1. Kompleksie skaitļi

1.1. Algebriskais pieraksts

1.1.1. Reizināšana

Skaitļus $3+2i$, $3-2i$ sauc par kompleksi saistītiem.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$

1.1.2. Dalīšana

Izmantojot šo īpašību, kompleksos skaitļus varam iemācīties dalīt.

$$\frac{a+bi}{x+yi} = \frac{(ax+by)(-ay+bx)i}{x^2+y^2} \tag{2}$$

1.1.3. Saknes vilkšana

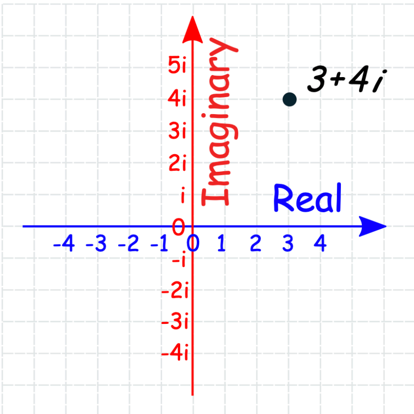
Kvadrāsakni no algebriskā pierakstā rakstītiem kompleksiem skaitļiem var vilkt ar formulu:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \beta i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \tag{3}$$

1.1.4. Kompleksā plakne

Kompleksos skaitļus algebriskā pierakstā varam attēlot kompleksajā planknē.

1. zīm.Kompleksā plakne



1.2. Trigonometriskais pieraksts

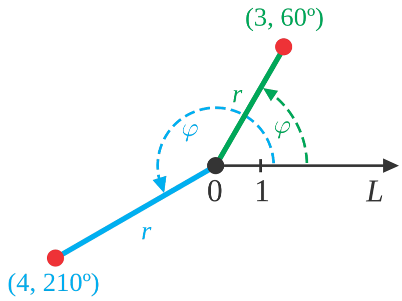
1.2.1. Definīcija

Kompleksu skaitli $z = a + bi$ kā plaknes punktu var uzdot arī ar: polāro rādiusu r (skaitļa moduli, jeb absolūto vērtību, $r = |z|$) un polāro leņķi φ (skaitļa argumentu, $\varphi = arg(z)$).

Moduļa aprēkināšana:

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \tag{4}$$

2. zīm.Polārās koordinātas



1.2.2. Reizināšana

Reizinot divus kompleksus skaitļus, trigonometriskajā pierakstā viss sanāk ļoti vienkārši un simetriski:

$$zz' = rr'(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')) \tag{5}$$

Teorēma. Komplekso skaitļu reizinājuma modulis ir reizinātāju moduļu reizinājums, bet reizinājuma arguments - reizinātāju argumentu summa.

1.2.3. Dalīšana

Pieņemsim, ka skaitlis z' nav 0. Tad:

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\varphi - \varphi') + i\cos(\varphi - \varphi')) \tag{6}$$

1.2.4. Kāpināšana

Ja $n > 1$, tad z^n apzīmē $z \cdot \ldots \cdot z$ (n reizes).
Teorēma: Ja $m, n > 1$, tad:

$$z^m z^n = z^{m+n}; \tag{7}$$
$$(z^m)^n = z^{mn} \tag{8}$$

1.2.5. Muavrā formula (kāpināšana trigonometriskajam pierakstam)

$$r(\cos(\varphi) = i\sin(\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \tag{9}$$

1.2.6. Saknes vilkšana

Teorēma. Ja kompleksais skaitlis

$$z = R(\cos\Phi + i\sin\Phi) \tag{10}$$

nav 0, tad saknei $\sqrt[n]{z}$ ir tieši n dažādas vērtības, un tās var iegūt no formulas:

$$\sqrt[n]{R}\left((\cos\frac{\Phi + 360°k}{n} + i\sin\frac{\Phi + 360°k}{n})\right) \tag{11}$$

2. Polinomi

2.1. Definīcijas

Iespējami divi polinomu vienādības jēdzieni:

- Teiksim, ka polinomi $P1(x)$ un $P2(x)$ ir vienādi kā izteiksmes, ja to kanoniskie pieraksti satur vienādas x pakāpes un vienādus koeficientus pie attiecīgajām x pakāpēm.
- Teiksim, ka polinomi $P1(x)$ un $P2(x)$ ir vienādi kā funkcijas, ja visiem kompleksiem skaitļiem x, $P1(x) = P2(x)$.

Teorēma. Ja polinomi ir vienādi kā izteiksmes, tad tie ir vienādi arī kā funkcijas.

Teorēma. Ja polinomi ir vienādi kā funkcijas, tad tie ir vienādi arī kā izteiksmes (t.i. tiem ir vienādi kanoniskie pieraksti).

2.2. Saskaitīšana

Teorēma. Polinomu summas pakāpe:

- ja $deg(P) < deg(Q)$, tad $deg(P + Q) = deg(Q)$;
- ja $deg(P) = deg(Q)$, tad $deg(P + Q) \leq deg(Q)$.

2.3. Reizināšana

Teorēma. Nenulles polinomu reizinājuma pakāpe ir vienāda ar reizināmo pakāpju summu:

$$deg(PQ) = deg(P) + deg(Q) \tag{12}$$

2.4. Dalīšana

Teorēma. Dalīšanu $\frac{1}{P}$ var izpildīt tad un tikai tad, ja P ir nulltās pakāpes polinoms.

Teorēma. Jebkuriem diviem polinomiem $P(x)$ un $Q(x)$, ja Q nav nulles polinoms, tad var atrast vienīgos polinomus - dalījumu $D(x)$ un atlikumu $R(x)$ tādus, ka $P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$, un $R(x)$ pakāpe ir mazāka par dalītāja $Q(x)$ pakāpi vai arī $R(x)$ ir nulles polinoms.

Teorēma. Ja $P(x)$ dalās ar $Q(x)$, un $Q(x)$ dalās ar $R(x)$, tad arī $P(x)$ dalās ar $R(x)$. **Teorēma.** Ja $P(x)$ un $Q(x)$ abi dalās ar $R(x)$, tad arī $P(x) + Q(x)$ un $P(x) - Q(x)$ dalās ar $R(x)$. **Teorēma.** Ja $P(x)$ dalās ar $R(x)$, tad jebkuram $Q(x)$ reizinājums $P(x)Q(x)$ arī dalās ar $R(x)$.

Teorēma. Jebkurš polinoms dalās ar jebkuru nulltās pakāpes polinomu.

Teorēma. Ja $P(x)$ dalās ar $Q(x)$, tad tas dalās arī ar $cQ(x)$, kur c – jebkurš skaitlis, kas nav 0.

Teorēma. Ja P un Q pakāpes ir vienādas, tad $P(x)$ dalās ar $Q(x)$ tad un tikai tad, ja $Q(x) = cP(x)$, kur c – skaitlis, kas nav 0.

Teorēma. Ja c – skaitlis, kas nav 0, tad polinomiem $P(x)$ un $cP(x)$ ir vieni un tie paši dalītāji.

2.4.1. Piemērs

$$
\begin{array}{l}
\big(\ x^6 \ - x^4 \ + x^3 - 2x^2 \ + 5x \ - 9\big) \div \big(x^3 - 3x + 4\big) = x^3 + 2x - 3 + \dfrac{4x^2 - 12x + 3}{x^3 - 3x + 4} \\
\underline{- x^6 + 3x^4 - 4x^3} \\
\qquad 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 \ + 5x \\
\qquad \underline{- 2x^4 \qquad + 6x^2 \ - 8x} \\
\qquad\qquad - 3x^3 + 4x^2 \ - 3x \ - 9 \\
\qquad\qquad \underline{3x^3 \qquad\quad - 9x + 12} \\
\qquad\qquad\qquad 4x^2 - 12x \ + 3
\end{array}
$$

2.5. Lielākais kopīgais dalītājs

2.5.1. Definīcija

Def. Polinomus mēs nevaram sakārtot pēc ļieluma". Kaut kādu sakārtojumu dod tikai polinomu pakāpes. Tāpēc mēģināsim definēt divu polinomu lielāko kopīgo dalītāju (LKD, jeb angliski - GCD, greatest common divisor) kā kopīgo dalītāju ar visaugstāko pakāpi.

Bet: ja $D(x)$ ir divu polinomu kopīgs dalītājs, tad tāds ir arī $cD(x)$. Tāpēc būs lietderīgi vienoties, ka "oficiālā" lielākā kopīgā dalītāja koeficients pie lielākās x pakāpes ir 1.

2.5.2. "Gausa" metodes piemērs

Piemērs.

$$P(x) = x3 - 6x2 + 11x - 6; Q(x) = x2 - 7x + 10. \tag{13}$$

Pakāpju summa ir 5.

Pirmais solis - likvidējam x^3:

$$P1 = P - xQ = x2 + x - 6. \tag{14}$$

Šeit koeficients pie x2 ir 1, tāpēc papildus apsvērums nav jāpiemēro. Saskaņā ar Lemmu, pārim $x2 + x - 6, x2 - 7x + 10$ ir tie paši kopīgie dalītāji, kas pārim P, Q, bet tā pakāpju summa ir 4.

Otrais solis - likvidējam vienu no x2:

$$P2 = P1 - Q = (x2 + x - 6) - (x2 - 7x + 10) = 8x - 16. \tag{15}$$

Piemērojam minēto papildus apsvērumu, un izdalām ar 8, iegūstot: $P2 = x - 2$. Saskaņā ar lemmu, pārim $x - 2, x2 - 7x + 10$ ir tie paši kopīgie dalītāji, kas pārim P, Q, bet tā pakāpju summa ir 3.

Trešais solis - likvidējam atlikušo x2:

$$P3 = Q - xP2 = (x2 - 7x + 10) - x(x - 2) = -5x + 10. \tag{16}$$

Piemērojam papildus apsvērumu, un izdalām ar -5, iegūstot: $P3 = x - 2$. Pārim $x - 2, x - 2$ ir tie paši kopīgie dalītāji, kas pārim P, Q, bet tā pakāpju summa ir 2. Bet pāra $x - 2, x - 2$ LKD ir $x - 2$, tāpēc arī $LKD(P, Q) = x - 2$:

$$LKD(x3 - 6x2 + 11x - 6, x2 - 7x + 10) = x - 2. \tag{17}$$

Pārim $x - 2, x - 2$ ir tikai divu veidu kopīgie dalītāji: skaitļa 1 daudzkārtņi un polinoma x-2 daudzkārtņi. Tātad visi šie kopīgie dalītāji ir arī LKD dalītāji. Šis process varēja beigties arī ātrāk, ja tiktu iegūts pāris $0, R$. Šāda pāra LKD ir R, tas tad būs arī pāra P, Q LKD. Bet process varēja beigties arī ar pāri a, b, kur a, b abi ir skaitļi. Tas tad nozīmētu, ka polinomu P, Q LKD ir null-tās pakāpes polinoms 1:

$$LKD(P, Q) = 1. \tag{18}$$

2.6. Polinomu būvēšana

2.6.1. Dabiskā metode

Tikko pierādījām, ka ja pakāpei ir jābūt ne lielākai par n, tad tāds polinoms var būt tikai viens. Piemērs. Uzbūvēt polinomu P(x) tādu, ka P(1)=3; P(2)=-2; P(3)=2.

Doti 3 punkti, $3 = 2 + 1$, tātad tas būs kvadrātisks polinoms $y = ax^2 + bx + c$. Dabiska metode - sastādām 3 lineāru vienādojumu sistēmu:

$$P(1) = a + b + c = 3 \tag{19}$$
$$P(2) = 4a + 2b + c = -2 \tag{20}$$
$$P(3) = 9a + 3b + c = 2. \tag{21}$$

To atrisinot, iegūstam: a=$\frac{9}{2}$; $b = \frac{-37}{2}$; $c = 17$, tātad meklētais polinoms ir: $P(x) = \frac{9}{2}x^2 + \frac{-37}{2}x + 17$

2.6.2. Vandermonda matrica (vispārīgi)

Vispārīgais gadījums: mēs gribam uzbūvēt n-ās (vai zemākas) pakāpes polinomu;

$$P(x) = a_n + x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{22}$$

kas $n+1$ punktos $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ pieņem dotās vērtības $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$. No prasītajām $n+1$ vienādībām $(i = 1..n+1)$:

$$P(x_i) = a_n x_i^n + a_{n-1} + x_i^{n-1} + \ldots + a_1 x_i + a_0 = y_i \tag{23}$$

iegūstam $(n+1) \times (n+1)$ lineāru vienādojumu sistēmu, kuras atrisināšana dos polinoma koeficientu a_j vērtības:

$$\begin{pmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \ldots & x_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \ldots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

3. $\mathbb{Z}$ Lauki (un gredzeni)

3.1. Nulles dalītāji

Def. Gredzenā G divus nenulles elementus a, b, kam a*b=0, sauksim par nulles dalītājiem.

3.2. Inversie elementi

Def. Gredzena elementam a mēs varam nodefinēt apgriezto elementu (jeb inverso elementu) kā vienādojumu $xa = ax = 1$ atrisinājumu. Laukā katram elementam eksistē tā inversais elements.

3.3. Saskaitīšanas tabula $\mathbb{Z}_7$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

3.4. Reizināšanas tabula $\mathbb{Z}_7$

$\times$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

3.5. Dalīšanas tabula $\mathbb{Z}_7$

$\div$	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	1	4	5	2	3	6
2	2	1	6	4	5	1
3	3	6	1	5	2	4
4	4	2	4	1	6	5
5	5	3	2	6	1	4
6	6	5	3	4	2	1