4 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

ÍNDICE PARTICULAR

4

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

4.1 FÓRMULAS FUNDAMENTALES

La base del estudio de este inciso está en las siguientes 11 fórmulas que a continuación se van a deducir, llamadas *fórmulas trigonométricas.*

Se parte de las definiciones elementales del Capítulo 1 de cada una de las funciones trigonométricas, referidas a la figura 4.1.

$$sen\,\theta = \frac{y}{r} \quad ; \quad cos\,\theta = \frac{x}{r}$$

$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \quad ; \quad cot\,\theta = \frac{x}{y}$$

$$sec\,\theta = \frac{r}{x} \quad ; \quad csc\,\theta = \frac{r}{y}$$

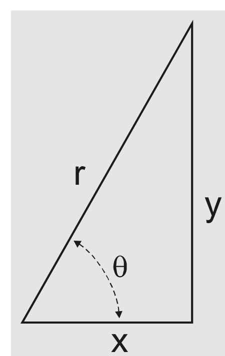


figura 4.1

4.1.1) FÓRMULAS DE LOS INVERSOS O DE LOS RECÍPROCOS

Un número es el inverso de otro, respecto de cierta operación, si al operar ambos entre sí dan como resultado el elemento neutro de esa operación.

Por ejemplo: en la suma el elemento neutro es el cero, ya que el cero no altera o deja inalterado a todo número. De manera que el inverso del número + 14 es el - 14, ya que al operar ambos dan como resultado el cero (el elemento neutro de la suma). Por eso se le llama *inverso aditivo* . En la multiplicación, el elemento neutro es *el uno*, ya que *el uno* deja inalterado en la multiplicación a cualquier número. De manera que el inverso de 8 es 1/8, ya que al multicarlos da como resultado el *uno* (el elemento neutro de la multiplicación). Por eso se le llama *inverso multiplicativo*. Un sinónimo de *inverso multiplicativo* es *recíproco*.

De tal manera que el significado que a las siguientes seis fórmulas se le va a dar al término *inverso* es el de *inverso multiplicativo*, o sea que multiplicadas entre sí dan el elemento neutro de la multiplicación: **el uno**. Por otra parte, cabe recordar que si un número n es el inverso multiplicativo de otro número m, lo que significa que $nm = 1$, entonces puede escribirse por simple despeje que

$$n = \frac{1}{m} \qquad \text{o bien} \qquad m = \frac{1}{n}$$

Puede verse en las relaciones trigonométricas de la página 40 que la función *seno* y la función *cosecante* son recíprocos o inversos multiplicativos, ya que de su multiplicación se obtiene $\frac{y}{r} \cdot \frac{r}{y} = 1$; igualmente el *coseno* con la *secante* son inversos multiplicativos, ya que de su multiplicación se obtiene $\frac{x}{r} \cdot \frac{r}{x} = 1$ y de la misma forma la *tangente* con la *cotangente* también lo son, ya que de su multiplicación se obtiene $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$. De manera que las primeras seis fórmulas trigonométricas, llamadas por eso de los *inversos* o *recíprocos*, son:

(1) $sen\,\theta = \dfrac{1}{csc\,\theta}$	(2) $cos\,\theta = \dfrac{1}{sec\,\theta}$
(3) $tan\,\theta = \dfrac{1}{cot\,\theta}$	(4) $cot\,\theta = \dfrac{1}{tan\,\theta}$
(5) $sec\,\theta = \dfrac{1}{cos\,\theta}$	(6) $csc\,\theta = \dfrac{1}{sen\,\theta}$

A las fórmulas anteriores también se les conoce con el nombre de *fórmulas de los recíprocos* ya que, en particular, a los *inversos multiplicativos* se les llama *recíprocos*. Dos números son *recíprocos* si se invierten respectivamente el numerador con el denominador. Por ejemplo, $3/4$ y $4/3$ son recíprocos; $2/9$ y $9/2$ son recíprocos. Es claro que si se multiplican entre sí dan la unidad, o sea el elemento neutro de la multiplicación, por lo que, conforme a la definición de la página 40, los recíprocos son también inversos. *¡Cuidado: los inversos son también recíprocos solamente en la multiplicación!*.

4.1.2 FÓRMULAS DEL COCIENTE

Dividiendo el seno entre el coseno (ver figura 4.1, página 40) se tiene que:

$$\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{yr}{xr} = \frac{y}{x} = tan\,\theta$$

e inversamente, dividiendo el coseno entre el seno se obtiene:

$$\frac{cos\,\theta}{sen\,\theta} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{xr}{yr} = \frac{x}{y} = cot\,\theta$$

De manera que las siguientes dos fórmulas, llamadas del cociente, son:

7 $$\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} = tan\,\theta$$

8 $$\frac{cos\,\theta}{sen\,\theta} = cot\,\theta$$

4.1.3 FÓRMULAS DE LOS CUADRADOS O PITAGÓRICAS

Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 4.1 de la página 40, se tiene que

$$\text{(A)} \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

a) Dividiendo la igualdad (A) entre r^2, aplicando la propiedad de las igualdades: *"Lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve"*, se obtiene:

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

simplificando:

$$1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

que se puede escribir como

$$1 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2$$

pero como

$$\frac{x}{r} = cos\,\theta \quad \text{y además} \quad \frac{y}{r} = sen\,\theta \quad \text{(ver figura 4.1, página 40)}$$

se llega a la novena fórmula que es

$$\boxed{9 \qquad sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$$

Significa que para cualquier ángulo θ , la suma del seno cuadrado de ese ángulo más el coseno cuadrado del mismo ángulo siempre va a dar la unidad. El alumno puede probarlo con su calculadora, por ejemplo, para $\theta = 37$, realizar las operaciones $(sen\,37)^2 + (cos\,37)^2$ para comprobar que el resultado es 1.

b) Dividiendo la igualdad (A) , página 42, entre x^2 , aplicando la propiedad de las igualdades: *"Lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve"*, se obtiene:

$$\frac{r^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

simplificando:

$$\frac{r^2}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2}$$

que se puede escribir como

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

pero como

$$\frac{r}{x} = sec\,\theta \qquad \text{y además} \qquad \frac{y}{x} = tan\,\theta$$ (ver figura 4.1, página 40)

se llega a la décima fórmula que es

$$\boxed{10 \qquad sec^2\theta = tan^2\theta + 1}$$

c) Dividiendo la igualdad (A), página 42, entre y^2, aplicando la propiedad de las igualdades (ley Uniforme): *"Lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve"*, se obtiene:

$$\frac{r^2}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2}$$

simplificando:

$$\frac{r^2}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + 1$$

que se puede escribir como

$$\left(\frac{r}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$$

pero como

$$\frac{r}{y} = csc\,\theta \qquad \text{y además} \qquad \frac{x}{y} = cot\,\theta \qquad \text{(ver figura 4.1, página 40)}$$

se llega a la décimoprimera fórmula que es

$$\boxed{11 \qquad \csc^2\theta = cot^2\theta + 1}$$

En resumen, las últimas tres fórmulas son

9	$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$
10	$sec^2\theta = tan^2\theta + 1$
11	$\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$

4.2 DEMOSTRACIONES

Dada una proposición trigonométrica, demostrarla consiste en transformarla hasta convertirla en una igualdad que sea cierta sin lugar a dudas.

Esas transformaciones deben apegarse a ciertas reglas obvias de la Lógica, como el hecho de que "de algo dudoso se obtiene algo dudoso" o que "de algo falso se obtiene algo falso". Por ejemplo, si se establece el siguiente razonamiento:

- *Donde hay vida, hay muerte.*
- *En la Galaxia Andrómeda hay vida.*
- *Por lo tanto, la muerte existe en la Galaxia Andrómeda.*

Alguien que haya razonado de la manera anterior puede afirmar que ha demostrado que en la Galaxia Andrómeda se da la muerte; sin embargo, su procedimiento se basó en una premisa dudosa: *En la Galaxia Andrómeda hay vida* , por lo que su conclusión es dudosa. Es decir, en este momento no se sabe con certeza si realmente existe vida o no por esos lugares, como pueda ser que sí, pueda ser que no, por lo tanto es dudosa su conclusión de que *la muerte existe en la Galaxia Andrómeda*.

De lo dudoso solamente se pueden obtener cosas dudosas.

Otro ejemplo, si se establece el siguiente razonamiento:

- *Los carnívoros se alimentan de frutas.*
- *El león es un magnífico carnívoro.*
- *Por lo tanto, el león se alimenta de frutas.*

Alguien que haya razonado de la manera anterior puede afirmar que ha demostrado que el león se alimenta de frutas; sin embargo, su procedimiento se basó en la premisa falsa *Los carnívoros se alimentan de frutas* , por lo que su conclusión es falsa.

De lo falso solamente se pueden obtener cosas falsas.

Las demostraciones trigonométricas se hacen de tal manera que no utilicen nada dudoso ni nada falso para que la conclusión no sea dudosa o falsa. Todo debe ser cierto sin lugar a dudas para que la demostración sea válida. ¿Y qué es cierto sin lugar a dudas?: Por una parte, las once fórmulas anteriores lo son, pues por eso se dedujeron paso a paso para verificar su validez y veracidad; por otra parte, toda identidad es cierta sin lugar a dudas por ser axiomática. Una identidad es cualquier cosa igual a sí misma. Axiomático es aquello tan evidente que no requiere demostración.

De tal manera que las anteriores once fórmulas son la base de las demostraciones que a continuación se estudiarán. Para demostrar una proposición trigonométrica debe transformarse, ya sea por sustituciones de cualquiera de las fórmulas o por pasos algebraicos válidos, de manera que se llegue a una igualdad que sin duda alguna sea cierta, es decir, que lo escrito del lado izquierdo sea realmente igual a lo escrito del lado derecho.

Para que una igualdad trigonométrica quede demostrada se debe llegar a:

1) ***una identidad, es decir, a algo igual a sí mismo; o bien***

2) ***a una cualquiera de las fórmulas trigonométricas.***

NOTA: Para indicar que una proposición ha quedado demostrada es indispensable escribir a un lado de ella una palomita ✓ , pues la falta de ella puede interpretarse como una de estas dos cosas: una, que ha quedado demostrada; dos, que la persona que estaba haciendo la demostración ya no supo continuar y en ese instante se detuvo por ignorancia.

Para facilitar la comprensión y aprendizaje de los procesos de demostración de igualdades trigonométricas, conviene clasificarlas o agruparlas, según la forma que tengan.

4.2.1 POR SIMILITUD CON ALGUNA FÓRMULA:

PROCEDIMIENTO: Se compara la igualdad que debe demostrarse con la fórmula a la que se "parece". Entonces el término que es diferente de la fórmula es el que se transforma hasta convertirlo en el correspondiente de la fórmula.

Ejemplo 1: Demostrar que $sen^2 x + cos^2 x = tan\ x\ cot\ x$

Demostración: La igualdad propuesta se "parece" a la fórmula (9) de los cuadrados (página 45). De manera que, por comparación, se debe transformar el lado derecho para convertirlo en 1. El siguiente esquema muestra la forma de hacer la comparación:

Comparación:

igualdad a demostrar: $\underbrace{sen^2x + cos^2x}_{\downarrow} = \underbrace{tan\ x\ cot\ x}_{\downarrow}$

fórmula 9 $\longrightarrow$ $\overbrace{sen^2x + cos^2x} = 1$

Como $tan\ x = \dfrac{1}{cot\ x}$, según la fórmula 3 de los recíprocos, página 41, sustituyendo en la igualdad propuesta se llega a

$$sen^2 x + cos^2 x = \frac{1}{cot\ x}\left(cot\ x\right)$$

simplificando el lado derecho:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1\ \checkmark$$

con lo que queda demostrado, ya que esta igualdad es cierta sin lugar a dudas por tratarse de la fórmula 9 de los cuadrados.

Ejemplo 2: Demostrar que $tan^2 x + sen^2 x + cos^2 x = sec^2 x$

Demostración: La igualdad propuesta se "parece" a la fórmula 10 de los cuadrados (página 45). De manera que por comparación debe suponerse que $sen^2 x + cos^2 x$ es igual a 1.

Comparación:

igualdad a demostrar: $\underbrace{tan^2x} + \underbrace{sen^2x + cos^2x} = \underbrace{sec^2x}$

fórmula 10 $\longrightarrow$ $\overbrace{tan^2x} + \overbrace{1} = \overbrace{sec^2x}$

Y efectivamente lo es, ya que por la fórmula 9 se tiene que

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

de manera que sustituyendo en la igualdad original se llega a

$$tan^2 x + 1 = sec^2 x \checkmark$$

la cual es cierta sin lugar a dudas por ser la fórmula 10 de los cuadrados (página 45), con lo cual queda demostrada la igualdad propuesta.

Ejemplo 3: Demostrar que: $cot^2 x + 1 = \dfrac{1}{sen^2 x}$

Demostración: Comparación:

igualdad a demostrar: $\underbrace{cot^2x + 1} = \underbrace{\dfrac{1}{sen^2x}}$

fórmula 11 $\longrightarrow$ $\overbrace{cot^2x + 1} = csc^2x$

La igualdad propuesta se "parece" a la fórmula 11 de los cuadrados (página 45). De manera que por comparación se debe suponer que $\dfrac{1}{sen^2 x}$ es igual a $csc^2 x$.

Por la fórmula 6 de los recíprocos, página 41, se tiene que

$$csc\ x = \frac{1}{sen\ x}$$

de donde, aplicando la propiedad de las igualdades *"Lo que se haga de un lado debe hacerse del otro para que la igualdad se conserve"*, elevando al cuadrado ambos lados se obtiene

$$(csc\ x)^2 = \left(\frac{1}{senx}\right)^2$$

que es lo mismo que

$$\frac{1}{sen^2 x} = csc^2 x$$

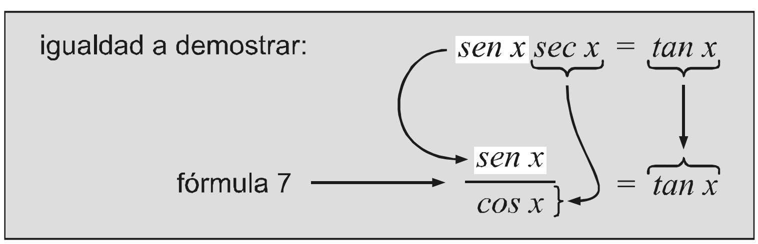
sustituyendo este valor de $\frac{1}{sen^2 x}$ en la igualdad original, se obtiene

$$cot^2 x + 1 = csc^2 x \ ✓$$

Esta igualdad a la que se llegó es cierta sin lugar a dudas, ya que es la fórmula **11** de los cuadrados (página 45). Por lo tanto, ha quedado demostrada.

Ejemplo 4: Demostrar que $sen\ x\ sec\ x = tan\ x$

Demostración: Comparación:



La igualdad propuesta se "parece" a la fórmula **7** de los cocientes (página 42). De manera que por comparación debe suponerse que $sec\ x$ es igual a $\frac{1}{cos\ x}$. Y efectivamente lo es, ya que por la fórmula **5** de los inversos se tiene que

$$sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$$

Así que sustituyendo la fórmula **5** en la igualdad original, se obtiene:

$$sen\ x\left(\frac{1}{cos\ x}\right) = tan\ x$$

que es lo mismo que

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} = tan\ x \quad ✓$$

Esta igualdad a la que se llegó es cierta sin lugar a dudas, ya que es la fórmula 7 de los cocientes (página 42). Por lo tanto, ha quedado demostrada.

EJERCICIO 17

Demostrar las siguientes igualdades trigonométricas por similitud con alguna de las once fórmulas.

1) $sen^2 x + cos^2 x = sen\ x\ csc\ x$

2) $\dfrac{1}{csc^2 x} + cos^2 x = 1$

3) $tan^2 x + sen\, x\, csc\, x = sec^2 x$

4) $\dfrac{cos^2 x}{sen^2 x} + 1 = csc^2 x$

5) $sen^2 x + cos^2 x = cos\, x\, sec\, x$

6) $tan^2 x + tan\, x\, cot\, x = sec^2 x$

7) $\dfrac{sen^2 x}{cos^2 x} + 1 = sec^2 x$

8) $sen^2 x + \dfrac{1}{sec^2 x} = 1$

9) $tan^2 x\, cos\, x + cos^2 x = 1$

10) $sen^2 x + \dfrac{sen^2 x}{tan^2 x} = 1$

11) $\dfrac{1}{cos\, x\, csc\, x} = tan\, x$

12) $cos\, x\, csc\, x = cot\, x$

13) $\dfrac{1}{sen\, x\, sec\, x} = cot\, x$

14) $\dfrac{1}{tan^2 x} + 1 = csc^2 x$

15) $cot^2 x + \dfrac{1}{tan\, x\, cot\, x} = csc^2 x$

16) $cot^2 x + \dfrac{1}{cos\, x\, sec\, x} = csc^2 x$

17) $tan^2 x + \dfrac{1}{sen\, x\, csc\, x} = sec^2 x$

18) $cot^2 x + sen^2 x + cos^2 x = csc^2 x$

4.2.2 PASANDO A SENOS Y COSENOS

Un recurso muy útil en la demostración de igualdades trigonométricas es pasar todas las funciones a *senos* y/o *cosenos*, en virtud de que las seis pueden expresarse en términos de éstas, ya que la *tangente* es igual a *seno* entre *coseno* ; la *cotangente* es igual a *coseno* entre *seno* ; la *secante* es igual a *uno* entre *coseno* y la *cosecante* es igual a *uno* entre *seno.*

Una vez pasadas todas las funciones a *senos* y/o *cosenos*, se hacen las simplificaciones algebraicas posibles y, en caso necesario, se emplean nuevamente cualesquiera de las once fórmulas para transformar la igualdad propuesta en una igualdad que sea cierta sin lugar a dudas.

Ejemplo 1: Demostrar que $\dfrac{sec\ x}{csc\ x} = \dfrac{1}{cot\ x}$

Demostración: Pasando a *senos* y/o *cosenos* todas las funciones, sabiendo que

$$sec\ x = \frac{1}{cos\ x} \quad ; \quad csc\ x = \frac{1}{sen\ x} \quad \text{y} \quad cot\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}$$

sustituyendo en la igualdad original se obtiene que:

$$\frac{\dfrac{1}{cos\ x}}{\dfrac{1}{sen\ x}} = \frac{1}{\dfrac{cos\ x}{sen\ x}}$$

aplicando la ley de la herradura:

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{sen\ x}{cos\ x} \ \checkmark$$

igualdad que es cierta sin lugar a dudas, ya que cualquier cosa es igual a sí mismo. Por lo tanto, ha quedado demostrada.

Ejemplo 2: Demostrar que $sen^2 x\ sec\ x = \dfrac{sen\ x}{cot\ x}$

Demostración: Pasando a *senos* y/o *cosenos* todas las funciones, sabiendo que

$$sec\ x = \frac{1}{cos\ x} \quad \text{y} \quad cot\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}$$

sustituyendo en la igualdad original se obtiene que:

$$sen^2 x\left(\frac{1}{cos\ x}\right) = \frac{sen\ x}{\dfrac{cos\ x}{sen\ x}}$$

aplicando la ley de la herradura y haciendo multiplicaciones:

$$\frac{sen^2 x}{cos\ x} = \frac{sen^2 x}{cos\ x} \quad \checkmark$$

igualdad que es cierta sin lugar a dudas, ya que cualquier cosa es igual a sí mismo. Por lo tanto, ha quedado demostrada.

Ejemplo 3: Demostrar que $\dfrac{1}{cot^2 x} + \dfrac{1}{sen\, x\, csc\, x} = sec^2 x$

Demostración: Pasando a *senos* y/o *cosenos* todas las funciones, sabiendo que

$$cot\, x = \frac{cos\ x}{sen\ x} \quad ; \quad csc\ x = \frac{1}{sen\ x} \qquad \text{y} \qquad sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$$

sustituyendo en la igualdad original se obtiene que:

$$\frac{1}{\left(\dfrac{cos\ x}{sen\ x}\right)^2} + \frac{1}{sen\ x\left(\dfrac{1}{sen\ x}\right)} = \left(\frac{1}{cos\ x}\right)^2$$

aplicando la ley de la herradura y haciendo multiplicaciones:

$$\frac{1}{\dfrac{cos^2 x}{sen^2 x}} + \frac{1}{\left(\dfrac{sen\ x}{sen\ x}\right)} = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$\frac{sen^2 x}{cos^2 x} + 1 = \frac{1}{cos^2 x}$$

Ahora, aplicando la propiedad de las igualdades o ley uniforme: "Lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado también para que la igualdad se conserve", se multiplican ambos miembros de la igualdad por $cos^2 x$ para eliminar los denominadores:

$$cos^2 x\left(\frac{sen^2 x}{cos^2 x}\right)+1\left(cos^2 x\right)=cos^2 x\left(\frac{1}{cos^2 x}\right)$$

$$sen^2 x + cos^2 x = 1 \quad ✓$$

igualdad que es cierta sin lugar a dudas, ya que se trata de la fórmula 9 de los cuadrados (página 45). Por lo que ha quedado demostrada[2].

EJERCICIO 18

Demostrar las siguientes igualdades trigonométricas pasando a *senos y/o cosenos*.

1) $sen^2 x + \dfrac{1}{sec^2 x} = sen\,x\;csc\,x$

2) $\dfrac{1}{csc^2 x} + cos^2 x = 1$

3) $tan^2\,x + sen\,x\,csc\,x = sec^2\,x$

4) $\dfrac{cos^2\,x}{sen^2 x} + tan\,x\,cot\,x = csc^2\,x$

5) $sen^2 x + cos^2\,x = cos\,x\,sec\,x$

6) $tan^2\,x + tan\,x\,cot\,x = sec^2\,x$

7) $sec^2\,x\;csc^2\,x = sec^2\,x + csc^2\,x$

8) $sec\,x + csc\,x = sec\,x\,csc\,x(sen\,x + cos\,x)$

9) $tan^2\,x\;cos^2\,x + cos^2\,x = \dfrac{1}{csc^2\,x} + \dfrac{1}{sec\,x}$

10) $sec\,x + cos^2\,x = \dfrac{1}{cos\,x} + \dfrac{1}{sec^2\,x}$

11) $\dfrac{1}{cos\,x\;csc\,x} = tan\,x$

12) $cos\,x\;csc\,x = cot\,x$

13) $\dfrac{1}{sen\,x\;sec\,x} = cot\,x$

14) $cot^2\,x + \dfrac{1}{tan\,x\;cot\,x} = csc^2\,x$

---

1 Una demostración puede hacerse de diferentes maneras, siendo todas válidas a condición de que "no se digan mentiras" durante ningún paso del proceso. Así, en el ejemplo que se está resolviendo, en vez de multiplicar toda la igualdad por $cos^2 x$ como aquí se eligió, bien pudo sustituirse $\dfrac{sen^2 x}{cos^2 x}$ por su equivalente $tan^2 x$ y, por otra parte, $\dfrac{1}{cos^2 x}$ por $sec^2 x$, para llegar así a la fórmula (10) de los cuadrados (página 45).

15) $cot^2 x + \dfrac{1}{cos\, x\, sec\, x} = csc^2 x$

16) $sen^2 x + cos^2 x = sec^2 x - tan^2 x$

17) $tan^2 x + \dfrac{1}{sen\, x\, csc\, x} = sec^2 x$

18) $cot^2 x + sen^2 x + cos^2 x = csc^2 x$

4.2.3 DESPEJANDO DE LAS FORMULAS

De cada una de las once fórmulas es posible realizar dos despejes con los cuales pueden hacerse sustituciones de la misma manera que con las fórmulas originales, ya que, aunque despejadas, son en realidad las misma fórmulas.

Los dos despejes posibles en las seis fórmulas de los inversos o recíprocos son las que se muestran el siguiente cuadro al lado derecho. Obsérvese que en todos los casos, por la misma definición de inverso dada en la página 40, *el producto de las funciones que son inversas entre sí debe dar el elemento neutro de la multiplicación, o sea* 1, es lo que se obtiene al hacer uno de los despejes posibles; y al hacer el segundo despeje posible se obtienen las inversas entre sí.

FÓRMULA	**LOS 2 DESPEJES RESPECTIVOS**
$sen\, x = \dfrac{1}{csc\, x}$	$sen\, x\, csc\, x = 1$
	$csc\, x = \dfrac{1}{sen\, x}$
$cos\, x = \dfrac{1}{sec\, x}$	$cos\, x\, sec\, x = 1$
	$sec\, x = \dfrac{1}{cos\, x}$
$tan\, x = \dfrac{1}{cot\, x}$	$tan\, x\, cot\, x = 1$
	$cot\, x = \dfrac{1}{tan\, x}$

Los dos despejes respectivos de las fórmulas de los cocientes son:

FÓRMULA	LOS 2 DESPEJES RESPECTIVOS
$\tan x = \dfrac{sen\ x}{\cos x}$	$\tan x \cos x = sen\ x$
	$\cos x = \dfrac{sen\ x}{\tan x}$
$\cot x = \dfrac{\cos x}{sen\ x}$	$\cot x\ sen\ x = \cos x$
	$sen\ x = \dfrac{\cos x}{\cot x}$

Los dos despejes respectivos de las fórmulas de los cuadrados son:

FÓRMULA	LOS 2 DESPEJES RESPECTIVOS
$sen^2 x + \cos^2 x = 1$	$sen^2 x = 1 - \cos^2 x$
	$\cos^2 x = 1 - sen^2 x$
$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$1 = \sec^2 x - \tan^2 x$
	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$	$1 = \csc^2 x - \cot^2 x$
	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

4.2.4 REALIZANDO LAS OPERACIONES INDICADAS

A veces, realizando las operaciones algebraicas indicadas se llega a la demostración deseada. Desde luego que además de eso pueden combinarse las técnicas ya vistas, o sea, en un mismo ejercicio se pueden realizar las operaciones indicadas, pasar a *senos* y/o *cosenos*, despejar y/o buscar semejanza con alguna fórmula.

Ejemplo 1: Demostrar que $\left(sen\ x + cos\ x\right)^2 = 1 + \dfrac{2sen\ x}{sec\ x}$

Demostración: Efectuando el binomio al cuadrado del lado izquierdo, recordando que al ser un binomio al cuadrado su producto es el cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo:

$$sen^2 x + 2sen\ x\ cos\ x + cos^2\ x = 1 + \frac{2sen\ x}{sec\ x}$$

Del lado izquierdo se tienen los términos $sen^2 x + cos^2 x$ que valen 1 conforme a la fórmula **9** de los cuadrados; de manera que sustituyendo se tiene

$$1 + 2sen\ x\ cos\ x = 1 + \frac{2sen\ x}{sec\ x}$$

que es lo mismo que

$$1 + 2sen\ x\ cos\ x = 1 + 2sen\ x\left(\frac{1}{sec\ x}\right)$$

Pasando a senos y/o cosenos , sabiendo que

$$\frac{1}{sec\ x} = cos\ x$$

sustituyendo, se llega a que:

$$1 + 2sen\ x\ cos\ x = 1 + 2sen\ x\ cos\ x \quad ✓$$

igualdad que es cierta sin lugar a dudas, ya que cualquier cosa es igual a sí misma, por lo que ha quedado demostrada.

Ejemplo 2: Demostrar que $$\frac{1}{1+sen\ x}+\frac{1}{1-sen\ x}=2\,sec^2\ x$$

Demostración: Efectuando la suma de fracciones:

$$\frac{1(1-sen\ x)+1(1+sen\ x)}{(1+sen\ x)(1-sen\ x)}=2\,sec^2\ x$$

Haciendo las multiplicaciones del numerador y del denominador, recordando que los factores del denominador son binomios conjugados:

$$\frac{1-sen\ x+1+sen\ x}{(1-sen^2 x)}=2\,sec^2\ x$$

Realizando las sumas del numerador:

$$\frac{2}{1-sen^2 x}=2\,sec^2\ x$$

Sustituyendo la fórmula despejada $cos^2x = 1 - sen^2x$, página 55, en el denominador, se obtiene:

$$\frac{2}{cos^2\ x}=2\,sec^2\ x$$

Sustituyendo en el lado derecho la fórmula de los recíprocos 5 , página 41:

$$\frac{2}{cos^2\ x}=\frac{2}{cos^2\ x}\quad ✓$$

igualdad que es cierta sin lugar a dudas, por lo que ha quedado demostrada.

4.2.5 BINOMIOS CONJUGADOS

De los 2 despejes que es posible hacer en cada una de las tres fórmulas de los cuadrados (ver página 55), se obtiene en cada caso una diferencia de cuadrados, que por las reglas del Álgebra se pueden factorizar en dos binomios conjugados, como se muestra a continuación:

$$sen^2x = 1 - cos^2x = \mathbf{(1 - cos\ x)(1 + cos\ x)} \qquad (9.1)$$
$$cos^2x = 1 - sen^2x = \mathbf{(1 - sen\ x)(1 + sen\ x)} \qquad (9.2)$$

$1 =$	$sec^2x - tan^2x$	$=$	**$(sec\ x - tan\ x)(sec\ x + tan\ x)$**	(10.1)
$tan^2x =$	$sec^2x - 1$	$=$	**$(sec\ x - 1)(sec\ x + 1)$**	(10.2)
$1 =$	$csc^2x - cot^2x$	$=$	**$(csc\ x - cot\ x)(csc\ x + cot\ x)$**	(11.1)
$cot^2x =$	$csc^2x - 1$	$=$	**$(csc\ x - 1)(csc\ x + 1)$**	(11.2)

Cuando aparece una fracción cuyo denominador es uno de esos binomios conjugados, suele resultar muy práctico, aplicando la propiedad de las fracciones *si se multiplica el numerador y el denominador por la misma cantidad la fracción no se altera*, multiplicar numerador y denominador por el binomio conjugado del que apareció originalmente para obtener la diferencia de cuadrados que a su vez es igual a una función al cuadrado (ó a 1), conforme al cuadro anterior leído de derecha a izquierda.

La ventaja que a veces se obtiene es que dicho denominador puede transformarse en otro de un solo término, el cual así puede dividirse en varias fracciones o simplemente pasarse a *senos* y/o *cosenos* y/o aplicar alguna de las técnicas antes descritas.

O bien, la presencia de uno de esos binomios conjugados puede sugerir que debe buscarse el otro binomio en alguna parte de la igualdad para juntarlos y multiplicarlos con el objeto de obtener finalmente su equivalente cuadrado de un término, conforme al cuadro anterior.

Ejemplo 1: Demostrar que $\frac{cos^2 x}{1 + sen\, x} = 1 - \frac{1}{csc\, x}$ (original)

Demostración: **Método 1:** El denominador (1 + *sen x*) es uno de los dos binomios conjugados que aparecen en el cuadro anterior, en la fórmula (9.2), por lo que es conveniente intentar localizar el otro binomio conjugado.

Como

$$\frac{1}{csc\, x} = sen\ x \quad ,$$

entonces sustituyendo en la igualdad original del lado derecho:

$$\frac{cos^2 x}{1 + sen\ x} = 1 - sen\ x$$

Y efectivamente, ¡ya apareció el otro binomio!. Entonces, juntándolos, o sea, multiplicándolos, para obtener (ver cuadro de la página anterior):

$$cos^2 x = (1 - sen\ x)(1 + sen\ x)$$

como la multiplicación de dos binomios conjugados da una diferencia de cuadrados, en el lado derecho se obtiene:

$$cos^2 x = 1 - sen^2 x$$
$$sen^2 x + cos^2 x = 1 \checkmark$$

con lo que queda demostrada.

Método 2: El denominador (1 + *sen x*) es uno de los dos binomios conjugados que aparecen en el cuadro anterior, en la fórmula (9.2), página 57, por lo que es conveniente, aplicando la propiedad de las fracciones *si se multiplica el numerador y el denominador por la misma cantidad la fracción no se altera* , multiplicar numerador y denominador por 1 - *sen x* , o sea su binomio conjugado respectivo para obtener la diferencia de cuadrados que, a su vez, es igual a $cos^2 x$, según la fórmula (9.2), leída de derecha a izquierda en el cuadro de la página 57.

Haciéndolo se obtiene:

$$\frac{cos^2 x(1 - sen\ x)}{(1 + sen\ x)(1 - sen\ x)} = 1 - \frac{1}{csc\ x}$$

Efectuando solamente las multiplicaciones del denominador, puesto que son los dos binomios conjugados que interesan:

$$\frac{cos^2 x(1 - sen\ x)}{1 - sen^2 x} = 1 - \frac{1}{csc\ x}$$

Por la fórmula (9.2), página 57, sustituyendo en el denominador el valor de $1 - sen^2 x$ por su equivalente $cos^2 x$:

$$\frac{cos^2 x(1 - sen\ x)}{cos^2 x} = 1 - \frac{1}{csc\ x}$$

Simplificando:

$$1 - sen\ x = 1 - \frac{1}{csc\ x}$$

Como

$$\frac{1}{csc\ x} = sen\ x \quad ,$$

entonces sustituyendo en la original:

$$1 - sen\ x = 1 - sen\ x \qquad \checkmark$$

igualdad que es cierta sin lugar a dudas, ya que cualquier cosa es igual a sí misma, por lo que ha quedado demostrada.

Ejemplo 2: Demostrar que $\dfrac{tan^2 x}{sec\, x+1}+1=sec\, x$

Demostración: **Método 1:** El denominador ($sec\, x$ + 1) es uno de los dos binomios conjugados que aparecen en la tabla de la página 57, en la fórmula (10.2), por lo que es conveniente intentar localizar el otro binomio conjugado.

Así que restando 1 en ambos miembros de la igualdad (recordar que el + 1 no pasa al otro lado restando), resulta:

$$\frac{tan^2 x}{sec\, x+1}+1-1=sec\, x-1$$

$$\frac{tan^2 x}{sec\, x+1}=sec-1$$

Y efectivamente, ¡ya apareció el otro binomio!. Entonces lo que conviene es "juntarlos", o sea multiplicarlos, pues el denominador queda (no se dijo que pasa) multiplicando en el lado derecho (ver cuadro de la página 57):

$$tan^2 x = (sec\, x - 1)(sec\, x + 1)$$

multiplicando los binomios del lado derecho:

$$tan^2 x = sec^2 x - 1$$

o bien

$$tan^2 x + 1 = sec^2 x \quad ✓$$

con lo que queda demostrada.

Método 2: El denominador ($sec\, x$ + 1) es uno de los dos binomios conjugados que aparecen en el cuadro de la página 57, en la fórmula (10.2), por lo que es conveniente, aplicando la propiedad de las fracciones *si se multiplica el numerador y el denominador por la misma cantidad la fracción no se altera*, multiplicar numerador y denominador por $sec\, x$ - 1 , o sea su binomio conjugado respectivo para obtener la diferencia de cuadrados que, a su vez, es igual a $tan^2 x$, según la fórmula (10.2), leída de derecha a izquierda en la tabla de la página 57.

Haciéndolo se obtiene:

$$\frac{tan^2 x\left(sec\, x-1\right)}{\left(sec\, x+1\right)\left(sec\, x-1\right)}+1=sec\, x$$

efectuando solamente las multiplicaciones del denominador, por tratarse de los dos binomios conjugados que interesan:

$$\frac{tan^2 x\left(sec\, x - 1\right)}{sec^2 x - 1} + 1 = sec\, x$$

por la fórmula (10.2) , sustituyendo en el denominador el valor de $\sec^2 x - 1$:

$$\frac{tan^2 x\left(sec\ x - 1\right)}{tan^2 x} + 1 = sec\, x$$

simplificando en el lado izquierdo:

$$sec\, x - 1 + 1 = sec\, x$$
$$sec\, x = sec\, x \ \checkmark$$

igualdad que es cierta sin lugar a dudas, por lo que ha quedado demostrada.

EJERCICIO 19 (repaso general)

Demostrar las siguientes igualdades trigonométricas empleando cualquiera de todas las técnicas estudiadas.

1) $\dfrac{sen\ x}{csc\ x}+\dfrac{cos\ x}{sec\ x}=1$

2) $\dfrac{sec\ x}{tan\ x+cot\ x}=sen\ x$

3) $\dfrac{1-sen\ x}{cos\ x}=\dfrac{cos\ x}{1+sen\ x}$

4) $\dfrac{1-cos\ x}{sen\ x}=\dfrac{sen\ x}{1+cos\ x}$

5) $\dfrac{1}{sec-tan\ x}=sec\ x+tan\ x$

6) $\dfrac{1}{csc\ x-cot\ x}=csc\ x+\dfrac{1}{tan\ x}$

7) $\dfrac{cot^2\ x}{csc\ x-1}=csc\ x+sen^2 x+cos^2\ x$

8) $\dfrac{tan\ x-sen\ x}{sen^3 x}=\dfrac{sec\ x}{1+cos\ x}$

9) $tan\ x+cot\ x=\dfrac{1}{sen\ x\ cos\ x}$

10) $sec\ x+cos^2\ x=\dfrac{1}{cos\ x}+\dfrac{1}{sec^2\ x}$

11) $\dfrac{csc\ x}{tan\ x+cot\ x}=cos\ x$

12) $\left(1-sen^2 x\right)\left(1+tan^2\ x\right)=1$

13) $\dfrac{1}{1+sen\ x}+\dfrac{1}{1-sen\ x}=2\,sec^2\ x$

14) $sen\ x+cos\ x=cos\ x\left(1+tan\ x\right)$

15) $cot^2\ x+\dfrac{1}{cos\ x\ sec\ x}=csc^2\ x$

16) $\dfrac{sen^2 x+cos^2\ x}{sec\ x+tan\ x}=sec\ x-tan\ x$

17) $tan^2\ x+\dfrac{1}{sen\ x\ csc\ x}=sec^2\ x$

18) $cot^2\ x+sen^2 x=csc^2\ x-cos^2\ x$