Consecuencia lógica y satisfacibilidad

Clase 04

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Consecuencia lógica

Sea $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ un conjunto de formulas con variables $p_1, \ldots, p_n$.

Definición

- Diremos que α es **consecuencia lógica** de Σ si, y solo si, **para toda valuación** $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que:

$$\text{si} \quad \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1, \quad \text{entonces} \quad \alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1.$$

- Si α es consecuencia lógica de Σ, entonces escribiremos $\Sigma \vDash \alpha$.

Ejemplo

- $\{\ q \to p,\ q \wedge s\ \} \ \vDash\ p$
- $\{\ p \vee q,\ \neg p\ \} \ \vDash\ q$

Recordatorio: Sobre consecuencia lógica

¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $\{1\} \models \alpha$ entonces α es una **tautología**. ✓
2. Si α es una **contradicción**, entonces $\{\alpha\} \models \beta$ para toda formula β. ✓

¿cuál es la relación entre $\models$ y $\rightarrow$?

Outline

Reglas de consecuencia lógica

Satisfacibilidad

Outline

Algunas reglas de consecuencia lógica

1. **Modus ponens**: $\{\ p,\ p \to q\ \} \models\ q$
2. **Modus tollens**: $\{\ \neg q,\ p \to q\ \} \models\ \neg p$
3. **Silogismo**: $\{\ p \to q,\ q \to r\ \} \models\ p \to r$
4. **Silogismo disyuntivo**: $\{\ p \vee q,\ \neg p\ \} \models\ q$
5. **Conjunción**: $\{\ p,\ q\ \} \models\ p \wedge q$
6. **Simplificación conjuntiva**: $\{\ p \wedge q\ \} \models\ p$
7. **Aplificación disyuntiva**: $\{\ p\ \} \models\ p \vee q$
8. **Demostración condicional**: $\{\ p \wedge q,\ p \to (q \to r)\ \} \models\ r$
9. **Demostración por casos**: $\{\ p \to r,\ q \to r\ \} \models\ (p \vee q) \to r$

Demuestre cada una de las consecuencias lógicas

¿cómo demostramos que $\Sigma \vDash \alpha$?

1. Verificando todas las valuaciones (tabla de verdad).

2. Deducimos α desde Σ **reusando** alguna de las reglas anteriores.

¿cómo podemos "reusar" las reglas anteriores?

Composición y consecuencia lógica

Sean $\Sigma = \{\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_m(p_1, \dots, p_n)\}$ y $\beta_1, \dots \beta_n$ formulas proposicionales.

Definición

La **composición** $\Sigma(\beta_1, \dots, \beta_n)$ es el conjunto resultante de componer cada formula en Σ con $\beta_1, \dots, \beta_n$, esto es:

$$\Sigma(\beta_1, \dots, \beta_n) = \{\alpha_1(\beta_1, \dots, \beta_n), \dots, \alpha_m(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$$

Teorema

Sean Σ un conjunto de formulas y $\alpha(p_1, \dots, p_n)$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ formulas.

Si $\Sigma \models \alpha$, entonces $\Sigma(\beta_1, \dots, \beta_n) \models \alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Demuestre este teorema (muy similar al caso de equivalencia lógica)

¿cómo demostramos que $\Sigma \vDash \alpha$?

1. Verificando todas las valuaciones (tabla de verdad).

2. **Deducimos** α desde Σ reusando alguna de las reglas anteriores.

¿cómo hacemos esta "deducción"?

¿cómo demostramos que $\Sigma \vDash \alpha$?

Ejemplo

$\{\ p,\ p \rightarrow q,\ s \vee r,\ \neg s \wedge \neg t\ \} \ \vDash\ q \wedge r$

1.	p	(Premisa)
2.	$p \rightarrow q$	(Premisa)
3.	q	(Modus Ponens 1 y 2)
4.	$s \vee r$	(Premisa)
5.	$\neg s \rightarrow r$	(equivalencia con 4.)
6.	$\neg s \wedge \neg t$	(Premisa)
7.	$\neg s$	(Simplificación conjuntiva 6)
8.	r	(Modus Ponens 5 y 7)
9.	$q \wedge r$	(Conjunción 3 y 8)

¿por qué esta secuencia de pasos **demuestra** que $\Sigma \vDash \alpha$?

Para deducir α desde Σ

1. Si $\Sigma' \vDash \alpha$ y $\Sigma' \subseteq \Sigma$, entonces $\Sigma \vDash \alpha$. ✓

   "Si queremos demostrar que $\Sigma \vDash \alpha$ pero demostramos α usando solo un subconjunto de Σ, entonces hemos demostrado que $\Sigma \vDash \alpha$."

Ejemplo

$$\{\ p,\ p \to q,\ s \vee r,\ \neg s \wedge \neg t\ \} \ \vDash\ q \wedge r$$

$$\begin{array}{lrl} 1. & p & \text{(Premisa)} \\ 2. & p \to q & \text{(Premisa)} \\ 3. & q & \text{(Modus Ponens 1 y 2)} \end{array}$$

$$\{\ p,\ p \to q,\ s \vee r,\ \neg s \wedge \neg t\ \} \ \vDash\ q$$

Demostración: ejercicio

Para deducir α desde Σ

1. Si $\Sigma' \models \alpha$ y $\Sigma' \subseteq \Sigma$, entonces $\Sigma \models \alpha$. ✓
2. Si $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$. ✓

   "Si demostramos α desde Σ, y demostramos β usando Σ y α, entonces habremos demostrado que $\Sigma \models \beta$."

Ejemplo

$\{\ p,\ p \rightarrow q,\ s \vee r,\ \neg s \wedge \neg t\ \} \ \models\ q \wedge r$

	...	
3.	q	(Modus Ponens 1 y 2)
	...	
8.	r	(Modus Ponens 5 y 7)
9.	$q \wedge r$	(Conjunción 3 y 8)

$\{\ p,\ p \rightarrow q,\ s \vee r,\ \neg s \wedge \neg t,\ q,\ r\ \} \ \models\ q \wedge r$

. . . por lo tanto, $\{\ p,\ p \rightarrow q,\ s \vee r,\ \neg s \wedge \neg t\} \ \models\ q \wedge r$.

Para deducir α desde Σ

1. Si $\Sigma' \models \alpha$ y $\Sigma' \subseteq \Sigma$, entonces $\Sigma \models \alpha$. ✓
2. Si $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$. ✓

   "Si demostramos α desde Σ, y demostramos β usando Σ y α, entonces habremos demostrado que $\Sigma \models \beta$."

Demostración: ejercicio

¿cómo demostramos que $\Sigma \vDash \alpha$?

1. Si $\Sigma' \vDash \alpha$ y $\Sigma' \subseteq \Sigma$, entonces $\Sigma \vDash \alpha$
2. Si $\Sigma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ y $\Sigma \vDash \alpha$, entonces $\Sigma \vDash \beta$.

Estrategia para demostrar $\Sigma \vDash \alpha$

- Demostramos que $\Sigma \vDash \beta_0$. (usando 1. y reglas anteriores)
- Demostramos que $\Sigma \cup \{\beta_0\} \vDash \beta_1$. (usando 1. y reglas anteriores)
- Demostramos que $\Sigma \cup \{\beta_0, \beta_1\} \vDash \beta_2$. (usando 1. y reglas anteriores)
- ...
- Demostramos que $\Sigma \cup \{\beta_0, \dots, \beta_{n-1}\} \vDash \beta_n$. (usando 1. y reglas ant.)
- Demostramos que $\Sigma \cup \{\beta_0, \dots, \beta_n\} \vDash \alpha$.

..., usando 2. concluimos que $\Sigma \vDash \alpha$.

¿cómo demostramos que $\Sigma \vDash \alpha$?

Ejemplo

$\{ p,\ p \to q,\ s \vee r,\ \neg s \wedge \neg t \} \ \vDash \ q \wedge r$

1.	p	(Premisa)
2.	$p \to q$	(Premisa)
3.	q	(Modus Ponens 1 y 2)
4.	$s \vee r$	(Premisa)
5.	$\neg s \to r$	(equivalencia con 4.)
6.	$\neg s \wedge \neg t$	(Premisa)
7.	$\neg s$	(Simplificación conjuntiva 6)
8.	r	(Modus Ponens 5 y 7)
9.	$q \wedge r$	(Conjunción 3 y 8)

¿alguna estrategia mejor?

Outline

Satisfacción de un conjunto de formulas

Definiciones

- $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ se dice **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \ldots, v_n$:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

- $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ con variables $p_1, \ldots, p_n$ se dice **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \ldots, v_n$ tal que: $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1$.

- Σ es **inconsistente** si NO es satisfacible.

¿qué propiedad cumple la tabla de verdad de una formula satisfacible?
¿y la del conjunto?

Satisfacción de un conjunto de formulas

Definiciones

- $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ se dice **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \ldots, v_n$:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) \;=\; 1$$

- $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ con variables $p_1, \ldots, p_n$ se dice **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \ldots, v_n$ tal que: $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1$.

- Σ es **inconsistente** si NO es satisfacible.

¿cuál de las siguientes formulas/conjuntos son satisfacibles?

- $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
- $\{\ \neg q \vee p,\ \ q \vee \neg r,\ \ \neg p \vee r\ \}$
- $\{\ \neg q \vee p,\ \ \neg p \vee r,\ \ \neg r \vee q,\ \ p \vee q \vee r,\ \ \neg p \vee \neg q \vee \neg r\ \}$

Consecuencia lógica vs satisfacibilidad

Teorema

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \vDash \alpha$ si, y solo si, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \neg\alpha\}$ es **inconsistente**.

Demostración ($\Rightarrow$)

Suponga que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \vDash \alpha$.

PD: para toda $v_1, \ldots, v_n$ se cumple que $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i \wedge \neg\alpha\right](v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Tomamos una valuación cualquiera $v_1, \ldots, v_n$ y tenemos dos casos:

1. Si $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 0$,

   entonces $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i \wedge \neg\alpha\right](v_1, \ldots, v_n) = 0$. ✓

2. Si $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1$, entonces:
   - $\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$ (¿por qué?)
   - $\neg\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 0$

   ... y por lo tanto $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i \wedge \neg\alpha\right](v_1, \ldots, v_n) = 0$. ✓

Consecuencia lógica vs satisfacibilidad

Teorema

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \vDash \alpha$ si, y solo si, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \neg\alpha\}$ es **inconsistente**.

Demostración ($\Leftarrow$)

Suponga que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \neg\alpha\}$ es **inconsistente**.

PD1: para toda $v_1, \dots, v_n$,
si $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \dots, v_n) = 1$, entonces $\alpha(v_1, \dots, v_n) = 1$.

Sea $v_1, \dots, v_n$ una valuación cualquiera tal que $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \dots, v_n) = 1$.

PD2: $\alpha(v_1, \dots, v_n) = 1$.

$$\begin{aligned} \left[\textstyle\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \dots, v_n) = 1 \quad & \text{entonces} \quad \neg\alpha(v_1, \dots, v_n) = 0 \quad (\text{¿por qué?}) \\ & \text{entonces} \quad \alpha(v_1, \dots, v_n) = 1 \end{aligned}$$

$\square$

Satisfacibilidad y representación de problemas

Problema

Dada una fórmula α, queremos verificar si α es **satisfacible**.

¿cómo podemos hacer esto **eficientemente**?

- El problema de satisfacción es un problema fundamental tanto en ciencia de la computación como en ingeniería.
- Muchos otros problemas pueden ser resueltos usando este problema.