PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ciencias de la Computación

Curso: IIC1253-Matemáticas Discretas
Semestre: 2022-1
Profesor: Cristián Riveros Jaeger

Tarea 1

Fecha de entrega: Jueves 24 de Marzo - 23:59:00

Nombre: Jorge De Goyeneche
Sección: 1

Pregunta 2.

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es redundante si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

a).

Demuestre que si existen α, $\beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Respuesta:

Sea $v_1, ..., v_n$ una valuación cualquiera. Supongamos que existe $\alpha \equiv \beta$, es decir, para toda valuación los valores que adquieren estas dos fórmulas proposicionales serán iguales y que se cumple que $\Sigma(a_1, ..., a_n) = 1$. Si extraemos una de estas fórmulas, por ejemplo β tendremos dos casos:

1) $\alpha(v_1, ..., v_n) = 0$, si esto ocurre, la equivalencia $\Sigma \backslash \{\beta\} \models \beta$ se cumple trivialmente.β es consecuencia lógica del conjunto resultante debido a que las fórmulas del conjunto Σ no cumplen que todas posean valor igual a 1, y por lo tanto, no podemos afirmar una predicción de β y si su valor es 0 seguirá manteniéndose verdadero.

2) $\alpha(v_1, ..., v_n) = 1$, si esto ocurre, por su equivalencia lógica, $\beta(v_1, ..., v_n)$ también debe ser 1. Como sabemos que se cumple $\Sigma(a_1, ..., a_n) = 1$ y $\alpha(v_1, ..., v_n) = 1$ tenemos la siguiente expresión:

$$\Sigma(a_1, ..., a_n, \alpha) \models \beta(v_1, ..., v_n)$$

Como $\beta(v_1, ..., v_n) = 1$ se cumple que el conjunto Σ es consecuencia lógica del conjunto resultante.

Como en ambos casos se cumple la redundancia, demostramos que si existen α, $\beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Decimos que Σ es redundante de a pares si existen α, $\beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones.

b).

Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante.

Respuesta:

Sea $v_1, ..., v_n$ una valuación cualquiera. Supongamos que se cumple que $\Sigma(v_1, ..., v_n) = 1$. En este caso podemos extraer del conjunto solamente a la fórmula que es consecuencia lógica de la otra, ya que sus propiedades van hacia un solo lado. Nuevamente extraeremos β y tendremos dos casos:

1) $\alpha(v_1, ..., v_n) = 0$, si esto ocurre, la equivalencia $\Sigma \backslash \{\beta\} \models \beta$ se cumple trivialmente.β es consecuencia lógica del conjunto resultante debido a que las fórmulas del conjunto Σ no cumplen que todas posean valor igual a

1, y por lo tanto, no podemos afirmar una predicción de β.

2) $\alpha(v_1, ..., v_n) = 1$, si esto ocurre, debido a que β es consecuencia lógica de α, obtendrá el siguiente valor, $\beta(v_1, ..., v_n) = 1$. Como se cumple que $\Sigma(a_1, ..., a_n) = 1$ y $\alpha(v_1, ..., v_n) = 1$, armamos el conjunto $\Sigma(a_1, ..., a_n, \alpha, \beta) = 1$ donde podemos extraer finalmente β y este será consecuencia lógica de Σ ya que es consecuencia lógica de un subconjunto de este y siempre que Σ sea verdadero β también lo será.

Como en ambos casos se cumple la redundancia, demostramos que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\{\alpha\} \models \beta$, entonces Σ es redundante, y por lo tanto, la afirmación es verdadera.

c).

Si Σ es redundante, entonces es redundante de a pares.

Respuesta:

Si Σ es redundante, quiere decir que una fórmula proposicional dentro de este puede salir y esta será consecuencia lógica del conjunto.

Cómo tenemos dos fórmulas dentro de sigma que tienen el mismo comportamiento que el resto del conjunto podemos aislarlas.

Si se posee un conjunto de solamente dos fórmulas proposicionales:

$$\Sigma := \{\alpha, \beta\}$$

Para que estas sean redundantes deben ser ambas verdaderas cuando α lo sea, ya que así cumple la propiedad trivial y particular de un conjunto redundante como fue demostrado en el inciso (b).

Si es este el caso, siempre que $\alpha(v_1, ..., v_n) = 1$, $\beta(v_1, ..., v_n)$ deberá serlo para satisfacer la consecuencia lógica de su fórmula redundante:

$$\Sigma \backslash \{\beta\} \models \beta$$

Como β es consecuencia lógica del subconjunto de sigma y este es solamente la formula α tenemos:

$$\{\alpha\} \subseteq \Sigma, \quad \{\alpha\} \models \beta$$

Al generalizar la expresión resultante podemos decir que siempre que un conjunto sea redundante, existen dos formulas que cumplen que $\{\alpha\} \models \beta$ y por ende, es redundante de a pares.