Revisión Álgebra Lineal

https://www.math.hkust.edu.hk/~machas/matrix-algebra-for-engineers.pdf

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matriz mxn
m filas
n columnas

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Suma de Matrices

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

Multiplicación por escalar

Matrices especiales

https://www.math.hkust.edu.hk/~machas/matrix-algebra-for-engineers.pdf

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz cero y matriz identidad

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Matriz Triangulo

Traspuesta de Matriz

https://www.math.hkust.edu.hk/~machas/matrix-algebra-for-engineers.pdf

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}, \text{ and } (\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$$

Producto de Matrices

https://www.math.hkust.edu.hk/~machas/matrix-algebra-for-engineers.pdf

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$$

$$||\mathbf{u}|| = \left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\right)^{1/2} = \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)^{1/2}$$

Multiplicación matriz con vector

Para multiplicar una matriz por un vector columna (o fila), la matriz debe tener el mismo número de columnas (o filas) que el número de elementos en el vector columna (o fila).

Veamos un ejemplo de multiplicar una matriz por un vector, donde X es un vector columna de *nx1* y A es una matriz de *mxn*

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad AX = \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \\ 49 \end{pmatrix}$$

Para realizar la multiplicación, multiplicamos cada elemento de la fila 1 de la matriz (A) por el elemento correspondiente del vector columna y los sumamos, es decir, (1x2 + 2x1 + 3x3 = 13). De manera similar, podemos aplicar la misma operación a las filas 2 y 3 de la matriz A con los mismos tres elementos de X

Ejemplo de multiplicación de 2 matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 68 \\ 122 & 167 \end{pmatrix}$$

Para poder multiplicar dos matrices y obtener un producto punto, el número de columnas en la primera matriz debe ser igual al número de filas en la segunda matriz.

La matriz resultante tendría el mismo número de filas que la primera matriz y el mismo número de columnas que la segunda matriz.

Inversa y Determinante

https://www.math.hkust.edu.hk/~machas/matrix-algebra-for-engineers.pdf

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Varianza

La varianza nos ayuda a entender qué tan dispersa está nuestra variable aleatoria respecto a la media. Por ejemplo, los ingresos de las personas pueden tener una varianza alta si algunas personas tienen niveles de ingresos elevados.

La fórmula de la varianza para una muestra es la siguiente:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

donde n es el número de muestras (por ejemplo, el número de personas) y X barra es la media de la variable aleatoria X(media de los ingresos).

Covarianza

Mide cuánto varían juntas dos variables aleatorias. Por ejemplo, los ingresos de una persona y los gastos de esa persona en una población. Más precisamente, la covarianza se refiere a la medida de cómo dos variables aleatorias en un conjunto de datos cambiarán juntas.

Una covarianza positiva significa que las dos variables están positivamente relacionadas y se mueven en la misma dirección. Una covarianza negativa significa que las variables están inversamente relacionadas, o que se mueven en direcciones opuestas.

La fórmula para la covarianza es la siguiente:

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Donde n es el número de muestras (por ejemplo, el número de personas) y X barra es la media de la variable aleatoria X (representada como un vector).

La varianza \(\sigma^2_x \) de una variable aleatoria X también puede expresarse como la covarianza consigo misma, es decir, \(\sigma(x, x) \).

Matriz de Covarianza

Siguiendo las ecuaciones anteriores, la matriz de covarianza para las dos dimensiones se da por:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma(x,x) & \sigma(x,y) \\ \sigma(y,x) & \sigma(y,y) \end{pmatrix}$$

En esta matriz, las varianzas aparecen a lo largo de la diagonal, y las covarianzas aparecen en los elementos fuera de la diagonal.

Para el caso general de una matriz de n dimensiones:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \dots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \dots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

Además, la matriz de covarianza siempre será una matriz cuadrada y su dimensión será equivalente al número de variables