Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2022

PAUTA TAREA 1

Pregunta 1

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ dos fórmulas proposicionales con las mismas variables proposicionales. Decimos que α y β son *lógicamente anti-equivalentes* si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) \neq \beta(v_1, \ldots, v_n).$$

Pregunta 1.a

¿Es verdad que si α y β son lógicamente anti-equivalentes, entonces $\alpha \not\equiv \beta$? Demuestre o entregue un contraejemplo.

Solución:
Del enunciado obtenemos que hay que demostrar o dar un contraejemplo de lo siguiente:

$$\alpha \text{ y } \beta \text{ lógicamente anti-equivalentes } \rightarrow \alpha \not\equiv \beta$$

Sea $u_1, \ldots, u_n$ una valuación cualquiera. Si asumimos que α y β son anti-equivalentes, por definición entonces se cumple que

$$\alpha(u_1, ..., u_n) \neq \beta(u_1, ..., u_n).$$

Por lo tanto, no es cierto que para toda valuación $v_1, ..., v_n$ se cumple

$$\alpha(v_1, ..., v_n) = \beta(v_1, ..., v_n)$$

dado que existe $u_1, \ldots, u_n$. Podemos concluir que se cumple la negación de la equivalencia lógica $\alpha \not\equiv \beta$, y por ende se cumple lo propuesto en el enunciado.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

(**4 Puntos**) Demostración correcta.

(**3 Puntos**) Idea correcta con algún error menor en ejecución.

(**2 Puntos**) Si se asume correcto el lado izquierdo de la proposición, pero no se concluye correctamente el lado derecho.

(**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 1.b

¿Es verdad que si $\alpha \not\equiv \beta$, entonces α y β son lógicamente anti-equivalentes? Demuestre o entregue un contraejemplo.

Solución:
Tomaremos los siguientes valores para α y β para plantear un contraejemplo:

$$\alpha(p,q) := p \vee q$$
$$\beta(p,q) := p \wedge q$$

Eligiendo $p = 1$ y $q = 0$, y luego evaluando α y β:

$$\alpha(1,0) = 1$$
$$\beta(1,0) = 0$$

Como $\alpha(1,0) \neq \beta(1,0)$, entonces claramente $\alpha \not\equiv \beta$.

Por otro lado, si tomamos $p = 1$ y $q = 1$, α y β toman los siguientes valores:

$$\alpha(1,1) = 1$$
$$\beta(1,1) = 1$$

Como $\alpha(1,1) = \beta(1,1)$ luego existe una valuación para la cual los valores de α y β son iguales, por lo tanto, α no es antilógicamente equivalente con β.

Al existir un contraejemplo, podemos decir no es verdad que si $\alpha \not\equiv \beta$, entonces α y β son lógicamente anti-equivalentes, es decir, no se cumple lo propuesto en el enunciado.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

(**4 Puntos**) Demostración correcta.

(**3 Puntos**) Error al evaluar las fórmulas, o las conclusiones son incorrectas.

(**2 Puntos**) No están las conclusiones, pero están correctas las valuaciones o tablas de verdad correspondientes.

(**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 1.c

Demuestre que α y β son lógicamente anti-equivalentes si, y solo si, la fórmula proposicional $(\alpha \leftrightarrow \neg\beta)$ es tautología.

Solución:
Suponemos que α y β son antilógicamente equivalentes. Sea $v_1, \ldots, v_n$ una valuación cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha \not\equiv \beta &\iff \alpha(v_1,\ldots,v_n) \neq \beta(v_1,\ldots,v_n) && \text{(por def. de anti-equivalencia)}\\
&\iff \alpha(v_1,\ldots,v_n) = \neg\beta(v_1,\ldots,v_n) && \text{(por def. de la negacion)}\\
&\iff (\alpha \leftrightarrow \neg\beta)(v_1,\ldots,v_n) = 1 && \text{(por def. de la doble implicancia)}\\
&\iff \alpha \leftrightarrow \neg\beta \text{ es tautología} && \text{(por def. de tautología)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que si α y β son lógicamente anti-equivalentes si, y solo si, la fórmula proposicional $(\alpha \leftrightarrow \neg\beta)$ es tautología.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

(**4 Puntos**) Demostración correcta o usa tabla de verdad para demostrar, y está correcto.

(**3 Puntos**) Demuestra ambas implicancias, pero con errores menores o usa tabla de verdad para demostrar, pero su demostración presenta errores menores.

(**2 Puntos**) Si demuestra correctamente solo una implicanciao usa tabla de verdad para demostrar, pero su demostración presenta errores mayores y/o es muy pobre (i.e. no explica lo suficiente sus pasos).

(**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

Pregunta 2.a

Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

<u>Solución:</u>

Sea Σ un conjunto de formulas proposicionales cualquiera y sean α, β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$.

Por Demostrar: $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$.

Sea $\vec{v}$ una valuación cualquiera tal que haga verdadera cada formula en $\Sigma \setminus \{\alpha\}$.

Como β esta en Σ, entonces $\beta(\vec{v}) = 1$. Como $\alpha \equiv \beta$ (son lógicamente equivalentes), entonces $\alpha(\vec{v}) = 1$.

Por esto, queda demostrado que para cualquier vector de valuaciones $\vec{v}$ se cumple que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, Σ es redundante.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Demuestra correctamente todo lo pedido.
- (**3 Puntos**) Contiene errores menores.
- (**2 Puntos**) Se utilizan los conceptos de valuación, consecuencia y equivalencia lógica correctamente, pero no demuestra lo pedido.
- (**0 Puntos**) Erróneo.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones.

Pregunta 2.b

Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante.

<u>Solución:</u>

La afirmación es correcta y lo demostraremos de la siguiente forma. Sea Σ un conjunto de formulas proposicionales cualquiera tal que Σ es redundante a pares.

Por Demostrar: Σ es redundante.

Suponga que Σ es redundante a pares, entonces sabemos que existen α y β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \models \beta$.

Sea $\vec{v}$ una valuaciones cualquiera tal que haga verdadera cada formula en $\Sigma \setminus \{\beta\}$. Dado que α esta en $\Sigma \setminus \{\beta\}$, entonces $\alpha(\vec{v}) = 1$.

Por definición de consecuencia lógica, como $\alpha \models \beta$ y $\alpha(\vec{v}) = 1$, entonces $\beta(\vec{v}) = 1$. Por lo tanto, queda demostrado que si Σ es redundante a pares, entonces Σ es redundante.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Demuestra correctamente todo lo pedido.
- (**3 Puntos**) Contiene errores menores.
- (**2 Puntos**) Se utilizan los conceptos de valuación, consecuencia y equivalencia lógica correctamente, pero no demuestra lo pedido.
- (**0 Puntos**) Erróneo.

Pregunta 2.c

Si Σ es redundante, entonces es redundante de a pares.

Solución:

En este caso la afirmación es falsa. Para demostrar que no se cumple lo propuesto se propondrá un posible contrajemplo que deja en evidencia que existe un caso donde no se cumple lo pedido.

Considere el conjunto de fórmulas proposicionales $\Sigma = \{p, q, p \leftrightarrow q\}$. Debemos demostrar que este conjunto es redundante y no es redundante a pares.

Su tabla de verdad que se utilizará para la demostración es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Para que sea redundante se tiene que cumplir que existe α tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$. Si consideramos $\alpha = p \leftrightarrow q$ nos podemos dar cuenta que $\{p, q\} \models p \leftrightarrow q$. Esto es fácilmente visible mediante la fila 4 de la tabla de verdad. Por lo tanto, Σ es redundante.

Ahora, para demostrar que Σ no es redundante a pares. Debemos demostrar que para todo par α, β en Σ con $\alpha \neq \beta$ no se cumple que $\alpha \models \beta$. Como Σ tiene 3 formulas proposionales, debemos ver los 6 casos y demostrar para cada uno que no es cierto que $\alpha \models \beta$:

- $p \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 2).
- $p \models q$: no se cumple (fila 2).
- $p \leftrightarrow q \models p$: no se cumple (fila 1).
- $p \leftrightarrow q \models q$: no se cumple (fila 1).
- $q \models p$: no se cumple (fila 3).
- $q \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 3).

Ya que para todos los pares no se cumple la consecuencia lógica, entonces Σ no es redundante a pares.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Demuestra correctamente.
- (**3 Puntos**) Demuestra correctamente que es redundante o redundante a pares, pero no ambas.
- (**2 Puntos**) Presenta un contrajemplo válido, pero no demuestra correctamente que es redundante y no redundante a pares.
- (**0 Puntos**) Erróneo.