Asignatura : Cálculo Numérico
Grado en Ingeniería Aeroespacial - ETSIAE
Curso : 2020-2021

Complemento del Hito 6 - Problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias

Dados los esquemas numéricos siguientes para el problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias :

- Euler explícito :
$$u^{n+1} \ = \ u^n \ + \ \Delta t \ F^n. \tag{1}$$
- Euler implícito :
$$u^{n+1} \ = \ u^n \ + \ \Delta t \ F^{n+1}. \tag{2}$$
- Adams–Bashforth de dos pasos (AB_2) :
$$u^{n+1} \ = \ u^n \ + \ \frac{\Delta t}{2} \ (\ 3 \ F^n \ - \ \ F^{n-1} \ ). \tag{3}$$
- Adams–Moulton de un paso (AM_1) (regla del trapecio o Crank–Nicolson) :
$$u^{n+1} \ = \ u^n \ + \ \frac{\Delta t}{2} \ (F^{n+1} \ + \ F^n). \tag{4}$$
- Runge–Kutta de dos etapas explícito (RK_2) :
$$\begin{aligned} u^{n+1} \ &= \ u^n \ + \ \frac{\Delta t}{2} \ (k_1 \ + \ k_2), \\ k_1 \ &= \ F(u^n; \ t_n), \\ k_2 \ &= \ F(u^n + \Delta t \ k_1; \ t_n + \Delta t). \end{aligned} \tag{5}$$

se pide obtener, para cada uno de ellos :

- Error de truncamiento T^{n+1} .
- Orden del esquema .
- Polinomio característico de estabilidad $\pi(r,\ \omega)$.
- Región de estabilidad absoluta $\mathcal{R}_A$.

Dados los problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes :

1. Problema escalar :
$$\frac{du}{dt} = -3\, u, \qquad u(0) = 1. \tag{6}$$
2. Problema vectorial :
$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad \frac{dy}{dt}(0) = 0, \tag{7}$$

para cada uno de ellos, se pide estudiar las soluciones numéricas obtenidas con los métodos numéricos (1), (3) y (5), obteniendo las expresiones siguientes :

- Ecuación en diferencias de la solución numérica.
- Solución de la ecuación en diferencias de la solución numérica.
- Ecuación del error global de la solución numérica.
- Solución de la ecuación del error global de la solución numérica.
- Acotación de la solución del error global de la solución numérica.

Discutir el comportamiento de las soluciones numéricas en función del paso temporal Δt e indicar si las mismas preservan el carácter de estabilidad asintótica del problema diferencial. Relacionar los resultados anteriores con la región de estabilidad absoluta de cada método.

Obtener soluciones numéricas con el ordenador y comprobar los resultados en función de los conceptos de análisis numérico propuestos en el enunciado.

1. Ejemplo: problema diferencial escalar y esquema Euler explícito

$$\frac{du}{dt} \ = \ -u, \qquad u(0) \ = \ 1, \qquad\qquad u(t) \ = \ e^{-t}, \tag{8}$$

$$u^{n+1} \ = \ u^n \ + \ \Delta t \ F^n. \tag{9}$$

1.1. Error de truncamiento T^{n+1} del Euler Explícito :

$$T^{n+1} \ = \ u(t_{n+1}) \ - \ u(t_n) \ - \ \Delta t \ F(u(t_n)), \tag{10}$$

$$T^{n+1} \ = \ u(t_{n+1}) \ - \ u(t_n) \ - \ \Delta t \ \left.\frac{du}{dt}\right|_{t_n}, \tag{11}$$

Se considera que $u(t)$ es una función analítica y se plantea un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto t_n:

$$T^{n+1} \ = \ u(t_n) \ + \ \left.\frac{du}{dt}\right|_{t_n} (t_{n+1} - t_n) \ + \ \frac{1}{2} \left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_{t_n} (t_{n+1} - t_n)^2 \ + \ \cdots \ - \ u(t_n) \ - \ \Delta t \ \left.\frac{du}{dt}\right|_{t_n}, \tag{12}$$

$$T^{n+1} \ = \ u(t_n) \ + \ \left.\frac{du}{dt}\right|_{t_n} \Delta t \ + \ \frac{1}{2} \ \left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_{t_n} \Delta t^2 \ + \ \cdots \ - \ u(t_n) \ - \ \Delta t \ \left.\frac{du}{dt}\right|_{t_n}, \tag{13}$$

$$T^{n+1} \ = \ \frac{1}{2} \ \left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_{t_n} \Delta t^2. \tag{14}$$

1.2. Orden del esquema :

Como el error de truncamiento (14) es $O(\Delta t^2)$, el Euler explícito es un esquema de primer orden.

1.3. Polinomio característico de estabilidad $\pi(r,\ \omega)$:

Se considera el problema diferencial escalar :

$$\frac{du}{dt} = \lambda\, u, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{15}$$

al que se le aplica el esquema Euler explícito del cual se quiere calcular el polinomio característico :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t\ F^n, \tag{16}$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t\ \lambda\ u^n. \tag{17}$$

El producto $\lambda\ \Delta t$ se denomina ω y es el parámetro del polinomio característico:

$$u^{n+1} = u^n + \omega\ u^n, \qquad \omega \in \mathbb{C}, \tag{18}$$

$$u^{n+1} = (1 + \omega)\ u^n. \tag{19}$$

La expresión (19) es una ecuación en diferencias de primer orden homogénea y su solución es :

$$u^n = (1 + \omega)^n, \qquad u^n = r^n, \tag{20}$$

donde r es la raíz de la ecuación en diferencias y es :

$$r = 1 + \omega. \tag{21}$$

Finalmente, de la expresión anterior, se calcula el polinomio característico de estabilidad del esquema Euler explícito :

$$\pi(r,\ \omega) = r - 1 - \omega, \tag{22}$$

que relaciona las raíces (autovalores) del problema en diferencias expresadas en r con las raíces (autovalores) del problema diferencial expresadas en ω.

1.4. Región de estabilidad absoluta $\mathcal{R}_A$:

Para obtener la región de estabilidad absoluta, se parte del polinomio característico de estabilidad (22):

$$\pi(r,\ \omega) = r - 1 - \omega, \tag{23}$$

Haciendo $r = e^{i\theta}$ y $\omega = e^{i\theta} - 1$ obtenemos, en el plano complejo ω, una circunferencia de radio unidad centrada en $\omega = -1$. En el interior de la circunferencia $|r| < 1$ y en el exterior $|r| > 1$.

A modo de ejemplo, para un problema diferencial escalar con $\lambda = -1$, para que $\lambda\ \Delta t$ esté dentro de la región de estabilidad absoluta del Euler explícito y la solución numérica sea asintóticamente estable, se debe verificar que Δt debe de ser menor que 2.

1.5. Ecuación en diferencias de la solución numérica :

Se considera el problema diferencial (8) y se calcula la solución numérica con el esquema Euler explícito (9). Al reemplazar $F(u) \; = \; -u$ en el esquema numérico se tiene :

$$u^{n+1} \; = \; u^n \; - \; \Delta t \; u^n, \tag{24}$$

que es una ecuación en diferencias de primer orden, lineal, de coeficientes constantes (si Δt es constante) y homogénea. Si se incorpora la condición inicial del problema diferencial, se tiene el problena de valores inciales (problema de Cauchy) de la ecuación en diferencias de la solución numérica :

$$\begin{aligned} &u^{n+1} \; = \; (1 \; - \; \Delta t) \; u^n, \\ &u^0 \; = \; 1. \end{aligned} \tag{25}$$

1.6. Solución de la ecuación en diferencias de la solución numérica :

La solución del problema (25) es :

$$u^n \; = \; (1 \; - \; \Delta t)^n \; u^0 \; = \; (1 \; - \; \Delta t)^n, \tag{26}$$

que expresa el término general de la sucesión $\{u^n\}$ de la solución numérica.

Si $\Delta t \; < \; 1$, la solución numérica tiende a cero con $n \to \infty$, mediante potencias de n, y preserva el carácter de estabilidad asintótica del problema diferencial. Si $\Delta t \; > \; 1$, la solución numérica tiende a infinito con $n \to \infty$ y no preserva el carácter de estabilidad asintótica del problema diferencial.

1.7. Ecuación del error global de la solución numérica :

Se parte de la definición del error de truncamiento del esquema Euler explícito :

$$T^{n+1} \; = \; u(t_{n+1}) \; - \; u(t_n) \; - \; \Delta t \; F(u(t_n)), \tag{27}$$

que aplicada al problema diferencial (6) resulta :

$$T^{n+1} \; = \; u(t_{n+1}) \; - \; u(t_n) \; + \; \Delta t \; u(t_n). \tag{28}$$

Por otro lado, el esquema Euler explícito aplicado al problema diferencial (6) resulta :

$$0 \; = \; u^{n+1} \; - \; u^n \; + \; \Delta t \; u^n. \tag{29}$$

Restando término a término las expresiones (28) y (29) y utilizando la definición del error global de la solución numérica, se llega a la ecuación del error global de la solución numérica :

$$E^{n+1} \ = \ (1 \ - \ \Delta t) \ E^n \ + \ T^{n+1}, \tag{30}$$

que es una ecuación en diferencias de primer orden, lineal, de coeficientes constantes (si Δt es constante) y no homogénea. Si se incorpora la condición inicial del error global E^0, se tiene el problena de valores inciales (problema de Cauchy) de la ecuación en diferencias del error global :

$$\begin{aligned} E^{n+1} \ &= \ (1 \ - \ \Delta t) \ E^n \ + \ T^{n+1}, \\ E^0 \ &= \ u(t_0) \ - \ u^0. \end{aligned} \tag{31}$$

1.8. Solución de la ecuación del error global de la solución numérica :

La solución del problema (31) es :

$$E^n \ = \ (1 \ - \ \Delta t)^n \ E^0 \ + \ \sum_{k=1}^{n} (1 \ - \ \Delta t)^{n-k} \ T^k, \qquad\qquad n \ = \ 1, \ 2, \ \ldots \tag{32}$$

que expresa el término general de la sucesión $\{E^n\}$ del error global de la solución numérica. El primer término es la propagación del error de las condiciones iniciales y el segundo término es la acumulación del error de truncamiento.

Si $\Delta t \ < \ 1$, el error en la condición inicial tiende a cero con $n \to \infty$, mediante potencias de n, y el error global de la solución numérica está acotado por el error de truncamiento. Si $\Delta t \ > \ 1$, el error en la condición inicial tiende a infinito con $n \to \infty$ invalidando la solución numérica.

A continuación, a modo de ejemplo, se presentan las regiones de estabilidad absoluta de los esquemas Adams-Bashforth de dos pasos (figura 1) y Runge–Kutta de dos etapas explícito (figura 2). A diferencia de lo que ocurre en los esquemas Euler explícito e implícito, en estos y en muchos otros esquemas, no existe una expresión analítica explícita para representar gráficamente la región de estabilidad y debe recurrirse a un mallado en el plano complejo ω.

En general, la determinación de la región de estabilidad absoluta debe hacerse mediante un pequeño programa numérico. Para cada punto del plano complejo ω, y a partir del polinomio característico de estabilidad del esquema numérico, se calculan las raíces r_i y el valor máximo de su módulo

$$\rho \;=\; \sup\; |r_i|, \qquad i \;=\; 1,\; \dots\;,\; p.$$

Aquellos puntos del plano complejo en los que el módulo de todas las raíces sea menor que uno estarán dentro de la región de estabilidad absoluta, y aquellos puntos del plano complejo en los que exista al menos una raíz con módulo mayor que uno estarán fuera de la región de estabilidad absoluta.

Mediante un programa que permita representar gráficamente la línea de nivel $\rho = 1$, se dibuja la frontera de la región de estabilidad absoluta. Pintando sucesivos valores de $\rho < 1$ se obtiene la región de estabilidad absoluta.

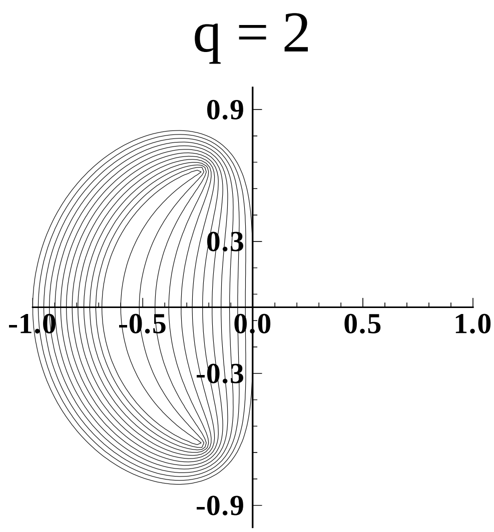

Figura 1: Región de estabilidad absoluta del esquema AB_2

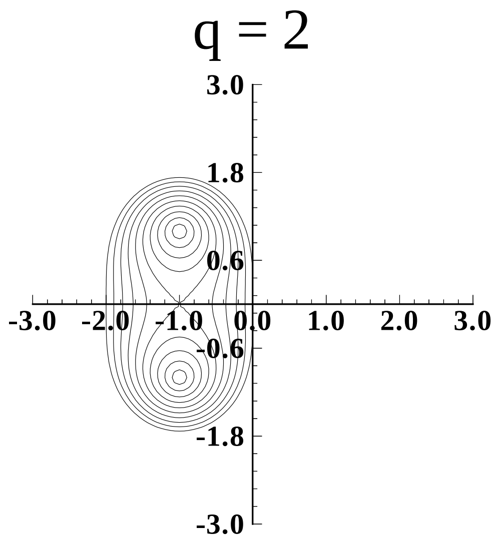

Figura 2: Región de estabilidad absoluta del esquema RK_2

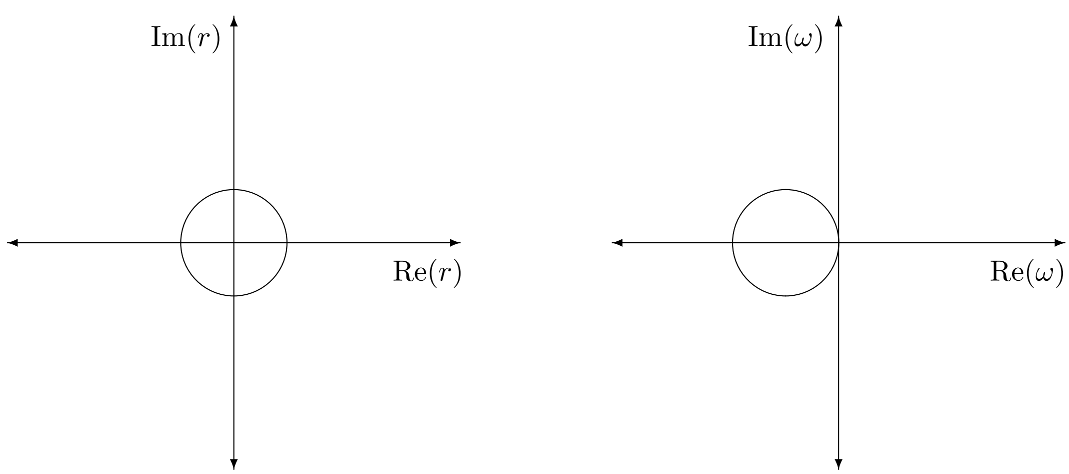

Figura 3: Región de estabilidad absoluta