

# ***UNA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN UN PROBLEMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE VIVIENDA EN TERRENOS INCLINADOS***

## **1. INTRODUCCIÓN**

Hablar, utilizar, pensar, usar, estudiar, trabajar y hacer Matemáticas, son tareas que siempre que sean realizadas, obedecen a una concepción aunque no sea necesariamente consiente, de lo que entendemos por Matemáticas. Esta concepción puede ser expresada en términos de lo gnoseológico, lo epistemológico, lo ontológico, lo antropológico, lo sociológico, entre otros aspectos. Y es en esa arena en donde se trenzan en unas luchas los diferentes campos que intentan explicar en qué consisten todos esos procesos que realizamos con las matemáticas.

No obstante, hay una cosa en la que parece haber mayor coincidencia, y es la relación entre ese cuerpo de conocimientos teóricos y prácticos que llamamos matemáticas y la realidad, cualquiera que sea la idea que tengamos de ella, pues, es apenas normal que dependiendo de las posiciones asumidas desde los diferentes campos mencionados, también varíen las concepciones sobre la realidad misma, y sus relación con el hombre y con el saber, en este caso, con el saber matemático como parte de eso que llamamos matemáticas. A respecto Villa-Ochoa (2013) sostiene que:

De modo general, en la literatura internacional se reconocen relaciones entre la “realidad” y las matemáticas como una de las características que identifica la modelación matemática. El término realidad ha sido uno de los focos de debate filosófico en el campo científico en los últimos años (p.1).

En los últimos años ha crecido el interés por una práctica muy interesada en poner en juego esa relación entre la realidad, las matemáticas y los seres humanos, se trata de la modelación en matemática. Pero al igual que con la matemática misma, las diferentes posturas perfilan acepciones distintas de lo que se entiende por modelación. Y las apreciaciones son tan variadas que van desde para quienes la modelación matemática no es otra cosa que hablar (poner en lenguaje) temas y problemas matemáticos, pasando por quienes sostienen que eso es utilizar las matemáticas, pensar las matemáticas (o pensar matemáticamente), estudiar matemáticas, trabajar con y para las matemáticas, hasta los que aseguran que eso es lo mismo que hacer o producir matemáticas. Con el acercamiento a cada uno de estos significados, varían también los escenarios, las condiciones, los intereses, las intenciones de los sujetos que realizan dicha modelación, perfilándose con ellos unos contextos como forma de expresar tales condiciones.

De lo anterior se desprende también, el hecho de que la modelación sea una práctica disputada por la matemática como ciencia pura, por la matemática aplicada y por la educación matemática, y como tal, para cada uno de estos campos disciplinares, se ponen en juego la asunción y predilección de unas concepciones teóricas y prácticas sobre otras. Así la modelación matemática requiere que se explicita el posicionamiento teórico y práctico desde el que se la asume, con el fin de dotar de mayor significado y sentido a cada una de las tareas y a los resultados mismo de cada proceso de modelación, que en tanto tienen finalidades diferentes, presentarán también diferencias en los productos.

## 2. PRESENTACIÓN

Para las corrientes materialistas-dialécticas, existe una realidad en cuanto cosa material en sí, que precede toda experiencia humana, una realidad material ontológica, sobre la cual opera unas determinaciones como producto de la actividad del hombre, que enfrentado a una necesidad, trasforma dicha realidad (naturaleza) y la hace una realidad material epistemológica.

A mi modo de ver, esta relación entre una realidad pre-existente y la transformación realizada por los seres humanos, no es la relación a la cual se refiere Villa-Ochoa cuando citando a Araujo (2007, 2009), sostiene que “si la relación entre matemática y realidad se inspira en el platonismo, la modelación matemática se vería como una manera de describir, a través de la matemática, una realidad preexistente” (2013, pág. 1), pues en esta última, la actividad matemática se realiza sobre la realidad pre-humana, con lo cual se resalta también la concepción idealista sobre las matemáticas, mientras que, en la relación a la cual me refiero, la matemática en tanto que práctica eminentemente humana solo es posible una vez la realidad material ontológica (pre-humana), es transformada en realidad material epistemológica. Ahora bien, esa realidad epistemológica mantiene unos aspectos tangibles y otros intangibles, en palabras de Marx, comporta una objetividad y una subjetividad. No obstante, esta objetividad no es la del positivismo o la del neopositivismo, es decir, objetiva en cuanto que independiente, neutral, y separada abruptamente de la actividad humana. Esta realidad material epistemológica objetiva no es para el materialismo, la cosa en sí, y ni siquiera la lectura sensitiva de la cosa en sí, sino una elaboración pasada por los sentidos, una realidad sensible (sensiblemente humana). Podríamos decir que desde este posicionamiento teórico y práctico, el “afuera” no está solo ahí afuera, sino que está conmigo y contigo que lo humanizamos con nuestra presencia en el mundo, con nuestra actividad material humana.

Ahora bien, para este posicionamiento dialectico-histórico tampoco existe un “adentro” solipsista y eterico, como lo proponen las corrientes idealistas, mentalistas y formalista, por el contrario, esa misma realidad material epistemológica ahora subjetiva conserva un aspecto objetivo, producto de la mediación de las herramientas, instrumentos, artefactos y signos que fueron empleados como mediadores entre los seres humanos y la realidad material ontológica para su subsunción en realidad material epistemológica, por tanto a nivel del pensamiento, dicha realidad mantiene un aspecto concreto.

Esa así como al pensar en una situación a ser modelada matemáticamente, no dejo de concebirla como producto de una transformación epistemológica, en donde la problemática a ser modelada no puede ser nunca la realidad material ontológica (pre-humana), sino una realidad ya cruzada por el pensamiento o por lo menos por la sensibilidad humana, es decir, todo contexto en el que se pretenda una modelación matemática es ya una realidad sensible. Luego entonces lo que queda es asumir una posición desde la cual se estudiará dicha situación: Si como realidad objetiva, en correspondencia con lo que Villa-Ochoa (2013) llama Contextos auténticos, o con lo que Martínez (2003) citado por Muñoz, Londoño, López, Jaramillo & Villa-Ochoa (2014), llaman Contexto real, a saber, se trata de modelar una situación constatable en el orden de lo sociocultural y político; o como realidad subjetiva, en correspondencia con las nociones de Contexto Simulado o Evocado, según el mismo Martínez (2003).

En este caso, nos proponemos una actividad de modelación matemática que parte de la necesidad de comprender una situación presente en la vida real, en la medida en que se trata de un fenómeno que puede ser constatable en cualquier lugar del planeta donde se pongan en juego las circunstancias que voy a describir. A pesar de eso, en este caso, no se trata de un contexto en donde la modelación se haga necesaria para intentar superar un problema con implicaciones prácticas en términos políticos y de supervivencia, para los sujetos que modelan, sino de una

situación que despierta el interés del modelador en términos de la comprensión que se requiere de la situación, con lo que por supuesto se modula el sentido de la realidad aquí asumido. Sin embargo, en otro orden político y práctico, más para el modelador que para los eventuales sujetos que estén enfrentados a la problemática en términos de supervivencia, la actividad de modelación aquí contemplada se puede asumir como un contexto cercano en la medida en que hace parte de una de las tareas sumidas como parte de un trabajo de investigación de quien modela.

En este caso se trata de una de las situaciones que vienen siendo tratadas en el marco de unas actividades orientadoras de enseñanza, en las que se parte de una actividad desencadenadora, como lo puede ser, la objetivación de la perpendicularidad en el contexto de la construcción cultural de viviendas. En medio de estas circunstancias, surgen problemas relacionados con la comprensión de fenómenos que no son fácilmente constatable por medio de los sentidos, y que requerían de un trabajo adicional, mediado por los sistemas simbólicos de la cultura en que se desenvuelven los sujetos involucrados, y en donde si bien los sentidos juegan un papel importante, será la actividad matemática, en tanto que práctica material sensible, (objetiva y subjetiva) la que posibilite no solo la apropiación de los conceptos en juego, sino la objetivación de la realidad matemática (epistemológica y ontológica) y la subjetivación en una realidad (antropológica y sociológica). De ahí que como parte de la apropiación de conceptos producidos históricamente por la humanidad y del mismo proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad, se hace necesario la apropiación de una situación particular, mediada por las matemáticas, en tanto que parte de los sistemas simbólicos de la cultura, de ahí que la posibilidad de hacer modelación matemática sobre en torno a esta situación particular me parezca no solamente viable sino también necesaria.

### 3. PROBLEMÁTICA

El tema de la construcción de viviendas ha estado presente desde el comienzo de la humanidad, pues el animal de la especie Homo-Sapiens-Sapiens no bien comenzó a reconocer su necesidad social, también reconoció la necesidad de procurarse protección para él y para los miembros de su grupo, frente a las inclemencias del ambiente. Quizá antes de ser un animal social, el Homo Sapiens ya procuraba refugio, pero la constitución de la vivienda como tal, solo fue posible cuando fueron reconocidas unas necesidades colectivas. De esta manera, las Viviendas han sido desde siempre una herramienta indexada al tema de la protección y seguridad de los seres humanos, y en tanto que construcción cultural, ella ostenta también el carácter de herramienta o artefacto en la medida en que no solo aparece como producto o respuesta a una necesidad, sino que gracias a su producción misma, el ser humano pudo y tuvo que apropiarse de otros saberes y ser constituido por los mismo. Tanto es así que la construcción de las viviendas han caracterizado a poblaciones y culturas enteras, el oficio de artesano constructor o ingeniero que se dedica a la construcción de viviendas, en una forma posible de constatar la subsunción del saber en la constitución de un sujeto. La misma vivienda como tal subsume a los saberes que hicieron posible su construcción.

Pues bien, tanto es así que para construir una vivienda que garantice las condiciones básicas de supervivencia, se hace necesario una lectura de las condiciones ambientales y sociales adyacentes. Una de las primeras cosas a tener en cuenta, es el tema del terreno en que será construida la vivienda, en la medida en que estos es fundamental para considerar otros elementos en torno a su levantamiento, como por ejemplo el tamaño, el diseño y sus limitaciones; puesto que una de las más elementales primicias en la construcción de viviendas, es que ellas mismas no representen una amenaza para los sujetos que las habitarán. De ahí que en torno al tema del terreno, existen unas variables en juego, que comportan una serie de interrogantes a la hora de pensar en una construcción. Entre

estas variables está la de la extensión, es decir, la magnitud de la superficie sobre la cual se espera construir, pues se supone que esta variable determina el tamaño de las viviendas. No obstante, existe otras variables a considerar, como es el caso del ángulo de inclinación del terreno con respecto al eje gravitacional de la tierra, en la medida en que todo cuerpo, y por tanto toda masa sobre la superficie terrestre está expuesta al campo gravitatoria y en consecuencia a la magnitud del vector “fuerza de gravedad”. Por esta razón, toda cuerpo que se levante desde una superficie terrestre, pretendiendo mantenerse en equilibrio, requiere que el centro de gravedad (punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre las distintas porciones materiales de un cuerpo) se encuentre en una posición tal que sea posible trazar una vertical que lo corte, y que corte también a la base de apoyo (el centro de gravedad debe proyectarse verticalmente (cae) dentro de la base de apoyo). Para el caso de las paredes o divisiones de las viviendas, como también para otros elementos que son utilizados en su construcción, el centro de gravedad casi siempre se encuentra en un punto equidistante de los extremos del sólido, en la medida en que coincide con el centro de masa (son materiales relativamente homogéneos) y con el centro geométrico (son materiales relativamente simétricos).

Por esta razón, el vector “fuerza de gravedad” indicaría la dirección de la proyección del centro de gravedad sobre la base de la construcción, con el fin de garantizar el equilibrio (que no se caiga) de esta. De ahí que los artesanos constructores de la humanidad, y probablemente los primeros maestros constructores egipcios y babilonios, fueran unos de los primeros en usar la técnica de adjuntar a la superficie lateral del cuerpo, un péndulo (cuerpo que pende) con el fin de estimar la dirección de dicho vector.

La palabra "Péndulo" (pender) proviene de la raíz latina “pendere” que significa: Colgar, Pender, Estirar, Hilar, Pesar, Medir, Pagar; así mismo la palabra perpendicular provienen de la raíz latina “perpendicularis” que significa, “lo que cae

a plomo verticalmente. No obstante el diccionario etimológico aclara que “Perpendiculum es un derivado con sufijo instrumental -culum del verbo perpendere, que significa pesar exactamente, medir exactamente una distancia de colgado, apreciar y valorar con exactitud, con per- que indica acción perfectiva y completa, pero no de pendēre (colgar), sino de pendēre que además de colgar, es pesar, medir y pagar.)

Así la acción de estimar mediante un péndulo la dirección del vector “fuerza de gravedad” para constatar que se proyecta dentro de la base de una construcción, es una manifestación de la transformación de la naturaleza a mano del ser humano, en este caso, para garantizar que las cimientes, paredes, levantes o separaciones de las viviendas, estando “rectas”, “a plomo” “perpendiculares” con respecto al eje gravitacional de la tierra, no experimentaran una caída o pérdida de su equilibrio y pusieran con ello, en riesgo la seguridad de las personas.

Producto de todo esto, es decir, de las restricciones que impone el tema de la posición de las paredes; existe una variabilidad en la forma y el tamaño de las viviendas con relación al ángulo de inclinación del terreno respecto al eje gravitacional de la tierra. Pero esto no parece ser una cosa fácilmente notoria o al menos no es algo que espontáneamente pueda ser captado por los sentidos sin la concurrencia de unas herramientas simbólicas como las que puedan proveer las matemáticas. De ahí mi interés en intentar un acercamiento a la forma en que se comportan estas relaciones, más puntualmente, la forma en que pueden variar las magnitudes de una vivienda que es construida sobre un terreno con cierto ángulo de inclinación, con respecto a otra que es construida sobre un terreno con un ángulo de inclinación menor.



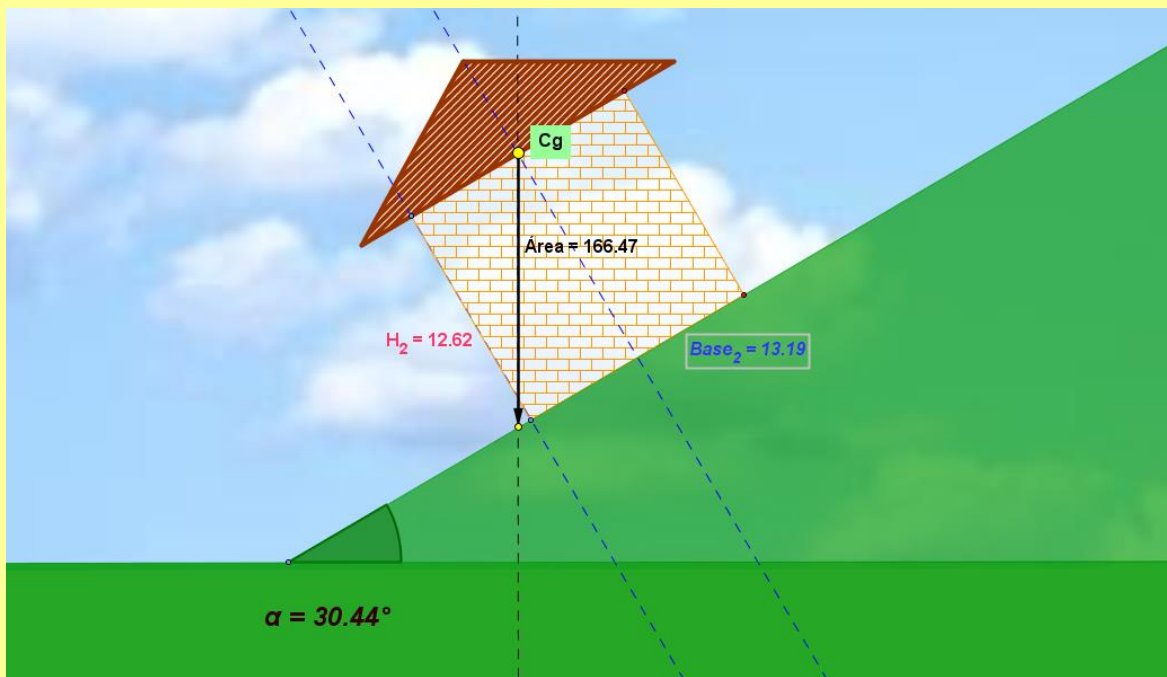
#### 4. SITUACIÓN ESPECÍFICA

Si una vivienda es construida con una altura de 12.62 metros, sobre un terreno de forma rectangular que mide 13.19 metros de frente (largo) y 10 metros de fondo (ancho) y que tiene un ángulo de inclinación igual a  $0^\circ$  con respecto al eje gravitacional de la tierra, es decir, un terreno cuya superficie forma un ángulo de  $90^\circ$  con el eje gravitacional; esa casa tendrá una capacidad (Volumen) exactamente igual a otra construida con las mismas dimensiones y con la misma forma, siempre y cuando, el terreno tenga el mismo ángulo de inclinación y sea uniforme (completamente plano).



Algo análogo sucede si se comparan los compartimientos de la casa, por ejemplo, sus paredes laterales, que al representarse mediante cuadriláteros, por ejemplo las paredes frontales, tendrán un área de 166.47 metros<sup>2</sup>.

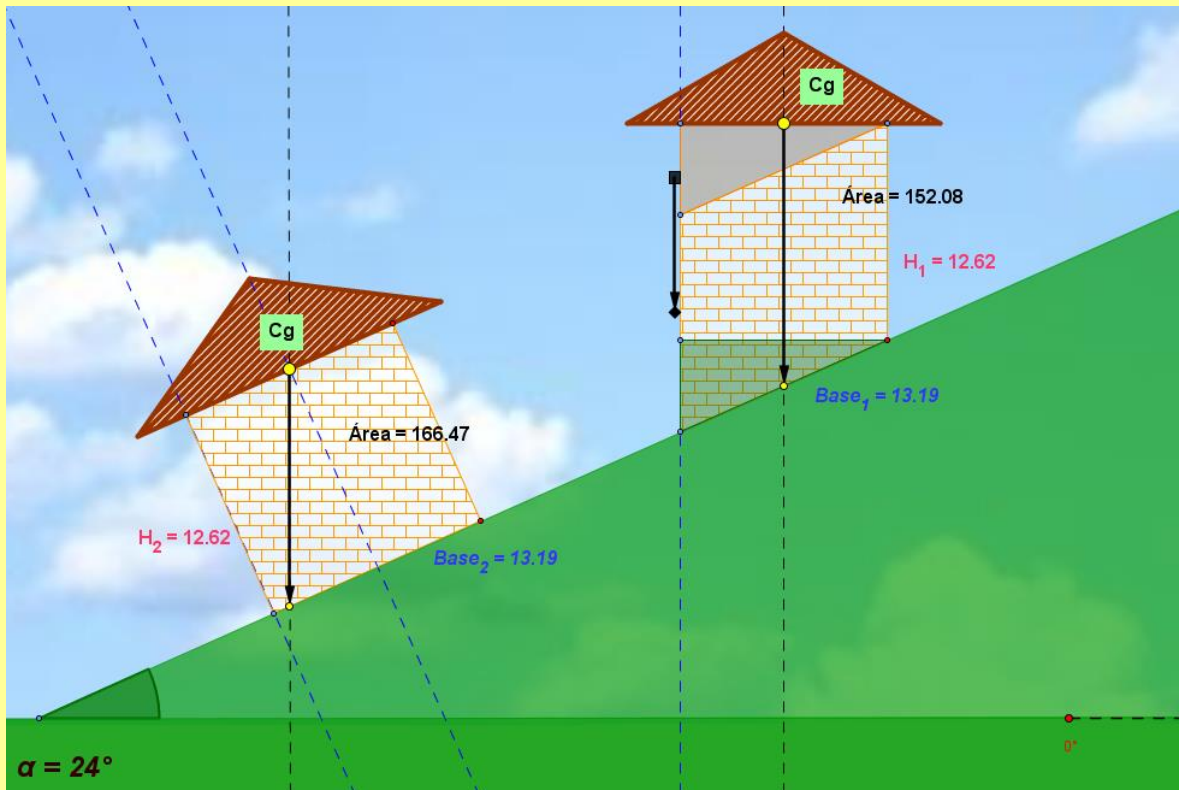
Ahora bien, si una vivienda como es construida sobre una pendiente (terreno inclinado) tendrá que sortear las dificultades o restricciones del equilibrio, arriba comentadas, pues dicha vivienda podrá mantenerse en pie con facilidad (ignorando un poco el tema de las bases que puede ser otra variable en juego) siempre y cuando la proyección de centro de gravedad este por dentro de la base de la vivienda.



En caso contrario, como se aprecia en la figura anterior, en donde, la proyección del centro de gravedad de la vivienda “cae” por fuera de la base, toda la construcción está en riesgo de caerse. (Aquí el centro de gravedad no está en el centro de la figura, porque si bien el centro geométrico podría estar más o menos al centro de la figura, el centro de masa no lo estaría, al considerar que el material de fabricación del techo no es el mismo de las paredes, ni las formas son iguales.)

Nótese además la línea que limita (la posición) las paredes laterales son paralelas con una posible proyección del centro de gravedad con el punto medio de la base de la construcción.

Por tanto, para evitar esta situación, los maestros constructores recurren a la herramienta conocida como “plomada” (poner a plomo) o péndulo para garantizar que las paredes conserven una posición vertical con respecto al eje gravitacional, y así tratar de evitar que el centro de gravedad se proyecte por fuera de las bases de la construcción. (Aunque esto no dependa exclusivamente de la posición de las paredes, pues ya dijimos que intervienen otros factores).



Pero al garantizar tal verticalidad en las paredes, se genera una variación en el producto de largo del terreno (frente), por la altura de las paredes, es decir, en el área del cuadrilátero que representa a la pared, en el caso tomado como ejemplo, a la pared frontal. Obsérvese que solo con una variación de  $24^\circ$ , manteniendo un frente de 13.19 metros de largo por 12.62 metros de altura, la pared del frente ha disminuido su área, de  $166.47 \text{ m}^2$  a  $152.02 \text{ m}^2$ , es decir,  $14.39 \text{ m}^2$ . Además, de optarse por continuar conservando la posición del techo sobre el límite superior del

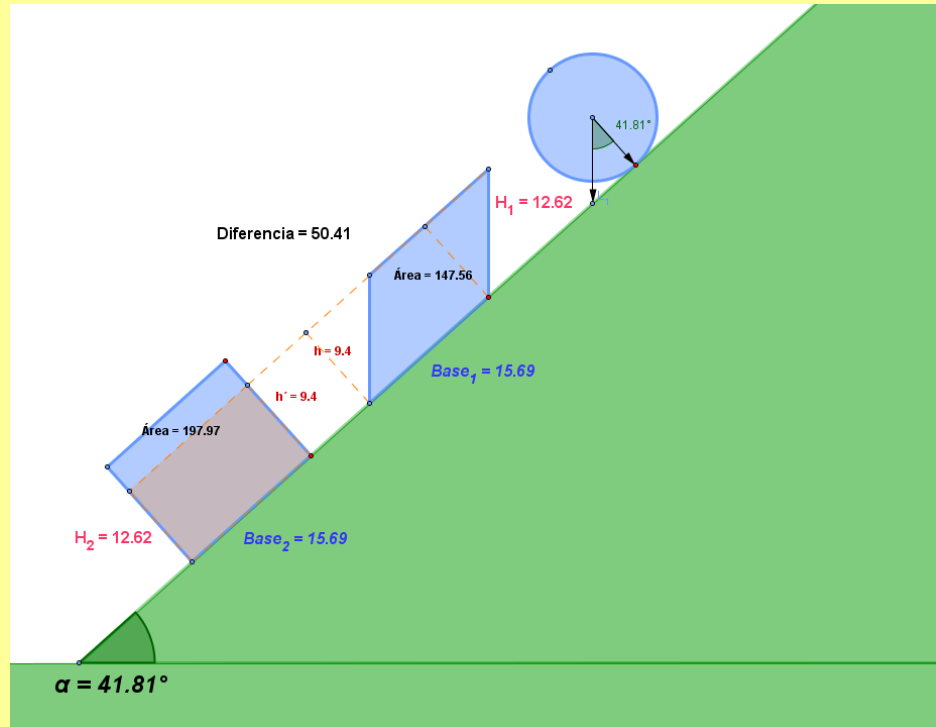
cuadrilátero que representa a la pared, este quedaría igualmente inclinado, alterando por tanto el punto de equilibrio de la vivienda.

Así que regularmente, los maestros constructores deben recurrir a dos procesos: El primero es tratar de levantar algunos de los extremos superiores de las paredes de la vivienda, hasta alcanzar a formar con ellos una plano perpendicular al eje gravitacional, de forma que el techo quede en equilibrio y no altere el centro de gravedad. Pero en términos económicos, esto aumenta la cantidad de material para la construcción de paredes, y además genera la molestia de tener una base (piso de la vivienda) desnivelado (inclinado), por eso se recurre al segundo proceso, levantar un relleno en algunos de los extremos inferiores de la vivienda de tal forma que la base de la misma quede a nivel con un plano perpendicular al eje gravitacional, y sobre ese relleno, construir la vivienda. Solo que tanto ese relleno, como la porción de paredes construidas (visto desde el frente) presentarán la forma de un triángulo rectángulo, con la hipotenusa paralela a la superficie del terreno inclinado y el cateto mayor como base de y límite superior de la pared de la vivienda.

Mediante una demostración geométrica se puede comprobar que el área de dichas caras frontales, la del relleno y la de la porción de pared son exactamente iguales, por tanto el área de la construcción (pared frontal) que hubiera podido realizarse sobre la superficie inicial del terreno, es exactamente igual, al área de la construcción que se realizó sobre el relleno, en todo caso menor a la de una vivienda que se construya con las mismas dimensiones y con la misma forma sobre un terreno sin inclinación.

Nótese en la figura (representación en el plano) que en la primera vivienda (Casa 1), la altura del cuadrilátero construido para representar la pared frontal, medida desde la superficie del terreno es de 12.62 m, y si se conserva esta altura en las paredes de la segunda vivienda (Casa 2), el techo de esta quedaría inclinado, a no ser que, como sucedió en la imagen, se construya un relleno sobre el cual se

levanten verticalmente las paredes, y luego se construya una nueva porción de paredes hasta hacer posible la nivelación del techo.



En una representación más simplificada, se puede apreciar que en tanto se cambia el ángulo de inclinación, los cuadriláteros que representan los frentes de ambas viviendas muestran cambios entre sí, a pesar que la magnitud de largo del terreno no se altere. Entonces, se puede puntualizar que el problema se centra en el tema de las alturas, pues en el caso del cuadrilátero cuyos lados (paredes) cambian su posición con respecto al eje gravitacional, su área no se altera; pero en el cuadrilátero cuyas paredes desean conservar su orientación en sentido de la gravedad, el área se altera, y la razón es muy sencilla matemáticamente hablando, pero no parece tan sencilla cuando se piensa en contexto. La altura de la figura matemática no coincide en el segundo caso, con la altura gravitacional.

## 5. ALGUNAS APROXIMACIÓN

Como quedo expresada la tesis que al modificar el ángulo de inclinación de un terreno sobre el cual será construida una vivienda, se altera consigo las magnitudes de algunos de los componentes de esa vivienda, especialmente aquellos que dependen de la magnitud de la altura de la vivienda, puesto que si bien el largo del terreno (base) no se modifica, la altura si lo hace, desdoblándose la altura gravitacional de la altura geométrica.

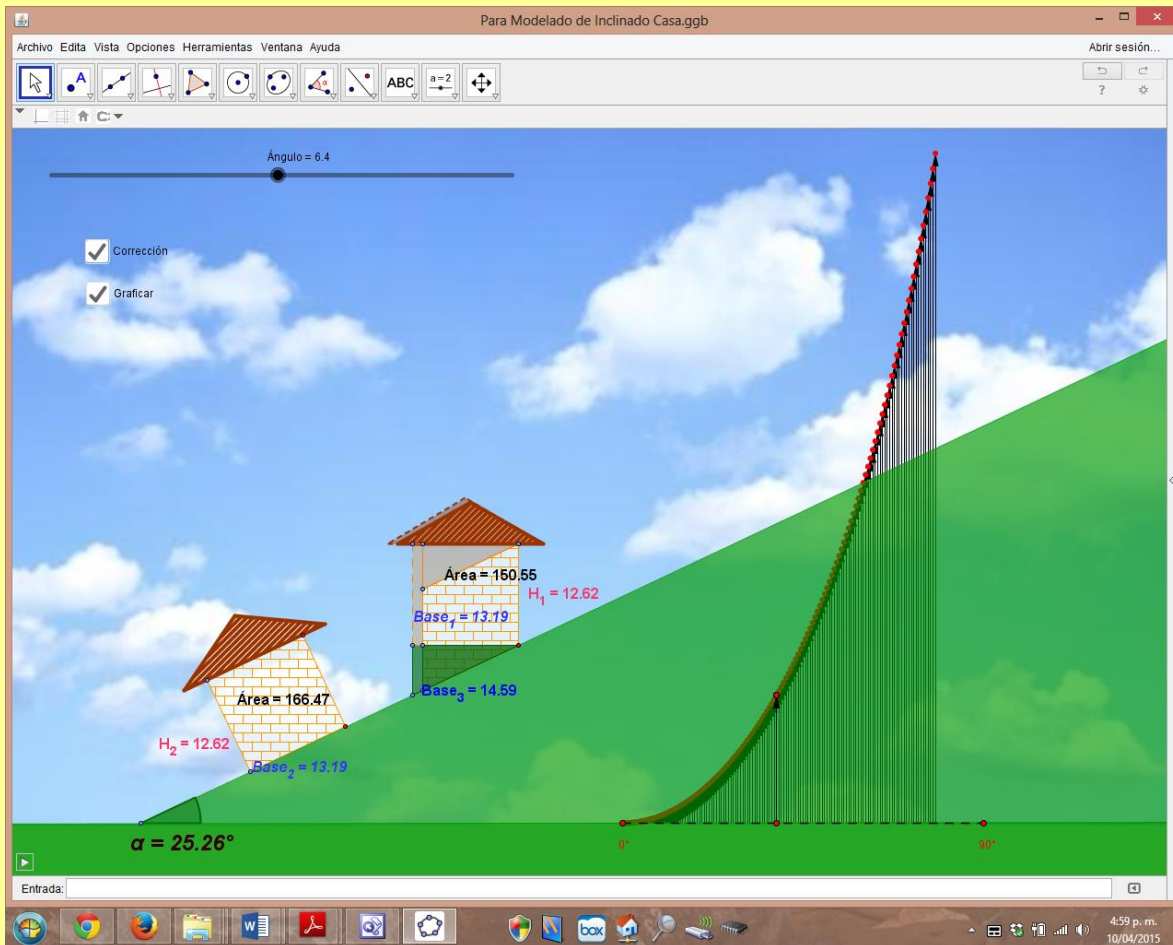
Por el momento, he notado que la variación en el área de algunas de las componentes de la vivienda, como pueden ser las paredes frontales, presenta un comportamiento creciente, no-lineal, en función de las variaciones en el ángulo de inclinación.

Por ejemplo, en un modelo hecho en geogebra, cuando intentamos estudiar la variación de la diferencia entre el área de una componente (pared frontal) de una vivienda que se mantiene perpendicular al terreno sobre el cual es construida (Casa 1) y con la de una casa que a diferencia, se ajusta al eje gravitacional terrestre, notamos que la variación en función del ángulo de inclinación del terreno, expresan como lugar geométrico en el plano, una curva muy parecida a la de las funciones logarítmicas, y es esto lo que me interesa constatar, como parte de la comprensión de la situación.

Otro elemento que pudiera tener un interés muy práctico en términos sociales y político, es comprender y modelar la variación del terreno (superficial) necesario para construir una vivienda en un terreno inclinado, pero cuyas dimensiones sean las mismas de una vivienda que no está en un terreno inclinado ¿Será que el ajuste al precio de los terrenos inclinados, es proporcional a la relación de la variación necesaria para ofrecer una vivienda (digna) con las mismas dimensiones que un terreno llano?

## 6. ANEXO

- Representación de la situación en Geogebra.



<http://tube.geogebra.org/student/m989319>



## 7. BIBLIOGRAFÍA

- Muñoz Mesa, L. M., Londoño Orrego, S. M., López, J., & C. M. & Villa-Ochoa, J. A. (2014). *Contextos auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares*. Universidad Católica del Norte.
- Villa-Ochoa, J. A. (2013). *Contextos, intereses y sentido de realidad en la modelación Matemática. Una experiencia con el profesor de matemáticas*. Santa María: CNMEN.