10.2 Correction d'un champ de vecteurs polynomial

### 10.2.1 Forme préparée et alphabet

Soit  $X$  un champ de vecteurs polynomial dans  $\mathbb{C}^2$  de la forme :

$$X = X_{lin} + P_r(x, y)\partial_x + Q_r(x, y)\partial_y$$

où  $P_r$  et  $Q_r$  sont des polynômes homogènes de degré  $r$  tels que :

$$P_r(x, y) = \sum_{k=0}^r p_{k-1, r-k} x^k y^{r-k}, Q_r(x, y) = \sum_{k=0}^r q_{r-k, k-1} x^{r-k} y^k.$$

Dans la suite, on décrit explicitement la forme préparée de  $X$ , l'ensemble  $\mathbf{A}(X)$  et les opérateurs  $B_n$  pour un champ de vecteurs donné  $X$  de la forme  $X = X_{lin} + \sum_{r=2}^l X_r$ .

On peut écrire :

$$\begin{aligned} P_r(x, y) \partial_x + Q_r(x, y) \partial_y &= \sum_{k=1}^r \left( p_{k-1, r-k} x^{k-1} y^{r-k} x \partial_x + q_{r-k, k-1} x^{r-k} y^{k-1} y \partial_y \right) + p_{-1, r} y^r \partial_x + q_{r, -1} x^r \partial_y, \\ &= \sum_{k=1}^r (O_{(k-1, r-k)} + \tilde{O}_{(r-k, k-1)}) + O_{(-1, r)} + O_{(r, -1)}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} O_{(k-1, r-k)} &= p_{k-1, r-k} x^{k-1} y^{r-k} x \partial_x, \\ \tilde{O}_{(r-k, k-1)} &= q_{r-k, k-1} x^{r-k} y^{k-1} y \partial_y, \\ O_{(-1, r)} &= p_{-1, r} y^r \partial_x, \\ O_{(r, -1)} &= q_{r, -1} x^r \partial_y. \end{aligned}$$

On veut savoir s'il existe des opérateurs de même degré parmi les opérateurs  $O_{(k-1, r-k)}$  et  $\tilde{O}_{(r-k, k-1)}$ . Si c'est le cas, on peut alors les regrouper en un même opérateur de la forme  $B_{(n^1, n^2)} = x^{n^1} y^{n^2} (p_{(n^1, n^2)} x \partial_x + q_{(n^1, n^2)} y \partial_y)$ .

Pour cela, on doit résoudre :

$$k - 1 = r - \tilde{k}$$

où  $k, \tilde{k} \in \{1, \dots, r\}$ . Comme  $\tilde{k} \in \{1, \dots, r\}$ ,  $r - \tilde{k} \in \{0, \dots, r-1\}$  alors  $r - \tilde{k} + 1 \in \{1, \dots, r\}$ . Ainsi il existe toujours des solutions et on a le lemme suivant :

**Lemme 36.** *Pour tout  $r \geq 2$ , on peut associer un alphabet à un champ de vecteurs  $X_r$ , noté  $\mathbf{A}(X_r)$  donné par :*

$$\mathbf{A}(X_r) = \{(r, -1), (-1, r), (k-1, r-k) \text{ avec } k = 1, \dots, r\}.$$

*De plus, on obtient de  $\mathbf{A}(X_r)$  l'ensemble noté  $\mathcal{B}(X_r)$  des opérateurs différentiels homogènes donnés par la décomposition :*

$$\begin{aligned} B_{(-1, r)} &= p_{-1, r} y^r \partial_x, \\ B_{(r, -1)} &= q_{r, -1} x^r \partial_y, \\ B_{(k-1, r-k)} &= x^{k-1} y^{r-k} (p_{k-1, r-k} x \partial_x + q_{k-1, r-k} y \partial_y) \end{aligned}$$

avec  $k \in \{1, \dots, r\}$ .

On renvoie à la Partie 1, Chapitre 2, Section 2.5 pour des exemples.

**Définition 51.** *On définit le degré d'un champ de vecteurs comme le degré maximal des polynômes qui le définissent.*

De la même manière, on définit le degré d'un opérateur différentiel homogène  $B_n$  ou des crochets de Lie de  $B_n$  qui apparaissent dans la décomposition de  $X$ . On note  $\deg(B_n)$  (resp.  $\deg([B_n])$ ) le degré de  $B_n$  (resp.  $[B_n]$ ).

**Lemme 37.** Soit  $X$  un champ de vecteurs de la forme  $X = X_{lin} + \sum_{r=2}^m X_r$  alors  $X$  admet l'alphabet  $\mathbf{A}(X) = \bigcup_{r=2}^m \mathbf{A}(X_r)$  et  $\mathcal{B}(X)$ , l'ensemble des opérateurs différentiels homogènes de  $X$  est donné par  $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{r=2}^m \mathcal{B}(X_r)$ .

*Démonstration.* Pour tout  $n = (n^1, n^2) \in \mathbf{A}(X)$ , on définit l'application :

$$p : \mathbf{A}(X) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n = (n^1, n^2) \mapsto n^1 + n^2.$$

Pour chaque  $r \geq 2$ , pour tout  $n \in \mathbf{A}(X_r)$ , on a  $p(n) = r - 1$ , dont  $\forall r, r'$ , tels que  $r \neq r'$ , on a  $\mathbf{A}(X_r) \cap \mathbf{A}(X_{r'}) = \emptyset$  car  $p(\mathbf{A}(X_r)) \neq p(\mathbf{A}(X_{r'}))$ . De plus, comme  $Der(\mathbb{C}^2) = \bigoplus_{r \geq 1} Der_r(\mathbb{C}^2)$  et  $\mathcal{B}(X_r) \subset Der_r(\mathbb{C}^2)$ , alors  $\mathcal{B}(X_r) \cap \mathcal{B}(X_{r'}) = \emptyset$  si  $r \neq r'$ .  $\square$

Les éléments de l'alphabet  $\mathbf{A}(X)$  sont appelés *lettres*.

### 10.2.2 Profondeur

Comme on a une bijection entre  $(\mathbf{A}(X)^*, conc)$  et  $(\mathcal{B}^*(X), \circ)$  :

$$\mathbf{A}(X)^* \rightarrow \mathcal{B}^*(X),$$

$$\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r \mapsto B_{\mathbf{n}} = B_{n_1} \circ \cdots \circ B_{n_r},$$

le degré de  $[B_{\mathbf{n}}]$  donne une notion naturelle de *profondeur* pour les mots définis par :

**Définition 52.** On note  $p : \mathbf{A}(X)^* \rightarrow \mathbb{N}$  l'application définie par :

$$p(\mathbf{n}) = \deg([B_{\mathbf{n}}]) - 1.$$

**Lemme 38.** L'application  $p$  est un morphisme de  $(\mathbf{A}(X)^*, conc)$  dans  $(\mathbb{N}, +)$ .

*Démonstration.* Démontrons le par récurrence sur la longueur des mots. Soient  $n_1, n_2 \in \mathbf{A}(X)$ ,

$$\begin{aligned} p(n_1 \cdot n_2) &= \deg([B_{n_1} B_{n_2}]) - 1 \\ &= \deg(B_{n_1}) + \deg(B_{n_2}) - 1 - 1 \\ &= p(n_1) + p(n_2). \end{aligned}$$

Soient  $n_1 \in \mathbf{A}(X)$  et  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ , alors :

$$\begin{aligned} p(n_1 \cdot \mathbf{n}) &= \deg([B_{n_1}, B_{\mathbf{n}}]) - 1 \\ &= \deg(B_{n_1}) + \deg(B_{\mathbf{n}}) - 1 - 1 \\ &= p(n_1) + p(\mathbf{n}). \end{aligned}$$

□

Soit  $\mathcal{M}(X)$  une série moulienne :

$$\mathcal{M}(X) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*} M^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}},$$

où  $M^\bullet$  est alternal ( voir [34]), i.e.  $\mathcal{M}(X)$  est *primitif* ([76, p.17]). Dans ce cas, en utilisant le *Théorème de Projection* ([76, p.28]), la série moulienne  $\mathcal{M}(X)$  peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathcal{M}(X) = \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ \ell(\mathbf{n})=r}} M^{\mathbf{n}} [B_{\mathbf{n}}],$$

où  $[B_{\mathbf{n}}] = [B_{n_1 \dots n_r}] = [\dots [[B_{n_1}, B_{n_2}], B_{n_3}], \dots, B_{n_{r-1}}, B_{n_r}]$ .

On doit utiliser la profondeur pour réorganiser la série comme suit :

$$\mathcal{M}(X) = \sum_{d \geq 1} \mathcal{M}_d(X),$$

où  $\mathcal{M}_d(X) = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=d}} M^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}$ .

Une conséquence pratique est que l'équation  $\mathcal{M}(X) = 0$  est équivalente à  $\mathcal{M}_d(X) = 0$  pour tout  $d \geq 1$ .

### 10.2.3 Expression de la correction et critère de linéarisation

La principale propriété de la correction est qu'elle fournit un critère à la fois simple et utile de linéarisabilité. En effet, on a par définition de la correction (voir [34, p.258]) :

**Lemme 39.** *Un champ de vecteurs  $X$  est linéarisable si et seulement si  $Carr(X) = 0$ .*

Le calcul effectif de la correction permet la linéarisation d'un champ de vecteurs. Cependant ici il ne s'agit pas de calculer brutalement la correction mais d'utiliser la profondeur pour regrouper les termes composantes homogènes par composantes homogènes pour la profondeur afin d'obtenir des conditions explicites de linéarisation.

En effet en utilisant la décomposition donnée par la profondeur, on obtient un critère explicite de linéarisabilité en écrivant  $Carr(X)$  sous la forme :

$$Carr(X) = \sum_{p \geq 1} \left( \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=p}} Carr^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \right) = \sum_{p \geq 1} Carr_p(X).$$

**Théorème 18.** *Un champ de vecteurs  $X$  est linéarisable si et seulement si  $Carr_p(X) = 0 \ \forall p \geq 1$ .*

*Démonstration.* Un champ  $X$  est linéarisable si et seulement si sa correction  $Carr(X)$  s'annule. Or pour tout  $p \geq 1$ , le champ  $Carr_p(X)$  a ses coefficients dans l'espace vectoriel noté  $V_p$  des polynômes homogènes de degré  $p$ . Or les espaces vectoriels  $V_p$  sont en somme directe. On déduit donc que  $Carr(X) = 0$  est équivalent à  $Carr_p(X) = 0 \ \forall p \geq 1$ . □

Dans la suite, on extrait certaines propriétés des quantités  $Carr_p(X)$ .

## 10.3 Correction d'un champ de vecteurs Hamiltonien polynomial réel

### 10.3.1 Propriétés générales

Une propriété intéressante de la correction est que l'on doit seulement considérer les profondeurs paires, en effet :

**Théorème 19.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs Hamiltonien réel comme introduit précédemment. Sa correction en profondeur impaire est nulle, i.e.*

$$Carr_{2p+1}(X) = 0, \quad (10.6)$$

pour tout entier  $p$ .

Ce Théorème est une conséquence du Lemme suivant :

**Lemme 40.** *Pour un mot résonant  $\mathbf{n}$ , le crochet de Lie associé est de la forme :*

$$[B_{\mathbf{n}}] = (xy)^{\frac{p(\mathbf{n})}{2}} (P_{\mathbf{n}}x\partial_x + Q_{\mathbf{n}}y\partial_y).$$

*Démonstration.* Pour tout mot résonant  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$ , le crochet de Lie associé est :

$$[B_{\mathbf{n}}] = x^{\sum n_j^1} y^{\sum n_j^2} (P_{\mathbf{n}}x\partial_x + Q_{\mathbf{n}}y\partial_y).$$

où  $n_j = (n_j^1, n_j^2)$ . Comme  $\mathbf{n}$  est résonant, on a :

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{n}) &= \omega(n_1) + \cdots + \omega(n_r) \\ &= i \left( \sum n_j^1 - \sum n_j^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

alors  $\sum n_j^1 = \sum n_j^2 = \alpha \in \mathbb{N}$ . Il suffit de remarquer que  $p(\mathbf{n}) = p(n_1) + \cdots + p(n_r) = \sum n_j^1 + \sum n_j^2 = 2\alpha$ , ainsi  $\alpha = \frac{p(\mathbf{n})}{2}$ .  $\square$

En conséquence, on peut restreindre notre attention aux composantes de profondeur paire de la correction. Pour un entier  $p$  donné, les termes dans  $Carr_{2p}$  peuvent être décomposés par rapport à la longueur des mots. Précisément, on a :

$$Carr_p(X) = Carr_{p,1}(X) + \cdots + Carr_{p,p}(X), \quad (10.7)$$

où

$$Carr_{p,j}(X) = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=p, \ell(\mathbf{n})=j}} Carr^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}, \quad (10.8)$$

pour  $j = 1, \dots, p$ .



Le point principal est que c'est une somme *finie*. En effet, comme chaque opérateur différentiel dans cette définition est au moins de profondeur un, les mots sont au plus de longueur  $p$  car pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{n} \in A^*(X)$  tel que  $\ell(\mathbf{n}) = j$ , on a  $p(\mathbf{n}) \geq j$ .

De plus, certains de ces termes sont facilement déterminés.

**Lemme 41.** *Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a :*

$$\begin{aligned} Carr_{2p,2p}(X) &= Carr_{2p,2p}(X_2), \\ Carr_{2p,2}(X) &= Carr_{2p,2}(X_{p+1}) + \sum_{r=2}^p Carr_{2p,2}(X_r, X_{2p-r+2}), \\ Carr_{2p,1}(X) &= Carr_{2p}(X_{2p+1}) = B_{p,p}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Ce lemme a d'importantes implications dans la suite. En particulier, il donne le degré maximal de champs de vecteurs homogènes  $X_r$  entrant en jeu dans la calcul d'un terme donné de la correction. En effet, pour  $Carr_{2p}$  il n'y a pas de termes provenant de  $X_r$  avec  $r \geq 2p + 2$ .

La démonstration du Lemme 41 est basée sur les propriétés de l'ensemble des mots résonants par rapport à la longueur et la profondeur.

*Démonstration.* La première égalité suit facilement du fait qu'un élément de profondeur  $2p$  et de longueur  $2p$  est nécessairement constitué d'éléments de profondeur 1 correspondant aux opérateurs dans  $X_2$ .

La seconde égalité est une réécriture directe de la définition pour les contributions de longueur 2 au terme de correction de profondeur  $2p$ . On note  $\mathcal{W}(X_r)$  l'ensemble des poids provenant des composantes  $X_r$  de  $X$ , cet ensemble est donné par :

$$\{\langle n, \lambda \rangle, n \in \mathbf{A}(X)\}. \tag{10.10}$$

Le premier terme vient du lemme de décomposition suivant :

**Lemme 42.** *Pour chaque  $r \geq 2$ ,  $\mathcal{W}(X_r)$  peut être décomposé de la manière suivante :*

$$\mathcal{W}(X_r) = \mathcal{W}^+(X_r) \cup \mathcal{W}^-(X_r) \cup \mathcal{W}^0(X_r),$$

où  $\mathcal{W}^+(X_r)$  est l'ensemble des poids positifs venant de  $X_r$ ,  $\mathcal{W}^-(X_r) = -\mathcal{W}^+(X_r)$  et  $\mathcal{W}^0(X_r)$  est l'ensemble des poids nuls.

Cette décomposition montre les interactions entre chaque composante homogène  $X_l$  intervenant dans  $Carr_{2p,2}(X)$ . En longueur 2, comme chaque poids a son opposé, on a toujours une contribution de  $X_{p+1}$ .

De plus, on a :

**Lemme 43.** Une composante  $X_r$ ,  $r \geq 2$ , produit une lettre résonante dans  $\mathbf{A}(X)$  si et seulement si  $r$  est impair. Dans ce cas la lettre est unique et donnée par  $n_0 = (\frac{r-1}{2}, \frac{r-1}{2})$ .

*Démonstration.* Soit  $r \geq 2$  fixé. Par le Lemme 36 on connaît l'ensemble des lettres données par  $X_r$ . Les deux lettres  $(-1, r)$  et  $(r, -1)$  ne sont jamais résonantes. Pour les autres de la forme  $(k-1, r-k)$ , on doit résoudre l'équation de résonance :

$$2k - r - 1 = 0, \quad (10.11)$$

pour  $k = 1, \dots, r$ . Cette équation a une unique solution donnée par :

$$k = \frac{r+1}{2}, \quad (10.12)$$

qui est valide, car  $k$  est un entier seulement si  $r$  est impair. □

□

### 10.3.2 Calcul explicite et lemme fondamental

On explicite maintenant les quantités  $\text{Carr}_p(X)$  quand  $X$  est un champ de vecteurs Hamiltonien polynomial réel.

Soit  $X$  un champ de vecteurs polynomial dans  $\mathbb{C}^2$  de la forme :

$$X = X_{lin} + \sum_{r=2}^d (P_r(x, y)\partial_x + Q_r(x, y)\partial_y), \quad (10.13)$$

où  $P_r$  et  $Q_r$  sont des polynômes homogènes de degré  $r$ .

**Lemme 44.** Le champ de vecteurs complexe (10.13) correspond à un champ de vecteurs réel si pour tout  $r = 2, \dots, d$ , on a :

$$\overline{p_{i,j}} = q_{j,i}, \quad i = 0, \dots, r-1, \quad j = r-i. \quad (10.14)$$

La preuve vient facilement de  $\bar{x} = y$  et  $Q_r(x, y) = \overline{P_r(x, y)}$  qui donnent  $Q_r(x, y) = \overline{P_r(y, x)}$  pour tout  $r = 2, \dots, d$ .

Les systèmes Hamiltoniens réels satisfont de plus les conditions suivantes :

**Lemme 45.** Le champ de vecteurs complexe (10.13) correspond à un champ de vecteurs Hamiltonien réel si les conditions (10.14) sont satisfaites et si pour tout  $r = 2, \dots, d$ , on a :

$$p_{i-1, r-i} = -\frac{r-i+1}{i} \overline{p_{r-i, i-1}}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (10.15)$$

On donne quelques exemples de relations entre les coefficients dans  $X_2$  et  $X_3$  :

**Exemple 15.** Pour le champ  $X_2$  défini précédemment on a :

$$p_{1,0} = \frac{-1}{2} \bar{p}_{0,1},$$

$$p_{-1,2} = \bar{q}_{2,-1}.$$

Pour le champ de vecteurs  $X_3$ , on a :

$$p_{2,0} = \frac{-1}{3} \bar{p}_{0,2},$$

$$p_{1,1} = -\bar{p}_{1,1},$$

$$p_{-1,3} = \bar{q}_{3,-1}.$$

Sous les conditions précédentes on a le résultat suivant :

**Lemme 46** (Lemme fondamental). Soit  $X$  un champ de vecteurs Hamiltonien réel de la forme  $X = i(x\partial_x - y\partial_y) + \sum_{j=r}^{2r-1} (P_j(x, y)\partial_x + \overline{P_j(x, y)}\partial_y)$  avec  $\bar{x} = y$ , alors :

$$Carr_{2(r-1)}(X) = p_{r-1,r-1} + i \left( \sum_{k=\lceil \frac{r+1}{2} \rceil+1}^r \frac{r(r+1)}{(r-k+1)^2} |p_{k-1,r-k}|^2 + \frac{r}{r+1} |p_{-1,r}|^2 \right).$$

*Démonstration.* Le calcul de la correction en profondeur  $2(k-1)$  nécessite de connaître quels opérateurs y apparaissent et l'alphabet. Dans cette profondeur, seuls les opérateurs différentiels homogènes provenant du polynôme  $P_r$  et la lettre résonant du polynôme  $P_{2r-1}$  interviennent.

L'alphabet donné par  $P_r$  est  $\mathbf{A}(X_r) = \{(r, -1), (-1, r)\} \cup \bigcup_{k=1}^r \{(k-1, r-k)\}$ .

On a aussi les opérateurs différentiels homogènes suivant :

$$B_{(-1,r)} = p_{-1,r} y^r \partial_x, B_{(r,-1)} = q_{r,-1} x^r \partial_y, B_{(k-1,r-k)} = x^{k-1} y^{r-k} (p_{k-1,r-k} x \partial_x + q_{k-1,r-k} y \partial_y)$$

avec  $k \in \{1, \dots, r\}$ .

Ici les mots résonants sont :

$$((k-1, r-k), (r-k, k-1)),$$

$$((r-k, k-1), (k-1, r-k)),$$

$$((-1, r), (r-1)),$$

$$((r, -1), (-1, r)).$$

En utilisant les conditions de réalité et Hamiltoniennes, on obtient les crochets de Lie associés suivant :

$$[B_{(k-1,r-k)}, B_{(r-k,k-1)}] = \frac{r(r+1)(2k-r-1)}{(r-k+1)^2} |p_{k-1,r-k}|^2 (xy)^{r-1} (x\partial_x - y\partial_y)$$

$$= -[B_{(r-k,k-1)}, B_{(k-1,r-k)}],$$

$$[B_{(-1,r)}, B_{(r,-1)}] = -r |p_{-1,r}|^2 (xy)^{r-1} (x\partial_x - y\partial_y) = -[B_{(r,-1)}, B_{(-1,r)}].$$

L'expression du moule de la correction sur ces mots résonants est alors :

$$\begin{aligned} Carr^{(k-1, r-k) \cdot (r-k, k-1)} &= \frac{i}{2k - r - 1}, \\ Carr^{(-1, r) \cdot (r, -1)} &= \frac{-i}{r + 1}. \end{aligned}$$

La seule lettre résonante dans  $P_{2k-1}$  est  $p_{r-1, r-1}$  associée à l'opérateur  $B_{(r-1, r-1)} = p_{r-1, r-1}(xy)^{r-1}(x\partial_x - y\partial_y)$ . En utilisant l'alternativité du moule  $Carr^\bullet$  et l'antisymétrie du crochet de Lie on obtient la formule :

$$Carr_{2(k-1)}(X) = p_{r-1, r-1} + i \left( \sum_{k=\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor + 1}^r \frac{r(r+1)}{(r-k+1)^2} |p_{k-1, r-k}|^2 + \frac{r}{r+1} |p_{-1, r}|^2 \right).$$

□

### 10.3.3 Exemple de calculs

Dans cette section on donne quelques exemples de calcul de la correction. Un programme Maple permettant le calcul de la correction est donné en Annexe.

#### 10.3.3.1 Le cas quadratique

Considérons le champ de vecteurs Hamiltonien réel :

$$X = X_{lin} + X_2$$

où  $X_2 = (p_{1,0}x^2 + p_{0,1}xy + p_{-1,2}y^2)\partial_x + (q_{2,-1}x^2 + q_{0,1}xy + q_{1,0})\partial_y$ .

En utilisant la décomposition en opérateurs différentiels homogènes, on obtient les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} B_{(1,0)} &= x(p_{1,0}x\partial_x + q_{1,0}y\partial_y), \\ B_{(0,1)} &= y(p_{0,1}x\partial_x + q_{0,1}y\partial_y), \\ B_{(-1,2)} &= p_{-1,2}y^2\partial_x, \\ B_{(2,-1)} &= q_{2,-1}x^2\partial_y. \end{aligned}$$

On a aussi l'alphabet suivant :  $A(X_2) = \{(1, 0), (0, 1), (2, -1), (-1, 2)\}$ .

Les premiers termes non triviaux de la correction sont en profondeur 2 puisqu'il n'y a pas de lettres résonantes.

Ainsi, la correction en profondeur 2 est donnée par :

$$\begin{aligned}
 Carr_2(X) &= Carr_{2,2}(X) \\
 &= \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=2 \\ \omega(\mathbf{n})=0}} Carr^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \\
 &= \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=2 \\ \omega(\mathbf{n})=0}} \frac{1}{\ell(\mathbf{n})} Carr^{\mathbf{n}} B_{[\mathbf{n}]} \\
 &= \frac{1}{2} \left( Carr^{(1,0) \cdot (0,1)} B_{[(1,0) \cdot (0,1)]} + Carr^{(0,1) \cdot (1,0)} B_{[(0,1) \cdot (1,0)]} \right. \\
 &\quad \left. + Carr^{(2,-1) \cdot (-1,2)} B_{[(2,-1) \cdot (-1,2)]} + Carr^{(-1,2) \cdot (2,-1)} B_{[(-1,2) \cdot (2,-1)]} \right).
 \end{aligned}$$

Le lemme Fondamental donne finalement :

$$Carr_2(X) = i \left( 6|p_{1,0}|^2 + \frac{2}{3}|p_{-1,2}|^2 \right).$$

### 10.3.3.2 Cas cubique

Considérons le champ de vecteurs Hamiltonien réel :

$$X = X_{lin} + X_2 + X_3$$

avec  $X_2 = (p_{1,0}x^2 + p_{0,1}xy + p_{-1,2}y^2)\partial_x + (q_{2,-1}x^2 + q_{1,0}xy + q_{0,1}y^2)\partial_y$  et  $X_3 = (p_{2,0}x^3 + p_{1,1}x^2y + p_{0,2}xy^2 + p_{-1,3}y^3)\partial_x + (q_{3,-1}x^3 + q_{2,0}x^2y + q_{1,1}xy^2 + q_{0,2}y^3)\partial_y$ .

Comme précédemment, les premiers termes non triviaux de la correction sont en profondeur 2 :

$$Carr_2(X) = Carr_{2,1}(X_3) + Carr_{2,2}(X_2).$$

Le seul opérateur de profondeur 2 dans  $X_3$  correspond à la lettre résonante  $(1,1)$  et l'opérateur  $B_{1,1} = xy(p_{1,1}x\partial_x + q_{1,1}y\partial_y)$ . Ainsi en utilisant les résultats précédents sur la cas quadratique on obtient :

$$Carr_2(X) = p_{1,1} + i \left( 6|p_{1,0}|^2 + \frac{2}{3}|p_{-1,2}|^2 \right).$$

En profondeur 4 on a :

$$Carr_4(X) = Carr_{4,2}(X_3, X_3) + Carr_{4,3}(X_3, X_2, X_2) + Carr_{4,4}(X_2, X_2, X_2, X_2).$$

Les différents  $Carr_{i,j}(X)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} Carr_{4,2}(X_3, X_3) &= i(12|p_{2,0}|^2 + \frac{3}{4}|p_{-1,3}|^2), \\ Carr_{4,3}(X_3, X_2, X_2) &= -i(120Im(p_{2,0}\bar{p}_{1,0}^2) + \frac{26}{3}Im(\bar{p}_{-1,3}p_{-1,2}\bar{p}_{1,0}) + 40Im(p_{2,0}p_{-1,2}p_{1,0})) \\ Carr_{4,4}(X_2, X_2, X_2, X_2) &= i\left(-144|p_{1,0}|^4 + 12|p_{1,0}|^2|p_{-1,2}|^2 - \frac{8}{9}|p_{-1,2}|^4 + 40Re(p_{-1,2}p_{0,1}^3)\right). \end{aligned}$$

### 10.3.3.3 Cas quartique

On considère le champ de vecteurs Hamiltonien réel :

$$X = X_{lin} + X_2 + X_3 + X_4$$

avec  $X_2$  et  $X_3$  comme précédemment et  $X_4 = (p_{3,0}x^4 + p_{2,1}x^3y + p_{1,2}x^2y^2 + p_{0,3}xy^3 + p_{-1,4}y^4)\partial_x + (q_{4,-1}x^4 + q_{3,0}x^3y + q_{2,1}x^2y^2 + q_{1,2}xy^3 + q_{0,3}y^4)\partial_y$ .

La correction en profondeur 2 est la même que pour le cas cubique.

En profondeur 4 on a :

$$\begin{aligned} Carr_4(X) &= Carr_{4,2}(X_4, X_2) + Carr_{4,2}(X_3, X_3) \\ &\quad + Carr_{4,3}(X_3, X_2, X_2) + Carr_{4,4}(X_2, X_2, X_2, X_2), \end{aligned}$$

où  $Carr_{4,2}(X_4, X_2)$  est donné par :

$$Carr_{4,2}(X_4, X_2) = i(12Re(p_{2,1}\bar{p}_{1,0}) + 8Re(p_{3,0}p_{-1,2})).$$



# Chapitre 11

## Variété isochrone

Dans cette partie, on démontre que l'ensemble des centres isochrones est une variété affine rationnelle qui est invariante sous une action non triviale de  $\mathbb{C}^*$ . Cette variété affine est de plus explicitement décrite. On donne aussi des estimations sur la croissance des degrés de chaque polynôme rationnel qui intervient dans la description de la variété ainsi que la croissance des coefficients rationnels.

### 11.1 Variété affine de centre isochrone

On considère des champs de vecteurs réels écrits sous forme complexe  $X = X_{lin} + P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y$  où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{C}$  tels que  $\overline{P(x, y)} = Q(y, x)$ . On note  $N(d)$  le nombre de coefficients indépendants définissant  $P$  et  $\mathbf{p}$  un élément de cet ensemble. Par la condition de réalité, les coefficients de  $Q$  peuvent être déduits de ceux de  $P$ . On identifie alors l'ensemble des polynômes complexes d'un degré donné  $d$  avec  $\mathbb{C}^{N(d)}$ , où  $N(d)$  est donné par  $N(d) = \frac{(d-1)(d+4)}{2}$ .

On note  $\mathcal{L}_d$  l'ensemble des perturbations polynomiales  $(P, Q)$  de degré  $d$  telles que  $X$  est linéarisable. L'ensemble  $\mathcal{L}_d$  peut être vu comme un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^{N(d)}$ . Précisément on a :

**Théorème 20** (Structure géométrique). *Pour tout  $d \geq 2$ , l'ensemble  $\mathcal{L}_d$  des centres isochrones est une variété affine sur  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{C}^{N(d)}$ .*

La démonstration est basée sur une description précise de la forme algébrique de la correction. Pour tout  $\mathbf{n} \in A^*(X)$ , notons  $P(\mathbf{n})$  et  $Q(\mathbf{n})$  les coefficients donnés par le Lemme 40 et satisfaisant :

$$[B_{\mathbf{n}}] = (xy)^{\frac{p(\mathbf{n})}{2}} (P(\mathbf{n})x\partial_x + Q(\mathbf{n})y\partial_y).$$

On a :

**Théorème 21** (Structure algébrique). *Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  le terme  $Carr_{2p}(X)$  de la correction a la forme suivante :*

$$Carr_{2p}(X) = (xy)^p \left[ Ca_{2p}(\mathbf{p})x\partial_x + \overline{Ca_{2p}(\mathbf{p})}y\partial_y \right], \quad (11.1)$$

où

$$Ca_{2p}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k!} Ca_{2p,k}(\mathbf{p}), \quad (11.2)$$



avec

$$Ca_{2p,k}(\mathbf{p}) := \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=2p, \ell(\mathbf{n})=k}} Carr^{\mathbf{n}} P(\mathbf{n}), \quad k = 1, \dots, 2p. \quad (11.3)$$

Les quantités  $Ca_{2p,k}(\mathbf{p})$ ,  $k = 1, \dots, 2p$ , sont des polynômes explicites de degré  $k$  en les coefficients de  $P$  avec des coefficients en  $\mathbb{Q}$  si  $k$  est pair et  $i\mathbb{Q}$  sinon. De plus, ces polynômes peuvent être calculés algorithmiquement en utilisant les formules de récurrence.

La preuve de ce théorème est une conséquence de deux résultats. D'abord, les crochets de Lie itérés ont une forme très spéciale qui peut être facilement calculée. Précisément, on a :

**Lemme 47.** *Pour tout  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ , les coefficients  $P(\mathbf{n})$  et  $Q(\mathbf{n})$  sont polynomiaux en  $\mathbb{Z}[\mathbb{C}^{N(d)}]$  de degré  $\ell(\mathbf{n})$  et définis récursivement sur la longueur de  $\mathbf{n}$  par :*

$$\begin{aligned} P(n\mathbf{n}) &= (|\mathbf{n}|^1 - n^1)p_n P(\mathbf{n}) + |\mathbf{n}|^2 q_n P(\mathbf{n}) - n^2 p_n Q(\mathbf{n}), \\ Q(n\mathbf{n}) &= (|\mathbf{n}|^2 - n^2)q_n Q(\mathbf{n}) + |\mathbf{n}|^1 p_n Q(\mathbf{n}) - n^1 q_n P(\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (11.4)$$

où pour  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r \in \mathbf{A}(X)^*$ , on pose  $|n^j| = n_1^j + \cdots + n_r^j$ ,  $j = 1, 2$  avec  $n_i = (n_i^1, n_i^2)$ .

La démonstration du Lemme 47 est donnée en Annexe du manuscrit.

Ensuite, le moule de la correction peut être calculé par une formule récursive de laquelle on déduit :

**Lemme 48.** *Pour tout  $\mathbf{n} \in A^*(X)$ , le moule  $Carr^{\mathbf{n}}$  appartient à  $\mathbb{Q}$  si  $\ell(\mathbf{n})$  est impaire et  $i\mathbb{Q}$  si  $\ell(\mathbf{n})$  est paire.*

La démonstration du Lemme 48 est donnée dans [22].

La démonstration du Théorème 21 est donnée en Annexe.

### 11.1.1 Démonstration du théorème 20

En utilisant le Théorème 21 et la caractérisation des centres isochrones donnée par le Théorème 18, l'ensemble  $\mathcal{L}_d$  est défini par l'ensemble des zéros d'une famille infinie de polynômes sur  $\mathbb{C}^{N(d)}$  donné par :

$$\mathcal{L}_d = \left\{ P \in \mathbb{C}^{N(d)}, Ca_{2p}(X) = 0, p \geq 1 \right\}. \quad (11.5)$$

On définit la chaîne croissante d'idéaux  $I_k$  engendrée par  $\langle Ca_2(\mathbf{p}), \dots, Ca_{2k}(\mathbf{p}) \rangle$  dans  $\mathbb{C}[\mathbf{p}]$ . Par le Théorème de la base de Hilbert (voir [20, Théorème 4, p.77]), il existe un  $M \in \mathbb{N}^*$  tel que  $I_M = I_{M+1} = \dots$ . On note  $\mathcal{I}_d$  l'idéal qui en résulte. En conséquence, l'ensemble  $\mathcal{L}_d$  peut être obtenu comme (voir [20], Définition 8, p.81)

$$\mathcal{L}_d = \mathbf{V}(\mathcal{I}_d) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{C}^{N(d)} \mid f(\mathbf{p}) = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{I}_d \right\}, \quad (11.6)$$

et correspond à la variété affine (voir [20], Proposition 9 p.81) définie par :

$$\mathcal{L}_d = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_{s(d)}) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{C}^{N(d)} \mid f_i(\mathbf{p}) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, s(d) \right\}, \quad (11.7)$$

où la famille finie de polynômes  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, s(d)$  est un ensemble engendrant  $\mathcal{I}_d$ . Comme pour les polynômes définissant le champ, la variété a ses coefficients dans  $\mathbb{Q}$  ou  $i\mathbb{Q}$  ce qui conclut la preuve.

**Remarque 14.** Les théorèmes 20 et 21 donnent des informations explicites sur le degré aussi bien que sur la croissance des coefficients rationnels rentrant en compte dans la définition de la variété affine. Une question naturelle est de savoir dans quelle mesure ces informations peuvent fournir une borne supérieure naturelle sur le nombre de générateurs de l'idéal grâce à une version constructive du théorème de la base de Hilbert. Cela fera l'objet d'un futur travail.

## 11.2 $\mathbb{C}^*$ -invariance

La caractère résonant de la correction a une conséquence intéressante sur la variété algébrique rationnelle du centre isochrone. En effet, considérons l'action suivante de  $\mathbb{C}^*$  :

**Définition 53.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , on note  $T_\lambda$  l'application :

$$\begin{aligned} T_\lambda : \mathbb{C}^{N(d)} &\rightarrow \mathbb{C}^{N(d)} \\ p_\bullet &\mapsto \lambda^{\omega(\bullet)} p_\bullet \end{aligned}$$

où  $\bullet$  est une lettre arbitraire.

On étend cette action à tous les monômes  $p_{\mathbf{n}} = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ , avec  $\mathbf{n}$  un mot de la forme  $n_1 \dots n_r$ , on a :

$$\begin{aligned} T_\lambda(p_{\mathbf{n}}) &= T_\lambda(p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}), \\ &= \lambda^{\omega(n_1) + \dots + \omega(n_r)} p_{\mathbf{n}} \\ &= \lambda^{\omega(\mathbf{n})} p_{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Notons  $[B_{\mathbf{n}}] = [B_{n_1 \dots n_r}] = (xy)^{\frac{p(\mathbf{n})}{2}} (P(\mathbf{n})x\partial_x + Q(\mathbf{n})y\partial_y)$  où, comme nous venons de le montrer,  $P(\mathbf{n})$  et  $Q(\mathbf{n})$  sont polynomiaux en les coefficients de  $B_{n_1}, \dots, B_{n_r}$ . On a le Lemme suivant qui montre la  $\mathbb{C}^*$ -invariance :

**Lemme 49.** Pour tout mot résonant  $\mathbf{n}$ , on a :

$$T_\lambda(P(\mathbf{n})) = P(\mathbf{n}) \text{ et } T_\lambda(Q(\mathbf{n})) = Q(\mathbf{n}).$$

*Démonstration.* Par définition d'un mot résonant, son poids est nul i.e.  $\omega(\mathbf{n}) = 0$ . Ainsi :

$$T_\lambda(p_{\mathbf{n}}) = \lambda^{\omega(\mathbf{n})} p_{\mathbf{n}} = \lambda^0 p_{\mathbf{n}} = p_{\mathbf{n}}.$$

□

On peut finalement généraliser ce Lemme en le corollaire suivant :

**Corollaire 3.** Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , la variété algébrique  $\mathcal{L}_d$  des centres isochrones est invariante sous l'action de  $T_\lambda$ .

*Démonstration.* Pour démontrer ce Corollaire on doit juste rappeler que seuls les mots résonants contribuent à la linéarisation. On peut alors conclure en utilisant le Lemme ci-dessus.  $\square$

## Chapitre 12

# Algèbre de Lie, complexité géométrique des conditions de centre isochrone

Dans ce chapitre, on s'intéresse dans un premier temps au cas d'un champ de vecteurs quadratique du plan dont la partie linéaire est un centre. On retrouve une partie du **théorème classique de Bautin** [54] (les conditions de centre appelées uniforme et isochrone) **via l'écriture moulienne** des objets associés au champs sur lequel on lit la condition de centre. Une spécificité de cette écriture est qu'elle fait apparaître une partie **universelle** contenue dans les moules, c'est-à-dire dont la forme est indépendante de la valeur des coefficients définissant le champ et une partie comoule codant les propriétés algébriques qui elles sont fortement dépendantes des coefficients. On peut donc envisager de rechercher des conditions de centre qui dépendent uniquement de la partie comoule. Dans ce chapitre, on montre que les conditions de centre uniforme ou isochrone dans le cas des champs quadratiques correspondent à des propriétés fortes des algèbres de Lie engendrées par les comoules, par exemple algèbre de Lie nilpotente ou résoluble. Cette manière de penser les conditions de centre nous amène à introduire la notion de **niveau de lecture** d'un condition de centre.

Ces conditions de centres sont ensuite étendues pour des **degrés arbitraires** via leurs **caractérisations algébriques**. Les conditions sur les coefficients ainsi obtenues nous amènent dans une dernière partie à introduire une notion de **complexité géométrique** pour l'étude du problème du centre. Cette notion est classique en géométrie algébrique (voir [3]). On conclut alors en conjecturant que le cas holomorphe correspond à la condition de centre ayant la complexité minimale.

Les résultats de cette partie ont été publiés dans les proceedings Monografias Matemáticas "García De Galdeano", n°41, 2018 sous le nom "Lie algebras and geometric complexity of an isochronous center condition".

## 12.1 Centre isochrone quadratique

On considère un champ de vecteurs  $X$  planaire quadratique réel sous sa représentation complexe sur  $\mathbb{C}^2$  défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \xi x + p_{2,0}x^2 + p_{1,1}xy + p_{0,2}y^2, \\ \dot{y} &= -\xi y + \bar{p}_{0,2}x^2 + \bar{p}_{1,1}xy + \bar{p}_{2,0}y^2, \end{cases} \quad (12.1)$$

où  $p_{i,j} \in \mathbb{C}$  tel  $i + j = 2$  avec  $i = 0, 1, 2$ .

Le résultat classique suivant peut être trouvé dans [38, 81] :

**Théorème 22.** *Un champ de vecteurs  $X$  planaire quadratique réel est un centre isochrone si et seulement si au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- i)  $p_{1,1} = p_{0,2} = 0$  (Centre Isochrone Holomorphe),
- ii)  $p_{2,0} = \bar{p}_{1,1}, p_{0,2} = 0$  (Centre Isochrone Uniforme),
- iii)  $p_{2,0} = \frac{5}{2}\bar{p}_{1,1}, |p_{1,1}|^2 = \frac{4}{9}|p_{0,2}|^2$ ,
- iv)  $p_{2,0} = \frac{7}{6}\bar{p}_{1,1}, |p_{1,1}|^2 = 4|p_{0,2}|^2$ .

Notre approche suggère de rechercher ces conditions en étudiant les premières conséquences sur l'algèbre de Lie engendrée par les  $B_n, n \in \mathbf{A}(X)$ .

**Lemme 50.** *Un champ de vecteurs quadratique satisfaisant*

$$p_{2,0} = \bar{p}_{1,1}, p_{0,2} = 0, \quad (12.2)$$

ou

$$p_{1,1} = p_{0,2} = 0, \quad (12.3)$$

est tel que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  engendrée par  $\mathbf{B}(X) = \{B_n\}_{n \in \mathbf{A}(X)}$  est nilpotente d'ordre 1, i.e. pour tout  $n, m \in \mathbf{A}(X)$  on a :

$$[B_n, B_m] = 0. \quad (12.4)$$

En utilisant ce Lemme dont la preuve sera donnée plus loin et en utilisant la structure sur les séries on retrouve facilement que ces conditions correspondent à un centre isochrone. En effet, on a l'observation générale suivante :

**Lemme 51.** *Si l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  est nilpotente d'ordre 1 alors toute forme prénormale associée à un moule  $\text{Pran}^\bullet$  est réduite à :*

$$\text{Pran}(X) = X_{lin} + \sum_{n \in \mathbf{A}(X), \omega(n)=0} \text{Pran}^n B_n, \quad (12.5)$$

et la correction est donnée par :

$$Carr(X) = \sum_{n \in \mathbf{A}(X), \omega(n)=0} Carr^n B_n. \quad (12.6)$$

*Démonstration.* Par le classique Théorème de projection (voir [76, Théorème 8.1, p.28]), on a :

$$\sum_{\bullet} M^{\bullet} B_{\bullet} = \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in A^*(X) \\ \ell(\mathbf{n})=r}} M^{\mathbf{n}} [B_{\mathbf{n}}], \quad (12.7)$$

où  $[B_n] = B_n$  pour  $n \in \mathbf{A}(X)$  et  $[B_{\mathbf{n}}] = [B_{n_r}, [B_{n_{r-1}}, \dots, [B_{n_2}, B_{n_1}] \dots]]$  pour  $\mathbf{n} = n_1 \dots n_r \in \mathbf{A}^*(X)$ ,  $r \geq 2$ . En effet le terme constant de telles séries doit être nul car ces séries formelles correspondent à des champs de vecteurs.

En conséquence, sous ces conditions, on obtient :

$$\sum_{\bullet} M^{\bullet} B_{\bullet} = \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} \sum_{\substack{n \in \mathbf{A}(X) \\ \ell(\mathbf{n})=r}} M^n B_n, \quad (12.8)$$

Le moule  $M^{\bullet}$  est nul sur les mots résonants donc la partie droite de l'égalité est réduite à une somme sur les lettres résonantes.  $\square$

Comme nous l'avons déjà remarqué, la valeur et la nature des moules ne sont pas importantes. Seul la structure algébrique de Lie est à prendre en compte.

La démonstration que les conditions i) et ii) du Théorème 22 donne un centre isochrone est alors facilement déduite. En effet, un champ de vecteurs quadratique ne donne pas de lettres résonantes. En conséquence, le Lemme 51 implique que  $Pran(X) = X_{lin}$  et  $Carr(X) = 0$ .

La démonstration du Lemme 50 donne alors : premièrement, comme  $p_{0,2} = 0$  dans les deux cas, on a  $B_{(2,-1)} = B_{(-1,2)} = 0$ . Un simple calcul donne :

$$[B_{(1,0)}, B_{(0,1)}] = x^2 y [p_{1,1} (\bar{p}_{1,1} - p_{2,0}) \partial_x + \bar{p}_{1,1} (-p_{1,1} + \bar{p}_{2,0}) \partial_y]. \quad (12.9)$$

En conséquence, la condition sur  $\mathfrak{b}$  de nilpotence d'ordre 1 est :

$$p_{1,1} (\bar{p}_{1,1} - p_{2,0}) = 0. \quad (12.10)$$

Alors si  $p_{1,1} = 0$  ou  $\bar{p}_{1,1} = p_{2,0}$  l'algèbre de Lie engendrée par le champ de vecteurs  $\mathbf{B}(X)$  est nilpotente d'ordre 1.

On généralise ces conditions pour des perturbations polynomiales homogènes de degré  $d \geq 2$  dans la suite.

## 12.2 Algèbre de Lie engendrée par un champ de vecteurs polynomial

La section précédente indique que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  engendrée par l'ensemble  $\mathbf{B}(X)$  des comoules associés à  $X$  joue un rôle central dans la compréhension de certaines conditions de centres. Dans cette section, on extrait quelques résultats utiles dans notre étude des conditions de centre uniforme et holomorphe.

### 12.2.1 Série centrale descendante et algèbre de Lie nilpotente

Dans cette section, on donne quelques rappels sur les algèbres de Lie. On renvoie à [73] et [76] pour plus de détails.

**Définition 54.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, on définit sa série centrale descendante par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) &= \mathfrak{g}, \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \\ \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}) &= [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})] \text{ for } i \geq 2. \end{aligned}$$

En raison du Lemme 51, on s'intéresse aux algèbres de Lie nilpotentes qui sont définies de la manière suivante :

**Définition 55.** Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est nilpotente s'il existe un entier  $i$  tel que  $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$ .

### 12.2.2 Préliminaires

Commençons par quelques calculs sur des crochets de Lie :

**Lemme 52.** Soit  $X$  un champ de vecteurs polynomial de degré  $d \geq 2$  et  $\mathbf{B}(X)$  son ensemble associé d'opérateurs différentiels homogènes. On a pour  $n = 2, \dots, d$  et  $i = 1, \dots, n$  :

$$\begin{aligned} [B_{(n,-1)}, B_{(-1,n)}] &= n|p_{0,n}|^2(xy)^{n-1}(x\partial_x - y\partial_y), \\ [B_{(i-1,n-i)}, B_{(n-i,i-1)}] &= \left( (n-i)p_{i,n-i}U_i - (i-1)p_{n-i+1,i-1}\bar{U}_i \right) (xy)^{n-1}\partial_x - \\ &\quad \left( (n-i)\bar{p}_{i,n-i}\bar{U}_i + (i-1)\bar{p}_{n-i+1,i-1}U_i \right) (xy)^{n-1}\partial_y, \end{aligned} \quad (12.11)$$

où  $U_i = p_{n-i+1,i-1} - \bar{p}_{i,n-i}$ .

Le Lemme précédent donne un rôle particulier aux quantités  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  et aussi aux coefficients  $p_{i,n-i}$ . En utilisant cette remarque, nous sommes capables d'extraire une classe de conditions explicites pour lesquelles l'algèbre de Lie associée  $\mathfrak{b}$  est nilpotente d'ordre 1.

### 12.2.3 Algèbre de Lie Nilpotente - Conditions uniformes

Une condition triviale afin d'assurer que le crochet de Lie  $[B_{(i-1,n-i)}, B_{(n-i,i-1)}]$  soit nul est de poser  $U_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Cette condition couplée avec  $p_{0,n} = 0$  annulant le crochet  $[B_{(n,-1)}, B_{(-1,n)}]$  est en fait plus forte. En effet, on a :

**Lemme 53.** Soit  $X$  un champ de vecteurs polynomial de la forme (12.1) où  $P$  est homogène de degré  $d$ . Si les coefficients de  $P$  satisfont :

$$p_{d-i+1,i-1} - \bar{p}_{i,d-i} = 0, \quad i = 1, \dots, d, \quad \text{et} \quad p_{0,d} = 0, \quad (12.12)$$

alors l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  est nilpotente d'ordre 1.

*Démonstration.* La condition  $p_{0,d} = 0$  implique non seulement que les crochets  $[B_{(n,-1)}, B_{(-1,n)}]$  sont nuls, mais aussi que  $B_{(n,-1)} = B_{(-1,n)} = 0$ . Alors, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  est seulement engendrée par les opérateurs  $B_{(i-1,d-i)}$  pour  $i = 1, \dots, d$ . Encore une fois la condition  $p_{d-i+1,i-1} - \bar{p}_{i,d-i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, d$  implique que tous les opérateurs  $B_{(i-1,d-i)}$  sont de la forme  $B_{(i-1,d-i)} = p_{i,d-i} x^{i-1} y^{d-i} X_E$ , où  $X_E$  est le classique champ de vecteurs d'Euler défini par  $X_E = x\partial_x + y\partial_y$ . Le champ d'Euler agit trivialement sur chaque monôme. Plus précisément, on a  $X_E(x^{i-1}y^{d-i}) = (d-1)x^{i-1}y^{d-i}$ . Le crochet de Lie de  $B_{(i-1,d-i)}$  avec  $B_{(j-1,d-j)}$  est alors facilement calculé. On obtient :

$$\begin{aligned} [B_{(i-1,d-i)}, B_{(j-1,d-j)}] &= p_{i,d-i} p_{j,d-j} \left( x^{i-1} y^{d-i} \left( X_E(x^j y^{d-j}) \partial_x + X_E(x^{j-1} y^{d-j+1}) \partial_y \right) \right. \\ &\quad \left. - x^{j-1} y^{d-j} \left( X_E(x^i y^{d-i}) \partial_x + X_E(x^{i-1} y^{d-i+1}) \partial_y \right) \right), \\ &= 0, \end{aligned} \quad (12.13)$$

ce qui implique  $\mathcal{C}^2(\mathfrak{b}) = 0$ . Ce qui conclut la preuve.  $\square$

#### 12.2.4 Sous-ensemble résonant - Conditions holomorphes

Nous avons pointé le rôle particulier des coefficients  $p_{i,n-i}$  dans les calculs. On introduit le sous-ensemble résonant  $\mathfrak{b}_{res}$  de  $\mathfrak{b}$  engendré par tous les crochets de Lie de  $[B_{\mathbf{n}}]$  tels que  $\omega(\mathbf{n}) = 0$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$ . Comme dans la section précédente, nous démontrons le résultat suivant :

**Lemme 54.** Soit  $X$  un champ de vecteurs polynomial de la forme 12.1. On suppose que les coefficients de  $P$  satisfont

$$p_{i,n-i} = 0, \quad n = 2, \dots, d, \quad i = 0, \dots, d-1. \quad (12.14)$$

alors le sous-ensemble  $\mathfrak{b}_{res}$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  est trivial, i.e.  $\mathfrak{b}_{res} = \{0\}$ .

*Démonstration.* La condition précédente implique  $p_{0,n} = 0$  pour tout  $n = 2, \dots, d$  et donc  $B_{(n,-1)} = B_{(-1,n)} = 0$ . On se concentre alors sur les opérateurs  $B_{(i-1,n-i)}$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $n = 2, \dots, d$ . L'hypothèse implique que  $B_{(i-1,n-i)} = 0$  pour  $i = 2, \dots, n-1$  et

$$B_{(0,n-1)} = y^n \bar{p}_{n,0} \partial_y, \quad \text{et} \quad B_{(n-1,0)} = x^n p_{n,0} \partial_x. \quad (12.15)$$

pour  $n = 2, \dots, d$ . Un calcul simple montre que pour tout  $n, m \in 2, \dots, d$ , on a :

$$[B_{(0,n-1)}, B_{(m-1,0)}] = 0. \quad (12.16)$$

De plus, on a  $[B_{(0,n-1)}, B_{(0,m-1)}] = y^{n+m-1} c_{n,m} \partial_y$ , où  $c_{n,m}$  est une constante. En conséquence, on a :  $[B_{(0,n_1-1) \dots (0,n_k-1)}] = y^{n_1 + \dots + n_k - 1} c_{n_1 \dots n_k} \partial_y$ . On obtient le même résultat pour  $[B_{(m_1-1,0) \dots (m_r-1,0)}]$  en



remplaçant  $y$  par  $x$ .

Un mot résonant doit mixer des lettres avec des poids positifs et négatifs. Prenons un mot qui commence par  $(0, n_1 - 1), \dots, (0, n_k - 1)$  pour un  $k \in \mathbb{N}^*$  donné. On doit avoir au moins un opérateur de la forme  $B_{(m_1-1,0)}$  pour avoir un mot résonant. Comme  $[B_{(0,n_1-1)\dots(0,n_k-1)}]$  dépend seulement de  $y\partial_y$  et  $B_{(m_1-1,0)}$  de  $x\partial_x$ , le crochet de Lie correspondant est nul. Ainsi n'importe quel  $[B_{\mathbf{n}}]$  tel que  $\omega(\mathbf{n}) = 0$  est nul. Ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 12.3 Isochronisme uniforme

Suivant R. Conti [19], un centre isochrone d'un champ de vecteurs  $X$  est dit *uniforme* si toutes les orbites périodiques ont la même période. Cette condition est équivalente à la relation suivante sur le polynôme  $P$  (voir [19, Definition 19.1, p.28]) :

$$y P(x, y) = x \overline{P(x, y)}. \quad (\text{UI})$$

Cette condition induit des relations spécifiques sur les coefficients du polynôme :

**Lemme 55.** *Un polynôme  $P$  de degré  $d$  satisfait la condition d'isochronisme uniforme (UI) si et seulement si les coefficients  $p_{i,j}$ ,  $i + j = n$ ,  $n = 2, \dots, d$  satisfont :*

$$p_{0,n} = 0 \text{ et } p_{i,n-i} = \bar{p}_{n-i+1,i-1}, \quad n = 2, \dots, d, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12.17)$$

En utilisant ce Lemme et le Lemme de structure 53 pour l'algèbre de Lie générée par les comoules de  $\mathbf{B}(X)$ , on en déduit le Lemme suivant

**Lemme 56.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs polynomial de la forme (12.1) où  $P$  est homogène de degré  $d$ . On suppose que les coefficients du polynôme  $P$  satisfont :*

$$p_{0,d} = 0, \quad p_{i,d-i} = \bar{p}_{d-i+1,i-1}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (12.18)$$

De plus, si  $d$  est impair avec  $d = 2m + 1$ , on suppose  $p_{m+1,m} = 0$ . Alors le champ de vecteurs  $X$  est isochrone.

*Démonstration.* Par le Lemme 53, les premières conditions impliquent que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  est nilpotente d'ordre 1. On déduit du Lemme 51 que toute forme prénormale est réduite à :

$$\text{Pran}(X) = X_{lin} + \sum_{n \in \mathbf{A}(X), \omega(n)=0} \text{Pran}^n B_n. \quad (12.19)$$

Si  $d$  est pair, l'ensemble des lettres résonantes est vide et  $\text{Pran}(X) = X_{lin}$ . Si  $d$  est impair, alors on a seulement une lettre résonante dans  $\mathbf{B}(X)$  donnée par  $n_m = (m + 1, m)$ . Alors une forme prénormale est donnée par :

$$\text{Pran}(X) = X_{lin} + \text{Pran}^{n_m} B_{n_m}. \quad (12.20)$$

Comme  $p_{m+1,m} = 0$ , on obtient  $B_{n_m} = 0$  et  $\text{Pran}(X) = X_{lin}$ . Ce qui conclut la démonstration.  $\square$

## 12.4 Centre isochrone holomorphe

Toujours suivant Conti [19], un champ de vecteurs réel sous représentation complexe satisfaisait les conditions de *Cauchy-Riemann* si :

$$\partial_y P = 0. \quad (\text{CR})$$

Les conditions de Cauchy-Riemann imposent des contraintes fortes sur les coefficients de  $P$  :

**Lemme 57.** *Un polynôme  $P$  de degré  $d$  satisfait les conditions de Cauchy-Riemann (CR) si et seulement si  $p_{i,n-i} = 0$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $n = 2, \dots, d$ .*

On déduit :

**Lemme 58.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs polynomial de degré  $d$  de la forme (12.1). On suppose que  $P$  satisfait les conditions de Cauchy-Riemann. Alors le champ de vecteurs  $X$  est linéarisable.*

*Démonstration.* La formule (12.8) implique que toute forme prénormale associée à un moule  $Pran^\bullet$  peut s'écrire :

$$Pran(X) = X_{lin} + \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*, \ell(\mathbf{n})=r, \omega(\mathbf{n})=0} Pran^{\mathbf{n}}[B_{\mathbf{n}}]. \quad (12.21)$$

Par définition tous les crochets de Lie dans (12.21) appartiennent à  $\mathfrak{b}_{res}$ . En utilisant le Lemme 54, les conditions de Cauchy-Riemann impliquent que  $\mathfrak{b}_{res}$  est trivial. En conséquence, tous les crochets de Lie  $[B_{\mathbf{n}}]$  sont réduits à zéro pour  $\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^*$  tel que  $\omega(\mathbf{n}) = 0$ . On conclut alors que toute forme prénormale se réduit à la partie linéaire du champ et donc le champ de vecteurs  $X$  est formellement linéarisable.  $\square$

Les conditions sur les coefficients correspondent à la caractérisation des centres isochrones holomorphes.

## 12.5 Linéarisation et complexité

Suivant J. Ecalle et D. Schlomiuk dans [31], on introduit le problème suivant :

**Complexité minimale de problème de linéarisation :** *Soient  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $d \geq 2$  et  $X$  un champ de vecteurs polynomial de degré  $d$  donné par (12.1). On note  $\text{lin}(d)$  le nombre minimal de relations algébriques dépendantes des coefficients de  $P$  qui induisent une linéarisation analytique. Peut-on déterminer une borne ou une formule explicite de  $\text{lin}(d)$  ?*

En utilisant notre approche, on comprend que ce nombre dépend de la complexité des conditions de centres isochrones. En particulier, chaque condition  $C_i$  où  $i = 1, \dots, m$  d'un centre isochrone est déterminée par une famille finie de polynômes  $C_i(p)$  de degré  $c_i$ . Une notion naturelle de *complexité* adaptée de la géométrie algébrique (voir [3], Définition 4.5.6, p.213) est donnée par :

**Définition 56.** *Soit  $S \in \mathbb{C}^m$  un ensemble algébrique. Considérons une représentation  $(R)$  de  $S$ . La complexité de la représentation  $(R)$  est définie par le triplet  $(m, P(R), C(R))$ , composé des données suivantes :*

1. La dimension de l'espace ambiant  $\mathbb{C}^m$ ,
2. Le nombre de conditions dans  $(R)$ ,
3. Le degré maximal des polynômes définissant les conditions dans  $(R)$ .

Dans notre cas, la dimension de l'espace ambiant est fixée par  $d$  et est donnée par le nombre  $m(d)$  de coefficients d'un polynôme générique de degré  $d$ . On introduit alors la notion de *complexité géométrique* pour une condition isochrone :

**Définition 57.** Une condition isochrone  $C$  est dite de complexité géométrique  $g(C) = (q, m)$  si elle admet une représentation constituée de  $q$  identités polynomiales de degré au plus  $m$ .

La notion précédente peut être pour affiner la question posée par J. Ecalle et D. Schlomiuk :

**Complexité géométrique minimale de problème de linéarisation** Soient  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $d \geq 2$  et  $X$  un champ de vecteurs polynomial de degré  $d$  donné par (12.1). On note  $\text{glin}(d)$  la complexité géométrique minimale d'une condition de centre isochrone. Peut-on trouver une borne ou une formule pour  $\text{glin}(d)$  ?

Comme attendu par J. Ecalle et D. Schlomiuk dans [31], cette question est plus facilement manipulable que la question initiale. En particulier, nos deux exemples (isochronismes uniforme et holomorphe) donnent déjà des conditions pour lesquelles le degré minimal est atteint pour une condition de centre isochrone. En conséquence, on peut parcourir l'ensemble des conditions de centre pour calculer dans chaque cas le couple  $g(C)$ . On a :

$$\begin{aligned} g_{\text{Holo}}(d) &= (d, 1), \\ g_{\text{Uni}}(d) &= (d + 1, 1) \text{ si } d \text{ est pair et } g_{\text{Uni}}(d) = (d + 2, 1) \text{ si } d \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Les conditions assurant le caractère nilpotent de  $\mathfrak{b}$  ou la trivialité de  $\mathfrak{b}_{\text{res}}$  sont toujours de degré 1 comme elles peuvent être lues sur les crochets de Lie de champs de vecteurs homogènes  $B_n$ ,  $n \in \mathbf{A}(X)$ . Les autres conditions de centre isochrone dépendent de l'interaction entre moules et comoules et génèrent des identités polynomiales de degré au moins 2. En conséquence, on formule la conjecture suivante :

**Conjecture 3.** Le nombre  $\text{glin}(d)$  est égal à  $(d, 1)$  correspond au centre isochrone holomorphe.

En effet, la condition de centre isochrone holomorphe se lit bien seulement sur la partie résonante de l'algèbre de Lie engendrée par les comoules. On attend a priori dans ce cas le nombre minimal de conditions.

# Chapitre 13

## Démonstrations de la partie 2

Dans ce chapitre on démontre nos principaux Théorèmes à savoir 12, 13 et 14. Essentiellement, ces démonstrations passent par une analyse combinatoire des crochets de Lie des opérateurs intervenant dans la forme préparée du champ en fonction de la profondeur.

### 13.1 Démonstration du Théorème 12

Soit  $X$  un champ de vecteurs Hamiltonien réel de degré pair  $2n$  de la forme :

$$X = X_{lin} + \sum_{r=2}^{2n} X_r.$$

Pour chaque  $X_r$ , on peut associer sa profondeur associée de la manière suivante :

$X_r$	Profondeur
$X_2$	1
$X_3$	2
$X_4$	3
...	...
$X_{2n-1}$	$2n - 2$
$X_{2n}$	$2n - 1$

Par le Théorème 19, on s'intéresse seulement aux profondeurs paires. En conséquence, on cherche toutes les combinaisons possibles en longueur arbitraire qui donne naissance sous le crochet de Lie à des champs de vecteurs de profondeur paire. Dans la suite, on note  $[X_{k_1}, \dots, X_{k_r}]$  l'ensemble des opérateurs que l'on obtient par les crochets de Lie itérés d'opérateurs différentiels homogènes  $B_{n_i}$  provenant de  $X_{k_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ . On a par exemple :

$X_r$ et $[X_r, X_{r'}]$	Profondeur
$X_3$	2
$[X_2, X_2]$	2
$X_5$	4
$[X_4, X_2]$	4
$[X_3, X_3]$	4
$[X_3, X_2, X_2]$	4
$X_7$	6
$[X_6, X_2]$	6
$[X_5, X_3]$	6
$[X_4, X_4]$	6
$[X_5, X_2, X_2]$	6
$[X_4, X_3, X_2]$	6
$[X_4, X_2, X_2, X_2]$	6
$[X_3, X_2, X_2, X_2, X_2]$	6
$[X_2, X_2, X_2, X_2, X_2, X_2]$	6

La correction en profondeur 2 est donnée par :

$$Carr_2(X) = Carr_{2,1}(X_3) + Carr_{2,2}(X_2),$$

Comme la profondeur est un morphisme on a la contribution des crochets de Lie de  $X_2$ , on a aussi les contributions de la lettre résonante de  $X_3$ . Par le Lemme fondamental 46, la correction est donnée par :

$$Carr_2(X) = p_{1,1} + i \left( 6|p_{1,0}|^2 + \frac{2}{3}|p_{-1,2}| \right).$$

Le critère de linéarisation impose  $Carr_2(X) = 0$ . Cela implique :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(p_{1,1}) &= 0, \\ -\operatorname{Im}(p_{1,1}) &= 6|p_{1,0}|^2 + \frac{2}{3}|p_{-1,2}|. \end{cases} \quad (13.1)$$

Comme  $X$  est réel et Hamiltonien, la première équation est toujours satisfaite. La seconde a seulement une solution non triviale si et seulement si  $\operatorname{Im}(p_{1,1}) < 0$ . La situation  $\operatorname{Im}(p_{1,1}) \geq 0$  amène à traiter deux cas différents. Si  $\operatorname{Im}(p_{1,1}) = 0$ , la sphère de Birkhoff est réduite à 0 et on obtient  $X_2 = 0$ . Si  $\operatorname{Im}(p_{1,1}) > 0$ , l'équation n'a pas de solution et le champ de vecteur est alors non isochrone.

On suppose que  $p_{1,1} = 0$  alors  $X_2 = 0$  et l'on est réduit au cas :

$$X = X_{lin} + X_3 + \cdots + X_r. \quad (13.2)$$

Comme  $p_{1,1} = 0$ , le premier terme non nul dans la correction est  $Carr_4(X)$ . Par le Lemme fondamental, le terme  $Carr_4(X)$  a exactement la même structure algébrique que le cas précédent  $Carr_2(X) = 0$ . Le rôle de  $X_2$  est joué par  $X_3$  et le rôle du terme résonant de  $X_3$  est joué par le terme résonant de  $X_5$ .

Ici encore, on retrouve la même dichotomie entre le cas  $Im(p_{2,2}) = 0$  et  $Im(p_{2,2}) > 0$ . Dans le premier cas, on obtient que  $X_3 = 0$  et l'on doit traiter la même situation que la précédente. Par ailleurs si  $Im(p_{2,2}) > 0$ , le terme  $Carr_4(X)$  ne peut être nul et  $X$  n'est pas un centre isochrone.

La discussion précédente est représentative de la stratégie générale de la preuve. Supposons que  $p_{j,j} = 0$  pour  $j = 1, \dots, r-1$ . Alors, on montre par récurrence que  $X_2 = \dots = X_{r-1} = 0$ . Afin de finir la preuve, deux cas dépendants de la valeur de  $r$  doivent être discutés.

**Cas 1 :**  $r < n-1$ . La condition  $Im(p_{r,r}) > 0$  implique que la composante  $X_{2r+1}$  est non triviale. Par le Lemme fondamental et le critère de linéarisation, on doit avoir :

$$Carr_{2r}(X) = p_{r,r} + i \left( \sum_{k=\lceil \frac{r+1}{2} \rceil + 1}^r \frac{r(r+1)}{(r-k+1)^2} |p_{k-1,r-k}|^2 + \frac{r}{r-1} |p_{-1,r}|^2 \right) = 0 \quad (13.3)$$

Comme  $Im(p_{r,r}) > 0$ , l'égalité ne peut être satisfaite et  $X$  est non isochrone.

**Cas 2 :**  $r = n-1$ . Dans ce cas, on est réduit aux perturbations homogènes de degré  $2n$  et la correction est donnée par :

$$Carr_{2n-2}(X) = \sum_{k=\lceil \frac{r+1}{2} \rceil + 1}^r \frac{r(r+1)}{(r-k+1)^2} |p_{k-1,r-k}|^2 + \frac{r}{r-1} |p_{-1,r}|^2 = 0$$

Comme  $X_{2n}$  n'est pas trivial, l'équation ne peut être satisfaite et  $X$  est non isochrone.

Cela conclut la preuve du Théorème.

## 13.2 Démonstration du Théorème 13

La démonstration suit les mêmes lignes que celle du Théorème 12. On doit distinguer deux cas :  $k$  est pair ou impair.

**Cas 1 :  $k$  est pair.** Le champ de vecteurs  $X_k$  ne contient pas de termes résonants. Ainsi, la première contribution de la correction apparaît en profondeur  $2(k-1)$  correspondant aux crochets de Lie résonants d'opérateurs différentiels homogènes dans  $X_k$  de longueur 2. Comme  $l \leq k-1$ , cela implique que  $2l-1 < 2l \leq 2(k-1)$ . La composante paire entre  $X_k$  et  $X_{2l}$  entrera en jeu dans la correction seulement avec une profondeur  $2(k-1)$  par les crochets de Lie de longueur au moins 2. De la même manière, pour les composantes impaires, le terme résonant interviendra dans la correction avec une profondeur strictement plus petite en longueur 1 et les autres termes dans une profondeur plus élevée que  $2(k-1)$  par les crochets de Lie de longueur au moins 2.

En conséquence, le terme de la correction provenant d'un  $k$  pair est donné par :

$$Carr_{2(k-1)}(X) = i \left( \sum_{k=\lceil \frac{r+1}{2} \rceil + 1}^r \frac{r(r+1)}{(r-k+1)^2} |p_{k-1, r-k}|^2 + \frac{r}{r-1} |p_{-1, r}|^2 \right). \quad (13.4)$$

Afin de satisfaire le critère de linéarisation, on doit avoir  $Carr_{2(k-1)} = 0$ . Si la composante  $X_k$  est non triviale alors le système est de suite non isochrone. Sinon, on a  $X_k = 0$  et on est amené au même problème mais avec une composante impaire.

**Cas 2 :  $k$  est impair.** Dans ce cas, le champ de vecteurs  $X_k$  contient un opérateur homogène résonant. Notons  $k = 2m + 1$  alors  $B_{m,m}$  est de profondeur  $2m$  et de poids nul. On a :

$$Carr_{k-1}(X) = Carr_{2m}(X) = B_{m,m}. \quad (13.5)$$

Par le critère de linéarisation,  $Carr_{k-1}(X) = 0$  et le terme résonant  $B_{m,m}$  dans  $X_k$  est nul. La contribution de  $X_k$  en longueur 2 suit le même argument que pour le cas pair et on déduit finalement que  $X_k = 0$ .

En conséquence, on peut montrer par récurrence que pour être linéarisable, les composantes  $X_k, \dots, X_{2l}$  doivent être nulles. Mais, par hypothèse, on a que  $X_{2l}$  est non trivial. En conséquence, le champ de vecteurs  $X$  est nécessairement non isochrone.

### 13.3 Démonstration du théorème 14

La stratégie de la preuve suit celle du Théorème 13. La principale observation est qu'il n'existe pas d'interactions entre chaque famille de champ de vecteurs  $\{X_k, \dots, X_{2l}\}$  et  $\{X_{c_n}, \dots, X_{2(c_n-1)}\}$ ,  $n = 1, \dots, m$ . En effet, analysons d'abord la profondeur de tous ces objets. On a :

$X_r$	Profondeur
$X_k$	$k - 1$
$X_{k+1}$	$k$
$\vdots$	$\vdots$
$X_{2l-1}$	$2l - 2$
$X_{2l}$	$2l - 1$
0	0
$X_{4l}$	$4l - 1$
$\vdots$	$\vdots$
$X_{8l-2}$	$8l - 3$
$\dots$	$\dots$
$X_{c_m}$	$c_m - 1$
$\vdots$	$\vdots$
$X_{2(c_m-1)}$	$2(c_m - 1) - 1$

Suivant les lignes du Théorème 13, on voit que les arguments basés sur la contribution d'une composante donnée appartenant à  $\{X_k, \dots, X_{2l}\}$  sont valides. En d'autres mots, on montre facilement que pour être linéarisable, on doit alors avoir  $X_k = \dots = X_{2l-2} = 0$ . Le dernier argument concernant  $X_{2l}$  est aussi vérifié car la première contribution de  $X_{2l}$  à la correction est de longueur 2 et de profondeur  $4l - 2$  qui n'est pas perturbée par les termes de la famille restante  $\{X_{c_n}, \dots, X_{2(c_n-1)}\}$ ,  $n = 1, \dots, m$  comme la contribution minimale de ces termes à la correction est de profondeur  $4l - 1$ .

Ainsi, un champ de vecteurs de ce type sera linéarisable si  $X_k = \dots = X_{2l} = 0$ .

Par le même argument, on voit qu'il n'existe pas d'interaction entre la famille  $\{X_{c_1}, \dots, X_{2(c_1-1)}\}$  et  $\{X_{c_n}, \dots, X_{2(c_n-1)}\}$ ,  $n = 2, \dots, m$ . On en déduit qu'un champ de vecteurs linéarisable de ce type doit satisfaire  $X_{c_1} = \dots = X_{2(c_1-1)}$ .

Par récurrence, on en déduit facilement qu'un champ de vecteurs de ce type est linéarisable si et seulement si toutes les composantes s'annulent. Comme par hypothèse on considère un champ de vecteurs non trivial, on a donc une contradiction et le champ de vecteurs est nécessairement non isochrone.





# Chapitre 14

## Conclusion et perspectives

### 14.1 Vers une démonstration complète de la conjecture de Jarque-Villadelprat

Nos principaux résultats couvrent une majorité de cas de la conjecture de Jarque-Villadelprat. Dans les cas restants, le rôle du terme résonant dans la déformation de la sphère de Birkhoff joue un rôle prépondérant. Quoiqu'il en soit, le phénomène qui marche pour une perturbation quartique, qui est précisément le cas étudié par Jarque et Villadelprat en utilisant des méthodes géométriques, doit être appliqué en degré arbitraire. En effet, comme nous l'avons vu dans nos principaux résultats, la structure algébrique de la correction dans le processus d'annulation ne doit pas changer et peut être étroitement étudiée. Nous avons alors plusieurs directions afin de résoudre complètement la conjecture :

- Peut-on démontrer le cas quartique en étendant notre méthode ?
- Peut-on étendre la méthode géométrique de Jarque-Villadelprat dans les cas restants ?
- Peut-on prouver ces cas en utilisant d'autres méthodes ?

On pense qu'une meilleure compréhension de la structure algébrique de la correction sera importante pour aller plus loin.

### 14.2 Base de Hilbert effective et variété affine de centres isochrones

Un second aspect de ce travail est la description explicite et algorithmique de la variété affine de centre isochrone. Comme nous l'avons déjà souligné, on dispose d'informations sur la croissance du degré et des coefficients entrants en jeu dans la description de la variété. Une question naturelle est alors de chercher une version effective du Théorème de la base de Hilbert afin d'obtenir des informations sur le nombre minimal de générateurs de l'idéal. Les centres isochrones semblent plus manipulables que les centres classiques. Quoiqu'il en soit, il est clair que toute avancée dans ces directions aura des conséquences sur le 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert. En effet, le même type de combinatoire et d'outils peuvent être utilisés pour obtenir des informations analogues pour les centres de champs de vecteurs polynomiaux (sur ce sujet on pourra consulter [\[25\]](#)).

### 14.3 Isochronisme de systèmes Hamiltoniens complexes

Dans [57], les auteurs étudient l'isochronisme de systèmes Hamiltoniens complexes dont la partie linéaire a le spectre  $(1, -1)$ . Notre méthode et nos résultats s'étendent naturellement à ce cas et donnent une description explicite et algorithmique de la variété affine des centres isochrones. Cela sera étudié dans un futur travail.

## Troisième partie

# Symétries et linéarisation des tissus du plan - Un point de vue dynamique



# Table des matières

<b>15 Introduction</b>	<b>119</b>
15.1 Tissus	119
15.2 Linéarisation des tissus	123
15.3 Plan	125
<b>16 Groupe de symétrie</b>	<b>127</b>
16.1 Groupes de symétries et générateurs infinitésimaux	127
16.2 Prolongement et critère d'invariance	129
16.3 Structures des symétries et propriétés du groupe de symétries	131
<b>17 Symétrie des tissus</b>	<b>133</b>
17.1 Définition de symétries de tissus planaires	133
17.2 Théorèmes sur les symétries	134
17.3 Groupes de symétries de tissus particuliers	136
17.4 Régularité des symétries et tissu de Clairaut	141
17.5 Dimension du groupe de symétries d'un tissu	144
<b>18 Arrangement de droites et tissus algébriques</b>	<b>149</b>
18.1 Arrangements de droites de $\mathbb{P}^2$ et tissus algébriques	149
18.2 Relations abéliennes et rang d'un tissu	150
18.3 Algébrisation et linéarisation de tissus	151
18.4 Caractérisation des 3-tissus hexagonaux	152
<b>19 Symétrie d'un tissu et module de dérivations de la courbe discriminante du polynôme de présentation</b>	<b>153</b>
19.1 Autour du Théorème de Darboux	153
19.2 Groupe de symétries d'un tissu et facteurs intégrants	155
19.3 Polynôme de Darboux et courbe discriminante du polynôme de présentation d'un tissu implicite	156
19.4 Module de dérivations et courbes discriminantes	157
19.5 Lien avec les arrangements de droites	158

<b>20</b>	<b>Algorithme de P.J. Olver</b>	<b>161</b>
20.1	Invariants du groupe de symétries . . . . .	161
20.2	Algorithme d'Olver . . . . .	161
20.3	Exemples . . . . .	162
<b>21</b>	<b>Perspectives</b>	<b>165</b>

---

# Chapitre 15

## Introduction

Dans [52], **Alain Hénaut** obtient via des outils de géométrie algébrique et/ou différentielle une **caractérisation des tissus du plan pararallélisables** via la dimension de leur **groupe de symétries**. C'est suite à la présentation de ses travaux au laboratoire de mathématiques de Pau que nous avons évoqué la possibilité d'obtenir des démonstrations alternatives de ses résultats dans le **cadre classique des symétries d'équations différentielles** exposé notamment par P.J. Olver dans son livre [68].

Dans cette partie, nous présentons le résultat de ce travail, à savoir la **mise en place** de ce cadre dans le cas des **tissus** et des **démonstrations complètes** des résultats concernant les groupes de symétries de certains tissus du plan étudiés par [52] et pour lesquels les démonstrations sont soit esquissées, soit absentes.

Notre intérêt pour ce sujet et la relation à la partie II de cette thèse s'explique de la manière suivante : l'**algèbre de Lie d'un tissu** est une sous-algèbre de Lie du **module de dérivation** associé à la **courbe discriminante du tissu**. Or, ce module possède une **interprétation dynamique** : il correspond à l'ensemble des champs de vecteurs laissant invariant (au sens dynamique) la courbe et plus précisément le **discriminant de la courbe** est un **polynôme de Darboux** pour ces champs. On devine donc une relation entre les **propriétés du tissu** et des **propriétés d'intégrabilité ou de linéarisabilité** des champs du module. C'est l'ensemble de ces relations que nous explorons dans la suite de cette partie.

### 15.1 Tissus

La géométrie des tissus est l'étude simultanée de feuilletages plongés dans un même espace. Ce domaine des mathématiques prend ses origines dans les équations différentielles et a vu le jour avec les travaux de W. Blaschke, G. Bol et G. Thomsen dans les années 1930. Une référence classique est le livre de Bol et Blaschke [4]. Ce domaine a connu une période très active jusqu'au milieu du 20<sup>ème</sup> siècle avant de connaître un renouveau dans les années 70 avec les travaux de Akinis, V.V. Goldberg puis de P.A. Griffiths et S.S. Chern où ils introduisent les outils de la géométrie différentielle et algébrique. Enfin depuis les années 90, A. Hénaut, D. Cerveau, E. Ghys, pour n'en citer que quelques uns, ont vivement travaillé sur le domaine et plus récemment on pourra citer L. Pirio ou encore J.V. Pereira



et le livre de référence [71].

### 15.1.1 Les différentes représentations d'un tissu

Commençons avec la définition **locale** d'un feuilletage donnée dans [58, p.19] :

**Définition 58.** *Un feuilletage de dimension  $p$  (ou codimension  $n - p$ ) au voisinage 0 dans  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) au voisinage de 0 est la donnée d'un voisinage  $U$  de 0 et d'une application lisse :*

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_q) : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^q, \quad (15.1)$$

*qui est une submersion en tout point de  $U$ , c'est-à-dire que sa jacobienne :*

$$\left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n}, \quad (15.2)$$

*est de rang maximal  $q$ .*

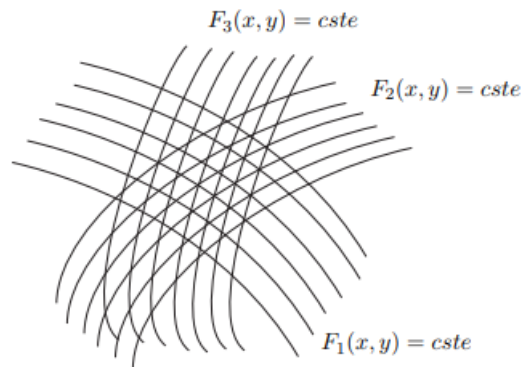
*Les feuilles sont alors les composantes connexes des sous-variétés :*

$$\psi = \text{constante}; \quad (15.3)$$

*elles sont lisses de dimension  $p$ .*

On peut alors définir un  $d$ -tissu :

**Définition 59** (Tissu). *Un  $d$ -tissu, noté  $\mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$ , est défini comme une collection de  $d$  feuilletages holomorphes de codimension 1  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tels que leurs espaces tangents soient en position générale c'est-à-dire que pour toute famille de  $m$  feuilletages avec  $m \leq n$ , les espaces tangents correspondants en l'origine ont une intersection de codimension  $m$ .*



Un exemple de 3-tissu

1

**Remarque 15.** *La condition de position générale est donnée par  $dF_i(0) \wedge dF_j(0) = 0$  pour tout  $i \neq j$ . Cette hypothèse peut être affaiblie par une condition de **transversalité deux à deux** ce qui conduit à la définition de tissu quasi-lisse où les espaces tangents des feuilletages ne sont jamais confondus. Il est aussi possible de supposer que les codimensions des feuilletages ne sont pas nécessairement égales à 1 et que les codimensions varient d'un feuilletage à l'autre.*

1. Les illustrations présentes dans ce manuscrit sont empruntées à la thèse de O. Ripoll dirigée par A. Hénaut, *Géométrie des tissus du plan et équations différentielles*, 2005

Un feuilletage  $F_i$  peut être défini par un germe de 1-forme holomorphe  $\omega_i \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$  non nul qui satisfait la **condition d'intégrabilité de Frobenius** (voir [72, p. 30]) :

$$\omega_i \wedge d\omega_i = 0. \quad (15.4)$$

On peut ainsi définir un  $d$ -tissu comme une collection de  $d$  germes de 1-formes holomorphes satisfaisant la condition d'intégrabilité de Frobenius. Le tissu est alors noté  $\mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_d)$  et la condition de position générale est :

$$(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_j})(0) \neq 0, \quad (15.5)$$

où  $\{i_1, \dots, i_j\}$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, d\}$  et  $j \leq \min\{d, n\}$ .

La dualité entre les 1-formes et les champs de vecteurs permet de considérer un  $d$ -tissu comme une collection de  $d$  champs de vecteurs  $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_d)$ . Les feuilles de chaque feuilletage  $F_i$  correspondent à des courbes intégrales des champs  $X_i$ .

Enfin, une dernière représentation des  $d$ -tissus est possible en utilisant les **submersions**. En effet, les feuilletages  $F_i$  étant lisses, ils définissent les surfaces de niveau de submersions  $u_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ . Le tissu sera alors noté  $\mathcal{W}(u_1, \dots, u_d)$ .

Dans la suite, nous étudions une classe particulière de tissus introduite par A. Hénaut (voir [52]) appelés implicites.

### 15.1.2 Forme préparée d'une équation différentielle polynomiale

Nous nous intéresserons aux  $d$ -tissus de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  appelés **implicites** définis par une équation différentielle du premier ordre et de degré  $d$  suivant [52].

On considère une **équation différentielle du premier ordre polynomiale de degré  $d$  à coefficients analytiques**, c'est-à-dire :

$$F(x, y, y') = a_0(x, y)(y')^d + a_1(x, y)(y')^{d-1} + \dots + a_d(x, y) = 0, \quad (15.6)$$

où  $y' = \frac{dy}{dx}$  et où les coefficients  $a_i(x, y)$  sont analytiques en  $x$  et  $y$ .

On appelle **polynôme de présentation** de  $F$  et on note  $P_F$ , le polynôme en la variable  $z$  et de paramètres  $x$  et  $y$  associé au tissu  $F$  et défini par :

$$P_F(z; x, y) = a_0(x, y)z^d + a_1(x, y)z^{d-1} + \dots + a_d(x, y). \quad (15.7)$$

On a  $F(x, y, y') = P_F(y'; x, y)$ . On peut calculer le résultant et le discriminant de ce polynôme définis par :

$$R_{P_F} := \text{Result}(P_F, \partial_z P_F) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0 \Delta, \quad (15.8)$$

où  $\Delta$  est le  $z$ -discriminant donné par :

$$\Delta = a_0^{2d-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (p_i(x, y) - p_j(x, y))^2, \quad (15.9)$$

où les  $p_1(x, y), \dots, p_d(x, y)$  sont les racines de  $P_F(z; x, y)$  (voir [42, p. 403]).

On supposera dans la suite que l'on se place hors du lieu des singularités, autrement dit :

$$R_{P_F} \neq 0, \quad (15.10)$$

appelée **condition de factorisation**. En effet, le polynôme  $P_F$  admet alors  $d$  racines distinctes et on peut dans ce cas factoriser le polynôme  $P_F$  par rapport à la variable  $z$  :

$$P_F(z; x, y) = a_0(x, y) \prod_{i=1}^d (z - p_i(x, y)). \quad (15.11)$$

On déduit de cette construction la forme factorisée de l'équation différentielle initiale :

$$F(x, y, y') = a_0(x, y) \prod_{i=1}^d (y' - p_i(x, y)), \quad (15.12)$$

qu'on appellera **forme préparée** de  $F$ .

On obtient donc  $d$  racines et chacune d'elle engendre des courbes intégrales qui décrivent l'objet géométrique.

On est conduit à la définition suivante (voir [52]) :

**Définition 60** ( $d$ -tissu implicite). *On appelle  $d$ -tissu implicite la donnée d'une équation différentielle polynomiale de degré  $d$  du premier ordre à coefficients analytiques satisfaisant la condition de factorisation.*

**Remarque 16.** *On considère des tissus à un isomorphisme locale près, considérer  $F$  ou  $g \cdot F$  avec  $g$  une fonction analytique inversible revient à considérer le même tissu. L'étude d'un tissu implicite est donc l'étude de la classe des équations différentielles donnée à un inversible près de  $F$ . Dans la suite, on considèrera comme représentant de la classe pour cette relation d'équivalence celui de degré minimal.*

Nous allons le voir dans la section suivante, on peut associer de manière naturelle un  $d$ -tissu explicite à la forme préparée de  $F$ .

On notera  $\mathcal{W}(F)$  le tissu implicite défini par l'équation différentielle  $F$ .

### 15.1.3 Construction du tissu explicite associé à une forme préparée

On considère un tissu défini implicitement par une équation différentielle polynomiale de degré  $d$  sous forme préparée.

On peut associer à la forme préparée, une famille de  $d$  champs de vecteurs notés  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ ,

donnés pour chaque racine  $p_i$  par :

$$X_i = \partial_x + p_i(x, y)\partial_y, \quad (15.13)$$

ou de manière duale par la 1-forme différentielle :

$$\omega_i(x, y) = dy - p_i(x, y)dx. \quad (15.14)$$

**Définition 61** (*d-tissu explicite associé à  $F$* ). Soit  $F$  la donnée d'un *d-tissu implicite* satisfaisant la condition de factorisation. On appelle *d-tissu explicite* associé à  $F$  le *d-tissu*  $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_d)$  où les  $X_i$  sont donnés par la forme préparée de  $F$ .

De manière réciproque, la donnée d'un *d-tissu explicite*  $\mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$  permet de définir un *d-tissu implicite*. Il suffit de considérer la forme préparée définie par les racines :

$$p_i = -\frac{\partial_x(F_i)}{\partial_y(F_i)}. \quad (15.15)$$

Dans la suite, nous allons utiliser les différentes représentations d'un tissu. L'intérêt de la représentation **implicite** étant d'avoir un **objet global** représentant le tissu. L'idée est donc de voir si des propriétés de cet objet global permettent de **caractériser certaines propriétés des tissus**.

## 15.2 Linéarisation des tissus

Nous allons nous intéresser à la classification des tissus qui dans le cas de tissus implicites correspond à la classification d'équations différentielles du premier ordre d'un degré donné. Pour les classer nous considérerons **l'équivalence de tissus** sous l'action de biholomorphismes de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ .

### 15.2.1 Equivalence de tissus

On définit l'action d'un biholomorphisme  $\varphi$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  sur un *d-tissu*  $\mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_d)$  ou  $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_d)$  ou encore  $\mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$  par :

$$\begin{aligned} \varphi^*\mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_d) &= \mathcal{W}(\varphi^*(\omega_1), \dots, \varphi^*(\omega_d)), \\ \varphi_*\mathcal{W}(X_1, \dots, X_d) &= \mathcal{W}(\varphi_*(X_1), \dots, \varphi_*(X_d)), \\ \varphi\mathcal{W}(F_1, \dots, F_d) &= \mathcal{W}(F_1 \circ \varphi, \dots, F_d \circ \varphi), \end{aligned}$$

où  $\varphi^*$  est le pull-back (ou codifférentielle) de  $\varphi$  et  $\varphi_*$  la différentielle de  $\varphi$ .

**Définition 62** (Tissus équivalents). Deux *d-tissus*  $\mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_d)$  (resp.  $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_d)$ ) et  $\mathcal{W}(\omega'_1, \dots, \omega'_d)$  (resp.  $\mathcal{W}(X'_1, \dots, X'_d)$ ) sont dits *équivalents* s'il existe une germe de biholomorphismes de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tel que :

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega_1, \dots, \omega_d) &= u.(\omega'_1, \dots, \omega'_d) \\ (\text{resp. } \varphi_*(X_1, \dots, X_d) &= u.(X'_1, \dots, X'_d), \end{aligned}$$

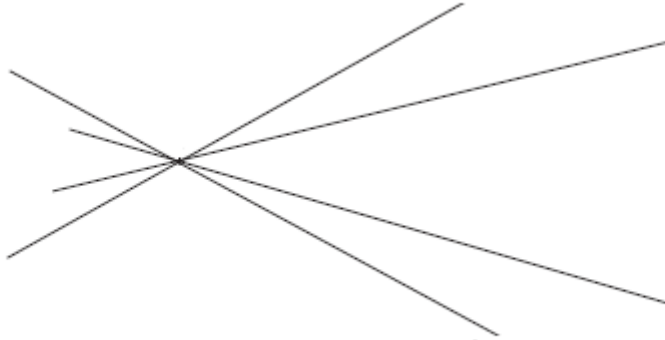
où  $u$  est un germe d'une fonction analytique inversible de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ .

On veut classer les tissus à équivalence près. Dans le cas où  $d \leq n$ , on peut toujours construire un biholomorphisme qui redresse simultanément l'ensemble des feuilles (on renvoie à [72, p. 3]). Dans ce cas, il n'y a qu'une seule classe d'équivalence. Dans le cas  $d > n$ , il existe une multitude de classes d'équivalence. On est donc conduit à étudier des classes d'équivalence de tissus ayant des propriétés particulières. C'est ce que nous faisons dans la prochaine section avec les tissus linéaires.

### 15.2.2 Tissus linéaires et linéarisation

Un tissu étant donné on veut trouver une représentation la plus simple possible via l'action des biholomorphismes. C'est une idée proche de celle de la recherche des formes normales pour les équations différentielles, à la différence qu'ici on doit considérer des **réductions simultanées** de l'ensemble des champs définissant le tissu. Comme pour les équations différentielles, les tissus dit linéaires jouent un rôle particulier.

**Définition 63** (Tissus linéaires). *Un  $d$ -tissu est dit linéaire si les feuilles des  $d$  feuilletages sont des morceaux de droites non nécessairement parallèles entre elles.*



Un tissu linéaire

Ces tissus sont les plus simples des tissus que l'on peut envisager. On peut donc chercher si un tissu donné se ramène à une forme linéaire.

**Définition 64** (Tissu linéarisable). *Un tissu est dit linéarisable s'il est conjugué à un tissu linéaire.*

On est naturellement conduit au problème dit de linéarisation :

**Problème de linéarisation :** *Caractériser les  $d$ -tissus sur une variété réelle ou complexe de dimension  $n$  qui sont linéarisables.*

Le problème n'a de sens que pour  $d \geq n + 1$ . En effet, si  $d \leq n$ , il est toujours possible de redresser simultanément les  $d$  champs de vecteurs dans  $\mathbb{C}^n$ .

### 15.2.3 Linéarisation des tissus implicites et groupes de symétries

Un moyen classique de classifier les équations différentielles est la **théorie des invariants différentiels**. La construction de tels invariants implique notamment l'étude des **groupes de symétries** des équations. En particulier, il existe une relation forte entre linéarisabilité et existence de groupes de symétries ([68], [69]).

Dans un travail non publié [52], A. Hénaut caractérise les groupes de symétries des  $d$ -tissus implicites planaires.

Dans cette partie, nous proposons une relecture du travail d'A. Hénaut dans le cadre de la théorie des invariants différentiels telle qu'exposée dans le livre classique de P.J. Olver (voir [68]). En particulier, nous donnons des calculs détaillés pour les groupes de symétries de  $d$ -tissus.

## 15.3 Plan

Dans un premier chapitre (16), nous donnerons des rappels généraux sur les groupes de symétries d'équations différentielles, suivant [68].

Dans le chapitre suivant (17), nous adapterons ce formalisme aux tissus et nous donnerons des exemples de calculs explicites de groupes de symétries de tissus classiques. Ce chapitre permettra notamment de soulever des questions quant à la nature des symétries (la classe de régularité) et la dimension de l'algèbre de Lie des symétries.

Le chapitre 18 permettra d'introduire une classe particulière de tissus : les tissus hexagonaux, ainsi que les relations abéliennes d'un tissu. Nous redonnerons des théorèmes classiques sur ces objets et mettrons en avant l'interprétation dynamique de ces derniers.

Dans le chapitre 19, nous ferons le lien entre les symétries et l'algèbre de dérivations de la courbe discriminante en utilisant la théorie classique de Darboux sur les courbes invariantes d'équations différentielles. Nous verrons ainsi que le module de dérivations, objet classique de la géométrie algébrique, défini comme l'ensemble des dérivations laissant invariants des variétés est une algèbre de Lie contenant l'algèbre de Lie des symétries d'un tissu.

Le chapitre 20 nous permettra de présenter un algorithme donné par P.J.Olver dans [68] sur la construction d'invariants de l'algèbre de Lie des symétries d'un tissu. Nous verrons que partant d'un tissu, nous pouvons obtenir son algèbre de symétrie mais que celle-ci ne permet pas dans les exemples dont nous disposons de reconstruire le tissu autrement dit que le tissu est un invariant complet de son algèbre de Lie.

Dans le chapitre final, on terminera en discutant quelques perspectives.



# Chapitre 16

## Groupe de symétrie

Dans ce chapitre nous donnons des rappels classiques sur les groupes de Lie, l'action d'un groupe de transformations locales et le groupe de symétries d'équations différentielles. Nous utilisons les notations et le vocabulaire de [68].

### 16.1 Groupes de symétries et générateurs infinitésimaux

On rappelle dans un premier temps la structure de groupe de Lie qui sera essentielle pour définir un groupe de symétrie, un groupe de Lie n'est ni plus ni moins qu'une variété différentielle munie d'une structure algébrique de groupe :

**Définition 65.** *Un groupe de Lie est un groupe qui possède une structure de variété lisse de dimension  $r$  telle que les applications suivantes :*

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(g, h) = g \cdot h \text{ (la multiplication)}$$

et :

$$i : G \rightarrow G, \quad i(g) = g^{-1} \text{ (l'inversion),}$$

où  $g, h \in G$ , sont des applications lisses entre variétés.

Ceci est une définition abstraite d'un groupe de Lie qui peut aussi se définir localement de la manière suivante à la manière des sous-variétés de  $\mathbb{K}^n$  :

**Définition 66.** *Un groupe de Lie local consiste en des sous-ensembles ouverts connexes  $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^n$  contenant 0, et des applications lisses :*

$$m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^r$$

qui est l'opération de groupe et l'application inverse :

$$i : V_0 \rightarrow V,$$



avec les propriétés suivantes :

- a) Associativité :  $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$ , pour  $x, y, z \in V$ ,
- b) Élément identité : pour tout  $x \in V$ ,  $m(0, x) = m(x, 0) = x$ ,
- c) Inverse : pour tout  $x \in V_0$ ,  $m(x, i(x)) = m(i(x), x) = 0$ .

On peut maintenant introduire les groupes de transformations agissant sur une variété donnée :

**Définition 67.** Soit  $\mathcal{M}$  une variété lisse. Un groupe local de transformation agissant sur  $\mathcal{M}$  est donné par un groupe de Lie (local)  $G$ , un sous-ensemble ouvert  $\mathcal{U}$ , avec :

$$\{e\} \times \mathcal{M} \subset \mathcal{U} \subset G \times \mathcal{M},$$

avec  $\mathcal{U}$  le domaine de définition de l'action de groupe et l'application lisse  $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que :

- a) pour  $(h, x) \in \mathcal{U}$ ,  $(g, \psi(h, x)) \in \mathcal{U}$  et  $(g \cdot h, x) \in \mathcal{U}$ , on a :

$$\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(g \cdot h, x),$$

- b) pour tout  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\psi(e, x) = x$ ,
- c) pour  $(g, x) \in \mathcal{U}$ , on a  $(g^{-1}, \psi(g, x)) \in \mathcal{U}$  et  $\psi(g^{-1}, \psi(g, x)) = x$ .

Nous allons nous intéresser aux groupes de symétries d'une famille d'équations différentielles, on introduit donc quelques notations :

Soit  $\mathcal{S}$  un système différentiel d'ordre  $n$  en  $p$  variables indépendantes  $(x_1, \dots, x_p)$  et  $q$  variables dépendantes  $(u_1, \dots, u_q)$  donné par le système suivant :

$$\Omega_\nu(x, u^{(n)}(x)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l$$

où  $\Omega : M \times U^{(n)} = M \times U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow \mathbb{R}^l$ , avec  $U_i$  le domaine de la  $i^{\text{ème}}$  dérivée de  $f$  et  $u^{(n)}(x) = \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$  où  $k = n_1 + \dots + n_p$  et  $j_1 + \dots + j_k = k$ .

On peut alors définir le groupe de symétrie d'un système d'équations différentielles de la manière suivante :

**Définition 68.** Soit  $\mathcal{S}$  un système différentiel. Un groupe de symétries de  $\mathcal{S}$  est un groupe local de transformations  $G$  agissant sur un sous-ensemble ouvert  $M$  du produit cartésien  $D \times U$  des variables indépendantes et dépendantes du système  $\mathcal{S}$  avec la propriété que si  $u = (u_1, \dots, u_q) = f : M \rightarrow U$  est une solution de  $\mathcal{S}$  et dès que  $g \cdot f$  est définie pour  $g \in G$ , alors  $g \cdot f(x)$  est aussi une solution du système.

On notera que si l'action du groupe de symétries ne dépend que d'un paramètre  $\varepsilon$ , elle est de la forme :

$$G_\varepsilon : x \in M \mapsto g_\varepsilon \cdot (x, f(x)).$$

On peut alors voir l'action d'un élément du groupe comme l'action d'un champ de vecteurs  $X$  sur la

variété obtenu par dérivation par rapport à ce paramètre  $\varepsilon$  :

$$X = \frac{d(g_\varepsilon \cdot x)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \partial_x + \frac{d(g_\varepsilon \cdot f(x))}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \partial_u.$$

**Définition 69.** *Le champ de vecteurs  $X$  est appelé générateur infinitésimal du groupe de symétrie  $G$ .*

La théorie classique des équations différentielle assure par le théorème de Cauchy-Lipschitz l'existence d'un flot du champ  $X$ , c'est-à-dire d'une fonction  $\psi$  qui dépend d'un paramètre  $\varepsilon$  et des variables  $x = (x_1, \dots, x_p)$ , satisfaisant :

$$X.\psi(\varepsilon, x) = \frac{d\psi(\varepsilon, x)}{d\varepsilon}.$$

Ainsi le flot définit un groupe de transformations à un paramètre et est défini comme l'exponentiel du champ de vecteurs  $X$  :

$$\psi(\varepsilon, x) = \exp(\varepsilon X)x,$$

dont l'expression explicite est :

$$\exp(\varepsilon X)x = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} X^n(x)$$

où  $X^n(x) = X \circ \dots \circ X(x)$  est la composition usuelle d'opérateurs différentiels.

## 16.2 Prolongement et critère d'invariance

Par définition, un groupe de symétrie d'un système différentiel transforme une solution de ce système en une nouvelle solution. Ceci fournit des contraintes sur les générateurs infinitésimaux du groupe de symétries. En effet, pour vérifier que l'image d'une solution par l'action du groupe est encore une solution, celle-ci doit satisfaire le système différentiel. Pour le vérifier, il est donc nécessaire de savoir écrire les dérivées de cette image sous l'action du groupe. On est donc conduit à la notion de **prolongement** qui donne la forme explicite de cette action sur la solution et ses dérivées jusqu'à un certain ordre :

**Définition 70.** *Une solution  $f$  d'un système différentiel  $\Omega_\nu(x, u) = 0$ ,  $\nu = 1, \dots, l$  est une fonction  $u = f(x)$  telle que :*

$$\Omega_\nu(x, pr^{(n)}f(x)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l$$

où  $pr^{(n)}f(x)$  est le prolongateur de  $f$  c'est-à-dire défini sur l'espace des jets d'ordre  $n$   $M \times U^{(n)}$ .

Ce prolongement se traduit aussi sur le flot d'un champ de vecteurs  $X$  comme ci-dessus et on le note :

$$pr^{(n)}[\exp(\varepsilon X)].$$

Cela permet ainsi de définir le prolongement d'un générateur infinitésimal du groupe de symétrie :

**Définition 71.** Soient  $M \subset D \times U$  un ouvert et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ , avec le groupe local de transformations à un paramètre correspondant  $\exp(\varepsilon X)$ . Le  $n^{\text{ème}}$  prolongateur de  $X$ , noté  $pr^{(n)}X$ , est le champ de vecteurs défini sur le  $n^{\text{ème}}$  espace des jets  $M \times U^{(n)} = M$  et est défini comme le générateur infinitésimal du groupe de transformations à un paramètre prolongé  $pr^{(n)}[\exp(\varepsilon X)]$ , c'est-à-dire :

$$pr^{(n)}X|_{(x,u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon} \left( pr^{(n)}[\exp(\varepsilon X)](x, u^n(x)) \right) |_{\varepsilon=0}$$

pour tout  $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$ .

Pour obtenir l'invariance d'un système différentiel sous l'action d'un groupe de symétrie, on a besoin que ce dernier vérifie une condition de rang maximal :

**Définition 72.** Un système différentiel  $\Omega_\nu(x, u^{(n)}) = 0$ ,  $\nu = 1, \dots, l$ , est de rang maximal si la matrice Jacobienne  $J_\Omega(x, u^{(n)})$  de  $\Omega$  par rapport aux variables  $(x, u^{(n)})$  est de rang  $l$  dès que  $\Omega(x, u^{(n)}) = 0$ .

Comme l'action prolongée d'un groupe de symétrie peut être traduite sur l'expression de ses générateurs infinitésimaux, dans la suite nous utiliserons uniquement le champ de vecteurs prolongé pour obtenir le critère d'invariance suivant (voir [68, Theorem 2.31, p.104]) :

**Théorème 23** (Critère d'invariance). Soit

$$\Omega_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l,$$

un système différentiel de rang maximal défini sur  $M \subset D \times U$ . Si  $G$  est un groupe local de transformations agissant sur  $M$  et :

$$pr^{(n)}X[\Omega_\nu(x, u^{(n)})] = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \text{ dès que } \Omega_\nu(x, u^{(n)}) = 0,$$

pour tout générateur infinitésimal  $X$  de  $G$ , alors  $G$  est un groupe de symétries du système différentiel.

On renvoie à [68], Theorem 2.31 p.104 pour la démonstration.

Ce dernier théorème donne un critère d'invariance mais ne permet pas le calcul explicite des objets considérés, ceci est fait par le théorème suivant donnant la formule explicite d'un générateur infinitésimal prolongé d'un groupe de symétries (voir [68, Theorem 2.36, p.110]) :

**Théorème 24.** Soit

$$X = \sum_{i=1}^p \xi_i(x, u) \partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \partial_{u_\alpha}$$

un champ de vecteurs sur un sous-ensemble ouvert  $M \subset X \times U$ . Le  $n^{\text{ème}}$  prolongateur de  $X$  est le champ de vecteurs :

$$pr^{(n)}X = X + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \partial_{u_\alpha^J}$$

défini sur l'espace des jets correspondant  $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$ , la deuxième somme étant sur tous les multi-indices (non ordonnés)  $J = (j_1, \dots, j_k)$ , avec  $1 \leq j_k \leq p$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Les fonctions  $\phi_\alpha^J$  en coefficients de  $pr^{(n)}X$  sont explicitement données par les formules :

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J \left( \phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi_i u_\alpha^i \right) + \sum_{i=1}^p \xi_i u_{J, \alpha}^i,$$

où  $u_\alpha^i = \partial_{x_i} u_\alpha$ , et  $u_{J, \alpha}^i = \partial_{x_i} u_{J, \alpha} = \frac{\partial^{k+1} u_\alpha}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$ .

Illustrons le calcul des prolongateurs à l'ordre 1 ( $n = 1$ ) correspondant au cas des tissus ainsi que le Critère d'invariance.

**Exemple 16.** Soit un système différentiel  $\Omega(x, y, y'(x)) = y_x(x) - p(x, y(x))$ . Soient  $G$  un groupe de symétries et un générateur infinitésimal  $X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(x, y)\partial_y$ . Considérons le prolongateur de  $X$  au premier ordre :

$$pr^{(1)}X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(x, y)\partial_y + \left( \partial_x(\alpha_2) + (\partial_y(\alpha_2) - \partial_x(\alpha_1))y_x - \partial_y(\alpha_1)y_x^2 \right) \partial_{y_x},$$

avec  $y'(x) = \frac{dy}{dx} = y_x$ . On doit vérifier que  $\Omega(x, y, y_x)$  est de rang maximal. La matrice Jacobienne est le vecteur suivant  $J_\Omega(x, y, y_x) = (-\partial_x(p(x, y)), \partial_y(p(x, y)), 1)$ , alors le rang est maximal et égal à 1. On applique  $pr^{(1)}X$  à  $\Omega(x, y, y_x)$ , on a alors :

$$pr^{(1)}X.\Omega(x, y, y_x) = -\alpha_1\partial_x(p) - \alpha_2\partial_y(p) + \partial_x(\alpha_2) + (\partial_y(\alpha_2) - \partial_x(\alpha_1))p - \partial_y(\alpha_1)p^2 = 0,$$

dès que  $\Omega(x, y, y_x) = 0$  et  $y_x = p(x, y)$ .

## 16.3 Structures des symétries et propriétés du groupe de symétries

L'ensemble des générateurs infinitésimaux d'un groupe de symétrie possède une structure classique d'algèbre de Lie comme l'énonce la proposition suivante (voir [68, Corollary 2.40, p.115]) :

**Proposition 8.** Soit  $\mathcal{S}$  un système différentiel  $\Omega_\nu(x, u^{(n)}) = 0$  de rang maximal défini sur  $M \subset D \times U$ . L'ensemble des symétries infinitésimales du système forme une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur  $M$ . De plus, si cette algèbre de Lie est de dimension finie, le groupe de symétries est un groupe de Lie local de transformations agissant sur  $M$ .

On conclut ce chapitre sur l'équivalence entre équations différentielles et l'isomorphisme entre groupes de symétrie :

**Définition 73.** Deux équations différentielles sont dites équivalentes s'il existe un changement de coordonnées qui transforme l'une en l'autre.

Deux groupes de symétries sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme entre eux qui est aussi un homomorphisme de groupe.

La proposition suivante permet donc d'obtenir un moyen de classification (voir [69, Proposition 6.13, p.185]) :

**Proposition 9.** *Deux équations différentielles équivalentes ont des groupes de symétries isomorphes.*

La dimension de l'algèbre de Lie des symétries est un invariant. Donc si deux tissus ont des algèbres de Lie des symétries de dimensions différentes, ils ne seront pas équivalents.

# Chapitre 17

## Symétrie des tissus

Dans ce chapitre, on spécialise le formalisme introduit dans le chapitre précédent au cas des tissus. On retrouve (Théorème 26) la caractérisation donnée par A. Hénaut dans ([52, Section 2], ) des symétrie d'un tissu via un système d'équations aux dérivées partielles qu'il donne sans démonstration. La résolution de ce système est ensuite donnée dans de nombreux exemples (tissu de Cartan, parallèle, etc). Tous les calculs sont détaillés. Le calcul de ces solutions permet de voir que la classe des fonctions utilisée est très spécifique. En particulier, on est obligé de sortir de la classe analytique dans laquelle les tissus sont considérés. Il semble d'ailleurs possible de préciser ce point via des théorèmes de type Maillet (voir [43], [45] et Section 17.4). Ce phénomène est bien mis en évidence dans l'étude du tissu de Zariski en Section 17.5.2, utilisé comme illustration d'un des théorèmes principaux de A. Hénaut [52], à savoir que l'algèbre de Lie des symétries d'un  $d$ -tissu,  $d \geq 3$ , du plan est de dimension 0, 1 ou 3.

### 17.1 Définition de symétries de tissus planaires

On commence par définir le groupe de symétrie d'un tissu du plan (voir [52]) :

**Définition 74.** Soit  $\mathcal{W}(d) = \mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$  un  $d$ -tissu. Un groupe  $G$  est un groupe de symétries du tissu  $\mathcal{W}(d)$  si et seulement il laisse globalement invariant le tissu mais aussi chacune des feuilles qui le constitue.

Le Lemme suivant permet le transfert de l'étude du feuilletage à celui de l'équation différentielle associé. C'est un résultat classique [68] que l'on a appliqué aux tissus :

**Lemme 59.** Soit  $\mathcal{W}(d)$  un  $d$ -tissu donné par  $d$  feuilletages  $F_1, \dots, F_d$  admettant un groupe de symétries  $G$ . Alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $G$  est un groupe de symétries de l'équation différentielle définie par le feuilletage  $F_i$ .

*Démonstration.* Par définition,  $G$  est un groupe de symétries d'un  $d$ -tissu  $\mathcal{W}(d)$  si pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  on a  $\forall m \in F_i, \forall g \in G, g \cdot m \in F_i$ . Chaque feuille de chaque feuilletage  $F_i$  est envoyée sur une autre feuille d'un autre feuilletage  $F_j$ . La condition d'invariance est équivalente à dire que  $G$  envoie une solution de  $\Delta_i = 0$  sur une autre solution, c'est-à-dire que  $\Delta_i$  est invariant par  $G$ . Ainsi le tissu est invariant par  $G$  si toutes les équations sont simultanément invariantes par  $G$ .  $\square$

## 17.2 Théorèmes sur les symétries

Cette partie permet de préciser comment obtenir les symétries d'un tissu du plan. On réécrit donc le critère d'invariance du chapitre précédent dans le cas d'une équation différentielle type définissant un tissu :

**Théorème 25.** *Un champ de vecteurs  $X = \alpha_1 \partial_x + \alpha_2 \partial_y$  est un générateur infinitésimal d'un groupe de symétries  $G$  d'une équation différentielle de la forme :*

$$y'(x) = p(x, y(x))$$

si et seulement si les fonctions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  en les variables  $x$  et  $y$  sont solutions de :

$$-\alpha_1 \partial_x(p) - \alpha_2 \partial_y(p) + \partial_x(\alpha_2) + (\partial_y(\alpha_2) - \partial_x(\alpha_1))p - \partial_y(\alpha_1)p^2 = 0.$$

On en déduit facilement le théorème sur les tissus en généralisant à une famille d'équations :

**Théorème 26** (Groupe de symétries d'un  $d$ -tissu). *Soit  $\mathcal{W}(d) = \mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$  un  $d$ -tissu. Pour tout entier  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on définit l'équation  $\Omega_i$  :*

$$\Omega_i(x, y(x), y'(x)) = y' - p_i(x, y(x)) = 0$$

et les équations associées

$$p_i(x, y) = -\frac{\partial_x(F_i)}{\partial_y(F_i)}.$$

Soit  $G$  un groupe de symétries de  $\mathcal{W}(d)$ , alors tout générateur infinitésimal  $X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(x, y)\partial_y$  de  $G$  satisfait :

$$-\alpha_1 \partial_x(p_i) - \alpha_2 \partial_y(p_i) + \partial_x(\alpha_2) + (\partial_y(\alpha_2) - \partial_x(\alpha_1))p_i - \partial_y(\alpha_1)p_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (17.1)$$

Ces équations définissent l'algèbre de Lie des générateurs infinitésimaux des symétries.

*Démonstration.* Il suffit ici de vérifier la condition de rang maximal. Comme on considère un système d'équations indépendantes, autrement dit toutes les équations dépendent des variables  $x$  et  $y$  avec chaque  $y$  dépendant du même  $x$ , alors la matrice Jacobienne est donnée par  $\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}$  où  $A$  est le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} -\partial_x(p_1) \\ \vdots \\ -\partial_x(p_d) \end{pmatrix}$ ,  $B$  est une matrice  $d \times d$  de la forme  $Id_d \times \begin{pmatrix} -\partial_y(p_1) \\ \vdots \\ -\partial_y(p_d) \end{pmatrix}$  avec  $Id_d$  la matrice identité de taille  $d \times d$  et le block  $C$  est aussi  $Id_d$  (chaque colonne correspond à la dérivée partielle par rapport à une des variables  $y$ ). Finalement, la matrice Jacobienne de taille  $d \times (2d + 1)$  est de rang maximal si et seulement si le rang est  $d$ , ce qui est assuré par le block  $C$ .  $\square$

Le théorème suivant permet de montrer que l'on peut toujours réduire le système des symétries

17.1.

**Théorème 27** (Equation normalisée du groupe de symétries d'un tissu implicite). *Le système d'équations 17.1 peut s'écrire sous une forme normalisée :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\partial_x(\alpha_2) & +g_d\alpha_1 + h_d\alpha_2 & = 0 \\ \partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2) & +g_{d-1}\alpha_1 + h_{d-1}\alpha_2 & = 0 \\ \partial_y(\alpha_1) & +g_{d-2}\alpha_1 + h_{d-1}\alpha_2 & = 0 \\ & g_{d-3}\alpha_1 + h_{d-3}\alpha_2 & = 0 \\ & \vdots & \\ & g_1\alpha_1 + h_1\alpha_2 & = 0. \end{array} \right.$$

où les coefficients  $g_i$  et  $h_i$ , pour  $i = 1, \dots, d$ , dépendent des pentes  $p_i$ .

*Démonstration.* Il suffit de considérer le système 17.1 et d'y appliquer une élimination de Gauss.  $\square$

Dans les sections suivantes, nous donnons des exemples de résolutions explicites de tels systèmes. Les sections suivantes permettront de discuter de l'existence et de la nature des solutions. Plus particulièrement, si les fonctions  $g_i$  et  $h_i$  sont analytiques, peut-on préciser les régularités des symétries ?

**Proposition 10.** *Le système 17.1 admet toujours une solution dont la classe de régularité n'est pas déterminée.*

*Démonstration.* C'est un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , le théorème d'existence de Cauchy-Kovalevskaya ([69], Théorème 15.2, p.448) assure l'existence de solutions.  $\square$

On renvoie à la section "Régularité des symétries" pour une discussion autour de la nature de ces solutions.

Considérons un  $d$ -tissu avec  $d \geq 3$ , on a un système de trois équations aux dérivées partielles et  $d - 3$  équations considérées comme des contraintes. Suivant les notations d'A. Hénaut, on appelle matrice

de symétries la matrice  $(d \times 2)$  notée  $\mathcal{S}$  définie par :  $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} g_d & h_d \\ g_{d-1} & h_{d-1} \\ \vdots & \\ g_2 & h_2 \\ g_1 & h_1 \end{pmatrix}$ .

Pour conclure cette section, nous avons le Lemme suivant :

**Lemme 60.** *Soit  $X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(x, y)\partial_y$  une symétrie d'un  $d$ -tissu défini par les champs de vecteurs  $X_i = \partial_x + p_i(x, y)\partial_y$  pour  $i = 1$  à  $d$ . Alors :*

$$[X, X_i] = \nu_i(x, y)X_i,$$

où  $\nu_i(x, y) = -\partial_x(\alpha_1) - p_i\partial_y(\alpha_1)$ .

*Démonstration.* Un simple calcul du crochet de Lie donne :

$$\begin{aligned} [X, X_i] &= \alpha_1\partial_x(p_i)\partial_y + \alpha_2\partial_y(p_i)\partial_y - \partial_x(\alpha_1)\partial_x - \partial_x(\alpha_2)\partial_y - p_i\partial_y(\alpha_1)\partial_x - p_i\partial_y(\alpha_2)\partial_y \\ &= (-\partial_x(\alpha_1) - p_i\partial_y(\alpha_1))\partial_x + (\alpha_1\partial_x(p_i) + \alpha_2\partial_y(p_i) - \partial_x(\alpha_2) - p_i\partial_y(\alpha_2))\partial_y. \end{aligned}$$



On utilise alors l'équation de symétrie 17.1 :

$$-\partial_x(\alpha_2) + (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2))p_i + \partial_y(\alpha_1)p_i^2 + \partial_x(p_i)\alpha_1 + \partial_y(p_i)\alpha_2 = 0.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} [X, X_i] &= (-\partial_x(\alpha_1) - p_i\partial_y(\alpha_1))\partial_x + (-\partial_x(\alpha_1)p - \partial_y(\alpha_1)p^2)\partial_y, \\ &= (-\partial_x(\alpha_1) - p_i\partial_y(\alpha_1))(\partial_x + p_i(x, y)\partial_y), \\ &= (-\partial_x(\alpha_1) - p_i\partial_y(\alpha_1))X_i. \end{aligned}$$

□

Ce résultat est une piste concernant l'interprétation dynamique et l'intégrabilité car des résultats semblables dans le cas du problème du centre assure l'intégrabilité d'un champ s'il apparaît comme "vecteur" propre d'un crochet de Lie. On renvoie à [46] pour plus de détails.

## 17.3 Groupes de symétries de tissus particuliers

Nous allons dans cette section présenter des calculs explicites de symétries de  $d$ -tissus. On pourra noter la différence entre les cas où le tissu est défini par un ou deux feuilletages et le cas où on le définit par trois feuilletages ou plus. Les cas  $d = 1$  et  $d = 2$  sont triviaux et ont des groupes de symétries de dimensions infinies alors que les autres cas ont des nombres finis de symétries.

### 17.3.1 Cas des 1-tissu et 2-tissu

Pour les tissus du plan, on voit le cas particulier des 1-tissus et 2-tissus dont les algèbres de Lie des symétries sont de dimension infinie :

**Lemme 61** (1-tissu). *L'algèbre de symétries d'un 1-tissu est de dimension infinie, chaque symétrie est de la forme :*

$$X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(y)\partial_y,$$

avec  $\alpha_1 \in \mathcal{C}^\omega(x, y)$  et  $\alpha_2 \in \mathcal{C}^\omega(y)$ , où  $\mathcal{C}^\omega$  est l'ensemble des fonctions analytiques en les variables  $x$  et/ou  $y$ .

*Démonstration.* Pour un 1-tissu, on peut supposer  $p_1 = 0$ . Ainsi le système 17.1 se réduit à :

$$\partial_x(\alpha_2) = 0,$$

aucune condition n'apparaît sur  $\alpha_1$ . L'algèbre de Lie est de dimension infinie et générée par :

$$X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(y)\partial_y,$$

où  $\alpha_2(y)$  est analytique en  $y$ .

□

**Lemme 62** (2-tissu). *L'algèbre de Lie des symétries d'un 2-tissu est de dimension infinie.*

*Démonstration.* Pour  $d = 2$ , avec  $p_1 \neq p_2$  on peut supposer que  $p_1 = 0$  et  $p_2 = 1$ , on obtient les deux équations :

$$\begin{aligned} \partial_x(\alpha_2) &= 0 \text{ pour } p_1 = 0, \\ -\partial_x(\alpha_2) + (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2)) + \partial_y(\alpha_1) &= 0 \text{ pour } p_2 = 1. \end{aligned}$$

Comme pour le cas précédent, on a que  $\alpha_2$  est une fonction de la variable  $y$ . La seconde équation est :

$$\partial_x(\alpha_1) + \partial_y(\alpha_1) = \partial_y(\alpha_2)$$

Si les solutions ont la forme générale  $\alpha_1 = \sum_{j,k \geq 0} p_{j,k} x^j y^k$  et  $\alpha_2 = \sum_{j \geq 0} q_j y^j$  alors la dernière équation implique :

$$\forall i \geq 1, \forall j \geq 0, p_{i+1,j}(i+1) + p_{i,j+1}(j+1) = 0,$$

pour  $i = 0, \forall j \geq 1$ ,

$$p_{1,j} + p_{0,j+1}(j+1) = q_{j+1}(j+1).$$

Ces dernières relations définissent les relations sur les coefficients des symétries d'un 2-tissu.  $\square$

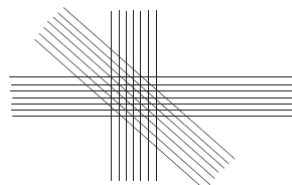
### 17.3.2 Le cas parallèle

Les tissus parallèles, donnés par des feuilletages de droites parallèles, jouent un rôle particulier dans l'étude des tissus, nous allons donc ici calculer le groupe de symétrie de tels tissus après les avoir définis :

**Définition 75** (Tissu parallèle). *Un  $d$ -tissu est dit parallèle s'il est donné par la superposition de  $d$  pincesaux de droites en position générale, écrit sous la forme :*

$$\mathcal{W}(a_1x - b_1y, \dots, a_dx - b_dy)$$

où  $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . L'hypothèse de position générale est équivalente à  $p_i \neq p_j, \forall i \neq j$  où  $p_i = -\frac{a_i}{b_i}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , représentent les pentes du pinceau.



Tissu parallèle

La terminologie de tissu parallèle vient du fait que chaque feuilletage est constitué de droites parallèles.

Les symétries d'un tel tissu sont données par le Lemme suivant :

**Lemme 63.** Soit un  $d$ -tissu parallèle, avec  $d \geq 3$ , défini par les pentes constantes  $p_i(x, y)$   $i = 1, \dots, d$ . Alors son algèbre de Lie des symétries est engendrée par les trois générateurs infinitésimaux :

$$\mathfrak{g} = \{\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y\}.$$

C'est ce Lemme que nous utiliserons plus tard dans la caractérisation de la dimension de l'algèbre de Lie des symétries d'un  $d$ -tissu.

*Démonstration.* Considérons un  $d$ -tissu parallèle avec  $d \geq 3$ , donné par des pentes constantes  $p_i(x, y)$ . Alors le système d'équations du Théorème 26 devient :

$$\begin{cases} -\partial_x(\alpha_2) = 0, \\ \partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2) = 0, \\ \partial_y(\alpha_1) = 0. \end{cases}$$

On peut remarquer que l'on n'a pas besoin de plus de trois équations dans le système ci-dessus même pour  $d \geq 4$ , puisque si l'on écrit le système du Théorème 26 les  $d - 2$  équations sont toutes équivalentes à la condition  $\partial_y(\alpha_1) = 0$  puisque les pentes sont constantes.

Ainsi on a que  $\alpha_2$  est une fonction de la variable  $y$  et  $\alpha_1$  est une fonction ne dépendant que de  $x$ . Si  $\alpha_2$  est de la forme  $\alpha_2(y) = \sum_{j=0}^m q_j y^j$  et  $\alpha_1$  est de la forme  $\alpha_1(x) = \sum_{j=0}^k r_j x^j$  alors on a que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont au plus de degré 1, ainsi  $\alpha_1 = r_0 + x r_1$  et  $\alpha_2 = q_0 + y q_1$ . Comme  $\partial_x(\alpha_1) = \partial_y(\alpha_2)$  on a aussi que  $q_1 = r_1$ . Finalement  $\alpha_1 = r_0 + x r_1$  et  $\alpha_2 = q_0 + y p_1$ .  $\square$

### 17.3.3 Un 3-tissu donné par Élie Cartan

Cet exemple a été donné par A.Hénaut dans [52]. On considère le 3-tissu donné par son polynôme de présentation :

$$P_F(z; x, y) = (z^2 - 1)(z - u(x))$$

où  $u$  est une fonction analytique de  $x$ .

**Lemme 64.** L'algèbre de Lie des symétries du tissu de Cartan est donnée par l'unique champ de vecteurs :

$$\mathfrak{g} = \{\partial_y\}.$$

*Démonstration.* Par définition du tissu, les pentes sont données par :

$$p_1 = 1, p_2 = -1 \text{ et } p_3 = u(x).$$

Une symétrie  $X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(x, y)\partial_y$  de ce 3-tissu doit satisfaire :

$$\begin{cases} -\partial_x(\alpha_2) + (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2)) + \partial_y(\alpha_1) = 0, \\ -\partial_x(\alpha_2) - (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2)) + \partial_y(\alpha_1) = 0, \\ -\partial_x(\alpha_2) + (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2))u + \partial_y(\alpha_1)u^2 + \partial_x(u)\alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Après simplification on obtient :

$$\begin{cases} \partial_x(\alpha_2) = \partial_y(\alpha_1), \\ \partial_x(\alpha_1) = \partial_y(\alpha_2), \\ (u^2 - 1)\partial_y(\alpha_1) + \partial_x(u)\alpha_1 = 0. \end{cases}$$

La dernière équation est équivalente à l'équation différentielle :

$$\frac{\partial_y(\alpha_1)}{\alpha_1} = -\frac{u'(x)}{u(x)^2 - 1}.$$

En résolvant par rapport à la variable  $y$ , on obtient la solution :

$$\alpha_1(x, y) = c(x)e^{-\frac{u'(x)}{u(x)^2 - 1}y},$$

où  $c$  dépend seulement de  $x$ .

On calcule les dérivées aux premier et second ordres par rapport à  $x$  et  $y$  de  $\alpha_1$  :

$$\begin{aligned} \partial_x(\alpha_1) &= B(x, y)\alpha_1, \\ \partial_{x,x}^2(\alpha_1) &= (B^2(x, y) + \partial_x(B(x, y)))\alpha_1, \\ \partial_{y,y}^2(\alpha_1) &= \left(\frac{u'(x)}{u(x)^2 - 1}\right)^2\alpha_1, \end{aligned}$$

où  $B(x, y) = \frac{c'(x)}{c(x)} - \left(\frac{u'(x)}{u(x)^2 - 1}\right)'y$ .

Les équations  $\partial_x(\alpha_1) = \partial_y(\alpha_2)$  et  $\partial_y(\alpha_1) = \partial_x(\alpha_2)$  donnent :

$$\partial_{x,x}^2\alpha_1 - \partial_{y,y}^2\alpha_1 = 0.$$

On a alors :

$$(B(x, y)^2 + \partial_x(B(x, y)) - \left(\frac{u'(x)}{u(x)^2 - 1}\right)^2)\alpha_1 = 0.$$

Pour une fonction  $u = u(x)$  générique, on a  $\alpha_1 = 0$  et  $\partial_y(\alpha_2) = \partial_x(\alpha_2) = 0$ , alors  $\alpha_2$  est une constante.  $\square$

#### 17.3.4 Sur un tissu linéarisable

Dans [67], suite à une série d'articles dans l'optique de la résolution de la conjecture de Blaschke sur la linéarisation des 3-tissus dans  $\mathbb{C}^2$ , l'auteur considère le 3-tissu  $\mathcal{W}_M$  donné par les trois feuilletages

suivant :

$$F_1(x, y) := x, \quad F_2(x, y) := y \text{ et } F_3(x, y) := (x + y)e^{-x}. \quad (17.2)$$

Ce tissu a fait l'objet de nombreux articles concernant sa linéarisation notamment [47] et [48]. Les différents auteurs ont donné des caractérisations des tissus linéarisables via des méthodes différentes et ne donnent pas le même résultat. Dans [? ], l'auteur pour clore la controverse via ce tissu exhibe un biholomorphisme de linéarisation et pour lequel la méthode de Goldbert et al. ne fonctionne pas. Nous proposons ici le calcul de son groupe de symétrie.

Le calcul des pentes du tissu tel que présenté ici fait apparaître des pentes infinies. Il faut donc faire un changement de variables pour rendre possible les calculs des symétries :

**Lemme 65** (Forme préparée du tissu). *Le tissu  $\mathcal{W}_M$  est biholomorphiquement conjugué au tissu donné par les trois feuilletages :*

$$G_1(x, y) := \frac{u - v}{2}, \quad G_2(x, y) := \frac{u + v}{2} \text{ et } G_3(x, y) := ue^{-\frac{u-v}{2}}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le changement de variables suivant :

$$(x, y) \mapsto (x + y, y - x) = (u, v).$$

□

On peut alors calculer le groupe de symétrie du tissu dans son nouveau système de coordonnées :

**Lemme 66.** *L'algèbre de Lie des symétries du tissu  $\mathcal{W}_M$  mis sous forme préparée est donnée par :*

$$\mathfrak{g} = \{\partial_v\}, \quad (17.3)$$

où  $c$  est une constante.

*Démonstration.* Le calcul des trois pentes associées aux feuilletages donne :

$$p_1 = 1, \quad p_2 = -1 \text{ et } p_3 = \frac{u - 2}{u}.$$

En introduisant ces pentes dans les équations définissant les symétries, on obtient le système :

$$\begin{cases} \partial_u \alpha_2 = \partial_v \alpha_1, \\ \partial_v \alpha_2 = \partial_u \alpha_1, \\ -2\alpha_1 + (4u - 4)\partial_v \alpha_1 = 0. \end{cases} \quad (17.4)$$

En résolvant la troisième équation par rapport à  $v$ , on obtient :

$$\alpha_1(u, v) = c(u)e^{\frac{v}{2(u-1)}},$$

où  $c(u)$  est une fonction qui dépend de  $u$ .

Il faut maintenant vérifier les deux premières équations du système. En intégrant de la même manière  $\alpha_2$ , par rapport à  $v$ , on obtient :

$$\alpha_2 = \alpha_1 \times \left( 2 - \frac{v}{u-1} \right) + 2c'(u)(u-1)e^{\frac{v}{2(u-1)}} + c,$$

où  $c$  est une constante.

Nous allons procéder maintenant de la même façon que pour le tissu de Clairaut en étudiant les dérivées secondes de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  puisque l'on a :

$$\partial_u^2 \alpha_1 = \partial_v \alpha_1,$$

et de même pour  $\alpha_2$ . Cela nous amène à considérer en dérivant deux fois l'équation différentielle :

$$\alpha_1 \times \left[ \frac{1}{4(u-1)^2} - \partial_u \beta - \beta^2 \right] = 0,$$

où  $\beta$  est donné par  $\beta = \frac{c'(u)}{c(u)} - \frac{v}{2(u-1)^2}$ .

Donc soit  $\alpha_1 = 0$  soit le second membre est nul.

Or il est impossible que le second membre soit nul du fait des degrés en  $u$  et  $v$ . Donc  $\alpha_1 = 0$  et on récupère une unique symétrie  $c\partial_v$ .  $\square$

On peut conclure en vertu de la Proposition 9 que l'algèbre de Lie des symétries du tissu sous forme préparée étant isomorphe à celle de  $\mathcal{W}_M$ , cette dernière ne compte qu'une unique symétrie.

## 17.4 Régularité des symétries et tissu de Clairaut

Dans cette section, nous nous intéressons au **tissu de Clairaut** où l'on voit que la classe de régularité des symétries, i.e. la classe de régularité des champs définissant l'algèbre de Lie associée, peut être différente de la régularité du tissu lui-même. Un phénomène analogue apparaît dans l'étude des cycles limites de champs de vecteurs analytiques du plan. Ces cycles ne sont en général pas analytiques (voir en particulier [54]).

### 17.4.1 Tissu de Clairaut

Le tissu de Clairaut étudié par Hénaut [52] est un 3-tissu défini les submersions  $F_1(x, y) := y - x$ ,  $F_2(x, y) := x + y$  et  $F_3(x, y) := \frac{y}{x}$ . Les trois pentes associées sont  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 1$  et  $p_3 = \frac{y}{x}$ .

Le groupe de symétrie est donné par (voir [52]) :

**Lemme 67.** *L'algèbre de Lie des symétries du 3-tissu de Clairaut défini par les submersions  $F_1 = y - x$ ,*

$F_2 = y + x$  et  $F_3 = \frac{y}{x}$  est de dimension 3 et engendrée par les champs de vecteurs :

$$\{x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x + x\partial_y, \left(x\ln(|x^2 - y^2|) + y\ln\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|\right)\right)\partial_x + \left(y\ln(|x^2 - y^2|) + x\ln\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|\right)\right)\partial_y\}.$$

Nous donnons ici une démonstration détaillée de ce résultat.

*Démonstration.* D'après le théorème 26, les symétries sont données par :

$$\begin{cases} \partial_x(\alpha_2) + \partial_y(\alpha_2) - \partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_1) = 0, \\ \partial_x(\alpha_2) - \partial_y(\alpha_2) + \partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_1) = 0, \\ -x^2\partial_x(\alpha_2) + xy(\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2)) + y^2\partial_y(\alpha_1) - y\alpha_1 + x\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Après simplification par combinaisons linéaires de lignes, le système devient :

$$\begin{cases} \partial_x(\alpha_2) = \partial_y(\alpha_1), \\ \partial_y(\alpha_2) = \partial_x(\alpha_1), \\ -x^2\partial_x(\alpha_2) + y^2\partial_y(\alpha_1) - y\alpha_1 + x\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Les deux premières lignes donnent :

$$\begin{aligned} \partial_{x,x}^2(\alpha_1) - \partial_{y,y}^2(\alpha_1) &= 0, \\ \partial_{x,x}^2(\alpha_2) - \partial_{y,y}^2(\alpha_2) &= 0. \end{aligned}$$

Dans la classe des solutions polynomiales, une solution sera de la forme :  $X = (p_1 + q_1x + r_1y)\partial_x + (p_2 + q_2x + r_2y)\partial_y$ .

L'équation  $\partial_x(\alpha_2) = \partial_y(\alpha_1)$  implique  $q_2 = r_1$  et  $\partial_y(\alpha_2) = \partial_x(\alpha_1)$ , d'où  $r_2 = q_1$ . En utilisant ces conditions dans la troisième équation on obtient  $p_2 - p_1y = 0$  et donc  $p_2 = p_1 = 0$ . Ainsi une symétrie  $X$  est de la forme  $X = (q_1x + r_1y)\partial_x + (r_1x + q_1y)\partial_y$ . Comme  $q_1$  et  $r_1$  sont des coefficients indépendants, une symétrie peut être générée par les deux champs suivants :

$$X = x\partial_x + y\partial_y \text{ et } X' = y\partial_x + x\partial_y.$$

Un résultat classique sur les équations aux dérivées partielles donne la forme générale d'une solution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre ci-dessus :

$$\alpha_i = f_i(x + y) + g_i(x - y), \quad i = 1, 2,$$

où  $f$  et  $g$  sont analytiques.

Les deux premières équations de symétries impliquent :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= f(x + y) + g(x - y), \\ \alpha_2 &= f(x + y) - g(x - y), \end{aligned}$$

avec  $f = f_1 = f_2$  et  $g = g_1 = g_2$ . La troisième équation devient :

$$(y - x) ((x + y)f'(x + y) - f(x + y)) + (x + y) ((x - y)g'(x - y) - g(x - y)) = 0.$$

Si  $y = x$ , on obtient  $xg(0) = 0$  donc  $g(0) = 0$  et  $g$  est de la forme  $g(v) = vG(v)$  avec  $v = x - y$  et  $G$  est une fonction de  $v$  sans terme constant. De la même manière en prenant  $y = -x$  on obtient  $f(t) = tF(t)$  avec  $t = x + y$  et  $F$  une fonction de la variable  $t$ .

On a donc :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (x + y)F(x + y) + (x - y)G(x - y), \\ \alpha_2 &= (x + y)F(x + y) - (x - y)G(x - y).\end{aligned}$$

En remplaçant dans la deuxième équation et en posant  $t = x + y$  et  $v = x - y$ , on a :

$$tF'(t) + vG'(v) = 0,$$

ainsi  $tF'(t) = c$  et  $vG'(v) = -c$  où  $c$  est une constante dans  $\mathbb{C}$ . En résolvant ces équations différentielles, on a :

$$F(t) = c \ln(|t|) \text{ et } G(v) = -c \ln(|v|).$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (x + y)\ln(|x + y|) + (x - y)\ln(|x - y|), \\ &= x\ln(|x^2 - y^2|) + y\ln\left(\left|\frac{x + y}{x - y}\right|\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= (x + y)\ln(|x + y|) - (x - y)\ln(|x - y|), \\ &= y\ln(|x^2 - y^2|) + x\ln\left(\left|\frac{x + y}{x - y}\right|\right).\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. □

### 17.4.2 Autour des théorèmes de type Maillet

Le calcul des symétries des tissus fait apparaître des fonctions qui sortent de la classe analytique mais sont dans le même temps restreintes, au moins dans les exemples explicites qui ont été étudiés. A. Hénaut pense qu'il est possible de préciser cette classe. Nous n'avons pas trouvé de résultats concernant la nature des symétries. Cependant, celle-ci est déterminée par la nature des équations aux dérivées partielles que nous résolvons. Le problème de la caractérisation des symétries d'un tissu se ramène donc à celle des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles dont les coefficients sont analytiques.

Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux.



Une piste de recherche est d'utiliser les généralisations des théorèmes de Maillet sur la nature des solutions formelles d'équations différentielles algébriques. En effet, Maillet [60] démontre en 1903 que les solutions de ces équations sont de classe Gevrey. Par la suite, ce résultat a été étendu aux équations différentielles analytiques par Gérard [43] et Malgrange [62].

Le cas des équations aux dérivées partielles est plus compliqué car il faut préciser la nature des conditions aux bords ou des conditions initiales qui peuvent être a priori choisies dans des classes non Gevrey. C'est ce qui est fait par exemple dans l'article de Gérard et Tahara [44]. On renvoie à [45] pour plus de détails.

## 17.5 Dimension du groupe de symétries d'un tissu

La dimension du groupe de symétries d'une équation différentielle joue un rôle particulier dans leur linéarisabilité. On rappelle ici le théorème classique sur la dimension des  $d$ -tissus pour  $d \geq 3$  obtenu par Hénaut dans [52] via la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules, et qui énonce que l'algèbre des symétries est de dimension 0, 1 ou 3. Dans la suite, en suivant la démonstration initiale, nous expliquons la disparition de la dimension 2. On illustre ce théorème dans le cas du tissu de Zariski en donnant une démonstration détaillée du résultat obtenu par Hénaut ([52], exemple 3 p.14) et celui du tissu hexagonal standard.

### 17.5.1 Un théorème d'Alain Hénaut

Le théorème suivant est énoncé dans l'article d'A. Hénaut ([52, Proposition 1]) et montre que la dimension du groupe de symétries tissu est bornée :

**Théorème 28.** *L'algèbre de Lie des symétries d'un  $d$ -tissu, avec  $d \geq 3$ , a pour dimension 0, 1 ou 3.*

La finitude de la dimension semble être connue depuis les travaux de E. Cartan [12], cependant A. Hénaut dans son article réalise le calcul explicite des dimensions.

Le point troublant est la disparition de la dimension 2 dans la liste des dimensions autorisées. La démonstration donnée par Hénaut dans ([52, p.8]) fait appel à la théorie des  $\mathcal{D}$ -module. Néanmoins, la partie permettant d'exclure la dimension 2 est élémentaire et peut se réduire au lemme suivant :

**Lemme 68.** *L'algèbre de Lie des symétries d'un  $d$ -tissu,  $d \geq 3$ , ne peut pas être de dimension 2.*

*Démonstration.* Supposons que cette algèbre soit engendrée par deux champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$ . En tout point non singulier, il est possible de redresser simultanément les deux champs de façon à avoir  $X_1 = \partial_x$  et  $X_2 = \partial_y$ . En réintroduisant dans le système 17.1, on a :

$$\partial_x(p_i) = 0, \partial_y(p_i) = 0.$$

Ainsi les pentes  $p_i$  sont constantes, ce qui correspond à un tissu parallélisable. Or la dimension de son algèbre de Lie des symétries est 3 d'après le Lemme 63. On a donc une contradiction puisque deux équations différentielles équivalentes ont des groupes de symétries isomorphes (voir Proposition 9, chapitre 16) et ont en particulier la même dimension.  $\square$

### 17.5.2 Le tissu de Zariski

Nous allons voir à travers l'exemple du tissu de Zariski défini implicitement par :

$$F(x, y, p) = p^3 + x^m y^n. \quad (17.5)$$

que la description de l'algèbre de Lie varie en fonction des paramètres  $m$  et  $n$ .

L'équation définissant le tissu admet la factorisation suivante :

$$F(x, y, p) = (p + x^{\frac{m}{3}} y^{\frac{n}{3}})(p - e^{\frac{i\pi}{3}} x^{\frac{m}{3}} y^{\frac{n}{3}})(p - e^{-\frac{i\pi}{3}} x^{\frac{m}{3}} y^{\frac{n}{3}}).$$

Le Lemme suivant est donné sans démonstration dans ([52, Exemple 3 p.14]) :

**Lemme 69.** *Le 3-tissu de Zariski défini implicitement par  $F(x, y, p) = p^3 + x^m y^n$  admet les algèbres de Lie des symétries de dimension 3 définies par :*

- $\mathfrak{g} = \{x^{-m/3}\partial_x, y^{n/3}\partial_y, x(-n+3)\partial_x + y(3+m)\partial_y\}$  si  $n \neq 3$ ,
- $\mathfrak{g} = \{x^{-m/3}\partial_x, y\partial_y, \frac{3x}{m+3}\partial_x + y\ln(y)\partial_y\}$  si  $n = 3$ .

Comme nous l'avons déjà constaté, la classe des fonctions mise en jeu pour exprimer ces symétries est très particulière.

*Démonstration. Réduction du système.* Une symétrie  $X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(x, y)\partial_y$  doit satisfaire le système composé des trois équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\partial_x(\alpha_2) - (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2))x^{\frac{m}{3}}y^{\frac{n}{3}} + \partial_y(\alpha_1)x^{\frac{2m}{3}}y^{\frac{2n}{3}} - \frac{m}{3}x^{\frac{m}{3}-1}y^{\frac{n}{3}}\alpha_1 - \frac{n}{3}x^{\frac{m}{3}}y^{\frac{n}{3}-1}\alpha_2 = 0, \\ (2) \quad & -\partial_x(\alpha_2) + (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2))e^{\frac{i\pi}{3}}x^{\frac{m}{3}}y^{\frac{n}{3}} + \partial_y(\alpha_1)e^{\frac{i2\pi}{3}}x^{\frac{2m}{3}}y^{\frac{2n}{3}} + \\ & + \frac{m}{3}e^{\frac{i\pi}{3}}x^{\frac{m}{3}-1}y^{\frac{n}{3}}\alpha_1 + \frac{n}{3}e^{\frac{i\pi}{3}}x^{\frac{m}{3}}y^{\frac{n}{3}-1}\alpha_2 = 0, \\ (3) \quad & -\partial_x(\alpha_2) + (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2))e^{-\frac{i\pi}{3}}x^{\frac{m}{3}}y^{\frac{n}{3}} + \partial_y(\alpha_1)e^{-\frac{i2\pi}{3}}x^{\frac{2m}{3}}y^{\frac{2n}{3}} + \\ & + \frac{m}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}x^{\frac{m}{3}-1}y^{\frac{n}{3}}\alpha_1 + \frac{n}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}x^{\frac{m}{3}}y^{\frac{n}{3}-1}\alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

L'opération  $(2) + e^{\frac{i\pi}{3}}(1)$ ,  $(3) + e^{-\frac{i\pi}{3}}(1)$  donne le système équivalent :

$$\begin{aligned} \partial_x(\alpha_2) &= 0, \\ \partial_y(\alpha_1) &= 0, \\ (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2))x^{\frac{m}{3}}y^{\frac{n}{3}} + \frac{m}{3}x^{\frac{m}{3}-1}y^{\frac{n}{3}}\alpha_1 + \frac{n}{3}x^{\frac{m}{3}}y^{\frac{n}{3}-1}\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

**Recherche des solutions.** Les deux premières conditions impliquent que  $\alpha_1 = \alpha_1(x)$  et  $\alpha_2 = \alpha_2(y)$ . La dernière équation peut se mettre sous la forme

$$\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2) + \frac{m}{3x}\alpha_1 + \frac{n}{3y}\alpha_2 = 0,$$

en dehors de  $xy = 0$ . On a deux équations différentielles à résoudre suivant que l'on recherche  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$ . Précisément, pour  $\alpha_1$ , on a

$$\partial_x(\alpha_1) + \frac{m}{3x}\alpha_1 + b(y) = 0,$$

avec  $b(y) = -\partial_y(\alpha_2) + \frac{n}{3y}\alpha_2$ .

De manière symétrique, on a

$$\partial_y(\alpha_2) - \frac{n}{3y}\alpha_2 + d(x) = 0,$$

avec  $d(x) = \partial_x(\alpha_1) + \frac{m}{3x}\alpha_1$ .

On note qu'il suffit de savoir résoudre une équation différentielle de la forme

$$z' + a\frac{z}{t} + b = 0,$$

pour  $z(t)$ . Les solutions pour  $a \neq -1$  sont de la forme

$$z(t) = ct^{-a} + \frac{b}{a+1}t,$$

et pour  $a = -1$  sont données par

$$z(t) = -bt \ln(t) + ct.$$

Pour la résolution de  $\alpha_1$ , la condition  $a = m/3 \neq 1$  est toujours satisfaite et nous avons donc

$$\alpha_1(x) = \mu x^{-m/3} + \delta \frac{3x}{m+3},$$

ce qui donne  $d(x) = \delta$ . Pour la composante  $\alpha_2$ , on doit distinguer suivant le cas  $a = -n/3$  égale à  $-1$  ou non, c'est à dire  $n \neq 3$  ou  $n = 3$ . Pour  $n \neq 3$ , on obtient

$$\alpha_2(y) = \gamma y^{n/3} + \frac{3\delta}{3-n}y,$$

et par

$$\alpha_2(y) = -\delta y \ln(y) + \gamma y$$

si  $n = 3$ . On obtient donc si  $n \neq 3$ , des champs de la forme

$$X = \mu(x^{-m/3}, 0) + \gamma(0, y^{n/3}) + \mu(x(-n+3), y(m+3))$$

si  $n \neq 3$  et

$$X = \mu(x^{-m/3}, 0) + \gamma(0, y^{n/3}) + \mu\left(\frac{3x}{m+3}, y \ln(y)\right),$$

ce qui termine la démonstration. □

### 17.5.3 Groupe des symétries d'un tissu hexagonal standard

En suivant [2], p.2, on introduit une classe particulière de 3-tissus dits *hexagonaux*. On va se placer dans  $(\mathbb{C}^2, 0)$  mais la construction reste valide pour  $(\mathbb{R}^2, 0)$ .

**Définition 76.** *Un 3-tissu dans  $(\mathbb{C}^2, 0)$  est dit hexagonal si tout hexagone suffisamment petit autour de 0 et passant par une feuille de chaque feuilletage est fermé.*

Le 3-tissu hexagonal le plus simple est celui donné par les feuilletages  $F_1(x, y) = x$ ,  $F_2(x, y) = y$  et  $F_3(x, y) = x + y$ . Cependant, comme pour la section "Sur un tissu linéarisation", 17.3.4, le calcul des pentes fait encore intervenir une pente infinie. Nous allons donc présenter le tissu dans un nouveau système de coordonnées pour effectuer le calcul des symétries.

**Lemme 70** (Mise sous forme préparée). *Le tissu hexagonal donné par  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  est biholomorphiquement conjugué au tissu donné par les feuilletages :*

$$G_1(x, y) = x + y, \quad G_2(x, y) = y - x \quad \text{et} \quad G_3(x, y) = y.$$

*Démonstration.* On utilise à nouveau le changement de variables  $u = x + y$ ,  $v = y - x$ . □

On peut alors calculer le groupe de symétrie du tissu dans son nouveau système de coordonnées :

**Lemme 71.** *L'algèbre de Lie des symétries de ce tissu hexagonal défini par les submersions  $G_1(x, y) = x + y$ ,  $G_2(x, y) = y - x$  et  $G_3(x, y) = y$  est engendrée par :*

$$\mathfrak{g} = \{\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y\}.$$

*Démonstration.* Les trois pentes  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = 1$  et  $p_3 = 0$ , ainsi que les trois champs de vecteurs  $X_1 = \partial_x - \partial_y$ ,  $X_2 = \partial_x + \partial_y$  et  $X_3 = \partial_x$ .

Pour trouver les symétries de ce tissu, on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -\partial_x(\alpha_2) - \partial_x(\alpha_1) + \partial_y(\alpha_2) + \partial_y(\alpha_1) = 0, \\ -\partial_x(\alpha_2) + \partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2) + \partial_y(\alpha_1) = 0, \\ \partial_x(\alpha_2) = 0. \end{cases}$$

La troisième équation implique que  $\alpha_2 = \alpha_2(y)$  est une fonction de la variable  $y$ . La résolution implique que  $\alpha_1$  ne dépend que de la variable  $x$ . Enfin la condition  $\partial_x(\alpha_1) = \partial_y(\alpha_2)$  implique :

$$\alpha_1 = p + qx \quad \text{et} \quad \alpha_2 = p' + qy,$$

où  $p, p', q$  sont des constantes. En séparant en fonction de constantes indépendantes, on obtient les trois générateurs. □



## Chapitre 18

# Arrangement de droites et tissus algébriques

Dans ce chapitre, on passe en revue plusieurs résultats (sans leurs démonstrations) énoncés dans [71] ou [2] sur les tissus algébriques et hexagonaux. Ces classes de tissus sont particulièrement intéressantes pour faire le lien avec la géométrie des arrangements de droites ainsi que pour la linéarisation de tissus. On s'intéresse notamment aux relations abéliennes d'un tissu qui s'interprète comme des intégrales premières globales de ce dernier.

### 18.1 Arrangements de droites de $\mathbb{P}^2$ et tissus algébriques

On rappelle la définition de **tissus algébriques** donnée par [2]. Ces tissus nous permettront de faire le lien entre la géométrie des tissus et les arrangements de droites.

**Définition 77.** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe algébrique de degré  $d$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^n$  réel ou complexe. On suppose que cette courbe n'est pas incluse dans un hyperplan.

Soit  $U$  un ouvert dans le dual de  $(\mathbb{P}^n)^*$ , un point  $\xi$  de  $U$  est un hyperplan de  $\mathbb{P}^n$ , dont l'intersection avec  $\mathcal{C}$  est donnée par  $d$  points  $p_1(\xi), \dots, p_d(\xi)$  que l'on peut supposer distincts.

Par dualité ces points correspondent à  $d$  hyperplans dans  $(\mathbb{P}^n)^*$  passant par  $\xi$ . Chacun de ces hyperplans correspond à une feuille d'un feuilletage définissant un tissu.

Un tissu construit sur ce procédé est dit algébrique.

Le cas qui va nous intéresser est celui pour  $n = 2$  où l'on a une correspondance avec les arrangements de droites et la **conjecture de Terao**. On pourra consulter [70].

A l'image de la linéarisation, on définit l'algébrisation d'un tissu par :

**Définition 78.** Un tissu est algébrisable s'il est équivalent à un tissu algébrique.

Dans les sections suivantes, nous rappellerons des résultats liant l'algébrisation et la linéarisation des tissus. Ces résultats reposent sur des théorèmes dits d'Abel que nous n'exposerons pas ici et sur la notion fondamentale de relation abélienne et de rang d'un tissu.

## 18.2 Relations abéliennes et rang d'un tissu

Un des invariants classique d'un tissu est le rang introduit depuis [4]. Cette notion de rang fait intervenir des relations dites **abéliennes** entre les différents feuilletages. Elles expriment des relations entre les normales de chaque feuille du tissu.

**Définition 79.** Une relation abélienne d'un tissu  $\mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  est une relation de la forme :

$$\sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0,$$

où  $g_i \in \mathbb{C}\{t\}$  sont des germes de fonctions analytiques.

Ces relations sont des équations fonctionnelles additives parmi les *intégrales premières* d'un tissu. En particulier, si pour chaque champ de vecteurs  $X_i$  définissant le tissu on a une intégrale première  $g_i$  et  $x_i(t)$  est une solution de l'équation différentielle associée au champ  $X_i$ . Alors on peut construire une intégrale première globale  $g(x_1(t), \dots, x_d(t)) = \sum_{i=1}^d g_i(x_i(t))$ .

**Exemple 17.** i) Considérons le 3-tissu défini par les submersions  $F_1(x, y) = x$ ,  $F_2(x, y) = y$  et  $F_3(x, y) = x + y$ . Une relation abélienne de ce tissu est :

$$dx + dy - d(x + y) = 0.$$

ii) Soit le 3-tissu défini par les submersions  $F_1(x, y) = x$ ,  $F_2(x, y) = y$  et  $F_3(x, y) = \frac{y}{x}$ . Alors on a la relation abélienne suivante :

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy + \frac{x}{y}d\left(\frac{y}{x}\right).$$

On peut définir l'espace des relations abéliennes d'un tissu donné qui est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , noté  $\mathcal{A}(d)$ , définis par :

**Définition 80.** Pour tout tissu  $\mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , on définit le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{A}(d) = \{(g_1(F_1), \dots, g_d(F_d)) \in (\mathbb{C}^\omega)^d, \text{ tel que } (g_i)_{i=1, \dots, d} \in \mathbb{C}\{t\} \text{ et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0\}. \quad (18.1)$$

On peut définir un invariant discret, le dimension de  $\mathcal{A}(d)$ , que l'on appellera le **rang** du tissu :

**Définition 81.** Le rang d'un  $d$ -tissu  $\mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  est la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{A}(d)$ . On le note  $rk(\mathcal{W})$ .

Des résultats classiques sur les tissus montre que le rang est borné, précisément :

**Proposition 11.** Pour tout tissu  $\mathcal{W}(F_1, \dots, F_d)$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , son rang est borné. La majoration est donnée par :

$$rk(\mathcal{W}) \leq \pi(d, n) = m(d - 1 - \frac{1}{2}(m + 1)(n - 1)), \quad (18.2)$$

où  $m$  est la partie entière de  $\frac{d-1}{n-1}$ . La quantité  $\pi(d, n)$  est le nombre de Castelnuovo.

En particulier, pour les tissus du plan on a la majoration suivante :

$$rk(\mathcal{W}) \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

La borne ici correspond en fait au genre géométrique d'une courbe algébrique.

Dans  $\mathbb{C}^2$ , le rang d'un 3-tissu linéaire est borné par 1. Par contre pour un 4-tissu linéaire dans  $\mathbb{P}^2$ , on a  $\pi(4, 2) = 2$  et on doit donc avoir  $rk(\mathcal{W}) \leq 2$ .

Une question naturelle est donc de savoir quels sont les tissus qui réalisent cette borne. Autrement, pour quels tissus a-t-on une égalité et non une inégalité entre le rang et le nombre de Castelnuovo. Les tissus tels que  $rk(\mathcal{W}) = \pi(d, n)$  sont appelés **tissus de rang maximal**. Dans ce cas, pour  $d = 3$ , on a  $rk(\mathcal{W}) = 1$  et pour  $d = 4$ , on a  $rk(\mathcal{W}) = 3$ .

### 18.3 Algébrisation et linéarisation de tissus

Dans cette partie, on redonne des critères et caractérisations de tissus algébriques et tissus linéarisables.

La première proposition est donnée dans [72, Corollaire 4.1.3, p.102] et caractérise les tissus algébrique en fonction du rang :

**Proposition 12** (Tissu algébrique). *Soit un  $d$ -tissu linéaire de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ . Si son rang est maximal alors il est algébrique.*

La proposition suivante donnée dans [72, Corollaire 4.1.4, p.102] établit le lien entre tissus algébrifiables et tissus linéarisables.

**Proposition 13.** *Un  $d$ -tissu de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  de rang maximal est algébrisable si et seulement il est linéarisable.*

Ce résultat permet le transfert entre les deux notions. Encore une fois l'hypothèse de rang maximale est importante.

On donne enfin un dernier résultat sur l'algébrisation des tissus donné dans [72, Chapitre 5, p.121]

**Théorème 29.** *Soient  $n \geq 3$  et  $d \geq 2n$ . Si un  $d$ -tissu est de rang maximal dans  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , alors il est algébrisable.*

Ces différents résultats reposent sur des théorèmes d'Abel et sont tous démontrés dans [72]. Ils permettent de relier les différentes notions d'algébrisation et linéarisation.

Cependant, il existe des tissus dit **exceptionnels** ou **remarquables** qui sont de rang maximal mais pourtant non linéarisables ou algébrifiables. C'est notamment le cas du tissu de Bol qui est un 5-tissu dans  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Ici c'est la dimension 2 qui ne satisfait pas les hypothèses du précédent théorème. Nous renvoyons le lecteur aux différents ouvrages et travaux sus-cités pour plus de détails.



## 18.4 Caractérisation des 3-tissus hexagonaux

Dans le cas des 3-tissus de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , A. Hénaut rappelle dans [52] le théorème suivant qu'il nomme "Certificat de naissance des tissus du plan" :

**Théorème 30.** *Pour un 3-tissu non singulier  $\mathcal{W}$  dans  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $rk(\mathcal{W}) = 1$ ,*
- ii)  $\mathcal{W}$  est conjugué à  $\mathcal{W}(x, y, x + y)$ ,*
- iii)  $\mathcal{W}$  est hexagonal,*
- iv)  $dim(\mathfrak{g}) = 3$ .*

Notons que *ii)* implique *iii)* car la propriété d'être hexagonal pour un tissu est préservée par conjugaison. De même, elle implique directement que la dimension de l'algèbre de Lie des symétries d'un tissu hexagonal est égal à 3 par la Proposition 9.

On trouvera la démonstration de ce théorème dans [4] ou [72].

## Chapitre 19

# Symétrie d'un tissu et module de dérivations de la courbe discriminante du polynôme de présentation

Après quelques rappels sur la théorie classique de Darboux sur l'intégrabilité, on passe en revue les liens entre symétries et module de dérivations associé à un tissu via la courbe discriminante du polynôme de présentation. Certains de ces résultats ont été obtenus par A. Hénaut dans [52]. Nous les replaçons dans le cadre dynamique qui nous intéresse.

On conclura ce chapitre avec le cas particulier des arrangement de droites.

Dans ce chapitre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 19.1 Autour du Théorème de Darboux

Dans cette section, on rappelle des résultats classiques sur la théorie de Darboux sur l'intégrabilité de champs de vecteurs polynomiaux. On renvoie à [54] pour plus de détails.

Soit un champ de vecteurs  $X = \sum_{i=1}^d f_i(x) \partial_{x_i}$  dans  $\mathbb{K}^d$  avec  $f_i(x) \in \mathbb{K}[x]$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d)$ .

**Définition 82.** Une courbe algébrique  $\mathcal{C}$  définie par  $\{g = 0\}$  avec  $g \in \mathbb{K}[x]$  est dite invariante par le champ de vecteurs  $X$  s'il existe un polynôme  $K \in \mathbb{K}[x]$  tel que :

$$X(g) = K.g.$$

Le polynôme  $K$  est appelé cofacteur de la courbe. Une courbe est dite polynôme de Darboux pour le champ  $X$  s'il existe un cofacteur.

**Théorème 31.** Soit  $g \in \mathbb{K}[x]$  un polynôme écrit sous forme irréductible  $g = g_1^{n_1} \cdots g_r^{n_r}$  dans  $\mathbb{K}[x]$ . Le champ de vecteurs  $X$  admet la courbe  $\mathcal{C} = \{g = 0\}$  comme courbe invariante avec un cofacteur noté  $K_g$  si et seulement si chaque courbe  $\mathcal{C}_i = \{g_i = 0\}$  est invariante avec un cofacteur  $K_{f_i}$  tel que :

$$K_g = n_1 K_{g_1} + \cdots + n_r K_{g_r}.$$

*Démonstration.* Bien entendu si chaque courbe  $\{g_i = 0\}$  est invariante de cofacteur  $K_{g_i}$ , on a par application de la règle de Leibniz que  $g_1^{n_1} \cdots g_r^{n_r}$  est une courbe invariante de cofacteur  $n_1 K_{g_1} + \cdots + n_r K_{g_r}$ .

La réciproque se démontre par récurrence sur le nombre de courbes. Donnons l'idée de la preuve pour deux courbes algébriques. Soient  $\{g_1 = 0\}$  et  $\{g_2 = 0\}$  deux courbes algébriques avec  $g_1$  et  $g_2$  premiers entre eux.

Un champ de vecteurs étant une dérivation et donc vérifiant la règle de Leibniz on a :

$$X(g_1 g_2) = X(g_1)g_2 + g_1 X(g_2).$$

Si la courbe  $\{g_1 g_2 = 0\}$  est invariante, on a  $X(g_1 g_2) = K_{g_1 g_2} g_1 g_2$ . Donc, si  $X(g_1)g_2 + g_1 X(g_2) = K_{g_1 g_2} g_1 g_2$  puisque  $g_1$  et  $g_2$  sont premiers entre eux,  $g_1$  divise  $X(g_1)$  et  $g_2$  divise  $X(g_2)$ .

Notons  $g_i$  les polynômes tels que  $K_{g_i} = \frac{X(g_i)}{g_i}$ .

Alors  $g_1$  et  $g_2$  sont des courbes algébriques invariantes. Comme  $X(g_1 g_2) = K_{g_1} g_1 g_2 + K_{g_2} g_1 g_2 = (K_{g_1} + K_{g_2}) g_1 g_2$ , on doit avoir :

$$K_{g_1 g_2} = K_{g_1} + K_{g_2}.$$

L'extension au cas de  $n$  courbes s'effectue sans problèmes. □

Le Théorème classique suivant, appelé Théorème de Darboux, donne une interprétation dynamique de l'invariance en particulier en terme d'intégrabilité grâce à l'existence de courbes algébriques invariantes.

**Théorème 32** (Théorème de Darboux). *Soit un champ de vecteurs  $X = P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y$  où  $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ . Le degré du champ  $X$  est  $m = \max(\deg(P(x, y)), \deg(Q(x, y)))$ . Supposons que  $X$  admet  $p$  courbes algébriques irréductibles invariantes  $\{g_i = 0\}$  de cofacteurs  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ .*

*i) Il existe  $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, p} \subset \mathbb{K}$ ,  $\lambda_i$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i = 0$  si et seulement si  $g_1^{\lambda_1} \dots g_p^{\lambda_p}$  est une intégrale première de  $X$ .*

*ii) Si  $p \geq \frac{m(m+1)}{2} + 1$ , alors il existe  $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, p} \subset \mathbb{K}$ ,  $\lambda_i$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i = 0$ .*

*Démonstration.* i) On rappelle qu'une fonction  $f$  est une intégrale première du champ de vecteurs  $X$  si  $X.f = 0$ .

On applique  $X$  à  $g_1^{\lambda_1} \dots g_p^{\lambda_p}$  en utilisant le fait que  $g_i$  est invariant par  $X$ , on a alors :

$$\begin{aligned} X.g_1^{\lambda_1} \dots g_p^{\lambda_p} &= \sum_{i=1}^p X(g_i^{\lambda_i}) g_1^{\lambda_1} \dots \hat{g}_i^{\lambda_i} \dots g_p^{\lambda_p} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i K_i g_1^{\lambda_1} \dots \hat{g}_i^{\lambda_i} \dots g_p^{\lambda_p} \\ &= g_1^{\lambda_1} \dots g_p^{\lambda_p} \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i K_i \right) \end{aligned}$$

où  $\hat{g}_i^{\lambda_i}$  signifie que le  $i^{\text{ème}}$  terme est omis.

Ainsi si  $g_1^{\lambda_1} \dots g_p^{\lambda_p}$  est une intégrale première de  $X$ , on a  $g_1^{\lambda_1} \dots g_p^{\lambda_p} \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i K_i \right) = 0$  et il existe  $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, p} \subset$

$\mathbb{K}, \lambda_i$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i = 0$ .

Pour la réciproque, s'il existe  $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,p} \subset \mathbb{K}, \lambda_i$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i = 0$  alors  $X.g_1^{\lambda_1} \dots g_p^{\lambda_p} = 0$  et  $g_1^{\lambda_1} \dots g_p^{\lambda_p}$  est une intégrale première de  $X$ .

ii) Comme  $X$  est de degré  $m$ , le degré d'un cofacteur  $K_i$  est au plus égal à  $m - 1$ .

On remarque alors que la dimension en tant qu'espace vectoriel de  $\mathbb{K}[x, y]$  est égale à  $\frac{m(m+1)}{2}$ . On a donc  $p$  polynômes  $K_i$  avec  $p > \frac{m(m+1)}{2}$  alors les polynômes  $K_i$  sont linéairement dépendants, autrement dit, il existe  $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,p} \subset \mathbb{K}, \lambda_i$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i = 0$ .  $\square$

## 19.2 Groupe de symétries d'un tissu et facteurs intégrants

Dans cette courte section, nous rappelons la notion de **facteurs intégrants** d'une équation différentielle. On montre que les générateurs infinitésimaux d'une équation différentielle fournissent des facteurs intégrants.

Soit un système différentiel dans  $\mathbb{K}^2$  :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (19.1)$$

où  $f, g : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ .

On se demande si ce système différentiel est intégrable, i.e. existe-il une fonction  $H : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$  qui soit constante sur les solutions ?

Si la réponse est négative, on cherche alors une transformation qui le ramène à un système Hamiltonien.

**Définition 83.** Soit un système différentiel de la forme de (S). Un facteur intégrant de (S) est une fonction  $R : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$  telle que :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = R(x, y)f(x, y), \\ \dot{y} = R(x, y)g(x, y), \end{cases} \quad (19.2)$$

soit Hamiltonien.

Cela signifie qu'il existe  $H : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$  telle que :

$$R(x, y)f(x, y) = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \text{ et } R(x, y)g(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}. \quad (19.3)$$

Cela revient à rendre l'équation différentielle écrite sous forme pfaffienne  $f(x, y)dy - g(x, y)dx = 0$  exacte.

Alors  $H(x, y) = \int_a^y R(x, \tilde{y})f(x, \tilde{y})\tilde{y} + h(x)$  avec  $h$  telle que 19.3 soit vérifié est une intégrale première du système différentiel initial (S).

L'existence d'un groupe de symétrie assure l'existence d'un facteur intégrant (voir [68, Théorème 2.48., p. 135]) :

**Théorème 33.** Soit une équation différentielle  $Pdx + Qdy = 0$ . Supposons qu'il existe un groupe de

symétrie à un paramètre de générateur infinitésimal  $v = \xi\partial_x + \phi\partial_y$ . Alors la fonction :

$$R(x, y) = \frac{1}{\xi(x, y)P(x, y) + \phi(x, y)Q(x, y)}, \quad (19.4)$$

est un facteur intégrant.

Une application directe de ce résultat dans le cas des tissus donne le Lemme suivant :

**Lemme 72.** Soit l'équation différentielle  $dy - p_i(x, y)dx = 0$ . Supposons qu'il existe un groupe de symétries de générateur infinitésimal à un paramètre  $X = \alpha_1(x, y)\partial_x + \alpha_2(x, y)\partial_y$  de l'équation. Alors la fonction :

$$R(x, y) = \frac{1}{\alpha_2(x, y) - \alpha_1(x, y)p(x, y)},$$

est un facteur intégrant de l'équation.

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que :

$$\partial_x(R(x, y)) = -\partial_y(p_i(x, y)R(x, y)).$$

Ce résultat provient de l'invariance en utilisant 17.1. □

### 19.3 Polynôme de Darboux et courbe discriminante du polynôme de présentation d'un tissu implicite

On redémontre ici le résultat présent dans [52] qui permet de faire le lien entre la symétrie d'un tissu et la courbe discriminante, qui s'avère être un polynôme de Darboux de la symétrie.

**Théorème 34.** Soit  $\mathcal{W}(F)$  un  $d$ -tissu défini par le polynôme de présentation  $P_F(z; x, y) = a_0(x, y)z^d + \dots + a_d(x, y)$ . Si le champ de vecteurs  $X = \alpha_1\partial_x + \alpha_2\partial_y$  est une symétrie du tissu  $\mathcal{W}(F)$  alors le discriminant de  $P_F$ , noté  $\Delta$ , est un polynôme de Darboux de  $X$ .

*Démonstration.* On reprend les notations introduites dans la section 15.1.2.

Rappelons que le discriminant est donné par  $\Delta = a_0^{2d-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (p_i - p_j)^2 = a_0^{2d-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} \Delta_{i,j}^2$ , avec

$$\Delta_{i,j} = p_i - p_j.$$

On a :

$$\begin{aligned} X.\Delta_{i,j} &= X(p_i - p_j), \\ &= X(p_i) - X(p_j), \\ &= \alpha_1\partial_x(p_i) - \alpha_2\partial_y(p_i) - \alpha_1\partial_x(p_j) + \alpha_2\partial_y(p_j). \end{aligned}$$

Par invariance, en utilisant 17.1, on a :

$$\alpha_1\partial_x(p_i) + \alpha_2\partial_y(p_i) = \partial_x(\alpha_2) + (\partial_y(\alpha_2) - \partial_x(\alpha_1))p_i - \partial_y(\alpha_1)p_i^2,$$

et la même équation pour  $j$ . On a alors :

$$\begin{aligned} X(p_i - p_j) &= -(\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2))(p_i - p_j) - \partial_y(\alpha_1)(p_i^2 - p_j^2), \\ &= -(\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2) - \partial_y(\alpha_1)(p_i + p_j))(p_i - p_j), \\ &= \lambda_{i,j} \Delta_{i,j}, \end{aligned}$$

où  $\lambda_{i,j} = -(\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2) - \partial_y(\alpha_1)(p_i + p_j))$ . Ainsi  $\Delta_{i,j}$  est un polynôme de Darboux pour tout  $\leq i < j \leq d$ , et en utilisant le théorème de Darboux, on obtient que  $\Delta$  est un polynôme de Darboux de cofacteur  $\lambda = \sum_{1 \leq i < j \leq d} \lambda_{i,j}$ .  $\square$

## 19.4 Module de dérivations et courbes discriminantes

Les géomètres ont introduit un objet algébrique, le module de dérivation, censé contenir l'essentiel de l'information topologique sur le complémentaire de la courbe dans  $\mathbb{C}^2$ . On renvoie à [74] pour plus de détails. Le module de dérivation est défini par :

**Définition 84.** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe algébrique définie par un polynôme  $g \in \mathbb{K}[x, y]$ . On note  $Der(\mathcal{C})$  l'ensemble des champs de vecteurs logarithmiques, autrement les champs de vecteurs tels que  $\mathcal{C}$  est un polynôme de Darboux :

$$Der(\mathcal{C}) = \{X \in Der(\mathbb{C}) \mid \text{il existe un cofacteur } K \text{ tel que } X.g = K.g\}.$$

On voit par cette définition que cela revient à étudier les propriétés de la courbe en regardant l'ensemble des champs de vecteurs qui la laisse invariante. Plusieurs propriétés découlent immédiatement de cette définition.

**Proposition 14.** Le module de dérivations  $Der(\mathcal{C})$  est une algèbre de Lie.

*Démonstration.* Voir [74].  $\square$

Le point important est le résultat suivant :

**Théorème 35.** L'algèbre de Lie des symétries d'un tissu est une sous-algèbre de Lie de  $Der(\Delta)$ .

Ce théorème est une conséquence de la Proposition 14 et du Lemme suivant :

**Lemme 73.** Soit  $\mathcal{W}(d)$  un  $d$ -tissu implicitement défini par  $F = a_0 p^d + \dots + a_d = 0$ . Si un champ de vecteurs  $X = \alpha_1 \partial_x + \alpha_2 \partial_y$  est une symétrie de  $\mathcal{W}(d)$  alors  $X$  est un élément de  $Der(\Delta)$ .

*Démonstration.* La démonstration repose sur le fait que la courbe discriminante est un polynôme de Darboux pour les symétries du tissu par le Théorème 34. On a donc  $X \cdot \Delta = K \cdot \Delta$  où :

$$K = - \sum_{1 \leq i < j \leq d} (\partial_x(\alpha_1) - \partial_y(\alpha_2) - \partial_y(\alpha_1)(p_i + p_j)). \quad (19.5)$$

$\square$

## 19.5 Lien avec les arrangements de droites

Suivant [68, Théorème 2.8, p.80], on a le théorème suivant :

**Théorème 36.** *Soit  $G$  un groupe de Lie local et connexe de transformations agissant sur une variété  $\mathcal{M}$  de dimension  $m$ . Soit  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^l$  avec  $l \leq m$  définissant un système d'équations algébriques (c'est-à-dire sans les dérivées de  $F$ , cela ne signifie pas que le système est polynomial) :*

$$F_\nu(x) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l$$

*et on suppose que le système est de rang maximal (la Jacobienne de  $F$  est égale à  $l$  pour toute solution  $x$  du système). Alors  $G$  est un groupe de symétries du système si et seulement si :*

$$v(F_\nu(x)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l \text{ dès que } F(x) = 0$$

*pour tout générateur infinitésimal  $v$  de  $G$ .*

Donnons un exemple tiré de [68] p.81 :

**Exemple 18.** *Soient un groupe de Lie  $G = SO(2)$  des rotations du plan avec le générateur infinitésimal  $v = -y\partial_x + x\partial_y$  et la fonction  $F(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^2 - 1$ . On a :*

$$\begin{aligned} v(F) &= -2xy(x^2 + y^2 - 1) \\ &= -2xy \frac{F(x, y)}{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

*ainsi  $v(F) = 0$  dès que  $F(x, y) = 0$ . La condition de rang maximal est satisfaite puisque  $\nabla(F) = (4x^3 + 2xy^2, 2x^2y + 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$  mais  $(0, 0)$  n'est pas une solution de  $F(x, y) = 0$ .*

*Ici le problème de la classe du champ de vecteurs se pose à nouveau (analytique, polynomial, etc), en effet le cofacteur de  $F$  est une fonction rationnelle. Le problème se résout en considérant le générateur infinitésimal suivant  $v = (x^2 + 1)(-y\partial_x + x\partial_y)$ .*

Considérons un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{K}^n$ . Notons  $\mathcal{H}_i$  les hyperplans :

$$\mathcal{H}_i = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \langle \underline{x}, \underline{m}^j \rangle + k^j = 0\}$$

où  $\underline{m}^j \in \mathbb{K}^n$ ,  $k^j \in \mathbb{K}$  pour  $j = 1, \dots, l$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel.

Pour un arrangement central de centre 0, on a  $k^j = 0$  pour chaque  $j$ .

Soit  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  la fonction définie par :

$$F_j(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{m}^j \rangle + k^j \text{ avec } j = 1, \dots, l.$$

On suppose que l'arrangement ne contient pas d'hyperplans parallèles. On a :

$$Jac_{\underline{x}}(F) = \begin{pmatrix} m_1^1 & \cdots & m_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ m_1^l & \cdots & m_n^l \end{pmatrix}$$

Cette Jacobienne est de rang  $l$  pour chaque solution  $\underline{x}$  de  $F(\underline{x}) = 0$  alors on satisfait les conditions du théorème ci-dessus et on obtient :

**Lemme 74.** *Soit  $G$  un groupe de Lie local connexe de transformations agissant sur  $\mathbb{K}^n$ . Considérons un arrangement d'hyperplans ne contenant pas d'hyperplans parallèles. Alors  $G$  est un groupe de symétries de l'arrangement si et seulement si  $v(F) = 0$  pour tout générateur infinitésimal  $v$  de  $G$ .*

Autrement dit, la fonction  $F$  est une intégrale première pour tous les champs de l'algèbre de Lie des symétries.





# Chapitre 20

## Algorithme de P.J. Olver

Dans ce dernier chapitre nous nous intéressons non plus au tissu directement mais aux symétries de celui-ci, en rappelant la notion d'invariants d'un groupe de symétrie et en l'appliquant au cas des tissus on verra au travers d'exemples que le tissu n'est pas un invariant complet du groupe.

### 20.1 Invariants du groupe de symétries

On s'intéresse dans cette partie aux invariants d'un groupe de symétries. Un groupe de symétries est associé à une algèbre de Lie de champs de vecteurs, qui dans le cas des tissus du plan, est au plus de dimension 3. On se pose la question de l'existence d'invariants communs à tous les champs de vecteurs et si l'on peut intégrer cette famille de champs.

**Définition 85.** *Un invariant  $\xi$  commun à une famille de champs de vecteurs  $\{X_i\}_{i=1,\dots,k}$  est une fonction  $\xi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  telle que :*

$$X_i(\xi) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, k.$$

L'existence d'invariants en nombre suffisant permet alors d'introduire des changements de variables qui permettent de réécrire les champs de vecteurs sous une forme simplifiée.

Pour ce faire nous allons nous intéresser à un procédé qui a été introduit par P.J. Olver dans son livre [68].

### 20.2 Algorithme d'Olver

Dans son livre [68, p. 89], P.J. Olver décrit un procédé pour obtenir des invariants d'une famille de champs de vecteurs.

Soient  $\xi$  une fonction  $\xi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\{X_1, \dots, X_k\}$  une famille de champs de vecteurs avec  $X_i = \alpha_1^i(x, y)\partial_x + \alpha_2^i(x, y)\partial_y$ .

Un invariant commun  $\xi$  est solution du système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$X_i(\xi) = 0 \text{ for } i = 1, \dots, k.$$

**Etape 1 :** On doit dans un premier temps résoudre  $X_1(\xi) = 0$  :

$$\alpha_1^i(x, y)\partial_x(\xi) + \alpha_2^i\partial_y(\xi) = 0.$$

Pour résoudre une telle équation aux dérivées partielles on peut résoudre le *système caractéristique* :

$$\frac{dx}{\alpha_1^1(x, y)} = \frac{dy}{\alpha_2^1(x, y)}. \quad (20.1)$$

La résolution d'une telle équation permet d'obtenir une première fonction invariante ainsi qu'un changement de variables en posant notre invariant comme une nouvelle variable. Cela induit donc une réécriture des autres équations du système.

La résolution de cette équation caractéristique n'a rien d'algorithmique puisqu'elle nécessite un travail spécifique à chacune des étapes.

**Etape 2 :** Notons  $\tilde{X}_2$  le champ de vecteurs obtenu par le changement de variable sur  $X_2$ . A nouveau, nous résolvons l'équation caractéristique.

La résolution amène à considérer un second invariant et un nouveau changement de variables.

**Etape  $k$  :** Après avoir itérer la démarche sur les  $k - 1$  champs de vecteurs précédents nous résolvons après l'application des  $k - 1$  champs de variables l'équation caractéristique. C'est cette dernière résolution qui permet d'obtenir un invariant commun aux  $k$  champs de vecteurs que nous considérons.

**Remarque 17.** *L'intérêt de ces invariants est une réduction des champs de vecteurs que l'on considère. Cependant dans le cas des tissus, les cas présents sont souvent triviaux et ne permettent pas une réduction des champs.*

## 20.3 Exemples

On conclut ce chapitre avec plusieurs exemples sur l'algèbre de Lie des symétries de certains tissus que nous avons étudié précédemment.

### 20.3.1 Tissus parallèles

Considérons un  $d$ -tissu parallèle. Son algèbre de Lie des symétries est donnée par :

$$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y\}.$$

On utilise le changement de variables  $x = u + v$  et  $y = u - v$  sur ces symétries, on obtient les trois champs de vecteurs :

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_u + \partial_v, \\ X_2 &= \partial_u - \partial_v, \\ X_3 &= 2(u\partial_u + v\partial_v). \end{aligned}$$

Notons  $K_1$  un invariant du champ  $X_1$  alors on a l'équation :

$$\partial_u K_1 + \partial_v K_1 = 0.$$

On résout alors par la méthode des caractéristiques, on obtient comme invariant du champ  $X_1$  :

$$K_1(u, v) = u - v.$$

Cet invariant sert de changement de variables qui permet de réécrire  $X_2$  sous la forme :

$$X_2 = \partial_{K_1}.$$

Soit  $K_2$  un invariant de  $X_2$  alors  $K_2$  est nécessairement une fonction de  $v$ , i.e.  $K_2 = f(v)$  où  $f$  peut être une fonction arbitraire. Prenons donc  $K_2 = v$ .

La dernière étape ici consiste alors à réécrire le champ  $X_3$  en fonction de  $K_1$  et  $K_2$  puis en considérant un invariant  $K_3$  de  $X_3$  de résoudre par la méthode des caractéristiques.

Sous l'effet du changement de variables, on a :

$$X_3 = 2(K_1 + K_2)\partial_{K_1} + 2(K_1 + 2K_2)\partial_{K_2}.$$

On résout alors  $X_3(K_3) = 0$  donc  $\frac{dK_1}{K_1+K_2} = \frac{dK_2}{K_1+2K_2}$ . On obtient ainsi  $K_3$  sous la forme :

$$K_3 = \frac{u}{\sqrt{u+v}},$$

qui est un invariant de l'ensemble des champs de vecteurs  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ .

### 20.3.2 Tissu de Clairaut

On rappelle que l'algèbre de Lie des symétries du tissu de Clairaut est donnée par :

$$\{x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x + x\partial_y, \left(x \ln(|y^2 - x^2|) + y \ln\left(\left|\frac{y+x}{y-x}\right|\right)\right)\partial_x + \left(y \ln(|y^2 - x^2|) + x \ln\left(\left|\frac{y+x}{y-x}\right|\right)\right)\partial_y\}$$

Notons  $K(x, y)$  un invariant commun de ces trois champs, alors il doit vérifier :

$$\begin{cases} x\partial_x(K) + y\partial_y(K) = 0, \\ y\partial_x(K) + x\partial_y(K) = 0. \end{cases}$$

En prenant une combinaison linéaire des deux lignes on a :

$$\begin{aligned} x^2\partial_x(K) + xy\partial_y(K) - y^2\partial_x(K) - xy\partial_y(K) &= 0, \\ \Rightarrow (x^2 - y^2)\partial_x(K) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique  $\partial_x(K) = 0$ , et en réinjectant dans l'une des deux lignes on obtient  $\partial_y(K) = 0$ . On obtient encore une fois que le seul invariant commun est les fonctions constantes.



## Chapitre 21

# Perspectives

Cette partie a ramené l'étude des tissus et en particulier l'étude de leurs groupes de symétries dans le cadre classique de l'étude des groupes de symétries des équations différentielles. Cette théorie est très riche et regorge d'outils. En particulier, un tissu est associé à une distribution de champs de vecteurs au sens d'Olver (voir [68], [69]). Il serait sans doute intéressant d'étudier les G-structures associées à ces distributions via la méthode d'équivalence de Cartan.

Comme nous l'avons déjà souligné, le problème de la régularité des algèbre de Lie des symétries entre dans l'étude de la régularité des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients analytiques. Il serait bon de voir les théorèmes de type Maillet existant afin de préciser les intuitions d'Alain Hénaut sur ces objets.

L'approche dynamique des tissus semble pouvoir nous fournir un nouveau point de vue sur les arrangements de droites en lien avec des problèmes de géométrie algébrique.

Enfin nous avons vu dans un dernier chapitre l'algorithme d'Olver, il sera intéressant de systématiser cette approche pour obtenir des résultats sur la classification des tissus.



# Annexes





# Annexes : Implémentation Maple

Dans sa thèse [33, 34], Bruno Vallet a implémenté en Maple un code permettant le calcul du moule de la correction ainsi que le champ de vecteurs associés. Le programme a ensuite été repris puis allégé par Guillaume Morin (voir [65]). Disposant de relations de récurrence sur le moule de la correction et des comoules nous avons allégé encore une fois ce programme évitant ainsi le calcul itéré des opérateurs différentiels en se concentrant que sur les relations polynomiales que l'on obtient et qui sont données explicitement par le Lemme 47.

Ce programme a été implémenté via Maple 2015.

Ici le champ de vecteurs est polynomial.

**On utilise les deux packages "*combinat*" et "*Ore\_algebra*" pour utiliser les mots qui sont ici des multidegrés**

---

```
> restart  
> with(combinat);  
> with(Ore_algebra);
```

---

**On donne le spectre du champ qui est toujours sous forme diagonale.**

---

```
> lambda := [I, -I];
```

---

**La première étape est de récupérer l'alphabet généré par le champ de vecteurs ce qui peut se faire en lui donnant le degré des polynômes définissant le champ de vecteurs.**

---

```
> alphabet := proc(d)  
local i, j, alphabet;  
alphabet := {};  
for i from 2 to d do  
for j from 0 to i + 1 do  
alphabet := union(alphabet, {[j - 1, i - j]})  
end do;  
end do;
```

```
end proc;
```

---

### On calcule le poids et la profondeur d'un mot

---

```
> poids := proc(mot)
local i, l, u, poids;
l := nops(mot);
poids := 0;
for i to l do
poids := poids + op(mot[i])[1] * lambda[1] + op(mot[i])[2] * lambda[2]
end do
end proc :
```

```
> prof := proc(mot)
local l, i, prof;
l := nops(mot);
prof := 0;
for i to l do prof := prof + op(mot[i])[1] + op(mot[i])[2]
end do
end proc :
```

---

**On peut maintenant construire l'ensemble des mots sur un alphabet donné et d'une longueur donnée, ensuite on sélectionne seulement les mots résonants dans cet ensemble et enfin les mots résonants d'une profondeur choisie.**

---

```
> tous_les_mots := proc(alphabet, longueur)
local touslesmots, mot, mot_temp, i, j;
touslesmots := {};
if longueur = 1 then return alphabet
else mot := [];
mot_temp := procname(alphabet, longueur - 1);
for i to nops(alphabet) do
for j to nops(mot_temp) do
mot := [op(alphabet[i]), op(op(j, mot_temp))];
touslesmots := union(touslesmots, mot)
end do;
end do;
return touslesmots
end if
end proc :
```

```

    > alphabet_resonant := proc(d,l)
local ares, alphabet_resonant, i, L;
ares := {};
L := tous_les_mots(alphabet(d),l);
for i to nops(L) do
if poids(L[i]) = 0 then ares := union(ares, {L[i]})
end if;
end do;
alphabet_resonant := ares
end proc :

```

```

    > alphabet_profondeur := proc(d,p)
local alphabet_profondeur, l, L, j;
alphabet_profondeur := {};
for l to p do
L := nops(alphabet_resonant(d,l));
for j to L do
if prof(alphabet_resonant(d,l)[j]) = p
then alphabet_profondeur := union(alphabet_profondeur, {alphabet_resonant(d,l)[j]})
end if;
end do;
end do;
alphabet_profondeur
end proc

```

```

    > motprof := proc(p)
local l, motprof, j, i, m, mottemp;
motprof := {};
mottemp := {};
for l to p do
for i from 2 to p - l + 2 do
mottemp := union(mottemp, alphabet_resonant(i,l))
end do;
end do;
m := nops(mottemp);
for j to m do
if prof(mottemp[j]) = p then
motprof := union(motprof, {mottemp[j]})
end if :
end do :

```

---

*end proc :*

---

**On calcule maintenant la norme ||| d'un mot ainsi que le moule de la correction :**

---

```

> norme := proc(mot)
local k :
return add(mot[k], k = 1..nops(mot))
end proc;

> carr := proc(mot)
local i, j, omega;
if mot = NULL then carr(mot) := 0 :
elif nops(mot) = 0 then carr(mot) := 0 :
else
omega := [];
for j from 1 to nops(mot) do
omega := [op(omega), sum(mot[j][k1] * lambda[k1], k1 = 1..nops(mot[j]))];
od;
if nops(mot) = 1 then if op(omega) <> 0 then carr(mot) := 0 :
else carr(mot) := 1 : fi :
else
if norme(omega) <> 0 then carr(mot) := 0 :
elif member(0, op(omega)) = true then carr(mot) := 0 :
else
carr(mot) := -carr([op(1, mot) + op(2, mot), op(3..nops(mot), mot)]) :
for i from 2 to nops(mot) do
carr(mot) := carr(mot) + carr([op(1, mot), op(i + 1..nops(mot), mot)]) * carr([op(2..i, mot)]) od :
carr(mot) := simplify(carr(mot)/(op(1, omega))) :
fi : fi : fi :
endproc :

```

---

**On calcule les polynômes d'interpolation définis par le Lemme précédemment cité.**

---

```

> interpq := proc(mot)
local interp, interq, l, n, p, q, d, i, temp, temq, j;
n := nops(mot);
d := prof(mot);
for i from 2 to d + 1 do
p[i, -1] := 0;

```

```

q[-1, i] := 0
end do;
temp := p[op(mot[1])];
temq := q[op(mot[1])];
for l from 2 to n do
interp := simplify((op(mot[l][1]) - norme(mot[1..l - 1])[1]) * p[op(mot[l])] * temp - norme(mot[1..l - 1])[2] * q[op(mot[l])] * temp + op(mot[l][2]) * p[op(mot[l])] * temq);
interq := simplify((op(mot[l][2]) - norme(mot[1..l - 1])[2]) * temq * q[op(mot[l])] - norme(mot[1..l - 1])[1] * p[op(mot[l])] * temq + op(mot[l][1]) * q[op(mot[l])] * temp);
temp := interp;
temq := interq;
end do;
return [temp, temq]
end proc :

```

---

**On est enfin en mesure de calculer la correction à une profondeur donnée :**

---

```

> correction := proc(p)
local correc, A, i, k, correc1, correc2;
correc := [0, 0];
correc1 := 0;
correc2 := 0;
A := motprof(p);
k := nops(A);
for i to k do
correc1 := simplify(correc1 + carr(A[i])/nops(A[i]).interpq(A[i])[1]);
correc2 := correc2 + carr(A[i])/nops(A[i]).interpq(A[i])[2];
end do;
correc := [simplify(correc1)]
end proc;

```

---

**Remarque 18.** Bien que ce programme ait été allégé et a permis d'augmenter le nombre de cas calculables de la correction, si le nombre de perturbation ou la profondeur augmente rapidement les résultats sont difficile à obtenir en un temps raisonnable .

Nous donnons quelques exemples en profondeurs 2 et 4 de notre programme.

> correction(2)

$$\left[ p_{1,1} + \frac{1}{3} I q_{2,-1} p_{-1,2} - \frac{1}{2} I p_{0,1} p_{1,0} + \frac{1}{2} I p_{0,1} q_{1,0} - \frac{1}{2} I p_{0,1} p_{1,0} + \frac{1}{2} I p_{0,1} q_{1,0} + \frac{1}{3} I p_{-1,2} q_{2,-1} \right]$$

(10)

&gt; correction(4)

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{5}{12} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} - \frac{5}{24} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{6} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} + \frac{1}{12} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{7}{24} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} + \frac{7}{48} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{12} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} \right. \\
& + \frac{1}{24} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{2} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{12} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} + \frac{1}{3} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} - \frac{1}{2} I_{P_0,1Q_2,-1} - \frac{2}{9} I_{P-1,2Q_2,-1} + \frac{1}{4} I_{P_0,1Q_0,1Q_2,-1} + \frac{7}{12} I_{Q_1,0P-1,2Q_2,-1P_0,1} \\
& - \frac{1}{3} I_{Q_1,0P-1,2Q_2,-1Q_0,1} + \frac{5}{12} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} - \frac{5}{24} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{6} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} + \frac{1}{12} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{7}{24} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} + \frac{7}{48} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} \\
& - \frac{1}{12} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} + \frac{1}{24} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} + \frac{1}{2} I_{P_0,1P_1,0Q_0,1Q_1,0} - I_{P_0,1Q_2,0}^2 + \frac{1}{2} I_{P_0,1P_1,0Q_1,0} - I_{P-1,2Q_1,0}^2 - \frac{1}{2} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} + \frac{5}{8} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} \\
& - \frac{1}{6} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} + \frac{1}{6} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{8} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} + \frac{1}{2} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} - \frac{1}{2} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{2} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{12} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} \\
& + \frac{1}{3} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} + \frac{7}{12} I_{Q_1,0P-1,2Q_2,-1P_0,1} - \frac{1}{3} I_{Q_1,0P-1,2Q_2,-1Q_0,1} - \frac{1}{2} I_{P-1,2P_1,0Q_1,0} + \frac{3}{2} I_{P-1,2P_1,0Q_1,0}^2 + \frac{3}{4} I_{P_0,1Q_0,1Q_2,-1}^2 - \frac{3}{2} I_{P_0,1Q_2,-1}^2 + \frac{1}{2} I_{P_0,1P_1,0Q_1,0}^2 \\
& - \frac{2}{9} I_{Q_2,-1}^2 P_{-1,2}^2 - \frac{1}{3} I_{P-1,2Q_1,0}^2 - \frac{1}{9} P_{-1,2} Q_0,1 Q_3,-1 + \frac{5}{18} P_{-1,2} P_0,1 Q_3,-1 + \frac{7}{12} P_0,1 P_{-1,2} Q_3,-1 + \frac{1}{6} Q_0,1 P_{-1,2} Q_3,-1 + \frac{2}{9} P_{-1,2} P_1,0 Q_2,0 - \frac{1}{9} P_{-1,2} P_2,0 Q_1,0 - \frac{2}{9} P_{-1,2} P_1,0 P_2,0 - \frac{2}{3} P_0,1 P_2,0 \\
& + \frac{2}{3} P_0,1 Q_2,0 - \frac{1}{6} I_{P-1,2P_1,0Q_1,0}^2 + \frac{1}{2} I_{P-1,2P_1,0Q_1,0}^2 - \frac{1}{3} P_0,1 P_2,0 Q_0,1 + Q_1,0 P_{-1,2} P_2,0 - \frac{2}{3} P_{-1,2} Q_2,0 Q_1,0 + \frac{1}{6} P_{-1,3} Q_2,-1 P_1,0 - \frac{1}{12} P_{-1,3} Q_2,-1 Q_1,0 + \frac{2}{3} P_0,1 P_0,2 Q_2,-1 + \frac{2}{9} Q_0,1 P_0,2 Q_2,-1 \\
& - \frac{1}{3} P_0,1 Q_0,2 Q_2,-1 + \frac{1}{3} P_0,2 P_0,1 Q_2,-1 - \frac{2}{9} P_0,2 Q_0,1 Q_2,-1 - \frac{2}{3} Q_1,0 P_{-1,3} Q_2,-1 - \frac{4}{3} P_0,2 Q_1,0^2 - \frac{4}{9} P_{-1,2} P_1,0 Q_2,0 + \frac{2}{9} P_{-1,2} P_2,0 Q_1,0 + \frac{4}{9} P_{-1,2} P_2,0 P_1,0 - \frac{1}{2} P_{-1,3} Q_2,-1 P_1,0 + \frac{1}{4} P_{-1,3} Q_2,-1 Q_1,0 \\
& + \frac{2}{3} P_0,2 Q_1,0 P_1,0 - \frac{2}{3} Q_1,0 P_0,2 + \frac{2}{3} Q_2,-1 P_{-1,3} P_1,0 - P_{-1,3} Q_1,0 Q_2,-1 - \frac{2}{3} P_{-1,2} Q_1,0 Q_2,0 - \frac{2}{3} P_{-1,2} P_1,0 P_2,0 + \frac{2}{3} P_{-1,2} P_1,0 Q_2,0 + \frac{2}{3} P_{-1,2} P_2,0 Q_1,0 + P_0,1 Q_2,-1 P_0,2 + \frac{1}{3} Q_0,1 Q_2,-1 P_0,2 \\
& - \frac{1}{2} P_0,1 Q_0,2 Q_2,-1 + \frac{1}{3} Q_1,0 P_0,2 P_1,0 - \frac{4}{3} P_0,1 P_2,0 + \frac{4}{3} P_0,1 Q_2,0 + \frac{1}{6} P_0,1 Q_0,2 Q_2,-1 - \frac{1}{3} P_0,2 Q_0,1 Q_2,-1 + \frac{10}{9} P_{-1,2} Q_3,-1 P_0,1 - \frac{4}{9} P_{-1,2} Q_0,1 Q_3,-1 - \frac{2}{3} P_0,1 P_2,0 Q_0,1 - \frac{2}{3} P_0,2 Q_0,1 Q_2,-1 \\
& + P_0,2 Q_2,-1 P_0,1 - \frac{1}{3} P_0,1 Q_0,2 Q_2,-1 + \frac{2}{3} P_0,2 Q_0,1 Q_2,-1 - \frac{1}{4} Q_3,-1 P_{-1,2} P_0,1 + \frac{1}{2} Q_3,-1 P_{-1,2} Q_0,1 - \frac{1}{2} Q_1,0 Q_2,-1 P_{-1,3} + \frac{1}{6} Q_2,-1 P_{-1,3} P_1,0 - \frac{1}{4} Q_1,0 P_{-1,3} Q_2,-1 + \frac{7}{9} P_0,1 Q_3,-1 P_{-1,2} \\
& + \frac{2}{9} Q_0,1 Q_3,-1 P_{-1,2} + \frac{2}{3} Q_1,0 P_{-1,2} P_2,0 - \frac{4}{9} Q_2,0 P_{-1,2} Q_1,0 - \frac{2}{9} P_{-1,2} P_1,0 P_2,0 + \frac{2}{9} P_{-1,2} P_1,0 Q_2,0 + \frac{2}{9} P_{-1,2} P_2,0 Q_1,0 - \frac{2}{9} Q_1,0 P_{-1,2} Q_2,0 + \frac{1}{12} Q_3,-1 P_{-1,2} P_0,1 - \frac{1}{6} Q_3,-1 P_{-1,2} Q_0,1 \\
& - \frac{2}{3} I_{P-1,2P_3,0} + \frac{1}{3} I_{P-1,2Q_3,0} + \frac{3}{8} I_{P-1,3Q_3,-1} - I_{P_0,1P_2,1} + \frac{1}{2} I_{P_0,1Q_2,1} - \frac{1}{2} I_{P_2,1Q_0,1} - \frac{1}{2} I_{P_0,2P_2,0} + \frac{1}{2} I_{P_0,2Q_2,0} + \frac{1}{2} I_{P_0,3Q_2,-1} + I_{Q_1,0P_1,2} + I_{P_1,2Q_1,0} + \frac{1}{2} I_{Q_2,-1P_0,3} - \frac{1}{2} I_{P_0,2P_2,0} \\
& + \frac{1}{2} I_{P_0,2Q_2,0} - I_{P_0,1P_2,1} + \frac{1}{2} I_{P_0,1Q_2,1} - \frac{1}{2} I_{P_2,1Q_0,1} + \frac{3}{8} I_{Q_3,-1P_{-1,3}} - \frac{2}{3} I_{P-1,2P_3,0} + \frac{1}{3} I_{P-1,2Q_3,0} + P_{2,2} + \frac{1}{2} I_{P_0,1P_1,0Q_0,1Q_1,0} + \frac{1}{8} I_{Q_1,0Q_2,-1P_{-1,2}P_0,1} - \frac{1}{4} I_{Q_1,0Q_2,-1P_{-1,2}Q_0,1} \\
& + \frac{1}{8} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} - \frac{3}{16} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{4} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} + \frac{3}{8} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{2} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} + \frac{5}{8} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{6} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} \\
& + \frac{1}{6} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} + \frac{1}{8} I_{Q_1,0Q_2,-1P_{-1,2}P_0,1} - \frac{1}{4} I_{Q_1,0Q_2,-1P_{-1,2}Q_0,1} - \frac{1}{8} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} + \frac{1}{2} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} - \frac{1}{2} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} + \frac{1}{8} I_{P-1,2P_0,1P_1,0Q_2,-1} \\
& \left. - \frac{3}{16} I_{P-1,2P_0,1Q_1,0Q_2,-1} - \frac{1}{4} I_{P-1,2P_1,0Q_0,1Q_2,-1} + \frac{3}{8} I_{P-1,2Q_0,1Q_1,0Q_2,-1} \right]
\end{aligned}$$

(11)

# Annexes : Démonstration du morphisme d'arborification

Dans cette annexe, nous donnons la démonstration de la proposition suivante :

**Proposition 15.** *Les applications  $\pi$  et  $\pi_0$  sont des morphismes surjectifs d'algèbre de Hopf de  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  sur  $\mathcal{H}^{\mathbf{A}}$  et  $\mathcal{H}_0^{\mathbf{A}}$  respectivement.*

La démonstration nous a été donnée par Loic Foissy comme dit dans le corps de ce manuscrit et se fait en trois étapes. La première est donnée par le résultat sur les algèbres de Hopf suivant :

**Théorème 37.** *Soit  $\mathcal{H}$  une algèbre commutative et  $L_a : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur pour tout  $a \in \mathbf{A}$ . Il existe un unique morphisme d'algèbre  $\varphi : \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{H}$  tel que :*

$$\varphi \circ \beta_a^+ = L_a \circ \varphi.$$

Autrement dit le morphisme  $\varphi$  rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\beta_a^+} & \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{L_a} & \mathcal{H} \end{array}$$

*Démonstration.* Unicité. Soit  $\varphi$  un tel morphisme et  $F$  une forêt de longueur  $n$ .

- Si  $n = 0$  alors  $F$  se réduit à la forêt vide 1 et  $\varphi(1) = 1$ .
- Si  $n \geq 1$ , alors prenons une forêt  $F = T_1 \cdots T_k$ .

Si  $k \geq 2$  alors  $\varphi(F) = \varphi(T_1) \cdots \varphi(T_k)$ . Et si  $k = 1$ , il existe un unique  $a \in \mathbf{A}$ , il existe un unique  $G \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  tels que  $F = \beta_a^+(G)$ , on a donc  $\varphi(F) = \varphi \circ \beta_a^+(G) = L_a \circ \varphi(G)$ .

Ceci définit de manière unique  $\varphi$  par récurrence sur la longueur.

Existence. On définit  $\varphi(F)$  par récurrence sur  $n = \ell(F)$  par :

- Si  $n = 0$ ,

$$\varphi(F) = 1 \tag{1}$$

(car  $\varphi(1) = 1$ ) ,



- Si  $n \leq 1$ , on a  $F = T_1 \cdots T_k$  alors :

Si  $k \geq 2$ ,  $\varphi(F) = \varphi(T_1) \cdots \varphi(T_k)$ . Ce qui est bien défini car  $\ell(T_i) \leq \ell(F) \forall i = 1, \dots, k$  et comme

$\mathcal{H}$  est commutative  $\varphi(T_1) \cdots \varphi(T_k)$  ne dépend pas de l'ordre choisi pour les arbres de  $F$ .

Si  $k = 1$ , il existe un unique  $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  tel que  $F = \beta_a^+(G)$  et donc  $\varphi(F) = \varphi \circ \beta_a^+(G)$

avec  $\varphi(G)$  bien défini par récurrence car  $\ell(G) = \ell(F) - 1 < \ell(F)$ .

Les points (1) et (2) assurent que  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres. Le point (3) permet de démontrer que  $\varphi$  rend le diagramme commutatif.  $\square$

Nous utilisons ensuite le Théorème suivant :

**Théorème 38.** *Si  $\mathcal{H}$  est une bigèbre commutative et  $L_a : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  vérifiant la propriété de 1-cocycle pour tout  $a \in \mathbf{A}$  alors  $\varphi$  est un morphisme de bigèbres.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{H}' = \{x \in \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}, \Delta \circ \varphi(x) = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta(x)\}$ .

Comme  $\varphi$  et  $\Delta$  sont des morphismes d'algèbres,  $(\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta$  et  $(\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta$  sont aussi des morphismes d'algèbres. Par suite,  $\mathcal{H}'$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$ .

Soit  $x \in \mathcal{H}'$ , alors :

$$\begin{aligned}
 \Delta \circ \varphi \circ \beta_a^+(x) &= \Delta \circ L_a \circ \varphi(x), \\
 &= Id \circ L_a \circ \varphi(x) + (L_a \otimes Id) \circ \Delta \circ \varphi(x), \text{ (Par propriété de 1-cocycle)} \\
 &= Id \circ L_a \circ \varphi(x) + (L_a \otimes Id) \circ (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta(x), \text{ (car } x \in \mathcal{H}') \\
 &= (\varphi \otimes \varphi \circ \beta_a^+)(x) + \underbrace{(L_a \circ \varphi \otimes \varphi) \circ \Delta(x)}_{= \varphi \circ \beta_a^+}, \\
 &\quad \underbrace{= (\varphi \otimes \varphi) \circ (\beta_a^+ \otimes Id)} \\
 &= (\varphi \otimes \varphi)(Id \otimes \beta_a^+(x) + (\beta_a^+ \otimes Id) \circ \Delta(x)), \\
 &= (\varphi \otimes \varphi)(\Delta(\beta_a^+(x))).
 \end{aligned}$$

Ainsi  $\beta_a^+(x) \in \mathcal{H}'$ , donc  $\mathcal{H}'$  est stable sous l'action de  $\beta_a^+$ . Par suite,  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  et  $\Delta \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta$ .

Soit  $\mathcal{H}'' = \{x \in \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}, \varepsilon_{\mathcal{H}} \circ \varphi(x) = \varepsilon_{\mathcal{H}}(x)\}$  où  $\varepsilon_{\mathcal{H}}$  est la co-unité de  $\mathcal{H}$ .

Comme  $\varepsilon_{\mathcal{H}}$  et  $\varphi$  sont des morphismes d'algèbres donc  $\mathcal{H}''$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$ .

Soit  $x \in \mathcal{H}$ . On a  $\varepsilon_{\mathcal{H}} \circ L_a(x) = 0$ .

De plus,

$$\begin{aligned}
 L_a(x) &= (Id \otimes \varepsilon_{\mathcal{H}}) \circ \Delta \circ L_a(x), \\
 &= (Id \otimes \varepsilon_{\mathcal{H}})(1 \otimes L_a(x)) + L_a(x^{(1)}) \otimes x^{(2)}, \\
 &= \varepsilon_{\mathcal{H}} \circ L_a(x) + L_a(x^{(1)}) \varepsilon_{\mathcal{H}}(x^{(2)}), \\
 &= \varepsilon_{\mathcal{H}} \circ L_a(x) + L_a(x).
 \end{aligned}$$

Si  $x \in \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$ ,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathcal{H}} \circ \varphi \circ \beta_a^+(x) &= \varepsilon_{\mathcal{H}} \circ L_a \circ \varphi(x) = 0 \text{ ( car } \varepsilon_{\mathcal{H}} \circ L_a = 0), \\ &= \varepsilon(\beta_a^+(x)).\end{aligned}$$

Tous les arbres sont dans  $\mathcal{H}''$ , donc  $\mathcal{H}'' = \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}}$  et  $\varepsilon_{\mathcal{H}} \circ \varphi = \varepsilon$ .

Donc  $\varphi$  est un morphisme de bigèbres. □

*Démonstration de la Proposition.* Prenons  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^{\mathbf{A}}$  ou  $\mathcal{H}^{\mathbf{A}}$ , alors  $\mathcal{H}$  est une bigèbre commutative.

On pose  $L_a(\mathbf{n}) = a\mathbf{n}$  pour tout mot  $\mathbf{n}$ .

Si  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$ , alors :

$$\begin{aligned}\Delta \circ L_a(\mathbf{n}) &= \sum_{i=0}^r a n_1 \cdots n_i \otimes n_{i+1} \cdots n_r + 1 \otimes a\mathbf{n}, \\ &= L_a(\mathbf{n}^{(1)}) \otimes \mathbf{n}^{(2)} + 1 \otimes L_a(\mathbf{n}) \text{ car } L_a \text{ est un 1-cocycle.}\end{aligned}$$

D'où l'existence d'unique morphismes de bigèbres  $\pi : \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathbf{A}}$  et  $\pi_0 : \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{H}_0^{\mathbf{A}}$  tels que  $\varphi \circ \beta_a^+ = L_a \circ \varphi$  dans leurs espaces respectifs.

On rappelle que les extensions linéaires d'une forêt  $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  sont l'ensemble des bijections  $f : V(F) \rightarrow [n]$  avec  $V(F)$  l'ensemble des sommets de  $F$  et  $[n] = \{1, \dots, n\}$  tel que si  $x \leq y$  dans  $F$ , alors  $f(x) \leq f(y)$ .

Si  $f$  est une extension linéaire de  $F$  alors

$$\mathbf{n}f = (\text{deco}(f^{-1}(n_1))) \cdots (\text{deco}(f^{-1}(n_r))),$$

où *deco* est la décoration de l'arbre associé.

On a :

$$\pi_0(F) = \sum_{f \text{ extension linéaire de } F} \mathbf{n}f.$$

Soit  $\varphi : \mathcal{H}_{CK}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathbf{A}}$  définie par :

$$\varphi(F) = \sum_{f \text{ extension linéaire de } F} \mathbf{n}f.$$

Si  $F$  et  $G$  sont deux forêts, les extensions linéaires de  $FG$  sont les applications de la forme :

$$\sigma \circ (f \otimes g),$$

où  $\sigma$  est un  $(\ell(F), \ell(G))$ -battage,  $f$  est une extension linéaire de  $F$  et  $g$  une extension de  $G$ . Et

$$\begin{aligned}f \otimes g(x) &= f(x) \text{ si } x \in V(F), \\ &g(x) + \ell(F) \text{ si } x \in V(G).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\varphi(FG) = \sum_{\substack{f \text{ extension linéaire de } F \\ g \text{ extension linéaire de } G \\ \sigma \text{ battage}}} \sigma \cdot (\mathbf{n}f\mathbf{n}g) = \varphi(F) \sqcup \varphi(G).$$

Si  $F$  est une forêt, les extensions linéaire de  $\beta_a^+(F)$  sont les applications de la forme  $\bar{f} : V(\beta_a^+(F)) \rightarrow [n+1]$  tel que la racine de  $\beta_a^+(F)$  s'envoie sur 1 et  $x \in V(F)$  s'envoie sur  $f(x) + 1$  avec  $f$  extension linéaire de  $F$ .

$$\text{On a donc } \varphi \circ \beta_a^+(F) = \sum_{f \text{ extension linéaire de } F} a\mathbf{n}f = L_a \circ \varphi(F).$$

On a finalement  $\varphi = \pi_0$ .

Donc le morphisme  $\pi_0$  d'arborification est bien un morphisme de bigèbre. La surjectivité découle simplement en associant à tout mot l'arbre totalement ordonné associé.

Pour le morphisme d'arborification on raisonne de la même manière en prenant les extensions quasi-linéaires des arbres, c'est-à-dire avec des contractions possibles de lettres.  $\square$

# Annexes : Résultats techniques sur le moule de la correction

Les démonstrations concernant les formules récursives pour le moule de la correction données dans [29] sont seulement esquissées. Dans cette annexe, nous donnons des résultats techniques sur le moule de la correction ainsi que leurs démonstrations complètes.

## 21.1 Définition du moule de la correction

Nous allons démontrer différents résultats sur la correction, notamment sur son moule qui peut se définir en utilisant une forme prénormale (voir [34, p.267, Lemma 3.2]) :

$$I^{\mathbf{n}} - Carr^{\mathbf{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((I^{\bullet} - M^{\bullet})^{\circ r})^{\mathbf{n}}$$

où  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$ ,  $I^{\bullet}$  est le moule unité pour la composition défini par  $I^{\mathbf{n}} = 1$  si  $\ell(\mathbf{n}) = 1$  et  $I^{\mathbf{n}} = 0$  pour  $\ell(\mathbf{n}) \neq 1$ . Le moule  $M^{\bullet}$  est le moule d'une forme prénormale (voir [24]), on a donc  $M^{\mathbf{n}} = 0$  pour tout mot  $\mathbf{n}$  non résonant et le mot vide. De plus on a :

$$I^{\mathbf{n}} - Carr^{\mathbf{n}} = ((I^{\bullet} - M^{\bullet})^{\circ r})^{\mathbf{n}} = ((I^{\bullet} - M^{\bullet})^{\circ r+k})^{\mathbf{n}}$$

où  $k \in \mathbb{N}$ .

## 21.2 Construction du moule de la variance

Dans cette sous section nous redonnons la construction du moule de la variance que nous utilisons pour obtenir la forme récursive du moule de la correction  $Carr^{\bullet}$ . Les résultats peuvent être trouver dans [34].

Soit  $X$  un champ de vecteurs sous forme préparée :

$$X = X_{lin} + \sum_{n \in \mathbf{A}(X)} B_n.$$

Fixons une lettre  $n_0$  de l'alphabet  $\mathbf{A}(X)$ , on définit alors un automorphisme de l'algèbre enveloppante engendrée par les  $B_n$ ,  $n \in \mathbf{A}(X)$  en posant :

$$\Theta_{n_0} = \exp(-\varepsilon B_{n_0}),$$

d'inverse

$$\Theta_{n_0}^{-1} = \exp(\varepsilon B_{n_0}).$$

On s'intéresse à l'action d'un tel automorphisme sur le champ  $X$  par la formule de conjugaison d'un champ modulo  $\varepsilon^2$  :

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \Theta_{n_0} X \Theta_{n_0}^{-1} = \exp(-\varepsilon B_{n_0}) X \exp(\varepsilon B_{n_0}), \\ &= (1 - \varepsilon B_{n_0} + o(\varepsilon^2)) X (1 + \varepsilon B_{n_0} + o(\varepsilon^2)), \\ &= X + \varepsilon [X, B_{n_0}] + o(\varepsilon^2), \\ &= X_{lin} + \sum_{\substack{n \in \mathbf{A}(X) \\ n \neq n_0}} B_n + (1 + \varepsilon w(n_0)) B_{n_0} + \sum_{n \in \mathbf{A}(X)} \varepsilon A_{n,n_0}, \end{aligned}$$

où  $A_{n,n_0}$  est le champ  $[B_n, B_{n_0}]$ , on utilise ici le Lemme 22 pour obtenir la dernière équation.

On obtient ainsi un nouvel alphabet noté  $\mathbf{A}(\tilde{X}) \pmod{\varepsilon^2}$  :

$$\mathbf{A}(\tilde{X}) = \bigcup_{n \neq n_0} \{B_n, \varepsilon A_{n,n_0}\} \cup \{(1 + \varepsilon w(n_0)) B_{n_0}\}.$$

Soit  $Act M^\bullet$  l'action du moule  $M^\bullet$  sur le champ  $X$ , alors on veut savoir comment rendre le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{Act M^\bullet} & Y = X_{lin} + \sum_{\bullet} M^\bullet B_{\bullet} \\ \Theta_{n_0} \downarrow & & \downarrow \Theta_{n_0} \\ \tilde{X} & \xrightarrow{Act M^\bullet} & \tilde{Y} \end{array}$$

Cela revient à étudier l'action du moule  $M^\bullet$  sur  $\tilde{X}$  ?

Quelles sont les formes possibles pour les comoules  $A_\bullet$  ?

D'après les calculs précédents,  $A_\bullet$  peut être une combinaison de :

$$\begin{aligned} &B_n \text{ avec } (1 + \varepsilon w(n_0)) B_{n_0}, \\ &B_n, \quad n \in \mathbf{A}(X), \\ &B_n \text{ avec } \varepsilon A_{n,n_0}, \end{aligned}$$

puisque toutes autres combinaisons seraient en  $\varepsilon^2$ .

La forme générale d'un opérateur  $A^\bullet$  est donc de la forme :

$$A^\bullet = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{A}^*(X)} M^\mathbf{n} B_\mathbf{n} + \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbf{A}(X)^*} M^{\mathbf{n} n_0 \mathbf{m}} (1 + \varepsilon w(n_0)) B_\mathbf{n} B_{n_0} B_\mathbf{m} + \varepsilon \sum_{\substack{\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbf{A}(X)^* \\ l \in \mathbf{A}(X)}} M^{\mathbf{n}[l+n_0]\mathbf{m}} B_\mathbf{n} A_{l,n_0} B_\mathbf{m}, \quad (21.1)$$

où  $B_\mathbf{n} A_{l,n_0} B_\mathbf{m} = B_\mathbf{n} [B_l, B_{n_0}] B_\mathbf{m}$ .

Soit  $var_i(M^\bullet)$  le moule associé à la transformation par l'automorphisme  $\Theta_{n_0}$  qui dépend de la position  $i$  de  $B_{n_0}$  dans l'écriture moulienne de  $\tilde{Y}$ . C'est précisément ce moule qui rend le diagramme précédent commutatif dont on va déterminer l'expression.

On peut alors écrire  $\tilde{Y}$  :

$$\tilde{Y} = X + \varepsilon \sum_{i \geq 1} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{A}(X)^*} var_i(M^\bullet)^{\mathbf{u}n_0\mathbf{w}} B_{\mathbf{u}} B_{n_0} B_{\mathbf{w}} \quad (\text{Form. Var})$$

Ainsi pour déterminer l'expression de la variance, on va procéder par identification sur les comoules grâce à la dernière expression.

Prenons un mot  $\mathbf{u}n_0\mathbf{w}$  dans **Form. Var** et comparons avec :

$$\begin{aligned} w(n_0)M^{\mathbf{n}n_0\mathbf{m}} B_{\mathbf{n}} B_{n_0} B_{\mathbf{m}} + M^{\mathbf{n}[l+n_0]\mathbf{m}} B_{\mathbf{n}} A_{l,n_0} B_{\mathbf{m}} = \\ = w(n_0)M^{\mathbf{n}n_0\mathbf{m}} B_{\mathbf{n}} B_{n_0} B_{\mathbf{m}} + M^{\mathbf{n}[l+n_0]\mathbf{m}} B_{\mathbf{n}} B_l B_{n_0} B_{\mathbf{m}} - M^{\mathbf{n}[l+n_0]\mathbf{m}} B_{\mathbf{n}} B_{n_0} B_l B_{\mathbf{m}}. \end{aligned}$$

Pour le premier terme à droite de l'équation, il suffit de poser  $\mathbf{u} = \mathbf{n}$  et  $\mathbf{m} = \mathbf{w}$ .

Dans le second terme, on a  $\mathbf{n}l = \mathbf{u}$  donc  $\mathbf{n} = \mathbf{u}^- = u_1 \cdots u_{r-1}$  et  $l = u_r$  si  $\mathbf{u} = u_1 \cdots u_r$ . Et on pose  $\mathbf{m} = \mathbf{w}$ .

Enfin l'identification du troisième terme donne  $\mathbf{n} = \mathbf{u}$  et  $l\mathbf{m} = \mathbf{w}$  avec  $l = w_1$  et  $\mathbf{m} = \mathbf{w}^+ = w_2 \cdots w_r$  si  $\mathbf{w} = w_1 \cdots w_r$ .

On obtient ainsi le moule de la variance :

**Proposition 16.** *Soit  $M^\bullet$  un moule, alors le moule de la variance en position  $i$  associée aux transformations précédentes est donné par :*

$$var_i(M^\bullet)^{\mathbf{u}n_0\mathbf{w}} = w(n_0)M^{\mathbf{u}n_0\mathbf{w}} + M^{\mathbf{u}^-[u_r+n_0]\mathbf{w}} - M^{\mathbf{u}[n_0+w_1]\mathbf{w}^+}$$

avec  $\ell(u) = i - 1$ , et on complète avec le mot  $\mathbf{w}$ .

La variance permet d'obtenir une manière récursive de calculer le moule de la correction en montrant que la variance du moule de la correction vérifie (voir [34, Proposition 3.1, p.270]) :

**Proposition 17.** *Le moule de la correction  $Carr^\bullet$  est calculable par récurrence par :*

$$var_i(Carr^\bullet)^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{a}n_0\mathbf{b}=\mathbf{n}} Carr^{\mathbf{a}n_0\mathbf{c}} Carr^{\mathbf{b}} - \sum_{\mathbf{a}b n_0\mathbf{c}=\mathbf{n}} Carr^{\mathbf{a}n_0\mathbf{c}} Carr^{\mathbf{b}},$$

où la lettre  $n_0$  est en position  $i$  du mot  $\mathbf{n}$  avec les conditions  $Carr^\emptyset = 0$ ,  $Carr^{\mathbf{n}} = 0$  si  $w(\mathbf{n}) \neq 0$  et  $Carr^{\mathbf{n}} = 1$  si  $w(\mathbf{n}) = 0$  avec  $\ell(n) = 1$ .

## 21.3 Démonstration du Lemme 34

1) En utilisant cette définition :

$$\begin{aligned} I^\emptyset - Carr^\emptyset &= ((I^\bullet) - M^\bullet)^{\circ 0})^\emptyset \\ &= I^\emptyset - M^\emptyset, \end{aligned}$$

comme  $I^\emptyset = M^\emptyset = 0$ , on a  $Carr^\emptyset = 0$ .

2) Soit  $\mathbf{n} = n_1 \cdots n_r$  un mot non résonant de longueur  $r$ , alors on a :

$$I^\mathbf{n} - Carr^\mathbf{n} = ((I^\bullet - M^\bullet)^\circ r)^\mathbf{n},$$

si  $\mathbf{n}$  est une lettre i.e  $\ell(\mathbf{n}) = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} I^\mathbf{n} - Carr^\mathbf{n} &= ((I^\bullet - M^\bullet)^\circ 1)^\mathbf{n} \\ &= (I^\bullet - M^\bullet)^{\|\mathbf{n}\|} (I^\bullet - M^\bullet)^\mathbf{n}, \end{aligned}$$

où  $M^{\|\mathbf{n}\|} = M^\mathbf{n} = 0$  et  $I^\mathbf{n} = I^{\|\mathbf{n}\|} = 1$  d'où  $Carr^\mathbf{n} = 0$ .

Si la longueur du mot  $\mathbf{n}$  est supérieure ou égale à 2 :

$$\begin{aligned} I^\mathbf{n} - Carr^\mathbf{n} &= ((I^\bullet - M^\bullet)^\circ r)^\mathbf{n} \\ &= ((I^\bullet - M^\bullet)^\circ r+1)^\mathbf{n} \\ &= ((I^\bullet - M^\bullet) \circ (I^\bullet - M^\bullet)^\circ r)^\mathbf{n} \\ &= ((I^\bullet - M^\bullet) \circ (I^\bullet - Carr^\bullet))^\mathbf{n} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq r} \sum_{w_1 \cdots w_k = \mathbf{n}} (I^\bullet - M^\bullet)^{\|w_1\| \cdots \|w_k\|} (I^\bullet - Carr^\bullet)^{w_1} \cdots (I^\bullet - Carr^\bullet)^{w_k}. \end{aligned}$$

Par récurrence, on va supposer que le résultat est vérifié en longueur  $r-1$ . Comme  $\mathbf{n}$  est non résonnant, parmi toutes les décompositions en  $k$  mots de  $\mathbf{n}$  il existe au moins un sous-mot qui est non résonnant dans chaque somme, on note  $\mathbf{n}_j$  ce mot. Alors par récurrence,  $I^{w_j} - Carr^{w_j} = 0$  si  $\ell(w_j) \geq 2$ .

Si ce sous-mot  $w_j$  est une lettre, on s'intéresse au terme  $(I^\bullet - M^\bullet)^{\|w_1\| \cdots \|w_j\| \cdots \|w_k\|}$ , car  $\mathbf{n}$  est non résonnant et  $\|w_1\| \cdots \|w_j\| \cdots \|w_k\|$  aussi, d'où  $M^{\|w_1\| \cdots \|w_j\| \cdots \|w_k\|} = 0$  par définition d'une forme prénormale, de plus  $\ell(\mathbf{n}) \geq 2$ ,  $I^{\|w_1\| \cdots \|w_j\| \cdots \|w_k\|} = 0$ .

3) On démontre ce résultat par récurrence sur la longueur. Si  $\ell(\mathbf{n}) = 2$ ,  $\mathbf{n} = n_1 \cdot n_2$ . Si  $n_1$  est résonnant,  $\mathbf{n}$  est résonnant,  $n_2$  l'est aussi. On a donc :

$$\begin{aligned} Carr^\mathbf{n} &= -(I^{\|\mathbf{n}\|} - Carr^{\|\mathbf{n}\|})(I^\mathbf{n} - Carr^\mathbf{n}) \\ &\quad - (I^{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} - Carr^{\|n_1\| \cdot \|n_2\|})(I^{n_1} - Carr^{n_1})(I^{n_2} - Carr^{n_2}). \end{aligned} \tag{21.2}$$

Comme  $I^{\|\mathbf{n}\|} - Carr^{\|\mathbf{n}\|} = 1 - 1 = 0$  et  $I^{n_1} - Carr^{n_1} = 0$ , on a  $Carr^\mathbf{n} = 0$  si  $\ell(\mathbf{n}) = 2$ . Maintenant supposons le résultat vérifié en longueur  $r-1$ . Considérons  $\mathbf{n} = n_1 \cdot \dots \cdot n_r$  tel que la lettre  $n_j$  est résonnante. Étudions l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} I^\mathbf{n} - Carr^\mathbf{n} &= [(I^\bullet - M^\bullet)^\circ r]^\mathbf{n}, \\ &= \sum_{1 \leq k \leq r} \sum_{w_1 \cdots w_k = \mathbf{n}} (I^\bullet - M^\bullet)^{\|w_1\| \cdots \|w_k\|} (I^\bullet - Carr^\bullet)^{w_1} \cdots (I^\bullet - Carr^\bullet)^{w_k}. \end{aligned} \tag{21.3}$$

Il existe un entier  $l$  tel que  $n_j$  apparaît dans la décomposition d'un mot  $w_l$  pour  $1 \leq l \leq k$ .

Soit  $\ell(w_l) = 1$ , alors  $w_l = n_j$  et  $I^{w_l} - Carr^{w_l} = 1 - 1 = 0$ , sinon  $\ell(w_l) \geq 2$ , donc par hypothèse de

réurrence  $Carr^{w_l} = 0$  et  $I^{w_l} = 0$  par définition donc  $Carr^n = 0$ .

## 21.4 Démonstration du Lemme 35

1) Soit  $n$  une lettre résonante, i.e  $\omega(n) = 0$ . Par définition,

$$I^n - Carr^n = I^n - M^n,$$

donc  $Carr^n = M^n$ , où  $M^\bullet$  est le moule d'une forme prénormale. On peut prendre par exemple le moule  $Tram^\bullet$  défini par exemple dans [21, p.381, 382], qui est le moule de la forme normale de Poincaré-Dulac. Alors  $Carr^n = Tram^n = 1$ .

2) Si  $\omega(n_1 n_2) = 0$ , on a  $\omega(n_1) = -\omega(n_2)$  comme  $\omega$  est un morphisme. En utilisant la formule de la variance on a :

$$\begin{aligned} \omega(n_1)Carr^{n_1 \cdot n_2} + Carr^{n_1 + n_2} &= Carr^{n_1}Carr^{n_2} + Carr^{n_1 n_2}Carr^\emptyset \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $Carr^{n_1} = Carr^{n_2} = Carr^\emptyset = 0$  puisque  $\omega(n_i) \neq 0$ . Finalement :

$$Carr^{n_1 \cdot n_2} = \frac{-1}{\omega(n_1)}.$$

On peut aussi démontrer ce résultat avec l'autre définition du moule de la correction :

$$\begin{aligned} I^{n_1 \cdot n_2} - Carr^{n_1 \cdot n_2} &= ((I^\bullet - M^\bullet)^{\circ 2})^{n_1 \cdot n_2} \\ &= ((I^\bullet - M^\bullet) \circ (I^\bullet - Carr^\bullet))^{n_1 \cdot n_2} \\ &= (I^\bullet - M^\bullet)^{\|n_1 \cdot n_2\|} (I^\bullet - Carr^\bullet)^{n_1 \cdot n_2} + \\ &\quad + (I^\bullet - M^\bullet)^{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} (I^\bullet - Carr^\bullet)^{n_1} (I^\bullet - Carr^\bullet)^{n_2}. \end{aligned}$$

On utilise encore le moule  $Tram^\bullet$ . En longueur 2, on a  $Carr^{n_1 \cdot n_2} = Tram^{n_1 \cdot n_2} = \frac{\omega(n_2) - \omega(n_1)}{\omega(n_1)\omega(n_2)}$ . Comme  $\omega(n_1) = -\omega(n_2)$ , on obtient :

$$Carr^{n_1 \cdot n_2} = \frac{1}{\omega(n_1)}.$$

Les résultats sont égaux à un signe -1 près. La raison est que dans [33] et [34], les crochets de Lie emboîtés sont sous la forme  $[B_{n_1 \dots n_r}] = [B_{n_r}, [B_{n_{r-1}}, [\dots [B_{n_2}, B_{n_1}] \dots]]$  alors que dans [24] et [21] ils sont dans l'autre sens :  $[B_{n_1 \dots n_r}] = [\dots [B_{n_1}, B_{n_2}], \dots], B_{n_{r-1}}, B_{n_r}]$ . Et on a la relation :

$$[B_{n_r}, [B_{n_{r-1}}, [\dots [B_{n_2}, B_{n_1}] \dots]] = (-1)^{r+1} [B_{n_1}, B_{n_2}], \dots, B_{n_{r-1}}, B_{n_r}].$$

3) On remarque qu'en longueur 3, il n'existe pas de sous-mot résonant sinon il existerait une lettre résonante et la correction est alors réduite à 0 par le Lemme précédent.



En utilisant la formule de la variance, on a :

$$\begin{aligned} \omega(n_1)Carr^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} + Carr^{(n_1+n_2) \cdot n_3} &= Carr^{n_1 \cdot n_3} Carr^{n_2} \\ &+ Carr^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} Carr^{\emptyset} + Carr^{n_1} Carr^{n_2 \cdot n_3}. \end{aligned} \quad (21.4)$$

On suppose  $\omega(n_1) \neq 0 \neq \omega(n_2 \cdot n_3)$  et on remarque que  $n_1 \cdot n_3$  est non résonant sinon  $n_2$  le serait aussi et la correction serait nulle. On a donc :

$$Carr^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} = \frac{1}{\omega(n_1)(\omega(n_1) + \omega(n_2))}.$$

Comme en longueur, on utilise le moule  $Tram^\bullet$  pour obtenir une expression explicite :

$$\begin{aligned} I^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} - Carr^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} &= \left( (I^\bullet - Tram^\bullet)^{\circ 3} \right)^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} \\ &= \left( (I^\bullet - Tram^\bullet)^{\circ 4} \right)^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} \\ &= (I^\bullet - Tram^\bullet) \circ (I^\bullet - Carr^\bullet)^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} \\ &= -Tram^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } Carr^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} = Tram^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} = \frac{1}{\omega(n_1)(\omega(n_1) + \omega(n_2))}.$$

## 21.5 Démonstration du Théorème 21

Pour tout  $k = 1, \dots, 2p$ , on a en utilisant le Théorème de projection :

$$\begin{aligned} Carr_{2p,k}(X) &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=2p, \ell(\mathbf{n})=i}} Carr^{\mathbf{n}}[B_{\mathbf{n}}], \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=2p, \ell(\mathbf{n})=k}} Carr^{\mathbf{n}}(xy)^{\frac{p(\mathbf{n})}{2}} (P(\mathbf{n})x\partial_x + Q(\mathbf{n})y\partial_y), \\ &= \frac{1}{k!} (xy)^p \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{A}(X)^* \\ p(\mathbf{n})=2p, \ell(\mathbf{n})=k}} Carr^{\mathbf{n}}(P(\mathbf{n})x\partial_x + Q(\mathbf{n})y\partial_y). \end{aligned} \quad (21.5)$$

Par définition de  $Ca_{2p,k}(X)$  on obtient ;

$$Carr_{2p,k}(X) = \frac{1}{k!} (xy)^p \left[ Ca_{2p,k}(X)x\partial_x + \overline{Ca_{2p,k}(X)}y\partial_y \right]. \quad (21.6)$$

## 21.6 Démonstration du Lemme 47

Soient  $B_n = B_{(n^1, n^2)} = x^{n^1} y^{n^2} (p_n x \partial_x + q_n y \partial_y)$  et  $B_m = B_{(m^1, m^2)} = x^{m^1} y^{m^2} (p_m x \partial_x + q_m y \partial_y)$ . Alors le crochet de Lie de  $B_n$  avec  $B_m$  est :

$$\begin{aligned} [B_{nm}] &:= [B_n, B_m] = x^{n^1+m^1} y^{n^2+m^2} (P_{n,m} x \partial_x + Q_{n,m} y \partial_y), \\ &= x^{|nm|^1} y^{|nm|^2} (P_{n,m} x \partial_x + Q_{n,m} y \partial_y) \end{aligned}$$

où  $P_{n,m}$  et  $Q_{n,m}$  sont des polynômes en les coefficients de  $B_n$  et  $B_m$ , précisément :

$$\begin{aligned}P_{n,m} &= (m^1 - n^1)p_n p_m + m^2 q_n p_m - n^2 p_n q_m, \\Q_{n,m} &= (m^2 - n^2)q_n q_m + m^1 p_n q_m - n^1 q_n p_m.\end{aligned}$$

On démontre facilement par récurrence que tous les crochets de Lie en n'importe quelle longueur sont de la forme ci-dessus.



# Bibliographie

- [1] V. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, 3ème édition, Editions MIR, Libraire du Globe, 1996.
- [2] A. Beauville, *Géométrie des tissus*, Séminaire N.Bourbaki, 1978-1979, exp. n°531, p.103-119.
- [3] R. Benedetti, J.-J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann, Editeurs des sciences et des arts, 1990.
- [4] W. Blaschke, G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.
- [5] G. Bogfjellmo, A. Schmeding, *The geometry of characters of Hopf algebras*, arXiv :1704.01099, 25 p., 2017.
- [6] G. Bogfjellmo, R. Dahmen, A. Schmeding, *Overview of (pro-)Lie group structures on Hopf algebra character groups*, arXiv :1711.05963, 31 p., 2017.
- [7] Ch. Brouder, *Runge-Kutta methods and renormalization*, The European Physical Journal C - Particles and Fields February 2000, Volume 12, Issue 3, pp 521–534.
- [8] Y. Bruned, C. Curry, K. Ebrahimi-Fard, *Quasi-shuffle algebras and renormalisation of rough differential equations*, arxiv :1801.02964, 2018.
- [9] Y. Bruned, M. Hairer, L. Zambotti, *Algebraic renormalisation of regularity structures*, arxiv :1610.08468v2, 85.p, 2017.
- [10] A.D. Brujno, *Analytic form of differential equations*, Trans. Moscow Math. Soc., vol.25 (1971).
- [11] J.C. Butcher, *Numerical methodes of Ordinary Differential Equations.*, Third Edition, 2016.
- [12] E. Cartan, *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 25, 57-194, 1908.
- [13] J. Chavarriga, M. Sabatini, *A survey of isochronous centers*, Qual. Theory Dyn. Syst. 1 (1999), 1-70.
- [14] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Internat. Math. Res. Notices 2001 (2001) 395-408.
- [15] K.T. Chen, *Iterated integrals and exponential homomorphisms*, Proc. London Math. Soc. (3) 4,(1954), 502-512.

- 
- [16] Y. Chen, V. G. Romanovski, W. Zhang, *Non-isochronicity of the center for polynomial Hamiltonian systems with even degree nonlinearities*, Nonlinear Analysis 68 (2008), p. 2769-2778.
  - [17] A. Cima, F. Maosas, J. Villadelprat, *Isochronicity for several classes of Hamiltonian systems.*, J. Differential Equations 157 (1999), no. 2, 373-413.
  - [18] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys, 199(1) :203–242, arXiv :hep-th/98 08042, 1998.
  - [19] R. Conti, *Centers of planar polynomial systems. A review.* LE MATEMATCHE Vol. LIII(1998)-Fasc.II, pp.207-240.
  - [20] D.A. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Fourth Edition, Springer, 2015.
  - [21] J. Cresson, *Calcul Moulien*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Mathématiques Vol. XVIII, no. 2, 2009, pp. 307-395.
  - [22] J. Cresson, *Obstruction à la linéarisation des champs de vecteurs polynomiaux.*, Canad. Math. Bull. 45 (2002), no. 3, 355-363.
  - [23] J. Cresson, J. Palafox, *Isochronous centers of polynomial Hamiltonian systems and a conjecture of Jarque and Villadelprat*, arXiv :1605.07775, 32p., (2016).
  - [24] J. Cresson, J. Raissy, *About the Trimmed and the Poincaré-Dulac Normal Form of Diffeomorphisms*, Bollettino U.M.I (9) V (2012), 55-80.
  - [25] J. Cresson, B. Schuman, *Formes normales et problème du centre*, Bulletin des Sciences Mathématiques 125, no.3, 235-252, 2001.
  - [26] J-P. Demailly, *Analyse Numérique et Equations Différentielles*, Collection Grenoble Sciences, EDP SCIENCES, 2006.
  - [27] A. Dür, *Möbius functions, incidence algebras and power series representations*, Lect. Notes math. 1202, Springer (1986).
  - [28] K. Ebrahimi-Fard, S.J.A. Malham, F. Patras and A. Wiese, *Flows and stochastic Taylor series in Ito calculus*. J. Phys. A : Math. Theor. 48 (2015) 495202.
  - [29] Ecalle J., *Les fonctions résurgentes*, Vol.1-3, Les algèbres de fonctions résurgentes, Publications Mathématiques d'Orsay, (1981-1985).
  - [30] Ecalle J., *Singularités non abordables par la géométrie*, Ann. Inst. Fourier, 42 (1-2), 1992, 73-164.
  - [31] J. Ecalle, D. Schlomiuk, *The nilpotent and distinguished form of resonant vector fields or diffeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier 43 5 (1993) 1407-1483.
  - [32] J. Ecalle, B. Vallet, *The arborification-coarborification transform : analytic, combinatorial and algebraic aspects*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 6, 13 no. 4, p. 575-657, 2004.

- [33] J. Ecalle, B. Vallet, *Prenormalization, correction, and linearization of resonant vector fields or diffeomorphisms*, Prépublication d'Orsay (1995) 101 p.
- [34] J. Ecalle, B. Vallet, *Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms*, Math. Z. 229 (1998) 249-318.
- [35] L. H. Eliasson, *Hamiltonian systems with linear normal form near an invariant torus*, in Non-linear Dynamics Turchetti Ed., World Scientific, Singapore, 1989.
- [36] F.Fauvet, F.Menous, *Ecalle's arborification transforms and Connes-Kreimer Hopf algebra*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 50 (2017), no. 1, 39–83.
- [37] L.Foissy, *An introduction to Hopf algebras of trees*, Preprint, 2013.
- [38] J-P. Francoise, R. Pons, *Les conditions du centre pour un champ de vecteurs quadratiques*, CRAS 318 (1994), p. 909-912.
- [39] J-P. Francoise, *Géométrie analytique et systèmes dynamiques*, PUF, 1995.
- [40] G.. Gallavotti, *A criterion of integrability for perturbed nonresonant harmonic oscillators, "wick ordering" of the perturbations in classical mechanics and invariance of the frequency spectrum*, Communication in Mathematical Physics Vol. 87, p.365-383, 1982.
- [41] L. Gavrilov, *Isochronicity of plane polynomial Hamiltonian systems*, Nonlinearity 10 (1997) 433-448.
- [42] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser, Mathematics : Theory and Applications, 1994.
- [43] R.Gérard, *Sur le théorème de Maillet*, Funkcial. Ekvac., 34 (1991), 117-125.
- [44] R. Gerard, H. Tahara, *Formal Power Series Solutions of Nonlinear First Order Partial Differential Equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 41 (1998), 133-166.
- [45] R. Gerard, H. Tahara, *Singular Nonlinear Partial Differential Equations*, Aspects of Mathematics, Vieweg, 280p ,1996.
- [46] J. Giné, M. Grau, *Linearizability and integrability of vectors fields via commutation*, J.Math. Anal. Appl. 319 326-332, 2006.
- [47] V.V. Goldberg, V.V. Lychagin, *On the Blaschke conjecture for 3-webs*, J. Geom. Anal. 16 (1) 69–115, 2006.
- [48] J. Grifone, Z. Muzsnay, J. Saab, *On the linearizability of 3-webs*, Nonlinear Anal. 47 (4), 2643–2654, 2001.
- [49] R.L. Grossman, R.G. Larson. *Hopf-algebraic structure of combinatorial objects and differential operators*, Israel J. Math., 72(1-2) : 109–117, 1990.

- 
- [50] M. Gubinelli, *Ramification of rough paths*, Journal of differential equations 248, no.4, (2010), 693-721.
  - [51] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric Numerical Integration*, Springer, 2004.
  - [52] A. Hénaut, *Infinitesimal symmetries for planar webs through meromorphic connections*, version arXiv :1709.10103, 2017.
  - [53] A. Hénaut, *Sur la linéarisation des tissus de  $\mathbb{C}^2$* , *Topology*, Vol.32, No.3, p.531-542,1993.
  - [54] Y. Ilyashenko. S. Yakovenko, *Lectures on Analytic Differential Equations*, American Mathematical Society, Volume 86, 2007.
  - [55] X. Jarque, J. Villadelprat, *Nonexistence of isochronous centers in planar polynomial Hamiltonian systems of degree four*, J. Differential Equations 180 (2002), no. 2, 334-373.
  - [56] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 1998.
  - [57] J. Llibre, V. G. Romanovski, *Isochronicity and linearizability of planar polynomial Hamiltonian systems*, J. Differential Equations 259 (2015), no. 5, 1649-1662.
  - [58] F. Loray, *Feuilletages Holomorphes Singuliers*, cours donné à Fes, 2012.
  - [59] W.S. Loud, *Behaviour of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers*, Contrib. Differential Equations 3 (1964) 21-36.
  - [60] E.Maillet, *Sur les séries divergentes et les équations différentielles*, Ann. Ecole Normale, Ser. 3, 20 (1903), 487-518
  - [61] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, "Combinatorial Group Theory," Chap. 5, Interscience, New York, 1966.
  - [62] B.Malgrange, *Sur le théorème de Maillet*, Asymptotic Analysis, 2 (1989), 1-4.
  - [63] D. Manchon, *A short survey on pre-Lie algebras*, E. Schrödinger Institut Lectures in Math. Phys., Eur. Math. Soc, A. Carey Ed., 2011.
  - [64] P. Mardesic, C. Rousseau, B. Toni, *Linearisation of isochronous centers*, J. Differential equations 121, 67-108, 1995.
  - [65] G. Morin, *Calcul moulien et théorie des formes normales classiques et renormalisés*, Thèse de doctorat, 2010.
  - [66] A. Murua, J.M. Sanz-Serna, *Formal series and numerical integrators : some history and some new techniques*, SIAM, 2015.
  - [67] Z. Muzsnay, *On the linearizability of 3-webs : End of controversy*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356, 97-99, 2018.
  - [68] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Second Edition, Springer, 1998.

- [69] P.J. Olver, *Equivalence, Invariants and Symmetry*, Cambridge University Press, 1995.
- [70] P. Orlik, H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, volume 300 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [71] J.V. Pereira, *Algebraization of Codimension One Webs*, Séminaire Bourbaki, 2006-2007, exp. n°974.
- [72] J.V. Pereira, L.Pirio, *An Invitation to Web Geometry*, Springer, 2015.
- [73] C. Reutenauer, *Free Lie algebras*, London Math. Soc. Monographs, new series 7, 1993.
- [74] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 27, 265-291, 1980.
- [75] W. R. Schmitt, *Incidence Hopf algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra, 96, 299–330, 1994.
- [76] J-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, W.C. Benjamin Inc, 1965.
- [77] B. Schuman, *Sur la forme normale de Birkhoff et les centres isochrones*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. 322, no. 1, 21-24, 1996.
- [78] B. Schuman, *Correction et linéarisation des champs de vecteurs polynomiaux*, unpublished, 1999.
- [79] B. Schuman, *Une classe d'hamiltoniens polynomiaux isochrones*, Canad. Math. Bull. 44, no. 3, 323-334, 2001.
- [80] M. Urabe, *Potential forces which yield periodic motions of a fixed period*, J. Math. Mech. 10, 569-578, 1961.
- [81] H. Zoladek, *Quadratic systems with center and their perturbations*, Journal of differential equations 109, p.223-273, 1994.