Formas y consecuencias

Clase 03

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: conectivos n-arios

Ejemplo

p_1	p_2	p_3	$C(p_1, p_2, p_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

p_1	p_2	p_3	$\alpha(p_1, p_2, p_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\alpha(p_1, p_2, p_3) := (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

Conectivos n-arios

p_1	p_2		$\cdots$		p_{n-1}	p_n	$C(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$
0	0		$\cdots$		0	0	b_1
0	0		$\cdots$		0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_{i1}	v_{i2}	$\cdots$	v_{ij}	$\cdots$	$v_{i(n-1)}$	v_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1		$\cdots$		1	1	b_{2^n}

Suponiendo que $v_{i1}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{in}$ es la valuación correspondiente a la fila i con valor b_i de la tabla de verdad de $C(p_1, \ldots, p_n)$, entonces:

$$C(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n) \equiv \bigvee_{i\,:\,b_i=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right)$$

Outline

Formas normales

Consecuencia lógica

Outline

Formas normales

Un **literal** es una variable proposicional o la negación de una variable.

Definición

Una formula α está en **Forma Normal Disyuntiva** (DNF) si es una **disyunción de conjunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha \;=\; \beta_1 \;\vee\; \beta_2 \;\vee\; \ldots \;\vee\; \beta_k$$

con $\beta_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{ik_i})$ y $l_{i1}, \ldots, l_{ik_i}$ son literales.

¿cuáles formulas están en DNF?

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p \wedge s) \vee (r \wedge \neg s)$
- $(s \wedge (p \vee r)) \vee (\neg q \wedge r \wedge s)$
- $(s \wedge r) \vee \neg q \vee r \vee s$

Formas normales

Un **literal** es una variable proposicional o la negación de una variable.

Definición

Una formula α está en **Forma Normal Conjuntiva** (CNF) si es una **conjunción de disyunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_k$$

con $\beta_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{ik_i})$ y $l_{i1}, \ldots, l_{ik_i}$ son literales.

¿cuáles formulas estan en CNF?

- $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p \vee s) \wedge (r \vee \neg s)$
- $(s \wedge r) \wedge (\neg q \vee r \vee s)$

Formas normales y equivalencia lógica

Teorema

1. Toda formula α es **lógicamente equivalente** a una formula en **DNF**.
2. Toda formula α es **lógicamente equivalente** a una formula en **CNF**.

Demostración DNF (explicación)

Sea $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ y $v_{i1}, \dots, v_{in}$ la valuación correspondiente a la i-ésima fila de la tabla de verdad de α con valor $\alpha(v_{i1}, \dots, v_{in})$, entonces:

$$\alpha(p_1, \dots, p_n) \equiv \bigvee_{i\,:\,\alpha(v_{i1},\dots,v_{in})=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right)$$

Solo por esta vez, daremos la afirmación de DNF
como verdadera sin dar una demostración.

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración CNF (asumiendo que DNF es verdadera)

Sea $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ una formula cualquiera.

Considere la formula $\neg\alpha(p_1, \ldots, p_n)$. Asumiendo DNF, sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\neg\alpha(p_1, \ldots, p_n) \quad & \equiv \quad \bigvee_{i\,:\,(\neg\alpha)(v_{i1},\ldots,v_{in})=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right) \\
& \equiv \quad \bigvee_{i\,:\,\alpha(v_{i1},\ldots,v_{in})=0} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right)
\end{aligned}
$$

¿cómo usamos lo anterior para demostrar CNF?

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (CNF)

Por el teorema de composición de formulas y De Morgan:

$$\begin{aligned}
\alpha(p_1,\ldots,p_n) &\equiv \neg(\neg\alpha(p_1,\ldots,p_n)) \\
&\equiv \neg\left(\bigvee_{i\,:\,\alpha(v_{i1},\ldots,v_{in})=0}\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j\right)\right) \\
&\equiv \bigwedge_{i\,:\,\alpha(v_{i1},\ldots,v_{in})=0} \neg\left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j\right)\right) \\
&\equiv \bigwedge_{i\,:\,\alpha(v_{i1},\ldots,v_{in})=0} \left(\bigvee_{j\,:\,v_{ij}=1} \neg p_j\right) \vee \left(\bigvee_{j\,:\,v_{ij}=0} p_j\right)
\end{aligned}$$

$\square$ (significa "queda esto demostrado")

Outline

Formas normales

Consecuencia lógica

Modelación en lógica proposicional

Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá un buena nota.

Pedro y Sofía estudiaron para la I1.

Por lo tanto, Pedro obtendrá una buena nota.

¿cómo formalizamos esta **deducción** en lógica proposicional?

¿Cuáles son nuestras proposiciones **básicas**?

$$\begin{array}{rcl} PE & := & \text{Pedro estudia para la I1} \\ SE & := & \text{Sofía estudia para la I1} \\ BN & := & \text{Pedro obtiene una buena nota.} \end{array}$$

¿Cuáles son nuestras proposiciones **compuestas**?

$$\begin{array}{rcl} PE \rightarrow BN & := & \text{Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá un buena nota.} \\ PE \wedge SE & := & \text{Pedro y Sofía estudiaron para la I1} \end{array}$$

Modelación en lógica proposicional

$$\begin{array}{l} PE \rightarrow BN \\ PE \land SE \\ \hline BN \end{array}$$

PE := Pedro estudia para la I1
SE := Sofía estudia para la I1
BN := Pedro obtiene una buena nota.

¿por qué decimos que esta deducción es **válida**?

PE	SE	BN	$PE \rightarrow BN$	$PE \land SE$	BN
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Modelación en lógica proposicional (otro ejemplo)

$$\begin{array}{l} PE \;\vee\; SE \\ \neg PE \;\vee\; SE \\ \hline SE \end{array}$$

PE := Pedro estudia para la I1

SE := Sofía estudia para la I1

BN := Pedro obtiene una buena nota.

¿por qué decimos que esta deducción es **válida**?

PE	SE	$PE \vee SE$	$\neg PE \vee SE$	SE
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Modelación en lógica proposicional (anti-ejemplo)

$$\begin{array}{l} PE \rightarrow BN \\ PE \vee SE \\ \hline BN \quad \times \end{array}$$

PE := Pedro estudia para la I1
SE := Sofía estudia para la I1
BN := Pedro obtiene una buena nota.

¿por qué decimos que esta deducción es **inválida**?

PE	SE	BN	$PE \rightarrow BN$	$PE \vee SE$	BN	
0	0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	1	
0	1	0	1	1	0	×
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	0	
1	0	1	1	1	1	
1	1	0	0	1	0	
1	1	1	1	1	1	

Consecuencia lógica

Sea $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ un conjunto de formulas con variables $p_1, \ldots, p_n$.

Definición

- Diremos que α es **consecuencia lógica** de Σ si, y solo si, **para toda valuación** $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que:

$$\text{si } \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1, \text{ entonces } \alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1.$$

- Si α es consecuencia lógica de Σ, entonces escribiremos $\Sigma \vDash \alpha$.

Ejemplo

- $\{\ q \to p,\ q \wedge s\ \} \ \vDash\ p$
- $\{\ p \vee q,\ \neg p\ \} \ \vDash\ q$

Consecuencia lógica

Sea $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ un conjunto de formulas con variables $p_1, \ldots, p_n$.

Definición

- Diremos que α es **consecuencia lógica** de Σ si, y solo si, **para toda valuación** $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que:

$$\text{si} \quad \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1, \quad \text{entonces} \quad \alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1.$$

- Si α es consecuencia lógica de Σ, entonces escribiremos $\Sigma \vDash \alpha$.

Notación

- Diremos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son **premisas** y α la **conclusión**.
- Si $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\Sigma' = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, entonces:

$$\Sigma \cup \Sigma' \;=\; \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m\}$$

(unión de conjuntos)

Algunas consecuencias lógicas clásicas

Consecuencias lógicas

1. **Modus ponens**: $\{p, p \to q\} \models q$

p	q	p	$p \to q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

2. **Modus tollens**: $\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

Algunas consecuencias lógicas clásicas

Consecuencias lógicas

3. **Resolución**: $\{\ p \vee q,\ \neg q \vee r\ \} \ \models\ p \vee r$

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q \vee r$	$p \vee r$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Sobre consecuencia lógica

¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $\{1\} \models \alpha$ entonces α es una **tautología**. ✓
2. Si α es una **contradicción**, entonces $\{\alpha\} \models \beta$ para toda formula β. ✓
3. Si $\Sigma \models \alpha$, entonces $\Sigma \cup \{\beta\} \models \alpha$ para todo β. ✓
4. Si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ y $\Sigma \models \alpha$, entonces $\Sigma \models \beta$. ✓

¿cuál es la relación entre $\models$ y $\rightarrow$?