Sistemas Dinámicos Planos

Jorge A. Torres H.

Universidad Nacional de Colombia
Medellín
jatorreshen@unal.edu.co

22 de abril de 2013

Conceptos Básicos

Sistemas Dinámicos

Los **sistemas dinámicos** surgen al tratar de especificar mediante un modelo matemático procesos en los que es posible describir la dependencia en el tiempo de un punto en un espacio geométrico mediante la aplicación de una fórmula o “regla”.

Los sistemas dinámicos aparecen con naturalidad en virtualmente todas las áreas de la ciencia: pueden modelar el movimiento de un sistema mecánico, la cantidad de individuos a través del tiempo de una población de peces en un lago, fenómenos relacionados con procesos químicos en los que hay intercambio de materia e inclusive en la predicción del clima.

La clave para esta unificación se encuentra en el concepto de "estado" y "regla de evolución": un sistema, en un instante de tiempo dado, se encuentra en algún estado posible, representado generalmente como un punto en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. La regla de evolución del sistema es una regla fija (función) que determina el estado futuro de dicho punto.

¿Por qué estudiar sistemas dinámicos planos?

Limitarse a sistemas planos definidos en $\mathbb{R}^2$ ($n = 2$) no resulta, como podría pensarse, en una simplificación del problema: la teoría para el caso $n = 2$ es básica para comprender el caso general $n > 2$ y es donde empiezan a notarse las diferencias con los sistemas unidimensionales.

¿Por qué estudiar sistemas dinámicos planos?

Limitarse a sistemas planos definidos en $\mathbb{R}^2$ ($n = 2$) no resulta, como podría pensarse, en una simplificación del problema: la teoría para el caso $n = 2$ es básica para comprender el caso general $n > 2$ y es donde empiezan a notarse las diferencias con los sistemas unidimensionales.
Más aún, debido a propiedades que aplican exclusivamente al plano (como consecuencia, por ejemplo, del Teorema de la Curva de Jordan) estos sistemas a menudo exhiben comportamientos interesantes que son propios de esta dimensión.

Definición (Sistema Dinámico Plano)

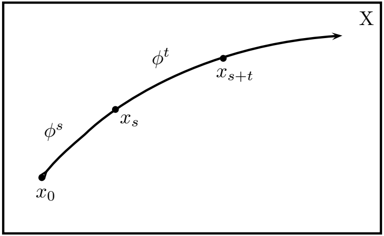
Sean $T \subseteq \mathbb{R}$ *un semigrupo aditivo,* X *un subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\phi : T \times X \to X : (t, x) \mapsto \phi^t(x)$ *una función. Un* *sistema dinámico plano* *es una tupla* (T, X, ϕ) *que satisface las propiedades*

(1) $\phi(0, x) = x$ *para todo* $x \in X$.

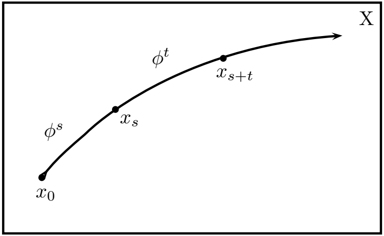
(2) $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s + t, x)$ *para todo* $x \in X$ *y* $s, t \in T$.

El conjunto T *se llama* *espacio de tiempos*, X *es llamado* *espacio de estados (o de fase)* *y* ϕ *se conoce como* *operador de evolución*.

Se puede pensar en un operador de evolución ϕ como una colección de funciones $\{\phi^t : X \to X\}_t$, llamada también <u>flujo</u>, que "mueve" un punto x_0 por el estado de fases X a través de la curva $t \mapsto \phi^t(x_0)$ como en la siguiente figura.



Se puede pensar en un operador de evolución ϕ como una colección de funciones $\{\phi^t : X \to X\}_t$, llamada también flujo, que "mueve" un punto x_0 por el estado de fases X a través de la curva $t \mapsto \phi^t(x_0)$ como en la siguiente figura.



Conocer el comportamiento cualitativo a largo plazo de todos los puntos en el estado de fase es el objetivo principal de la teoría de sistemas dinámicos.

Órbitas

Definición (Órbita)

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^2$. *La órbita (o trayectoria)* γ_{x_0} *de* x_0 *a través de* x_0 *es el subconjunto del espacio de estados* X *definido por*

$$\gamma_{x_0} := \{\phi(t, x_0) : t \in T\} = \left\{\phi^t(x_0)\right\}_{t \in T}.$$

Órbitas

Definición (Órbita)

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^2$*. La órbita (o trayectoria)* γ_{x_0} *de* x_0 *a través de* x_0 *es el subconjunto del espacio de estados* X *definido por*

$$\gamma_{x_0} := \{\phi(t, x_0) : t \in T\} = \left\{\phi^t(x_0)\right\}_{t \in T}.$$

La gráfica del conjunto de órbitas de un sistema dinámico se llama diagrama de fase.

Ejemplo - Oscilador Armónico Lineal

Dado $x_0 = (x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$, el PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} ; x(0) = x_0$$

tiene una solución única dada por

$$x(t) = \begin{bmatrix} x^0 \cos(t) + y^0 \sin(t) \\ -x^0 \sin(t) + y^0 \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Como x_0 es arbitrario, puede repetirse esto para cada $x_0 \in \mathbb{R}^2$ y definirse la función

$$\phi(t, x_0) = \phi(t, (x^0, y^0)) = \begin{bmatrix} x^0 \cos(t) + y^0 \sin(t) \\ -x^0 \sin(t) + y^0 \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Ejemplo - Oscilador Armónico Lineal

Como x_0 es arbitrario, puede repetirse esto para cada $x_0 \in \mathbb{R}^2$ y definirse la función

$$\phi(t, x_0) = \phi(t, (x^0, y^0)) = \begin{bmatrix} x^0 \cos(t) + y^0 \sin(t) \\ -x^0 \sin(t) + y^0 \cos(t) \end{bmatrix}.$$

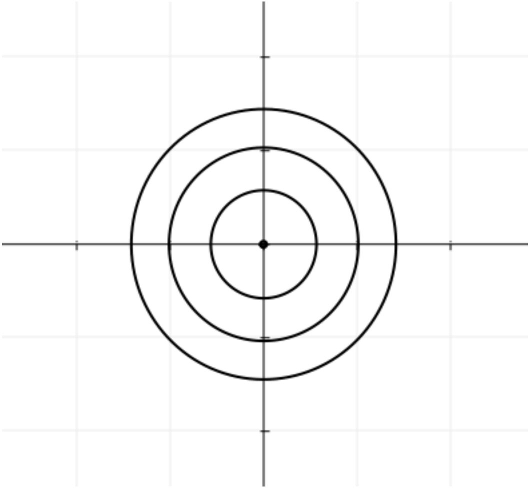
Esta función, así definida, es un <u>operador de evolución</u> para un sistema dinámico con estado de fases $X = \mathbb{R}^2$ y de tiempos $T = \mathbb{R}$, conocido como "oscilador armónico lineal".

Ejemplo - Oscilador Armónico Lineal

¿Cómo luce el retrato de fase del oscilador armónico lineal?

Ejemplo - Oscilador Armónico Lineal

¿Cómo luce el retrato de fase del oscilador armónico lineal?



Ejemplo - Oscilador Armónico Lineal

Este retrato de fase presenta dos tipos importantes de órbitas: puntos críticos (o de equilibrio) y periódicas (aquellas para las cuales existe $t_0 \in T$ tal que $\phi(t + t_0, x_0) = \phi(t, x_0)\ \forall t \in T$).

En general, se puede definir el operador de evolución de un sistema dinámico plano a partir de un sistema de dos EDOs simultáneas (o una EDO de segundo orden), de la forma

$$\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y}) = f(X) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Un resultado clásico de la teoría de ecuaciones diferenciales garantiza que esto es posible siempre que f sea continua y localmente Lipschitz sobre $\mathbb{R}^2$.

Considérese la ecuación de segundo orden

$$\ddot{y} - y = 0,$$

que puede transformarse en el sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}.$$

Notamos que las órbitas en el plano de fase satisfacen

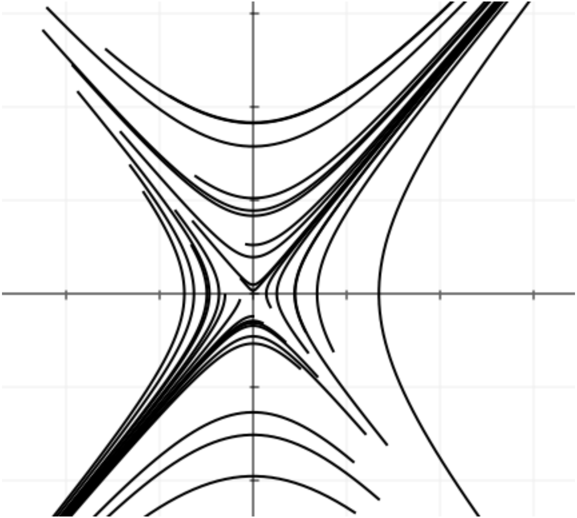
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

La integración de esta expresión produce la familia de hipérbolas

$$x^2 - y^2 = c.$$

En particular, cuando $c = 0$ obtenemos la solución constante $x = y = 0$ correspondiente a la órbita de $(0, 0)$. Todas las demás órbitas son no constantes.

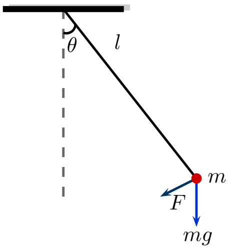
Sistemas Autónomos y PVIs - Otro ejemplo lineal



Ejemplos Clásicos

Péndulo Matemático

Supongamos
que una masa m se encuentra unida al extremo inferior de una varilla de longitud l.
Sabemos
que el arco s de un círculo de radio l se relaciona con el ángulo central θ mediante la fórmula $s = l\theta$, de manera que la aceleración angular de la masa está dada por



$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Péndulo Matemático

En ausencia de fuerzas externas o amortiguamiento, la única fuerza que actúa sobre la masa es su peso mg, cuya componente tangencial es $-mg\sin\theta$, así que una aplicación de la segunda ley de Newton resulta en la ecuación de segundo orden para θ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Hacemos $\lambda = g/l$ y reescribimos la ecuación como un sistema plano haciendo $x = \theta$ y $y = \dot{\theta}$:

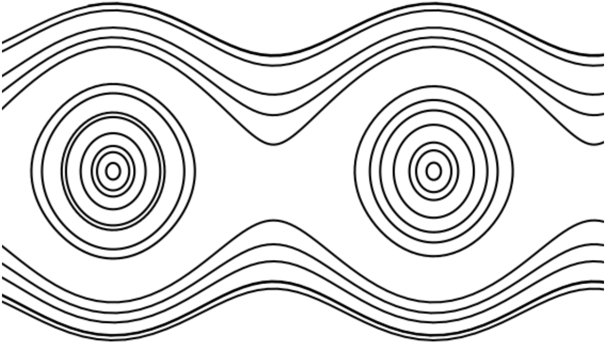
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda\sin x. \end{cases}$$

Péndulo Matemático

El péndulo matemático es un sistema plano no lineal y tiene puntos de equilibrio (órbitas constantes) en todos los puntos $(0, n\pi)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Péndulo Matemático

El péndulo matemático es un sistema plano no lineal y tiene puntos de equilibrio (órbitas constantes) en todos los puntos $(0, n\pi)$ para $n \in \mathbb{N}$.
El retrato de fase del péndulo matemático es el siguiente:



Modelo presa-depredador de Lotka-Volterra

Consideremos dos poblaciones que interactúan entre sí: una especie de presa x_1 y su depredador, x_2. Un modelo matemático para la población de ambas especies es el modelo depredador-presa de Lotka y Volterra, propuesto inicialmente por Alfred J. Lotka y que opera bajo las siguientes suposiciones:

1. La población de presa x_1 no sufre de escasez de comida ni otros factores ambientales en su contra.
2. La alimentación de la población depredadora x_2 depende exclusivamente del tamaño de la población presa x_2.
3. La tasa de cambio de la población es proporcional a su tamaño.

Modelo presa-depredador de Lotka-Volterra

El sistema Lotka-Volterra corresponde entonces, al par de ecuaciones diferenciales

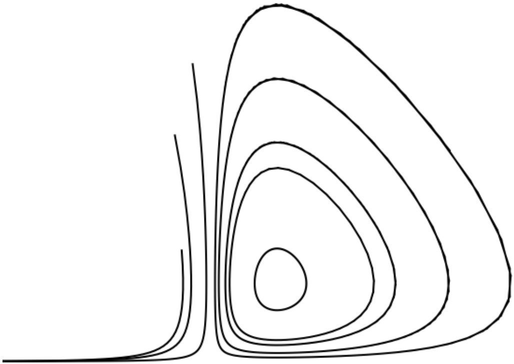
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_3 x_2 + a_4 x_1 x_2, \end{cases}$$

donde a_1, a_2, a_3 y a_4 son constantes no negativas.

Es fácil verificar que el sistema tiene dos puntos críticos: a saber $(0, 0)$ y $(a_3/a_4, a_1/a_2)$.

Modelo presa-depredador de Lotka-Volterra

Es fácil verificar que el sistema tiene dos puntos críticos: a saber $(0,0)$ y $(a_3/a_4, a_1/a_2)$.
El retrato de fase de las ecuaciones de Lotka-Volterra es como sigue:



Oscilador de Van der Pol

El estudio de los circuitos eléctricos también da origen a ecuaciones diferenciales importantes: el oscilador de Van der Pol es un tipo de oscilador con amortiguamiento no lineal, planteado por el físico holandés Balthasar Van der Pol que obedece la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Aquí, x es la posición (dependiente de t) y λ es un parámetro que determina la no linealidad y el amortiguamiento.

Oscilador de Van der Pol

Podemos llevar la ecuación de Van der Pol a la forma de un sistema de dos ecuaciones como

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda(1 - x^2)y - x. \end{cases}$$

Cuando $\lambda = 0$ la ecuación se reduce a la del oscilador armónico lineal. En cualquier otro caso, el sistema posee una órbita constante en el origen y un ciclo límite alrededor de este.

Oscilador de Van der Pol

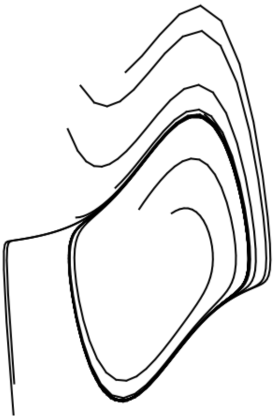


Figura : Retrato de fase del Oscilador de Van der Pol.

Teoría Avanzada:
Sistemas Lineales vs No Lineales

Sea $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinámico plano.

Sea $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinámico plano.

- El sistema es <u>lineal</u> si existe $A \in \mathbb{R}_{2x2}$ tal que $F(X) = AX$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$.

Sistemas lineales y no lineales

Sea $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinámico plano.

- El sistema es lineal si existe $A \in \mathbb{R}_{2x2}$ tal que $F(X) = AX$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$.
  - Distinguimos los sistemas lineales según A sea o no una matriz invertible.

Sistemas lineales y no lineales

Sea $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinámico plano.

- El sistema es lineal si existe $A \in \mathbb{R}_{2x2}$ tal que $F(X) = AX$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$.
  - Distinguimos los sistemas lineales según A sea o no una matriz invertible.
  - La forma de las órbitas de un sistema lineal es conocida y es "fácil" dibujar el retrato de fase.

Sistemas lineales y no lineales

Sea $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinámico plano.

- El sistema es <u>lineal</u> si existe $A \in \mathbb{R}_{2x2}$ tal que $F(X) = AX$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$.
  - Distinguimos los sistemas lineales según A sea o no una matriz invertible.
  - La forma de las órbitas de un sistema lineal es conocida y es "fácil" dibujar el retrato de fase.
- El sistema es <u>no lineal</u> en caso contrario.

Sistemas lineales y no lineales

Sea $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinámico plano.

- El sistema es lineal si existe $A \in \mathbb{R}_{2x2}$ tal que $F(X) = AX$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$.
  - Distinguimos los sistemas lineales según A sea o no una matriz invertible.
  - La forma de las órbitas de un sistema lineal es conocida y es "fácil" dibujar el retrato de fase.
- El sistema es no lineal en caso contrario.
  - El comportamiento de los sistemas lineales es más complicado: solo en algunos casos se pueden resolver explícitamente.

Sistemas lineales y no lineales

Sea $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinámico plano.

- El sistema es lineal si existe $A \in \mathbb{R}_{2x2}$ tal que $F(X) = AX$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$.
  - Distinguimos los sistemas lineales según A sea o no una matriz invertible.
  - La forma de las órbitas de un sistema lineal es conocida y es "fácil" dibujar el retrato de fase.
- El sistema es no lineal en caso contrario.
  - El comportamiento de los sistemas lineales es más complicado: solo en algunos casos se pueden resolver explícitamente.
  - La técnica de linealización no funciona en general para deducir información sobre el sistema original.

Sistemas Lineales $\dot{X} = F(X)$ con A invertible

- La única órbita constante del sistema corresponde al único punto crítico $X = 0$.
- El retrato de fase es uno de los siguientes:

Sistemas Lineales $\dot{X} = F(X)$ con A invertible

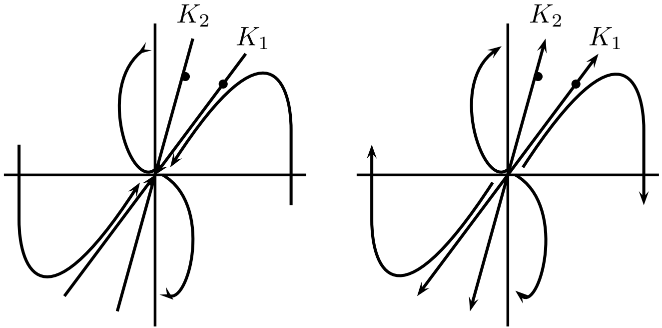


Figura : Nodo estable / Nodo inestable.

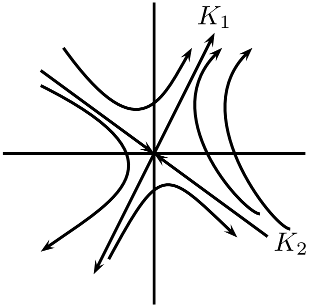


Figura : Punto de silla.

Sistemas Lineales $\dot{X} = F(X)$ con A invertible

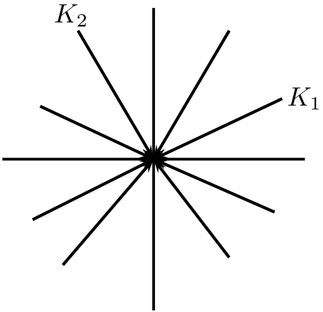


Figura : Nodo propio degenerado (estrella).

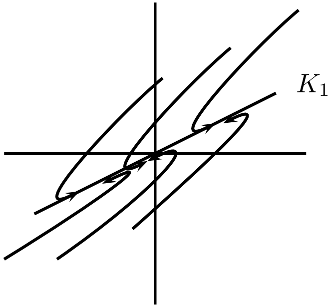


Figura : Nodo impropio degenerado.

Sistemas Lineales $\dot{X} = F(X)$ con A invertible

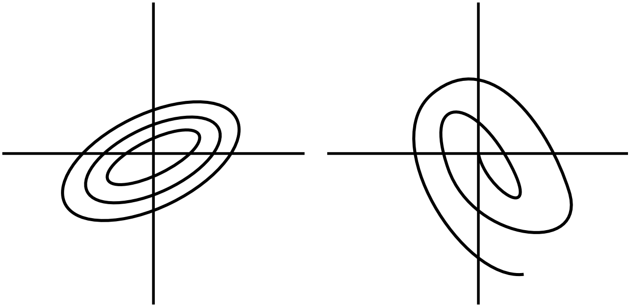
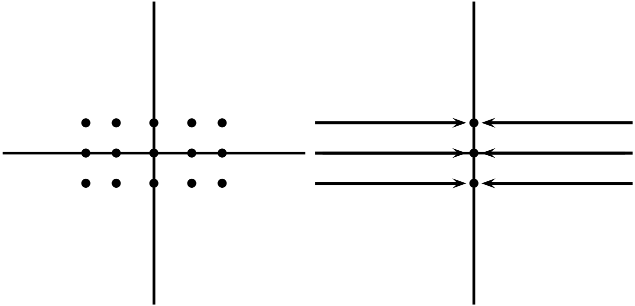


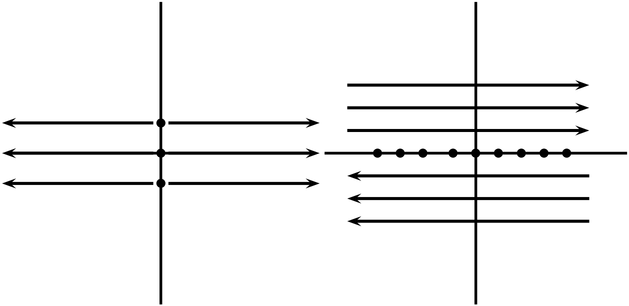
Figura : Centro y Espiral.

Sistemas Lineales $\dot{X} = F(X)$ con A singular

Cuando A es una matriz 2x2 singular (no invertible) el comportamiento del sistema es "especial": existen una infinidad de puntos críticos $x \in \mathbb{R}^2$ además del origen y el retrato de fase del sistema debe ser equivalente a uno de los siguientes.



Sistemas Lineales $\dot{X} = F(X)$ con A singular



Sistemas No Lineales y Linealización

Si $\dot{X} = F(X)$ es un sistema no lineal entonces cerca de un punto crítico X_0 se tiene:

$$\dot{X} = F(X) = DF(X_0)(X - X_0) + h(X),$$

donde $h(X)/(X - X_0) \to 0$ cuando $X \to X_0$.

Sistemas No Lineales y Linealización

Si $\dot{X} = F(X)$ es un sistema no lineal entonces cerca de un punto crítico X_0 se tiene:

$$\dot{X} = F(X) = DF(X_0)(X - X_0) + h(X),$$

donde $h(X)/(X - X_0) \to 0$ cuando $X \to X_0$.
"Pareciera" entonces que en vecindad de X_0 podemos aproximar el sistema por

$$\dot{X} = F(X) \approx DF(X_0)(X - X_0)$$

que, una vez aplicada una traslación, es un sistema lineal.

Sistemas No Lineales y Linealización

Si $\dot{X} = F(X)$ es un sistema no lineal entonces cerca de un punto crítico X_0 se tiene:

$$\dot{X} = F(X) = DF(X_0)(X - X_0) + h(X),$$

donde $h(X)/(X - X_0) \to 0$ cuando $X \to X_0$.
"Pareciera" entonces que en vecindad de X_0 podemos aproximar el sistema por

$$\dot{X} = F(X) \approx DF(X_0)(X - X_0)$$

que, una vez aplicada una traslación, es un sistema lineal.
La idea es deducir de este sistema lineal (que se conoce bien) información acerca del sistema inicial. Veremos que esto no funciona bien en general.

Sistemas No Lineales y Linealización - Ejemplo 1

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6 \\ \dot{y} = x^2 - y \end{cases} .$$

En vecindad de $(-\sqrt{2}, 2)$ la versión linealizada es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\sqrt{2}x + 4y \\ \dot{y} = -2\sqrt{2}x - y \end{cases} .$$

Sistemas No Lineales y Linealización - Ejemplo 1

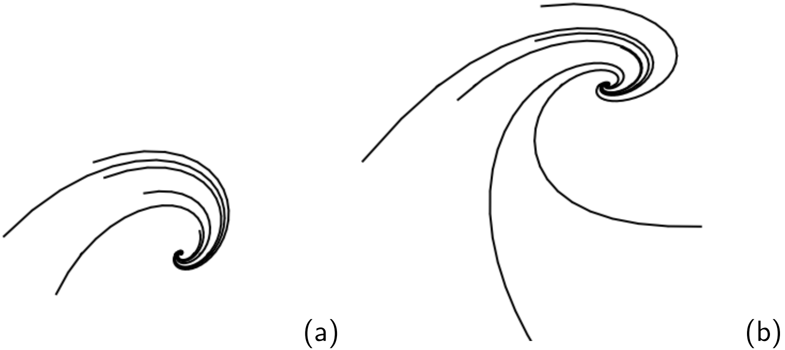


Figura : Retratos de fase: (a) Linealización (b) Sistema Original.

Sistemas No Lineales y Linealización - Ejemplo 2

Pensemos ahora en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2), \end{cases} .$$

cuya linealización cerca de $(0, 0)$ es

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} .$$

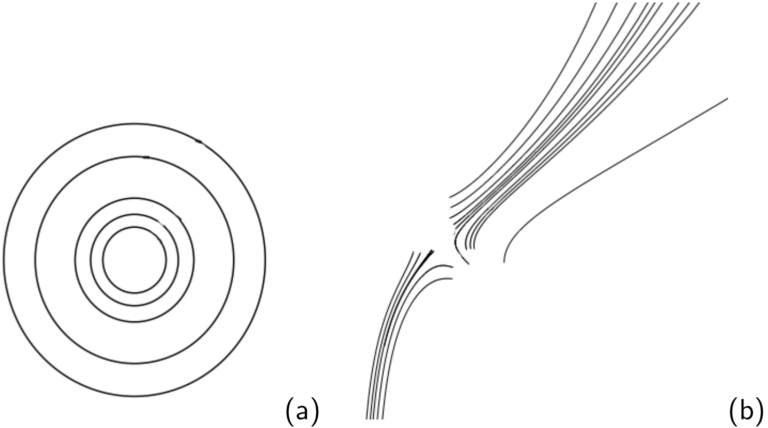


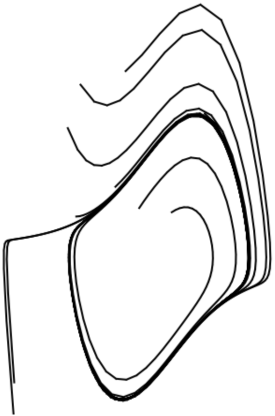
Figura : Retratos de fase: (a) Linealización (b) Sistema Original.

Para sistemas no lineales la linealización es topológicamente equivalente al sistema original en vecindad de un punto crítico X_0 únicamente cuando la matriz Jacobiana $DF(X_0)$ tiene valores propios todos con parte real no nula.
Este es un teorema de Grobman y Hartman.

Teoría Avanzada: Ciclos Límite y Teorema de Poincaré-Bendixson

Ciclos Límite

Ya hemos visto que en los retratos de fase pueden aparecer órbitas periódicas (ciclos) a los cuales tienden las demás órbitas cercanas, como ocurría en el Oscilador de Van der Pol:



Este tipo de comportamiento que parece tan especial es, en realidad, típico de los sistemas planos, como lo garantiza el Teorema de Poincaré-Bendixson, uno de los resultados más fuertes de la teoría:

Teorema (Poincaré-Bendixson)

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 y consideremos el sistema dinámico $\dot{X} = F(X)$. Si K es un subconjunto compacto del plano que no contiene puntos críticos (órbitas constantes) y hay alguna órbita C dentro de K entonces C es un ciclo o tiende a un ciclo.

Ciclos Límite

- El Teorema de Poincaré-Bendixson limita las posibilidades para las órbitas de un sistema dinámico plano.
- Es una consecuencia del Teorema de la Curva cerrada de Jordan y, por lo tanto, es aplicable únicamente a sistemas con estado de fases en $\mathbb{R}^2$.
- Todas las órbitas acotadas no triviales de un sistema plano deben ser ciclos o bien acercarse en el largo plazo ya sea a puntos críticos o a otros ciclos.

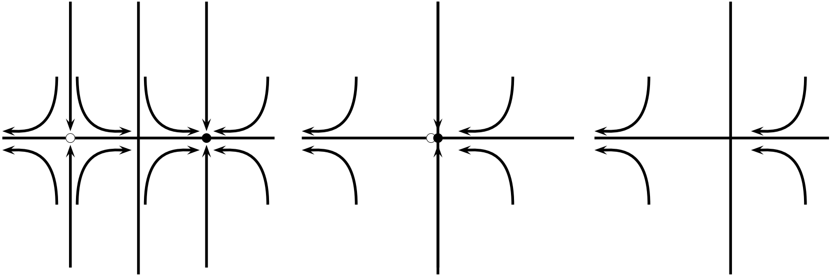
Teoría Avanzada: Bifurcaciones y Caos

Bifurcaciones y Caos

Otro comportamiento interesante que aparece en los sistemas dinámicos es el de bifurcación, que puede entenderse como el "inicio del caos": una bifurcación aparece cuando cambios (aún cuando sean muy pequeños) en los parámetros de un sistema resultan en diferencias importantes en su estructura topológica.

Otro comportamiento interesante que aparece en los sistemas dinámicos es el de bifurcación, que puede entenderse como el "inicio del caos": una bifurcación aparece cuando cambios (aún cuando sean muy pequeños) en los parámetros de un sistema resultan en diferencias importantes en su estructura topológica. Formalmente, si el sistema $\dot{X} = F(\lambda, X)$ depende continuamente de un parámetro escalar λ entonces existe λ_0 tal que la topología del retrato de fase cambia cuando λ pasa por λ_0.

Algunas bifurcaciones se refieren a cambios locales, alrededor de uno o varios puntos críticos:



$\lambda > 0$ $\lambda = 0$ $\lambda < 0$

Figura : Bifurcación de silla-nodo.

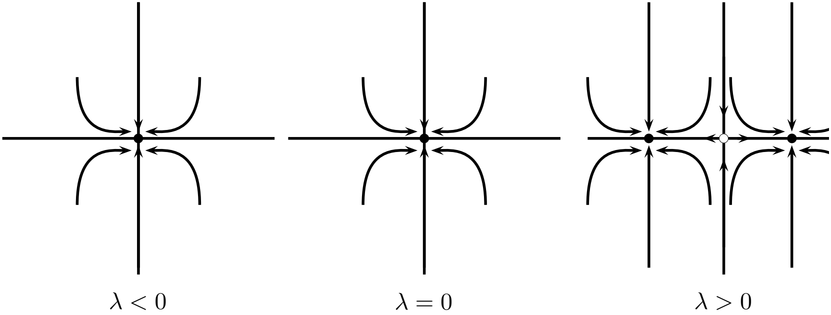


Figura : Bifurcación *pitchfork* supercrítica.

Otras bifurcaciones se refieren a cambios globales en conjuntos más grandes como órbitas periódicas:

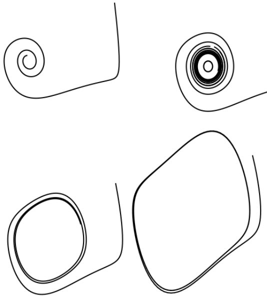


Figura : Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf en el oscilador de Van der Pol: $\lambda = -0{,}1; 0{,}0; 0{,}1; 0{,}3$

DYNAMITE

Generalidades

DYNAMITE es una herramienta didáctica de **software libre** desarrollada por el autor para el estudio de sistemas dinámicos planos, los continuos en particular.

DYNAMITE está inspirado en *Phaser*, aplicación propietaria que acompaña al libro "Dynamics and Bifurcations" de J. Hale y H. Koçak y que puede adquirirse también a través del sitio web `http://www.phaser.com`.

Características

Algunas de las características de DYNAMITE:

Características

Algunas de las características de DYNAMITE:

- Es software libre: su distribución y modificación está permitida sin restricción alguna.

Características

Algunas de las características de DYNAMITE:

- Es software libre: su distribución y modificación está permitida sin restricción alguna.
- Puede ejecutarse (sin necesidad de software especial o *plugins*) en cualquier navegador y, por ende, en cualquier plataforma (Mac OS X, Linux, Windows y móviles).

Características

Algunas de las características de DYNAMITE:

- Es software libre: su distribución y modificación está permitida sin restricción alguna.
- Puede ejecutarse (sin necesidad de software especial o *plugins*) en cualquier navegador y, por ende, en cualquier plataforma (Mac OS X, Linux, Windows y móviles).
- Produce gráficos vectoriales con calidad apta para publicación.

Características

Algunas de las características de DYNAMITE:

- Es software libre: su distribución y modificación está permitida sin restricción alguna.
- Puede ejecutarse (sin necesidad de software especial o *plugins*) en cualquier navegador y, por ende, en cualquier plataforma (Mac OS X, Linux, Windows y móviles).
- Produce gráficos vectoriales con calidad apta para publicación.
- Soporta *typesetting* de expresiones matemáticas utilizando MathML y ASCIIMath.

Características

Algunas de las características de DYNAMITE:

- Es software libre: su distribución y modificación está permitida sin restricción alguna.
- Puede ejecutarse (sin necesidad de software especial o *plugins*) en cualquier navegador y, por ende, en cualquier plataforma (Mac OS X, Linux, Windows y móviles).
- Produce gráficos vectoriales con calidad apta para publicación.
- Soporta *typesetting* de expresiones matemáticas utilizando MathML y ASCIIMath.
- Tiene un diseño modular con dos integradores: Runge-Kutta combinado de orden 4-5 y "backward Euler".

Características

DYNAMITE está en capacidad de generar cualquiera de las siguientes gráficas:

Características

DYNAMITE está en capacidad de generar cualquiera de las siguientes gráficas:

- Gráficas de funciones cartesianas $y = f(x)$ en una variable real.

DYNAMITE está en capacidad de generar cualquiera de las siguientes gráficas:

- Gráficas de funciones cartesianas $y = f(x)$ en una variable real.
- Campos de pendientes $\vec{F}(x, y)$ asociados a un sistema dinámico plano $\dot{X} = \vec{F}(x, y)$.

Características

DYNAMITE está en capacidad de generar cualquiera de las siguientes gráficas:

- Gráficas de funciones cartesianas $y = f(x)$ en una variable real.
- Campos de pendientes $\vec{F}(x, y)$ asociados a un sistema dinámico plano $\dot{X} = \vec{F}(x, y)$.
- Diagramas de fase con órbitas arbitrarias calculadas por DYNAMITE y con puntos iniciales definidos por el usuario.

Características

DYNAMITE está en capacidad de generar cualquiera de las siguientes gráficas:

- Gráficas de funciones cartesianas $y = f(x)$ en una variable real.
- Campos de pendientes $\vec{F}(x, y)$ asociados a un sistema dinámico plano $\dot{X} = \vec{F}(x, y)$.
- Diagramas de fase con órbitas arbitrarias calculadas por DYNAMITE y con puntos iniciales definidos por el usuario.
- Conjuntos de Julia asociados a sistemas dinámicos discretos obtenidos por iteración de polinomios cuadráticos complejos $f_c(z) = z^2 + c$, $z \in \mathbb{C}$.

Código Fuente y Descarga

El código fuente de la última versión de DYNAMITE se encuentra disponible en línea en

`https://github.com/jorgeatorres/dynamite`.

Código Fuente y Descarga

El código fuente de la última versión de DYNAMITE se encuentra disponible en línea en

`https://github.com/jorgeatorres/dynamite`.

También allí pueden ~~reportarse errores o comportamientos inesperados~~ colaborar con el proyecto.

Ejemplos de uso

Ejemplos de uso

1. Oscilador Armónico Lineal

Ejemplos de uso

1. Oscilador Armónico Lineal
2. Péndulo matemático

Ejemplos de uso

1. Oscilador Armónico Lineal
2. Péndulo matemático
3. Modelo presa-depredador de Lotka-Volterra

Ejemplos de uso

1. Oscilador Armónico Lineal
2. Péndulo matemático
3. Modelo presa-depredador de Lotka-Volterra
4. Oscilador de Van der Pol

Ejemplo (Otro sistema no lineal)

Construya el retrato de fase para sistema dinámico no lineal descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - y^3 \\ \dot{y} &= -x - y^2. \end{aligned} \tag{1}$$

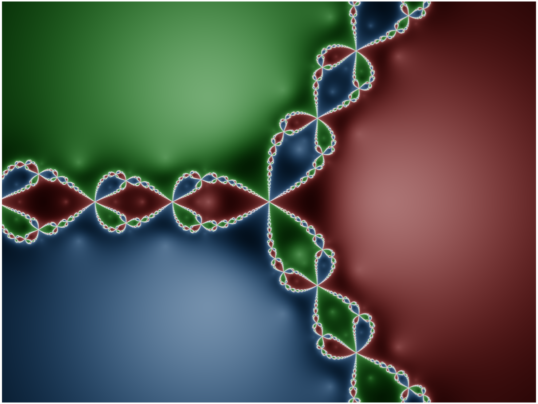
La iteración de funciones racionales complejas de la forma $f(z) = p(z)/q(z)$ define también un sistema dinámico plano en el cual las órbitas de cualquier punto se obtienen por composición:

$$\gamma(z_0) = \{f(z_0), f \circ f(z_0), f \circ f \circ f(z_0), ..., f^k(z_0), ...\}.$$

El conjunto de Julia de f corresponde a la frontera del conjunto de puntos cuyas órbitas son no acotadas (i.e. $f^n(z_0) \to \infty$ cuando $n \to \infty$).

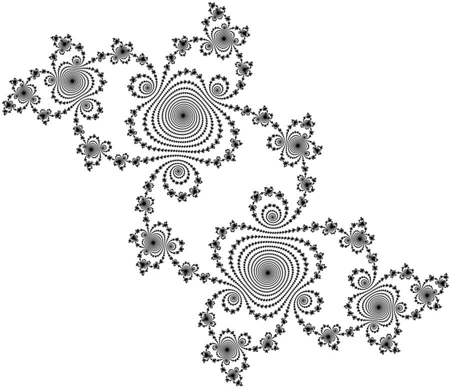
Ejemplos de uso - Conjuntos de Julia

Conjunto de Julia asociado a la función racional del método de Newton para hallar las raíces del polinomio cúbico $p(z) = z^3 - 1$:



Ejemplos de uso - Conjuntos de Julia

Conjunto de Julia asociado al polinomio $f_c(z) = z^2 + c$ con $c = 0{,}1 + 0{,}651i$.



Licencia de DYNAMITE

DYNAMITE está distribuído bajo licencia WTFPL (*Do What The Fuck You Want To Public License*) cuyo inventor describe como

> *"A very permissive license for software and other scientific or artistic works that offers a great degree of freedom".*

Gracias por su atención.


That's all Folks!