Disciplina: Processamento Digital de Sinais

Material aula 5

Ambiente Blackboard

Apresentação

- 1) Transformada Z
- 2) Resposta em frequencia

Transformada Z

- Definição: A TZ de uma sequência x[n] é dada por:

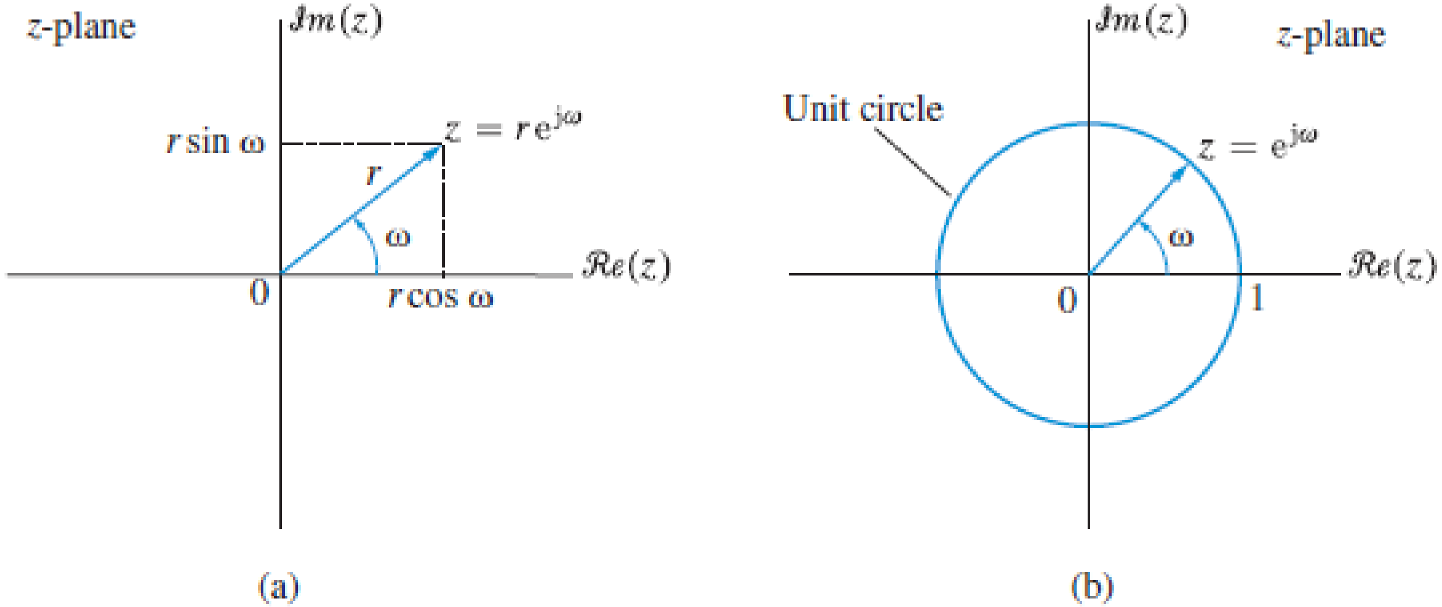
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n},$$

- $$z = re^{j\omega}$$

-

Transformada Z

- Plano Z



-

- **Figure 3.1** (a) A point $z = re^{j\omega}$ in the complex plane can be specified by the distance r from the origin and the angle ω with the positive real axis (polar coordinates) or the rectangular coordinates $r\cos(\omega)$ and $r\sin(\omega)$. (b) The unit circle, $|z| = 1$, in the complex plane.

Transformada Z

- Calculando a TZ de alguns sinais.
- Impulso unitário δ[n]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = z^{0} = 1.$$

Transformada Z

- Calculando a TZ de alguns sinais.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M} 1 z^{-n} = \frac{1 - z^{-(M+1)}}{1 - z^{-1}}.$$

Transformada Z

- Calculando a TZ de alguns sinais.

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{M} (az^{-1})^n = \frac{1 - a^{M+1} z^{-(M+1)}}{1 - az^{-1}}.$$

Transformada Z

- Calculando a TZ de alguns sinais.

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}. \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

Transformada Z

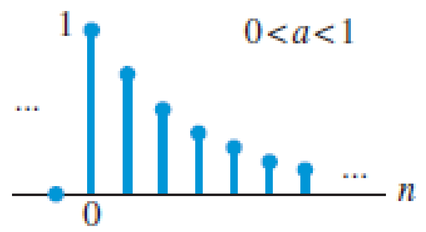
- Calculando a TZ de alguns sinais.

The infinite geometric series converges if $|az^{-1}| < 1$ or $|z| > |a|$. Since $X(z) = 1/(1 - az^{-1}) = z/(z - a)$, there is a zero at $z = 0$ and a pole at $p = a$. For $a = 1$ we obtain the z-transform of the unit step sequence

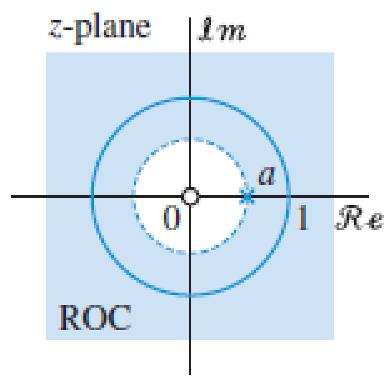
$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

Transformada Z

- Diagrama pólo zero - exponencial

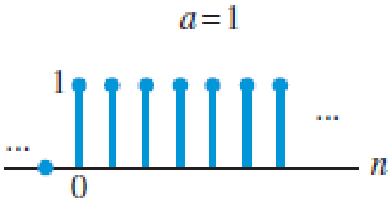


Decaying exponential

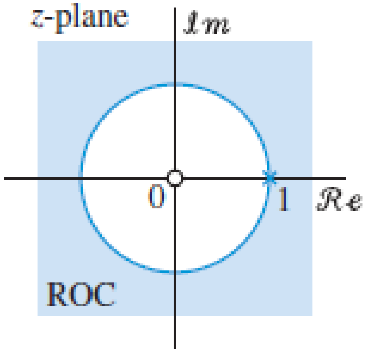


Transformada Z

- Diagrama pólo zero – Degrau unitário



Unit step



Transformada Z - Tabela

Table 3.1 Some common z-transform pairs

	Sequence $x[n]$	z-Transform $X(z)$	ROC
1.	$\delta[n]$	1	All z
2.	$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3.	$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
4.	$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
5.	$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
6.	$-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
7.	$(\cos\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
8.	$(\sin\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
9.	$(r^n\cos\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-(r\cos\omega_0)z^{-1}}{1-2(r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
10.	$(r^n\sin\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2(r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$

Transformada Z

- TAREFA: Faça o exercício 1 da lista enviada.

Transformada Z

- Exemplo matlab para obter e plotar os pólos e zeros

$$D(Z) = 1 + 1.5Z^{-1} + 2Z^{-2}$$

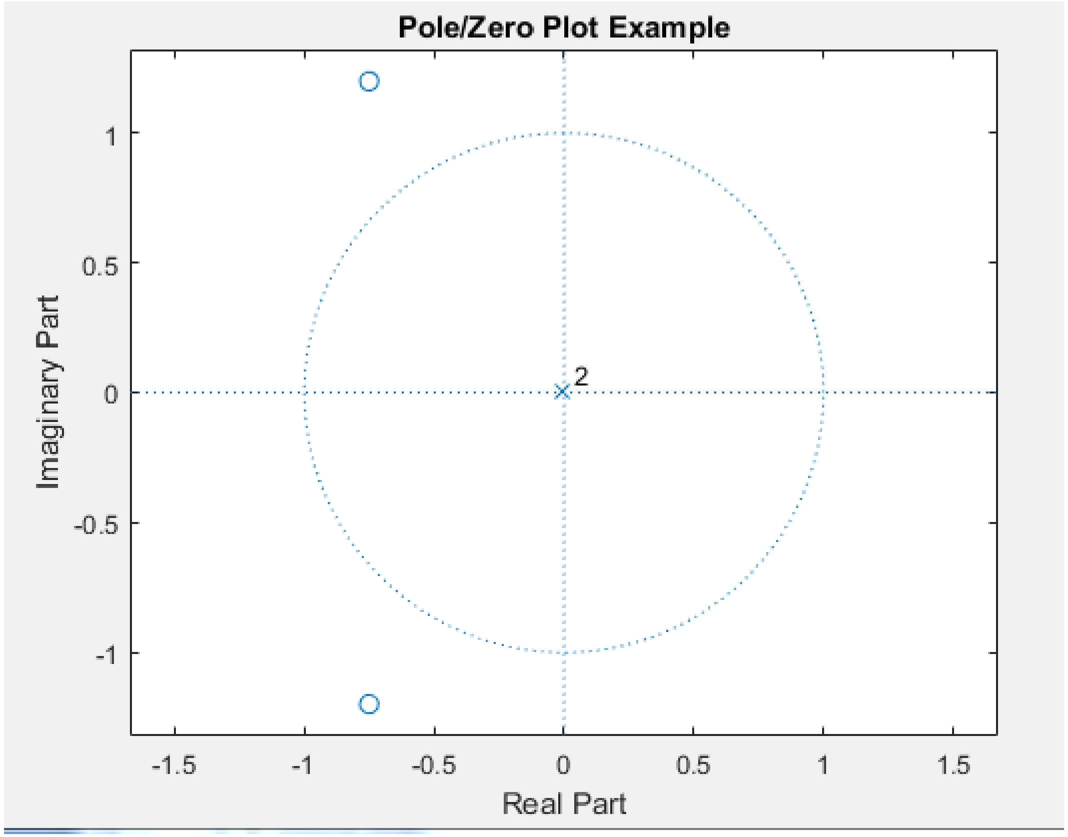
$$D(Z) = \frac{Z^2 + 1.5Z + 2}{Z^2}$$

- Zeros: -0.7500 + 1.1990i e -0.7500 - 1.1990i

- Pólos: dois pólos em zero

Transformada Z

- Exemplo matlab para obter e plotar os pólos e zeros



Transformada Z

- Exemplo Matlab - Obter e plotar pólos/zeros

```
%Exemplo para plotar a localização dos pólos e zeros
% no plano Z

% D(Z) = 1 + 1,5Z^-1 + 2Z^-2

clear all; close all; clc;
D = [1, 1.5, 2];

Num = D;
Den = [1, 0, 0];

% Set up vector for zeros
z = roots(Num)

% Set up vector for poles
p = roots(Den)

figure(1);
zplane(z,p);
title('Pole/Zero Plot Example');
```

Principais propriedades da Transformada Z

- Homogeneidade
- Linearidade
- Atraso no tempo
- Convolução

Principais propriedades da Transformada Z

- Homogeneidade

$$f[n] \rightarrow F[Z]$$

$$K f[n] \rightarrow KF[Z]$$

-

Principais propriedades da Transformada Z

- Exemplo: Homogeneidade

$$y[n] = 2^n u[n] \rightarrow Y[Z] = \frac{1}{1 - 2Z^{-1}}$$

- $$y[n] = 3.2^n u[n] \rightarrow Y[Z] = 3.\frac{1}{1 - 2Z^{-1}}$$

Principais propriedades da Transformada Z

- Linearidade

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} a_1X_1(z) + a_2X_2(z),$$

Principais propriedades da Transformada Z

- Atraso no tempo

$$x[n-k] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z).$$

Principais propriedades da Transformada Z

- Exemplo: Atraso no tempo

$$y[n] = u[n] \rightarrow Y[Z] = \frac{1}{1 - Z^{-1}}$$

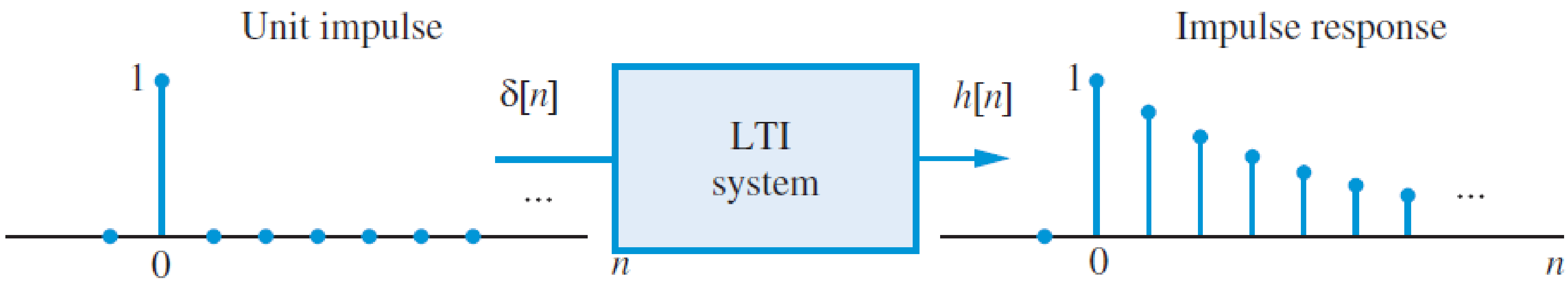
$$y[n] = u[n-3] \rightarrow Y[Z] = Z^{-3}\frac{1}{1 - Z^{-1}}$$

Principais propriedades da Transformada Z

- Convolução

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z).$$

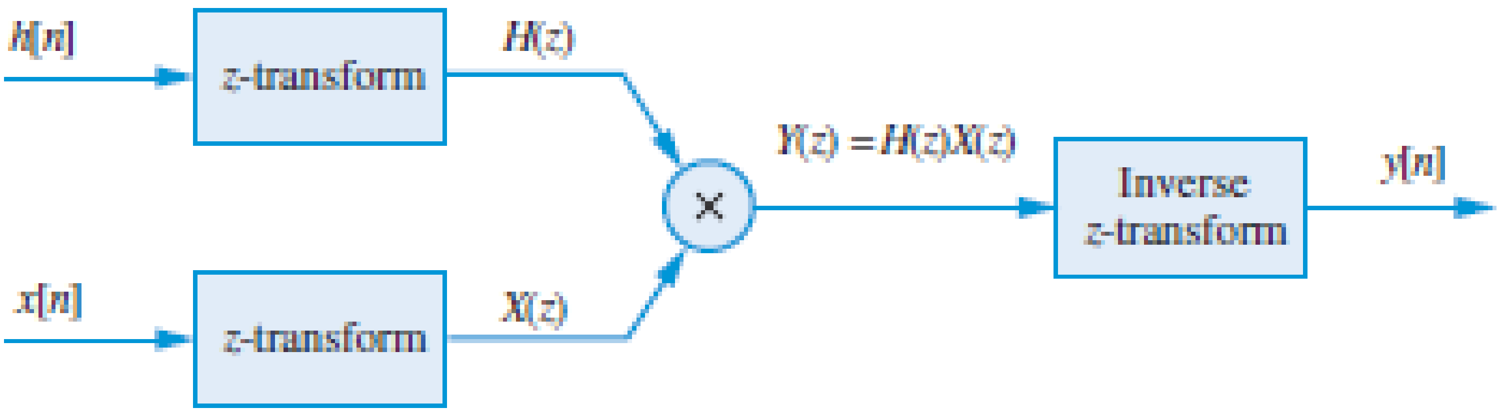
Principais propriedades da Transformada Z - Convolução



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y[Z] = X[Z].H[Z]$$

Principais propriedades da Transformada Z - Convolução



Principais propriedades da Transformada Z

- Exemplos

$$x[n] = 2\delta[n-3]$$

$$y[n] = (4 - 0{,}5^n).u[n]$$

$$y[n] = 3.0{,}5^n.u[n]$$

$$y[n] = \delta[n] * 0{,}5^n.u[n]$$

Transformada Z

- Equação diferença: Um sistema analógico é modelado por uma equação diferencial enquanto que um sistema discreto é modelado por uma equação diferença.

Transformada Z

- Considere o sistema discreto modelado pela equação.

$$y[n] + 0{,}25y[n-1] + 0{,}125y[n-2] = x[n]$$

Transformada Z

- Qual a saída do sistema para as entradas impulso unitário e degrau unitário.

$$y[n] = x[n] - 0{,}25y[n-1] - 0{,}125y[n-2]$$

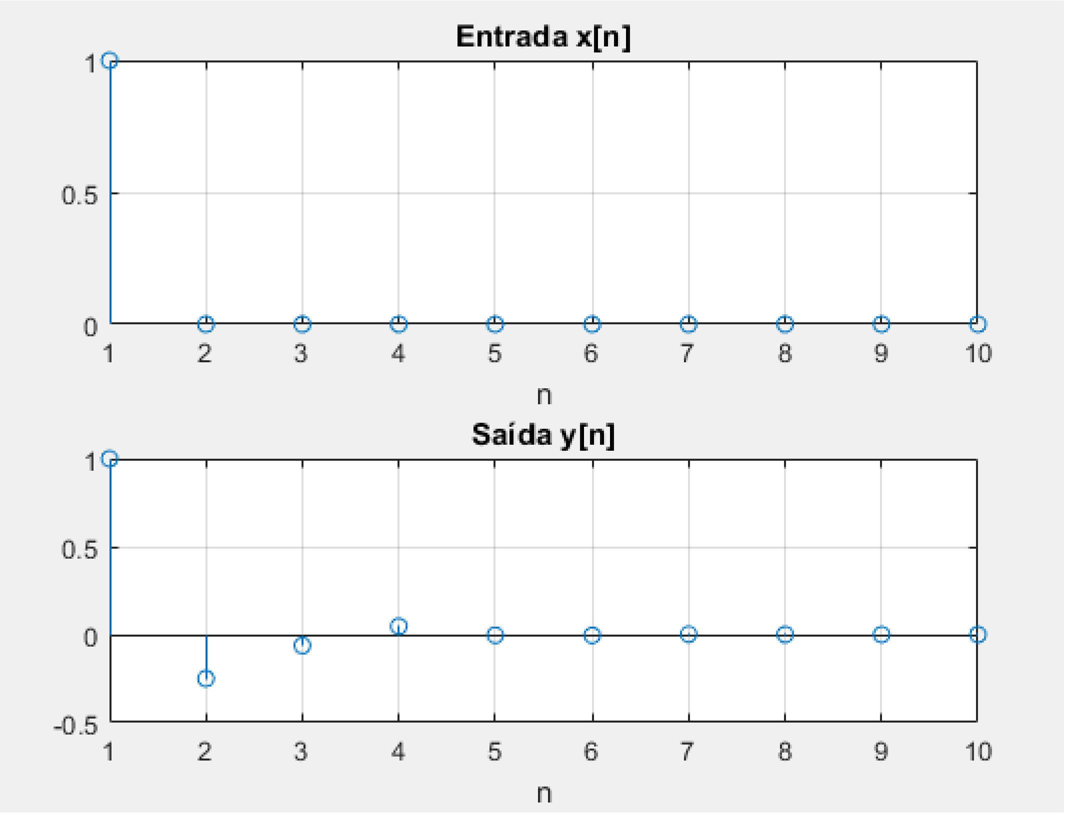
- Impulso unitário

n	x[n]	Y[n]	Y[n-1]	Y[n-2]
0	1	1	0	0
1	0	-0,25	1	0
2	0	-0,0625	-0,25	1
3	0	0,0469	-0,0625	-0,25

Transformada Z

- Impulso unitário

$$y[n] = x[n] - 0{,}25y[n-1] - 0{,}125y[n-2]$$



Transformada Z

- Entrada degrau unitário.

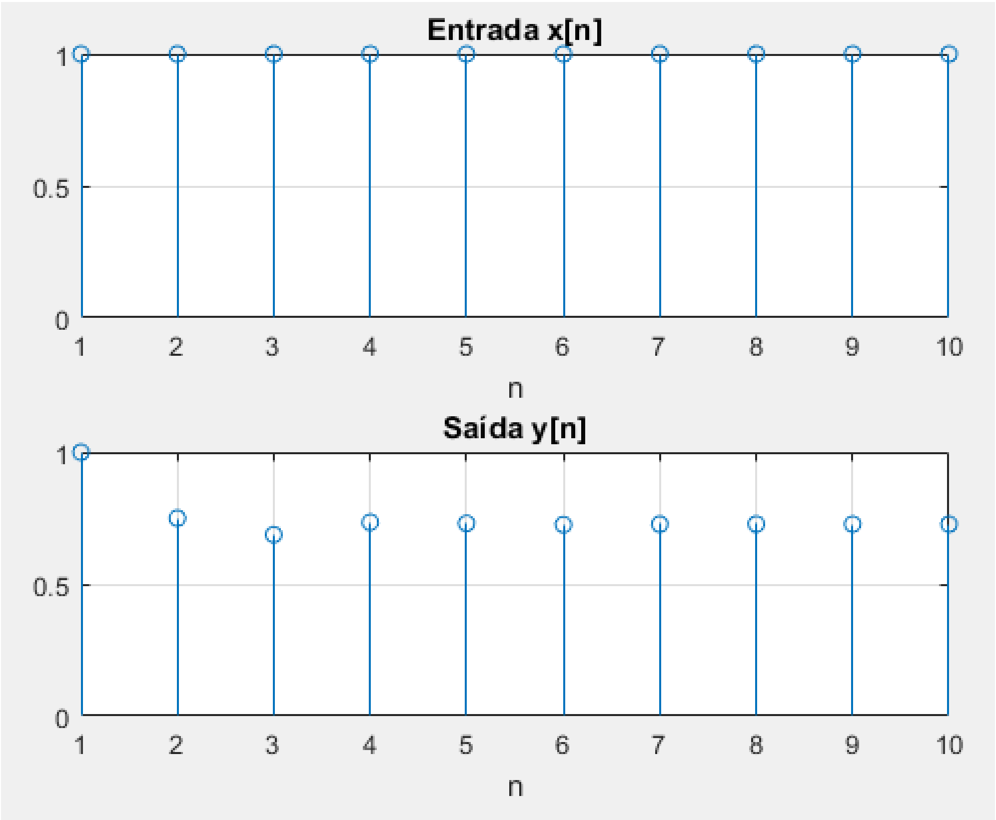
$$y[n] = x[n] - 0{,}25y[n-1] - 0{,}125y[n-2]$$

n	x[n]	Y[n]	Y[n-1]	Y[n-2]
0	1	1	0	0
1	1	0,75	1	0
2	1	0,6875	0,75	1
3	1	0,7344	0,6875	0,75

Transformada Z

- Entrada degrau unitário.

$$y[n] = x[n] - 0{,}25y[n-1] - 0{,}125y[n-2]$$



Transformada Z

- TAREFA: Faça os exercícios 2 e 3 da lista enviada.

Transformada Z

- Função de transferência – Vem da aplicação da transformada Z na equação diferença do sistema discreto.

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$$

Transformada Z

- Exemplo - Determine a função de transferência do sistema discreto.

$$y[n] + 0{,}25y[n-1] + 0{,}125y[n-2] = x[n]$$

- Aplicando a transformada Z e suas propriedades, obtém-se:

$$Y(Z) + 0{,}25Z^{-1}Y(Z) + 0{,}125Z^{-2}Y(Z) = X(Z)$$

-

Transformada Z

- Continuando

$$Y(Z)[1 + 0{,}25Z^{-1} + 0{,}125Z^{-2}] = X(Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 + 0{,}25Z^{-1} + 0{,}125Z^{-2}}$$

-

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{Z^2}{Z^2 + 0{,}25Z + 0{,}125}$$

Transformada Z

- TAREFA: Faça os exercícios 4, 5 e 6 da lista enviada.

Disciplina: Processamento Digital de Sinais

Material aula 5

Ambiente Blackboard