

PEC_Curso_19/20

Procesos de Poisson y desintegración radiactiva

1. Introducción y objetivos

Muchos procesos de gran relevancia en distintos ámbitos de la física pueden ser aproximados mediante procesos de Poisson. En esta PEC vamos a estudiar este tipo de procesos. Comenzaremos describiendo sus principales propiedades estadísticas (secciones 2-6). Se recomienda leer esta parte intentando entender los conceptos principales, no es necesario entender los resultados en profundidad. A continuación (sección 7) presentaremos un ejemplo de proceso de Poisson, la desintegración radiactiva de un conjunto de radionúclidos. Después (sección 8) mostraremos un modelo simple para simularla computacionalmente y a través de una serie de ejercicios (sección 9) comprobaremos que este sistema se comporta como un proceso de Poisson.

2. Distribución de Poisson

La *distribución de probabilidad de Poisson* es observada en una gran cantidad de procesos denominados de *Poisson*. Esta distribución caracteriza una variable aleatoria discreta X cuyos valores son enteros no negativos $x = \{0, 1, 2, \dots\}$ y cuya función de probabilidad es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1)$$

siendo λ un parámetro dado. Se puede demostrar fácilmente que ese parámetro proporciona el valor esperado (o valor medio) de X , y también su varianza, esto es:

$$E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda. \quad (2)$$

Teorema 1. Si tenemos k variables aleatorias independientes X_1, \dots, X_k y si X_i tiene una distribución de Poisson con media λ_i ($i = 1, \dots, k$), entonces la suma $X_1 + \dots + X_k$ tiene una distribución de Poisson con media $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$.

3. Procesos de Poisson

Las variables aleatorias con distribución de Poisson se utilizan para representar el número X de ocurrencias de un determinado suceso durante un periodo concreto de tiempo o en una región fija del espacio. Supongamos por ejemplo, que tenemos un conjunto de radionúclidos que se desintegran espontáneamente emitiendo radiación (*radiactividad natural*); podemos describir el número de desintegraciones que se

observarán en un determinado intervalo de tiempo mediante una variable aleatoria X con una distribución de Poisson. Imaginemos ahora un haz de fotones de alta energía que inciden perpendicularmente sobre una delgada lámina de material; el número de fotones que atravesarán el material sin interactuar con él, es decir, sin sufrir ningún proceso de “*scattering*” también obedece una distribución de Poisson. De la misma forma se pueden describir estadísticamente procesos tan variados como el número de llamadas telefónicas recibidas en una central telefónica durante un periodo de tiempo fijo, el número de máquinas o dispositivos que se estropean en un intervalo de tiempo o el número de errores en una página de un libro. Todos estos fenómenos son ejemplos de *procesos de Poisson*, aunque muchos de ellos no lo sean estrictamente.

Se puede demostrar que si el proceso que genera estas ocurrencias satisface tres condiciones matemáticas específicas, entonces la distribución de la variable aleatoria que describe estas ocurrencias debe ser de Poisson.

Condición 1. La primera condición es que el número de ocurrencias en dos intervalos cualesquiera de tiempo (o espacio) disjuntos deben ser independientes entre sí. Por ejemplo, el hecho de que haya muchos fotones que han sufrido algún proceso de dispersión en el primer centímetro de material no afecta para nada la probabilidad de que un fotón superviviente interactúe con el material en el próximo milímetro, la probabilidad de interacción por unidad de longitud es la misma a lo largo de todo el material (siempre que el material sea perfectamente homogéneo, claro está). Por consiguiente, en un proceso de Poisson, el número medio (o número esperado) de ocurrencias por unidad de tiempo o espacio, que denotaremos mediante λ , es constante a lo largo de todo el proceso. Está claro que en el ejemplo de la desintegración de los radionúclidos o en el del haz de fotones atravesando un medio, este número medio de ocurrencias no será constante ya que a medida que pasa el tiempo, o a medida que los fotones profundizan en el material, van quedando menos núcleos inestables o fotones sin interactuar, respectivamente, por lo que el número de medio de desintegraciones o interacciones disminuirá con el tiempo/distancia. Sin embargo, la fracción de radionúclidos que se desintegran por unidad de tiempo y la fracción de fotones que interactúan por unidad de longitud sí que será constante.

Condición 2. La segunda condición es que la probabilidad de que tenga lugar una ocurrencia durante cualquier intervalo de tiempo o espacio muy pequeño debe ser aproximadamente proporcional a la longitud de ese intervalo, siendo λ la constante de proporcionalidad. Más formalmente, para cualquier intervalo de tiempo de longitud dt (si se tratase de espacio sería dx), la probabilidad de que se produzca al menos una ocurrencia en ese intervalo tiene la forma $\lambda dt + o(dt)$, siendo $o(dt)$ una función que tiende a 0, cuando $dt \rightarrow 0$, más rápidamente que el propio tiempo dt . Expresada matemáticamente, esta condición implica que $\lim_{dt \rightarrow 0} (o(dt)/dt) = 0$. Más adelante analizaremos en detalle cómo se deduce esto.

Condición 3. La probabilidad de que haya dos o más ocurrencias en cualquier intervalo de tiempo muy pequeño debe ser de menor orden que la probabilidad de que haya sólo una ocurrencia. Esta probabilidad de que haya dos o más ocurrencias está dada por el término $o(dt)$ en la condición 2. A medida que el intervalo se hace más pequeño, la probabilidad de dos o más ocurrencias se hará despreciable en comparación con la probabilidad de una ocurrencia. Del mismo modo, la probabilidad de una ocurrencia en ese intervalo será despreciable en comparación con la probabilidad de no ocurrencia.

Un proceso en el que se verifican las tres condiciones anteriores se denomina proceso de Poisson, y la constante positiva λ es el número esperado de ocurrencias por unidad de medida (unidad de tiempo, unidad de espacio, ...).

Las condiciones 2 y 3 pueden deducirse matemáticamente a partir de la función de probabilidad de la distribución de Poisson. Si tratamos de ocurrencias en el tiempo, en un intervalo de tiempo dt el número de ocurrencias tendrá una distribución de Poisson con media λdt . En consecuencia, la probabilidad de que no haya ninguna ocurrencia en ese intervalo valdrá: $\text{prob}(X=0) = f(0) = e^{-\lambda dt}$, la probabilidad de que tenga lugar una ocurrencia será: $\text{prob}(X=1) = f(1) = (\lambda dt) \times e^{-\lambda dt}$, la probabilidad de dos ocurrencias $\text{prob}(X=2) = f(2) = (\lambda dt)^2 \times e^{-\lambda dt} / 2$ y así sucesivamente. Si sustituimos el término $e^{-\lambda dt} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-\lambda dt)^x}{x!}$ obtendremos que la probabilidad de que se produzca una ocurrencia es $\text{prob}(X=1) = f(1) = \lambda dt (1 - \lambda dt + (\lambda dt)^2 / 2 - \dots)$. Cuando el intervalo de tiempo dt se hace muy pequeño esta probabilidad se aproxima a λdt , por lo que es proporcional a la longitud del intervalo siendo λ la constante de proporcionalidad (primera afirmación de la condición 2). Por otro lado, la probabilidad de que haya al menos una ocurrencia durante ese intervalo valdrá $1 - \text{prob}(X=0) = 1 - (1 - \lambda dt + (\lambda dt)^2 / 2 - \dots) = \lambda dt + o(dt)$, donde la función $o(dt)$ incluye los términos con potencias de dt de orden superior a 1, y que por tanto tienden a cero cuando $dt \rightarrow 0$ mucho más rápidamente que el término lineal λdt (segunda proposición de la condición 2).

También resulta sencillo darse cuenta de que, a medida que el intervalo dt se hace más pequeño, la probabilidad de que no ocurra ningún evento, $\text{prob}(X=0) = f(0) = 1 - \lambda dt + o(dt)$, es mucho mayor que la probabilidad de una ocurrencia, $\text{prob}(X=1) = f(1) = \lambda dt (1 - \lambda dt + (\lambda dt)^2 / 2 - \dots) = \lambda dt + o(dt)$. Esto es, $\lim_{dt \rightarrow 0} \text{prob}(X=0) = 1$ y $\lim_{dt \rightarrow 0} \text{prob}(X=1) = 0$. Del mismo modo, la probabilidad de que tengan lugar dos o más ocurrencias: $\text{prob}(X \geq 2) = 1 - \text{prob}(X=0) - \text{prob}(X=1) = o(dt)$ disminuirá con dt más rápidamente que $\text{prob}(X=1)$ llegando a ser despreciable (condición 3).

De las condiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades de los procesos de Poisson:

- El proceso es estacionario sobre el periodo completo de observación. Esto quiere decir que la probabilidad de una ocurrencia en cualquier intervalo debe ser la misma a lo largo del periodo completo, no puede haber intervalos en los que se sepa de antemano que las ocurrencias son más o menos probables. Esta probabilidad está determinada a partir de λ , cantidad que es constante durante el periodo completo de observación.
- Los números de ocurrencias en dos intervalos cualesquiera disjuntos serán independientes.
- El número de ocurrencias en cualquier intervalo de tiempo fijo de longitud t tendrá una distribución de Poisson cuya media es λt . Por ejemplo, supongamos que la tasa media con la que los fotones incidentes interaccionan con el material

es de 10^5 fotones por μm de profundidad lineal en el material. Eso significa que el número de fotones que habrán colisionado con los electrones del material después de atravesar 1 mm de profundidad tendrá una distribución de Poisson con media 10^8 fotones.

4. Distribución de los periodos de tiempo en los procesos de Poisson

El tiempo de espera hasta que ocurre un suceso en un proceso de Poisson o el periodo de tiempo entre dos sucesos cualesquiera son variables aleatorias con una *distribución exponencial*. Como hemos dicho, la separación entre dos ocurrencias de un determinado proceso de Poisson no tiene por qué ser temporal, puede ser por ejemplo espacial, en cuyo caso deberemos sustituir la variable tiempo t por la variable espacio x en el razonamiento que sigue a continuación.

La distribución exponencial es una distribución de probabilidad continua cuya función de densidad de probabilidad (FDP) está definida sólo para valores positivos de la variable aleatoria X , que en muchos de los casos de interés, como hemos dicho, representa un tiempo transcurrido (por eso utilizaremos la variable t), y que tiene la forma:

$$f(t) = \begin{cases} \beta e^{-\beta t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (3)$$

para un cierto parámetro $\beta > 0$. La función de distribución acumulada $F(t)$ (FDA), definida para cualquier FDP como $F(t) \equiv \int_{t'=0}^t f(t') dt'$, nos da la probabilidad de que el tiempo transcurrido hasta el suceso sea menor o igual que t , es decir, $F(t) = \text{prob}(X \leq t)$, y en el caso de la distribución exponencial tiene la forma:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (4)$$

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria con distribución exponencial son:

$$E(X) = \frac{1}{\beta} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2} \quad (5)$$

Como hemos dicho, el periodo de tiempo transcurrido entre dos eventos cualesquiera en un proceso de Poisson será una variable aleatoria con una distribución exponencial, lo único que variará de un caso a otro será el valor del parámetro β , que, como veremos, en todos los casos estará directamente relacionado con el parámetro λ que caracteriza el proceso subyacente de Poisson.

Ejemplo 1

En este ejemplo vamos a deducir que, efectivamente, la distribución de los tiempos en los procesos de Poisson sigue siempre una distribución tipo exponencial.

Consideremos el problema de la desintegración radiactiva de un conjunto N de radionúclidos. El número total de desintegraciones observadas por unidad de tiempo será una variable aleatoria con distribución de Poisson y media λ . Esto significa que la probabilidad de desintegración de cada núcleo por unidad de tiempo será $\lambda_0 \equiv \lambda / N$.

Queremos obtener la función de densidad de probabilidad del tiempo transcurrido hasta que cada núcleo se desintegra, que llamaremos $f(t)$. Por definición, la probabilidad de que un núcleo se desintegre en el intervalo de tiempo $(t, t + dt)$ será $f(t)dt$. Por otro lado, esta probabilidad será igual al producto de la probabilidad de que el núcleo haya llegado al tiempo t sin desintegrarse: $1 - F(t) = \int_t^\infty f(t')dt'$, por la probabilidad de que lo haga en el intervalo dt : $\lambda_0 dt$, puesto que λ_0 es la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo. Igualando ambas probabilidades obtenemos:

$$f(t) = \lambda_0 \int_t^\infty f(t')dt' \quad (6)$$

La solución de esta ecuación integral, con la condición $f(\infty) = 0$, es la distribución exponencial dada en (3) con $\beta = \lambda_0$:

$$f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \quad (7)$$

cuyo valor esperado o tiempo medio de desintegración, también denominado *vida media* del radionúclido, es:

$$E(t) = \int_0^\infty t f(t) dt = \lambda_0^{-1}. \quad (8)$$

Ejemplo 2

Nos planteamos ahora calcular la distribución de probabilidad del tiempo transcurrido desde el instante inicial hasta que se observa la primera desintegración en el conjunto N . El tiempo transcurrido hasta la primera desintegración, que definiremos como T , es igual al menor de los N tiempos de desintegración de cada núcleo X_1, X_2, \dots, X_N , es decir, $T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$, por lo que

$$\begin{aligned} \text{prob}(T > t) &= \text{prob}(X_1 > t, \dots, X_N > t) \\ &= \text{prob}(X_1 > t) \cdots \text{prob}(X_N > t) = (1 - F(t))^N = e^{-N\lambda_0 t} \end{aligned} \quad (9)$$

donde hemos hecho uso del resultado de que la FDA de cada desintegración elemental es $F(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$. Como por definición $\text{prob}(T > t) = 1 - G(t)$, siendo $G(t)$ la función de distribución acumulada que estamos buscando, tenemos que $G(t) = 1 - e^{-N\lambda_0 t}$. Si comparamos este resultado con (4) vemos que la distribución de probabilidad del tiempo transcurrido hasta observar la primera desintegración será una distribución exponencial con $\beta = \lambda_0 N = \lambda$.

5. Markovianidad o “falta de memoria”

La distribución exponencial tiene una propiedad importante que está íntimamente relacionada con la naturaleza de los procesos de Poisson: no tiene memoria. Esto quiere decir que la probabilidad de que se produzca una ocurrencia en un intervalo de tiempo futuro (que un determinado núcleo se desintegre, por ejemplo) es independiente de la cantidad de tiempo que lleva sin ocurrir ese suceso. Por consiguiente, el pasado del proceso es absolutamente irrelevante a la hora de calcular la probabilidad de ocurrencia en el futuro. Esta propiedad se deduce matemáticamente a partir de la probabilidad de que el suceso no ocurra en un tiempo t , que tiene la forma:

$$\text{prob}(X > t) = 1 - F(t) = e^{-\beta t} \quad \forall t > 0 \quad (10)$$

Entonces, la probabilidad de que el suceso tampoco ocurra en el intervalo de tiempo Δt siguiente, sabiendo que no ha ocurrido en el tiempo t (probabilidad condicionada) es:

$$\text{prob}(X > t + \Delta t \mid X > t) = \frac{\text{prob}(X > t + \Delta t)}{\text{prob}(X > t)} = \frac{e^{-\beta(t+\Delta t)}}{e^{-\beta t}} = e^{-\beta \Delta t} = \text{prob}(X > \Delta t) \quad (11)$$

Como se puede comprobar, esta probabilidad no depende del tiempo t a partir del cual se empieza a contar el intervalo Δt . Por ejemplo, la probabilidad de que un núcleo se desintegre en la próxima hora no depende del tiempo que lleva sin desintegrarse. Esta propiedad de falta de memoria es una consecuencia de la principal característica de los procesos de Poisson: la probabilidad de ocurrencia de un suceso por unidad de tiempo es constante a lo largo de todo el proceso. Aunque esta falta de memoria no se verifica estrictamente en numerosos procesos que han sido frecuentemente aproximados por procesos de Poisson, como es el caso de la duración de un dispositivo (la cantidad de tiempo que tardará una bombilla en fundirse en el futuro dependerá, obviamente, del tiempo que lleva encendida en el pasado), la distribución exponencial ha sido utilizada con éxito para modelizar y aproximar el comportamiento de este tipo de variables aleatorias.

A los procesos que tienen esta propiedad de falta de memoria, como los procesos de Poisson, se les denomina *procesos de Markov* o *procesos markovianos*. En general, un proceso estocástico es *markoviano* cuando la probabilidad de que se dé un estado futuro concreto en un momento dado depende sólo del estado presente y no de los estados pasados. Matemáticamente, esta propiedad se enuncia del siguiente modo: dado un proceso estocástico cuyo estado en el tiempo presente t es $X(t)$, y cuya historia de estados está dada por $X(s)$ para $s < t$, se dice que es un proceso de Markov si:

$$\text{prob}[X(t+h) = y \mid X(s) = x(s), \forall s \leq t] = \text{prob}[X(t+h) = y \mid X(t) = x(t)], \quad \forall h > 0 \quad (12)$$

Como se puede deducir de la definición, un proceso de Markov es aquel en el que los valores futuros de una variable aleatoria X están estadísticamente determinados por el valor presente y sólo dependen del estado inmediatamente anterior. Un proceso de Markov es homogéneo si:

$$\text{prob}[X(t+h) = y \mid X(t) = x] = \text{prob}[X(h) = y \mid X(0) = x], \quad \forall t, h > 0 \quad (13)$$

Comparando esta propiedad con el resultado dado en (10) vemos que los procesos de Poisson son procesos de Markov homogéneos.

Esta independencia temporal por la que el estado futuro es independiente de los estados pasados implica la ausencia de correlaciones temporales; por consiguiente, los

procesos de Markov son procesos no-correlacionados. Estas consideraciones también pueden ser llevadas al espacio, basta sustituir t por x en (12). En este caso, conocido el estado en la posición x , $X(x)$, y en todas las posiciones $s < x$, $X(s)$, la probabilidad de que el estado en la posición $x+h$ tenga un cierto valor sólo dependerá del valor en x $X(x)$.

6. Aproximación de una probabilidad para los procesos de Poisson

Para simular computacionalmente los procesos de Poisson resulta muy útil su relación con la distribución binomial. Recordemos las principales características de esta distribución.

Supongamos un experimento aleatorio que da un resultado positivo con una probabilidad p ($0 \leq p \leq 1$), mientras que el resultado negativo ocurre con probabilidad $q = 1 - p$. Definamos ahora la variable aleatoria X dada por el número de resultados exitosos obtenidos después de n ensayos. Esta variable aleatoria tendrá un rango discreto $R = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. El espacio muestral estará compuesto de todas las variaciones con repetición de dos elementos, “resultado positivo” y “resultado negativo”, tomadas de n en n , lo cual hace un número total de 2^n casos. La probabilidad de obtener una sucesión ordenada concreta de n resultados conteniendo exactamente x positivos y $(n-x)$ negativos es $p^x q^{n-x}$. Puesto que hay $\binom{n}{x}$ sucesiones ordenadas de este tipo tendremos que su función de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (14)$$

La distribución discreta representada por esta función de densidad se denomina *distribución binomial con parámetros n y p* .

Teorema 2. Si tenemos k variables aleatorias X_1, \dots, X_k independientes y si X_i tiene una distribución de binomial con parámetros n_i ($i = 1, \dots, k$) y p , entonces la suma $X_1 + \dots + X_k$ tiene una distribución binomial con parámetros $n = n_1 + \dots + n_k$ y p .

A continuación demostramos que la distribución binomial se aproxima a una distribución de Poisson con media np cuando n se hace muy grande y p se aproxima a 0. Para demostrar esto partimos de la distribución binomial. Si definimos $\lambda = np$ podemos escribir

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \frac{(n-2)}{n} \dots \frac{(n-x+1)}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \quad (15)$$

Si tomamos el límite $n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$ de forma que el valor del producto np permanezca igual al valor fijo λ a través de este proceso de límites, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \frac{(n-2)}{n} \dots \frac{(n-x+1)}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1 \quad (16)$$

Si ahora hacemos uso de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \quad (17)$$

obtenemos finalmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (18)$$

que es la función de probabilidad de una distribución de Poisson con media λ .

Esta propiedad nos permite discretizar el intervalo de observación, e interpretar un proceso de Poisson de forma probabilística, es decir, nos permite asignar una probabilidad de ocurrencia a cada uno de los elementos que participan en el proceso en cada uno de los subintervalos producidos en la discretización. A continuación presentamos un ejemplo de este procedimiento y demostramos que es equivalente al uso de las condiciones 2 y 3 que determinan que un proceso sea de Poisson.

Ejemplo 3

Consideremos el caso del número de llamadas que recibe una centralita de una determinada operadora telefónica en un intervalo de tiempo Δt . Este número puede aproximarse mediante una variable aleatoria con una distribución de Poisson de media λ , de modo que $\lambda / \Delta t$ es el número medio de llamadas recibidas por unidad de tiempo

Interpretación 1 (a partir de las condiciones 2 y 3): supongamos que el número de clientes de la operadora telefónica es N . Si todos los clientes son iguales e independientes entre sí, el número de llamadas de cada cliente en el intervalo Δt también seguirá una distribución de Poisson con media $\lambda_0 = \lambda / N$ (teorema 1), y $\lambda_0 / \Delta t$ será el número esperado de llamadas de una persona por unidad de tiempo. Dividamos ahora el intervalo Δt en n subintervalos dt ($dt = \Delta t / n$) suficientemente pequeños. En cada subintervalo dt el número esperado de llamadas por persona será $(\lambda_0 / \Delta t) dt$. Si el intervalo es suficientemente pequeño, por la condición 2 sabemos que la probabilidad de que un cliente haga una llamada en ese subintervalo será $p = \text{prob}(X = 1) \approx (\lambda_0 / \Delta t) dt \ll 1$, mientras que la probabilidad de que haga más de una llamada es prácticamente despreciable (condición 3). Ahora podemos generar un número aleatorio uniformemente distribuido entre 0 y 1 y aplicar para cada cliente y en cada subintervalo la siguiente condición: si $U(0,1) \leq p$, entonces el cliente hará una llamada en ese subintervalo. Haciendo esto para todos los clientes y todos los subintervalos obtendremos que la distribución del número total de llamadas recibidas por la centralita en el intervalo Δt se aproximará, a medida que $dt \rightarrow 0$, a una distribución de Poisson con valor esperado de λ .

Interpretación 2 (a partir de una distribución binomial): De nuevo dividiremos el intervalo Δt en n subintervalos dt ($dt = \Delta t / n$) y asignaremos en cada subintervalo una probabilidad p de que un cliente haga una llamada. En este caso, el número de llamadas total efectuadas por un mismo cliente en el intervalo Δt seguirá una distribución binomial con media np . Cuando $dt \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$), la distribución binomial del número total de llamadas por persona en el intervalo Δt se aproximará a una Poisson con media np . Finalmente, por el teorema 1, el número total de llamadas seguirá una distribución de Poisson con media Nnp . Igualando esta media con la media esperada λ , obtenemos la probabilidad que debemos utilizar $p = \lambda / Nn = (\lambda_0 / \Delta t) dt$, que es igual a la obtenida en la interpretación anterior.

También lo podríamos haber visto de este otro modo. El teorema 2 nos dice que el número total de llamadas hechas por todos los clientes en el intervalo Δt seguirá una distribución binomial de parámetros Nn y probabilidad p . En el límite $dt \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$), esta distribución se aproximará a una distribución de Poisson de media $Nnp = Nn\lambda_0 / n = \lambda$, que es la premisa de la que hemos partido.

Como se puede apreciar, en ambos casos la clave reside en conseguir una discretización del tiempo en subintervalos suficientemente pequeños de modo que en cada subintervalo tengamos una probabilidad $p \ll 1$ de que ocurra un evento por elemento del conjunto, mientras que $(1-p)$ es la probabilidad de que no ocurra. El hecho de que los subintervalos sean suficientemente pequeños nos asegura que la probabilidad de que cada elemento dé lugar a más de una ocurrencia es prácticamente despreciable. A continuación ilustraremos este procedimiento con la simulación de la desintegración radiactiva.

7. Ley de desintegración de las especies radiactivas

En esta PEC vamos a estudiar el problema de la desintegración radiactiva. Consideremos una fuente compuesta de N núcleos de una especie radiactiva que se desintegran espontáneamente por radiactividad natural. Este fenómeno satisface las tres condiciones matemáticas enunciadas en el capítulo anterior, por lo que suele ser uno de los ejemplos clásicos de proceso de Poisson. Definamos λ como el número esperado de desintegraciones por unidad de tiempo. Este valor depende, obviamente, del número total de núcleos susceptibles de desintegración, por lo que es más conveniente utilizar el número medio de desintegraciones por núcleo por unidad de tiempo: $\lambda_0 \equiv \lambda / N$. Por lo tanto, el número de desintegraciones X observadas en un intervalo de tiempo muy pequeño dt será una variable aleatoria con una distribución de Poisson y media (valor esperado):

$$E(X) = \lambda_0 N dt \quad (19)$$

A medida que los núcleos se desintegran, el número de núcleos radiactivos susceptibles de desintegración disminuye con el tiempo ya que sólo puede haber una desintegración por núcleo, por lo que N será una función del tiempo, $N(t)$. La variación media del número de núcleos que no se han desintegrado en el intervalo dt , definida como $dN(t)$,

será igual a $-E(X)$. Igualando esta variación a la expresión anterior obtenemos la *ley de desintegración de las especies radiactivas*

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda_0 N(t) \quad (20)$$

Obsérvese que

$$\lambda_0 dt = \frac{|dN(t)|}{N(t)} \quad (21)$$

tiene la forma de una probabilidad, la probabilidad de que cada uno de los $N(t)$ núcleos radiactivos se desintegre en el intervalo de tiempo $(t, t+dt)$. La constante λ_0 determina, por tanto, la probabilidad por unidad de tiempo de que un núcleo se desintegre y tiene unidades s^{-1} .

Podemos recuperar esta definición utilizando el razonamiento del capítulo anterior. Definamos p como la probabilidad de desintegración de cada núcleo en el intervalo dt . El número de desintegraciones observadas después de ese intervalo será una variable aleatoria con una distribución binomial con media Np . Como hemos visto, en el límite $N \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$ esta distribución tiende a una Poisson de media Np . Igualando este valor medio al valor esperado del número de desintegraciones en el intervalo dt dado en (19) $\lambda_0 N dt$, obtenemos

$$\lambda_0 = p / dt \quad \text{ó} \quad p = \lambda_0 dt \quad (22)$$

Es decir, λ_0 es la probabilidad por unidad de tiempo de que un núcleo se desintegre, recuperando el mismo resultado que en (21). La constante λ_0 es denominada *constante de la desintegración* y tiene unidades s^{-1} . Cuanto más inestables sean los núcleos, mayor será λ_0 .

La integración de (20) resulta en la siguiente ley de decaimiento exponencial

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda_0 t} \quad (23)$$

siendo $N_0 = N(t=0)$ el número inicial de núcleos. Se define actividad de la muestra, A , como el número de desintegraciones radiactivas por unidad de tiempo

$$A(t) = \lambda_0 N(t) \quad (24)$$

y se mide en Becquerels (Bq): 1 Bq = 1 desintegración/s.

El inverso de la constante de desintegración, λ_0^{-1} , se denomina vida media τ del radionúclido y representa el valor esperado –o valor medio– del tiempo que tardará en desintegrarse. Este valor medio también puede obtenerse de la siguiente forma:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t |dN(t)| = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \lambda_0 N(t) dt = \frac{1}{\lambda_0} \quad (25)$$

Obviamente, este resultado se obtiene directamente sabiendo que el tiempo hasta la desintegración es una variable aleatoria distribuida exponencialmente (véase Ejemplo 1 de la sección 4) con FDP dada por:

$$f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \quad (26)$$

cuyo valor esperado es $E(t) = \lambda_0^{-1} \equiv \tau$.

Dado un conjunto grande de núcleos iguales, es fácil ver que después de un tiempo τ “sobrevivirán” alrededor de un 37 % de ellos (es decir, se habrán desintegrado el 63 %).

Otro tiempo relacionado y muy utilizado frecuentemente en lugar de λ_0 para caracterizar una especie radiactiva, es el tiempo que tardan en desintegrarse la mitad de los núcleos. Este tiempo se denomina *período de semidesintegración* T y se obtiene a partir de (23) haciendo $N(t) = N_0 / 2$:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda_0} \approx \frac{0.69}{\lambda_0}. \quad (27)$$

8. Modelo y simulación

Consideremos que tenemos inicialmente un conjunto N_0 de núcleos de una determinada especie radiactiva con constante de desintegración λ_0 . Simularemos este conjunto mediante un *array* en el que cada posición o celda corresponde a un núcleo. Puesto que los núcleos son independientes entre sí, la dimensionalidad del array es irrelevante en esta simulación, lo único importante es el número de elementos que contiene; es decir, es lo mismo considerar un vector (dimensión 1) de longitud 1000 que una matriz (dimensión 2) con 10×100 celdas, o un array de dimensión 3 con $10 \times 10 \times 10$ celdas. Por simplificar la exposición supondremos una lista unidimensional de N_0 elementos. El valor de cada elemento está representado como n_i (con $i = 0, \dots, N_0 - 1$) e indica el estado del núcleo:

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{si el núcleo que ocupa la posición } i \text{ no se ha desintegrado} \\ 0 & \text{si el núcleo que ocupa la posición } i \text{ se ha desintegrado} \end{cases}$$

Cada paso de la simulación será identificado mediante un contador j , de este modo $n_i(j)$ representa el estado del núcleo en la posición i después del paso j de simulación. Inicialmente ($j = 0$) todas las celdas del array se encuentran en estado 1: $n_i(0) = 1 \quad \forall i$.

En cada paso de la simulación recorreremos todo el array y actualizaremos el estado de cada celda de acuerdo con el siguiente algoritmo, ilustrado para el paso j -ésimo de simulación:

1. Si $n_i(j-1) = 0$ no ocurre nada pues el núcleo ya se ha desintegrado:
 $n_i(j) = n_i(j-1) = 0$.
2. Si $n_i(j-1) = 1$, generamos un número aleatorio U uniformemente distribuido en el intervalo unidad, $U(0,1)$, y el estado de la celda es actualizado o no dependiendo de una determinada probabilidad p del siguiente modo:
 - (a) Si $U \leq p$ se produce la desintegración del núcleo: $n_i(j) = 0$.

(b) Si $U > p$ el núcleo sigue igual: $n_i(j) = n_i(j-1) = 1$.

Después de cada paso de simulación, el tiempo t , que inicialmente era 0, se incrementa en una cantidad constante dt :

$$t(j) = t(j-1) + dt = j \times dt \quad (28)$$

El número total de núcleos $N(j)$ que no se han desintegrado después de j pasos de simulación será:

$$N(j) = \sum_{i=1}^{N_0} n_i(j). \quad (29)$$

La simulación concluirá cuando no quede ningún núcleo por desintegrarse.

Para que la simulación reproduzca o “simule” correctamente el proceso de Poisson implícito es necesario definir adecuadamente los valores de dt y p (probabilidad de que un núcleo se desintegre en el intervalo de tiempo dt). Como hemos discutido en la sección anterior, tal y como está planteado nuestro modelo el número de celdas que se desintegran en el paso j de la simulación (suceso con éxito) tiene una distribución binomial con parámetros $n = N(j-1)$ y p , y valor medio $N(j-1) \times p$. Como ya hemos visto, en el límite $N(j-1) \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$, esta distribución se aproximará a una Poisson de media $N(j-1) \times p$. Por otro lado sabemos que el número real de desintegraciones que se producen en un conjunto de $N(j-1)$ núcleos durante un intervalo de tiempo dt tiene una distribución de Poisson con media $\lambda_0 N(j-1) dt$. Igualando ambas medias llegamos una vez más a la relación ya obtenida en (22)

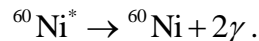
$$p = \lambda_0 dt \quad (30)$$

Por consiguiente, deberemos utilizar un número inicial grande de núcleos, una probabilidad de reacción muy pequeña, y el paso de simulación dt en función de esa probabilidad de acuerdo con la Ec. (30), o viceversa.

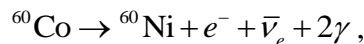
Utilizando este modelo vamos a simular computacionalmente el proceso de desintegración del ^{60}Co . La radiación gamma emitida durante la desintegración del ^{60}Co se utiliza frecuentemente en el tratamiento del cáncer. El proceso es el siguiente: el cobalto ^{60}Co decae a $^{60}\text{Ni}^*$ (excitado) mediante la siguiente desintegración beta emitiendo un electrón y un antineutrino:



y posteriormente, el $^{60}\text{Ni}^*$ excitado decae a su estado nuclear fundamental emitiendo dos fotones gamma:



Esta relajación es mucho más rápida que la desintegración beta anterior, por lo que podemos suponer que la desintegración total ocurre de la forma



con un periodo de semidesintegración T del ^{60}Co de 5,27 años, de modo que la constante de desintegración será

$$\lambda_0 = \frac{\ln 2}{T} = 0,13 \text{ año}^{-1}$$

y nuestra unidad de tiempo será el año.

8. Ejercicios

Ejercicio 1 (2 puntos). El objetivo de este ejercicio es comprobar que el número de desintegraciones en cualquier paso j de simulación tiene una distribución que se aproxima a una Poisson de media $N(j-1) \times p = \lambda_0 \times N(j-1) \times dt$ a medida que $N(j-1) \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$. Para ello nos vamos a fijar únicamente en el primer paso de la simulación: $j = 1$ y $N(j-1) = N_0$, y vamos a considerar 4 casos:

Caso 1: $N_0 = 20$ y $p = 0.5$

Caso 2: $N_0 = 50$ y $p = 0.2$

Caso 3: $N_0 = 10^2$ y $p = 0.1$

Caso 4: $N_0 = 10^3$ y $p = 0.01$

Obsérvese que estamos variando N_0 y p de forma que la media $N_0 p$ permanezca constante. Para cada caso repetiremos este proceso (simulación del 1er paso de la desintegración) $M = 10^6$ veces, de modo que tendremos un muestreo de M valores. Después representamos gráficamente el histograma del número de desintegraciones observadas en cada caso, en el que se muestre la frecuencia $p(x)$ frente a x calculada de este modo:

$$p(x) = \frac{P(x)}{M}, \text{ con } x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

donde $P(x)$ el número de veces que se ha obtenido el resultado x (debe cumplirse que

$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$). Se deberá mostrar en una única figura los resultados obtenidos para los 4

casos. En lugar de mostrar los resultados con puntos los uniremos con líneas de diferentes colores para que se puedan distinguir y comparar. Además, en esa figura se deberá mostrar también la curva correspondiente a la distribución de probabilidad de

Poisson: $f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$, con $\lambda = 10$, ya que la media de los cuatro casos anteriores es

$N_0 p = 10$. Discutir razonadamente los resultados obtenidos.

Ejercicio 2 (2 puntos). El objetivo de este ejercicio es comprobar que el comportamiento obtenido en la simulación de desintegración completa coincide con la solución analítica $N(t) = N_0 e^{-\lambda_0 t}$. Para ello partimos de un conjunto inicial de $N_0 = 10^4$ núcleos y simulamos su desintegración utilizando diferentes probabilidades. Consideraremos 4 casos: $p = 0.5$, $p = 0.1$, $p = 0.01$ y $p = 0.001$. En cada caso el paso de tiempo estará dado por $dt = p / \lambda_0$. Una vez concluida la simulación, esto es, cuando todos los núcleos se han desintegrado, representaremos gráficamente la evolución temporal del número de núcleos que no se han desintegrado, es decir, representaremos las parejas de puntos $(t(j), N(j))$. Los cuatro casos serán representados en la misma gráfica junto a la solución teórica $N(t) = N_0 e^{-\lambda_0 t}$. En lugar de representar los resultados mediante puntos, los uniremos con líneas utilizando un color para cada caso, de forma que se puedan comparar bien. En los casos con probabilidad baja tendremos muchos puntos, por lo que no hace falta representar todos los pasos de la simulación. Los representaremos en intervalos de pasos, por ejemplo, cada paso cuando $p = 0.5$ y $p = 0.1$, cada 5 pasos cuando $p = 0.01$, y cada 10 pasos cuando $p = 0.001$. Los valores de N_0 , p y del intervalo de pasos entre medidas deberán ser introducidos por línea de comandos como argumentos de la función *main*. Discutir razonadamente los resultados obtenidos.

A continuación vamos a fijarnos en lo que ocurre para tiempos grandes. Representaremos gráficamente los resultados obtenidos para $t > 50$ años en el caso $p = 0.001$ junto con la solución teórica. Discutir razonadamente el resultado obtenido. Explicar de forma justificada cómo se podrían disminuir las desviaciones observadas.

Ejercicio 3 (3 puntos). En este ejercicio vamos a comprobar que los intervalos de tiempo transcurridos entre eventos en los procesos de Poisson tienen distribuciones exponenciales. Tenemos muchas elecciones posibles, pero vamos a fijarnos en una en concreto, el tiempo de desintegración. Definimos la variable aleatoria X como el tiempo que tarda un núcleo particular en desintegrarse. Como vimos en la sección 4 (Ejemplo 1), X obedece una distribución exponencial con parámetro $\beta = \lambda_0$. Para demostrar que esto es así obtendremos, a partir de las simulaciones, la función de distribución acumulada de X , $F(t)$, de la siguiente forma:

$$F(t) = \text{prob}(X \leq t) = \frac{N_0 - \langle N(j) \rangle_M}{N_0}, \quad (32)$$

donde $t = j \times dt$ y $\langle N(j) \rangle_M = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M N_k(j)$ representa el promedio de $N(j)$ sobre M simulaciones. Es decir, repetiremos nuestra simulación M veces. El valor de $N(j)$ en el paso j de la simulación k -ésima será $N_k(j)$, y deberemos promediar este valor sobre todo el conjunto de simulaciones. La explicación de la Ec. (32) es bastante sencilla ya que $N_0 - \langle N(j) \rangle_M$ es el número promedio de núcleos que, de los N_0 iniciales, se ha desintegrado en un tiempo $t = j \times dt$. Dividiendo ese valor por N_0 obtendremos la probabilidad de desintegración en un tiempo menor que $t(j)$. Se deberá representar gráficamente, con puntos, la función $F(t)$ obtenida de la Ec. (32) frente a $t(j)$, junto con la función de distribución acumulada teórica (línea continua) dada por $F(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$. De nuevo, no hace falta representar los valores para todos los pasos de la simulación porque serán muchos puntos, se pueden representar los valores obtenidos cada 10 pasos de simulación por ejemplo. Como será necesario almacenar esos valores es un *array* cuyo tamaño desconocemos *a priori*, podemos utilizar los resultados del ejercicio anterior para saber el tamaño aproximado de ese *array*. Hacer esto para $N_0 = 10^3$, $p = 10^{-3}$ y para dos valores de M : $M = 1$ y $M = 100$. Los valores de N_0 , p , del intervalo entre medidas y de M deberán ser introducidos por línea de comandos como argumentos de la función *main*.

Representar cada caso en una gráfica distinta y discutir razonadamente los resultados obtenidos.

Ejercicio 4 (3 puntos). En este último ejercicio vamos a verificar que nuestro proceso no tiene memoria, es decir, que es *markoviano*. Para estudiar la propiedad de falta de memoria, verificaremos que la probabilidad de que un núcleo que no se ha desintegrado en un tiempo t tampoco lo haga en el próximo intervalo Δt , es independiente de t e igual a $e^{-\lambda_0 \Delta t}$, como ya demostramos en la Ec. (11) de la sección 5. Para un tiempo de simulación dado, $t(j) = j \times dt$, y un intervalo $\Delta t = l \times dt$, esta probabilidad puede ser estimada del siguiente modo:

$$\text{prob}(X > t + \Delta t | X > t) = \left\langle \frac{N(j+l)}{N(j)} \right\rangle_M \quad (40)$$

ya que en el tiempo $t(j) = j \times dt$ tendremos $N(j)$ núcleos que no se han desintegrado y después de un intervalo $\Delta t = l \times dt$ quedarán $N(j+l)$ sin desintegrarse. De nuevo el corchete indica el promedio sobre M simulaciones. Para comprobar la falta de memoria del proceso calcularemos esta probabilidad para diferentes tiempos de evolución –diferentes valores de j – y los representaremos frente a $t(j)$. De nuevo, los parámetros N_0 , p , l (intervalo entre medidas) y M deberán ser introducidos por línea de comandos como argumentos de la función *main*. Realizar la simulación con los siguientes valores:

$N_0 = 10^4$, $p = 10^{-3}$, $l = 130$ (de modo que $\Delta t = 1$) y tres valores de M : $M = 10$, $M = 100$ y $M = 1000$.

Para cada caso (cada valor de M) se deberá representar gráficamente mediante puntos la probabilidad obtenida de la Ec. (40) frente a $t(j)$. Como antes, no representaremos esta medida en cada paso de la simulación, sino que lo haremos después de un intervalo fijo de pasos dado también por l . En definitiva, se trata de representar $\left\langle \frac{N(j+l)}{N(j)} \right\rangle_M$ frente a $t(j)$ cada l pasos de simulación (de este modo los tiempos de los puntos de medida serán $t = 0, 1, 2, 3, \dots$). Mostrar también en la misma gráfica con una recta horizontal el valor teórico $e^{-\lambda_0 \Delta t} \approx 0.878$. Se deberán presentar 3 figuras, una por cada caso. Discutir razonadamente los resultados obtenidos.