Prueba evaluable de programación con Maxima

Criterios de evaluación

Cada uno de los ejercicios que componen esta prueba evaluable sobre la primera parte de la asignatura Física Computacional 1 se evaluará, de 0 a 10 puntos, de acuerdo a los siguientes criterios de evaluación:

- El código aportado realiza correctamente las tareas que se pedían en el enunciado, cálculos simbólicos y/o numéricos, representaciones gráficas, etc., (sin errores sintácticos): **5 puntos**
- El código está bien estructurado, se entiende claramente lo que se hace en cada parte del mismo, la estructura es lógica y está ordenada: **2 puntos**
- El código realiza las tareas que se piden de manera eficiente, las funciones pedidas están programadas correctamente, evitando el uso de variables globales: **1.5 puntos**
- El código está documentado con comentarios que facilitan entender qué es lo que se está haciendo en cada parte del mismo, incluyendo descripción del *input* y *output* y la finalidad del código: **1.5 puntos**

La calificación final de esta parte será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en todos los ejercicios que forman esta prueba, siempre y cuando se haya obtenido una calificación mínima de 5 puntos en todos ellos. Si uno (o más) de los ejercicios propuestos no alcanzan la calificación mínima de 5 puntos la calificación global de la prueba será *suspenso*, y no se calculará la media.

Nota:

- Es muy importante darse cuenta de que lo que se pide en cada uno de estos ejercicios es la programación de una *función*, no la resolución de un problema concreto.
- En la medida de lo posible ajústese al input y output especificado en cada ejercicio (aunque puede introducir pequeñas modificaciones si lo considera preciso, en ese caso introduzca una breve frase explicando las modificaciones introducidas).
- Muy importante, evite la definición de *variables globales* fuera de estas funciones.

- También le recomendamos que, antes de realizar estos ejercicios, revise la colección de problemas resueltos que puede encontrar en la página de la asignatura, así como las soluciones de las pruebas evaluables anteriores.

Ejercicio 1

Cambios de variable en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden. Consideramos una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, dada por

$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) + c(x) = 0, \qquad f(x_0) - f_0 = 0$$

donde $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ son funciones arbitrarias de la variable x y el punto x_0 de aplicación de la condición inicial $f(x_0) = f_0$ es un punto arbitrario.

Aplicamos el cambio de variable $x \to y$ dado por la relación

$$x = x(y)$$

que define la variable *vieja* x como función de la variable *nueva* y. Para aplicar este cambio de variable a la anterior ecuación diferencial no basta con sustituir x por y por medio de la relación $x = x(y)$, antes tenemos que obtener una relación que nos permita calcular la derivada de f respecto a x en términos de la variable nueva, lo cual se obtiene por medio de la regla de la cadena. Además, necesitamos calcular dónde (es decir, en qué punto y_0) se aplica la condición inicial ($f(x_0) = f_0$) en términos de la variable nueva y.

El primer paso que debemos dar es encontrar la relación inversa $y = y(x)$, que se obtiene despejando y en función de x en la relación que define el cambio de variable. Por ejemplo, dado el cambio de variable $x = \ln y$ la relación inversa $y = y(x)$ está dada por $y = e^x$. Una vez hemos encontrado esta relación el resto del problema es trivial. La condición inicial $f(x_0) - f_0 = 0$ se transforma en $f(y_0) - f_0 = 0$, donde y_0 está dado por

$$y_0 = y(x_0)$$

y la primera derivada de $f(x)$ en términos de y se calcula como

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy(x)}{dx}\frac{df(y)}{dy}$$

En el lado derecho de esta relación tenemos dos factores: por un lado tenemos el factor $f'(y) = df(y)/dy$, que es función de la variable nueva y, y por otro el factor $y'(x) = dy(x)/dx$ que es función de la variable vieja x. Para obtener $f'(x)$ en términos de y debemos sustituir la dependencia respecto a x en la expresión $dy(x)/dx$ por su correspondiente expresión en términos de y, por medio de $x = x(y)$, con lo cual encontramos el factor $dy(x)/dx$ expresado en términos de y, que definimos como $y'(y)$. Una vez hemos realizado esta sustitución es cuando obtenemos $f'(x)$ expresado exclusivamente en términos de y. Por ejemplo, dado el cambio $x = \ln y$ encontramos

$$f'(x) = yf'(y)$$

De esta forma la ecuación diferencial de arriba se re-escribe en términos de la variable y como

$$a(y)y'(y)f'(y) + b(y)f(y) + c(y) = 0, \qquad f(y_0) - f_0 = 0$$

donde $y'(y)$ se calcula como hemos indicado y donde $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$ se obtienen al realizar la sustitución $x \to x(y)$ en las funciones de partida $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ correspondientes.

Por supuesto, para que todo esto sea posible es necesario que la relación inversa $y = y(x)$ exista y sea única, de lo contrario el cambio de variable no es invertible, y por tanto no sería un cambio de variable admisible. Para ello es necesario que la relación $x = x(y)$, considerada como una ecuación que determina la variable y en función de x, tenga solución única. Supondremos que esta condición se cumple en todo momento.

Para el Ejercicio 1 programe una función que realice el cambio de variable anterior, de acuerdo al siguiente *input* y *output*:

input:
- Lista con los nombres de la variable independiente (p. ej. x) y dependiente (p. ej. f).
- Lista $[x_0, f_0]$ que determina la condición inicial del problema, dada por $f(x_0) = f_0$.
- Expresión $a(x)f'(x) + b(x)f(x) + c(x)$ que define la EDO.
- Lista con el nombre y de la variable *nueva* (p. ej. y) y la expresión $x(y)$ que define a la variable x como función de y.

output: Lista con los siguientes dos elementos

- Lista $[y_0, f_0]$ que determina la condición inicial del problema en términos de la variable nueva, dada por $f(y_0) = f_0$.
- Expresión $a(y)y'(y)f'(y) + b(y)f(y) + c(y)$ que define la EDO, ambas en términos de la variable nueva.

Los pasos para realizar el cambio de variable, y el orden en el que hay que aplicar estos pasos, es:

1. Resolver $x = x(y)$ para hallar la relación $y = y(x)$.
2. Sustituir en $a(x)f'(x) + b(x)f(x) + c(x)$ el factor $f'(x)$ por $y'(y)f'(y)$, calculado como hemos indicado anteriormente.
3. Sustituir en el resultado anterior el factor $f(x)$ por $f(y)$.
4. Sustituir en el resultado anterior x por $x(y)$, con esto obtenemos la expresión $a(y)y'(y)f'(y) + b(y)f(y) + c(y)$.
5. Calcular el valor de y_0 por medio de $y_0 = y(x_0)$.

Ejercicio 2

Cambios de variable en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Consideramos una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, no necesariamente lineal, dada por

$$E(x, f(x), f'(x)) = 0, \qquad f(x_0) - f_0 = 0$$

donde la función $E(x, f(x), f'(x))$ es una función arbitraria.

Para el Ejercicio 2 programe una función que realice el cambio de variable comentado en el ejercicio anterior, de acuerdo al siguiente *input* y *output*:

input:
- Lista con los nombres de la variable independiente (p. ej. x) y dependiente (p. ej. f).
- Lista $[x_0, f_0]$ que determina la condición inicial del problema, dada por $f(x_0) = f_0$.
- Expresión $E(x, f(x), f'(x))$ que define la EDO.
- Lista con el nombre y de la variable *nueva* (p. ej. y) y la expresión $x(y)$ que define a la variable x como función de y.

output: Lista con los siguientes dos elementos

- Lista $[y_0, f_0]$ que determina la condición inicial del problema en términos de la variable nueva, dada por $f(y_0) = f_0$.
- Expresión $E(x(y), f(y), y'(y)f'(y))$ que define la EDO, ambas en términos de la variable nueva.

Los pasos para realizar el cambio de variable, y el orden en el que hay que aplicar estos pasos, es:

1. Resolver $x = x(y)$ para hallar la relación $y = y(x)$.
2. Sustituir en la expresión $E(x, f(x), f'(x))$ la dependencia en $f'(x)$ por $y'(y)f'(y)$, calculado como hemos indicado anteriormente.
3. Sustituir en el resultado anterior $f(x)$ por $f(y)$.
4. Sustituir en el resultado anterior x por $x(y)$, con esto obtenemos la expresión $E(x(y), f(y), y'(y)f'(y))$.
5. Calcular el valor de y_0 por medio de $y_0 = y(x_0)$.

Ejercicio 3

En este ejercicio vamos a generalizar los resultados anteriores al caso de cambios de variable en ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Consideramos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, no necesariamente lineal, dada por

$$E(x, f(x), f'(x), f''(x)) = 0, \qquad f(x_0) - f_0 = 0, \qquad f'(x_0) - v_0 = 0$$

donde la función $E(x, f(x), f'(x), f''(x))$ es una función arbitraria. Para aplicar el cambio de variable $x \to y$ definido por $x = x(y)$ debemos aplicar los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, junto con los correspondientes a la segunda derivada, que detallamos a continuación.

Suponemos que hemos encontrado la relación $y = y(x)$ (dada por la inversa de $x = x(y)$, tal y como se explica en el Ejercicio 1). Entonces, aplicando la regla de la cadena encontramos

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 y(x)}{dx^2}\frac{df(y)}{dy} + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2}$$

Igual que antes, para obtener $f''(x)$ escrito en términos de y exclusivamente debemos sustituir x por su expresión en términos de y ($x(y)$) en los factores $y''(x)$ y $y'(x)$ que han aparecido al aplicar dos veces la regla de la cadena. Al hacer esto es cuando encontramos la expresión

$$f''(x) = y''(y)f'(y) + \left(y'(y)\right)^2 f''(y)$$

en términos de la variable y exclusivamente. Por ejemplo, en el cambio $x = \ln y$ encontramos $y'(y) = y$, $y''(y) = y$.

Para el Ejercicio 3 programe una función que realice el cambio de variable comentado en el ejercicio anterior, de acuerdo al siguiente *input* y *output*:

input:
- Lista con los nombres de la variable independiente (p. ej. x) y dependiente (p. ej. f).
- Lista $[x_0, f_0, v_0]$ que determina las condiciones iniciales del problema, dadas por $f(x_0) = f_0$, $f'(x_0) = v_0$.
- Expresión $E(x, f(x), f'(x), f''(x))$ que define la EDO.
- Lista con el nombre y de la variable *nueva* (p. ej. y) y la expresión $x(y)$ que define a la variable x como función de y.

output: Lista con los siguientes dos elementos

- Lista $[y_0, f_0, v_0/y'(y_0)]$ que determina las condiciones iniciales del problema en términos de la variable nueva, dadas por $f(y_0) = f_0$, $f'(y_0) = v_0/y'(y_0)$
- Expresión $E(x(y), f(y), y'(y)f'(y), y''(y)f'(y) + (y'(y))^2 f''(y))$ que define la EDO, ambas en términos de la variable nueva.

Ya hemos indicado cómo se calculan las primeras y segundas derivadas de $f(x)$ en términos de la variable nueva. El orden en el que deben aplicarse las sustituciones en $E(x, f(x), f'(x), f''(x))$ es como el definido en los ejercicios anteriores:

- En primer lugar realizamos las sustituciones para las derivadas de mayor grado, en este caso la derivada de mayor grado es

$$f''(x) \to y''(y)f'(y) + \left(y'(y)\right)^2 f''(y)$$

- A continuación vamos sustituyendo sucesivamente las derivadas de orden inferior, en este caso la siguiente (y última) derivada es la de primer orden

$$f'(x) \to y'(y)f'(y)$$

- Una vez se han realizado las sustituciones para todas las derivadas realizamos las sustituciones para las relaciones funcionales, en este caso

$$f(x) \to f(y)$$

- Finalmente sustituimos la dependencia respecto a x por su expresión correspondiente en términos de y

$$x \to x(y)$$

Ejercicio 4

Suponemos que por medio del cambio de variable adecuado ($x = x(y)$) hemos conseguido resolver de manera analítica una ecuación diferencial para la variable $f = f(x)$. Al hacer esto lo que obtenemos es la solución en términos de y, es decir, $f = f(y)$. Dada una función $f = f(y)$ y una relación $x = x(y)$ programe una función que muetre la gráfica de f frente a x. Para ello deberá usar la función `plot2d` con la opción `parametric`, para general la gráfica de $[x(y), f(y)]$ tomando y como variable independiente.