Relaciones

Clase 11

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Pares ordenados

Definición

Para dos elementos a y b, se define el **par ordenado** (a, b) como:

$$(a, b) \;=\; \big\{\, \{a\}, \, \{a, b\} \,\big\}$$

Proposición

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si, y solo si,} \quad a = c \;\; \text{y} \;\; b = d$$

Recordatorio: Producto cartesiano

Definición

- Para dos conjuntos A y B se define el **producto cartesiano** como:

$$A \times B \;=\; \{\; (a, b) \;\mid\; a \in A \,\wedge\, b \in B \;\}$$

- Para conjuntos $A_1, \ldots, A_n$
se define el **producto cartesiano generalizado**:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \;=\; \{\, (a_1, \ldots, a_n) \;\mid\; a_i \in A_i \,\}$$

Outline

Relaciones

Representación

Operaciones

Outline

Relaciones

Definición

Dado un conjunto A y B, R es una **relación binaria** sobre A y B si:

$$R \subseteq A \times B$$

Si $B = A$ decimos que R es una relación binaria sobre A.

¿qué relaciones binarias conocen?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo 1

Considere el conjunto A:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

Considere la siguiente relación:

$$R_2 = \big\{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\big\}$$

- ¿es cierto que $(d, a) \in R_2$?
- ¿es cierto que $(c, c) \in R_2$?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo 2

Nombre	**Curso**
Marcelo	Criptografía
Marcelo	Matemáticas Discretas
Juan	Lógica
Cristian	Matemáticas Discretas

Considere los siguientes conjuntos A y B:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\text{Marcelo}, \text{Juan}, \text{Cristian}\} \\ B & = & \{\text{Criptografía}, \text{Lógica}, \text{MD}\} \end{array}$$

Una relación que modela la tabla anterior es:

$$\begin{array}{rcl} R_1 & = & \big\{(\text{Marcelo}, \text{Criptografía}), (\text{Marcelo}, \text{MD}), \\ & & (\text{Juan}, \text{Lógica}), (\text{Cristian}, \text{MD})\big\} \end{array}$$

¿cuál es la diferencia entre una “tabla” y una relación?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo 3

Considere el conjunto $\mathbb{N}$ y las relaciones:

$$\begin{aligned}T_1 &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}\\ T_2 &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}\\ T_3 &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\}\end{aligned}$$

- ¿es cierto que $T_1 \subseteq T_2$?
- ¿es cierto que $T_3 \subseteq T_1$?
- ¿es cierto que $(T_2 \cup T_3) = T_1$?

Relaciones (notación)

Definición

Para una relación R y un par (a, b) usaremos la siguiente **notación**:

$$\left.\begin{array}{c} (a,b) \in R \\ \text{o} \\ a\ R\ b \end{array}\right\} \quad (a,b) \text{ pertenece a la relación } R$$

$$\left.\begin{array}{c} (a,b) \notin R \\ \text{o} \\ a\ \not R\ b \end{array}\right\} \quad (a,b) \textbf{ NO} \text{ pertenece a la relación } R$$

Ejemplos

- $(2, 3) \in \leq$ o $2 \leq 3$
- $(5, 2) \notin \leq$ o $5 \not\leq 2$

Relaciones (mas ejemplos)

Ejemplo 4

Considere el conjunto $\mathbb{N}$ y la relación "a **divide** b":

$$a \mid b \quad \text{si, y solo si} \quad \exists k.\ k \in \mathbb{N} \land a \cdot k = b$$

- ¿es cierto que $18 \mid 72$?
- ¿es cierto que $7 \nmid 93$?
- ¿es cierto que $= \subseteq \mid$?
- ¿es cierto que $\leq \subseteq \mid$?

Outline

Representación de relaciones

1. Grafos dirigidos.

2. Matrices sobre bits.

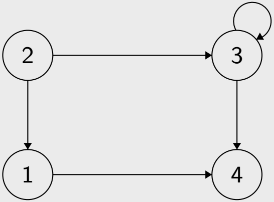
Grafos dirigidos

Definición

Un **grafo dirigido** G es un par (V, E) donde:

- V es un conjunto (**vertices**),
- $E \subseteq V \times V$ es una relación binaria sobre V (**aristas**).

Ejemplo



- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$

Grafos dirigidos

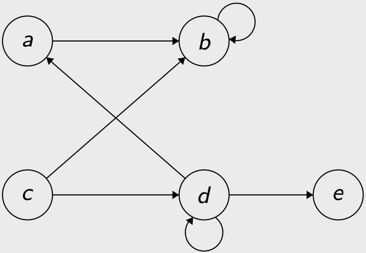
Propiedad

Toda **relación binaria** R sobre A
se puede ver como un **grafo dirigido** $G_R = (A, R)$.

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$



Representación matricial

Definición

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto ordenado arbitrariamente y R una relación binaria sobre A. Definimos la **matriz** M_R de tamaño $n \times n$ como:

$$M_R[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \; R \; a_j \\ 0 & \text{si } a_i \not R \; a_j \end{cases}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Representación matricial

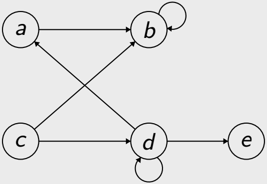
Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$

Entonces la matriz M_R que representa a R es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



¿qué ventaja tiene la representación matricial de una relación?

Operaciones de bits y matrices

Operaciones sobre matrices

Dada dos matrices de bits M y N de tamaño n, definimos las matrices:

$$\begin{aligned}(M \vee N)[i,j] &= M[i,j] \vee N[i,j] \\ (M \wedge N)[i,j] &= M[i,j] \wedge N[i,j] \\ (\neg M)[i,j] &= \neg M[i,j]\end{aligned}$$

Para dos relacions R y S, ¿qué representa $M_R \vee M_S$? ¿$M_R \wedge M_S$? ¿$\neg M_R$?

Operaciones de bits y matrices

Operaciones sobre matrices

Dada dos matrices de bits M y N de tamaño n definimos el orden $M \leq N$:

$$M[i,j] \quad \leq \quad N[i,j]$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$ suponiendo que $0 \leq 1$.

Para dos relacions R y S, ¿qué representa $M_R \leq M_S$?

Outline

Operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Proyección 1**: $\pi_1(R)$ son todos los elementos que estan en la primera componente de R.

$$\pi_1(R) \quad = \quad \{x \mid \exists y \in A.\,(x, y) \in R\}$$

- **Proyección 2**: $\pi_2(R)$ son todos los elementos que estan en la segunda componente de R.

$$\pi_2(R) \quad = \quad \{y \mid \exists x \in A.\,(x, y) \in R\}$$

Operaciones entre relaciones

$$\pi_1(R) \quad = \quad \{x \mid \exists y \in A.\,(x,y) \in R\}$$
$$\pi_2(R) \quad = \quad \{y \mid \exists x \in A.\,(x,y) \in R\}$$

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R \quad = \quad \big\{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\big\}$$

¿cuál es el conjunto $\pi_1(R)$?

$$\pi_1(R) \; = \; \{a, b, c, d\}$$

¿cuál es el conjunto $\pi_2(R)$?

$$\pi_2(R) \; = \; \{a, b, d, e\}$$

Operaciones entre relaciones

$$\begin{aligned}\pi_1(R) &= \{x \mid \exists y \in A.\,(x,y) \in R\}\\ \pi_2(R) &= \{y \mid \exists x \in A.\,(x,y) \in R\}\end{aligned}$$

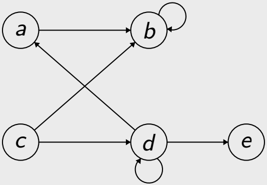
Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \big\{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\big\}$$

$$\pi_1(R) = \{a, b, c, d\} \qquad \pi_2(R) = \{a, b, d, e\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



¿a qué corresponde $\pi_1(R)$ en ambas representaciones? ¿$\pi_2(R)$?

Operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso**: R^{-1} son todos los pares (x, y) tal que $(y, x) \in R$.

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: $R_1 \circ R_2$ son todos los elementos (x, y) tal que existe un z que cumple $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$.

$$R_1 \circ R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid \exists z \in A.\ (x, z) \in R_1 \text{ y } (z, y) \in R_2\}$$

Operaciones entre relaciones

$$
\begin{array}{rcl}
R^{-1} & = & \{(x,y) \mid (y,x) \in R\} \\
R_1 \circ R_2 & = & \{(x,y) \mid \exists z \in A.\ (x,z) \in R_1 \ \text{ y } \ (z,y) \in R_2\}
\end{array}
$$

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R \quad = \quad \Big\{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\Big\}$$

¿cuál es la relación R^{-1}?

$$R^{-1} \ = \ \{(b,a),(b,b),(b,c),(d,c),(a,d),(d,d),(e,d)\}$$

¿cuál es la relación $R \circ R$?

$R \circ R \ = \ \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,a),(c,d),(c,e),(d,b),(d,a),(d,d),(d,e)\}$

Operaciones entre relaciones

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(x,y) \mid (y,x) \in R\} \\ R_1 \circ R_2 &= \{(x,y) \mid \exists z \in A.\ (x,z) \in R_1 \ \text{ y } \ (z,y) \in R_2\} \end{aligned}$$

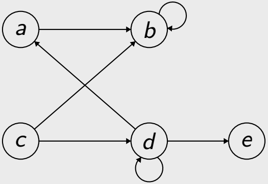
Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R^{-1} = \{(b,a),(b,b),(b,c),(d,c),(a,d),(d,d),(e,d)\}$$

$$R \circ R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,a),(c,d),(c,e),(d,b),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



¿a qué corresponde R^{-1} en ambas representaciones? ¿$R \circ R$?

Caminos en grafos dirigidos

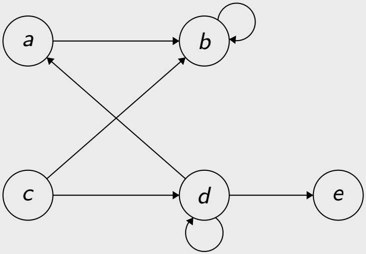
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

Definición

- Un **camino** en G es una secuencia $v_0, v_1, \ldots, v_n$ tal que:
  - $v_i \in V$ para todo $0 \leq i \leq n$.
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para todo $0 \leq i < n$.
- Un **camino simple** en G es un camino donde todos los nodos son distintos en la secuencia.
- El **largo** de un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es igual a n, esto es, el al largo de la secuencia menos uno.

Caminos en grafos dirigidos

Ejemplo



- ¿cuál es un camino de largo 2? ¿y de largo 3?
- ¿cuál es un camino simple de largo 4? ¿y de largo 5?

¿qué significa el grafo de $R \circ R$? ¿y de $(R \circ R) \circ R$?

Multiplicación de matrices de bits

Definición

Dado dos matrices de bits M y N de tamaño $n \times n$, se define la **multiplicación** $M \cdot N$ tal que:

$$(M \cdot N)[i,j] \;=\; \bigvee_{k=1}^{n} M[i,k] \wedge N[k,j]$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dada una relación R, ¿qué representa $M_R \cdot M_R$?