- Dado: $(f(n) = n^3 + 9n^2 \log(n)$ y $g(n) = n^2 \log(n)$
  - Comprobar $f(n) \in O(g(n))$
  - Comprobar $f(n) \notin O(n^2)$

- Demostrar formalmente si existe relación de pertenencia entre $f(n)$ y $O(g(n))$ y también entre $g(n)$ y $O(f(n))$ considerando $f(n) = 2^n$ y $g(n) = 2^{2n}$

- $f(n) = n^3 + 9n^2 \log(n)$
- $g(n) = n^2 \log(n)$

① Comprobar $f(n) \in O(g(n))$

Para que $f(n) \in O(g(n))$, debe existir una constante $c > 0$ y un n_0 tal que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Consideremos el límite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 9n^2 \log(n)}{n^2 \log(n)}$$

Simplificamos:

$$\frac{n^3 + 9n^2 \log(n)}{n^2 \log(n)} = \frac{n^3}{n^2 \log(n)} + \frac{9n^2 \log(n)}{n^2 \log(n)} = \frac{n}{\log(n)} + 9$$

Como $\frac{n}{\log(n)} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, el límite es ∞. Dado que el límite no es una constante finita, $f(n) \notin O(g(n))$.

② Comprobar $f(n) \notin O(n^2)$

Para $f(n) \notin O(n^2)$, el límite debe crecer sin límite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 9n^2 \log(n)}{n^2} = \lim_{n \to \infty} (n + 9 \log(n))$$

Esto tiende a ∞, confirmando que $f(n) \notin O(n^2)$.

• $f(n) = 2^n$

• $g(n) = 2^{2n}$

③ Demostrar formalmente si existe relación de pertenencia entre $f(n)$ y $O(g(n))$ y entre $g(n)$ y $O(f(n))$

• $f(n) = 2^n \in O(g(n))$

$O(2^{2n})$: $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^{2n}} = \lim_{n \to \infty} 2^{n-2n} = \lim_{n \to \infty} 2^{-n} = 0$

- Como el límite es 0 (constante finita), existe $c = 1$ y $n_0 = 1$ tales que $2^n \leq 1 \cdot 2^{2n}$ para $n \geq 1$. Así, $f(n) \in O(g(n))$.

• $g(n) = 2^{2n} \in O(f(n))$

~~$O(f(n))$~~ $O(2^n)$: $\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{2^n} = \lim_{n \to \infty} 2^{2n-n} =$

$\lim_{n \to \infty} 2^n = \infty$

- Como el límite es ∞, no existe una constante c finita tal que $2^{2n} \leq c \cdot 2^n$ para n suficientemente grande. Así, $g(n) \notin O(f(n))$.

Resumen:

• $f(n) = n^3 + 9n^2 \log(n) \notin O(g(n)) = O(n^2 \log(n))$

• $f(n) = n^3 + 9n^2 \log(n) \notin O(n^2)$

• $f(n) = 2^n \in O(g(n)) = O(2^{2n})$

• $g(n) = 2^{2n} \notin O(f(n)) = O(2^n)$