NOMBRE: Jorge De Goyeneche

SECCIÓN: 1

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1° Semestre 2022

Tarea 4 – Respuesta Pregunta 1

Sean $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$ dos funciones cualquiera desde los conjuntos A a B y B a C respectivamente, con A, B y C distintos de vacío.

1. Demuestre que si $f_1 \circ f_2$ es sobreyectiva, entonces existe $i \in \{1, 2\}$ tal que f_i es sobreyectiva.
2. Demuestre que si $f_1 \circ f_2$ es inyectiva, entonces existe $i \in \{1, 2\}$ tal que f_i es inyectiva.

1) Asumimos que $f_3 = f_1 \circ f_2 : A \to C$ es sobreyectiva, esto significa que:

$$\forall c \in C.\ \ \exists a \in A.\ \ f_3(a)\ =\ c$$

Lo que traducido al lenguaje hablado nos dice que, para todo elemento del recorrido de la función compuesta, existe un elemento del dominio cuya imagen es dicho elemento.

PD: $\forall c \in C.\ \ \exists b \in B.\ \ f_2(b) = c \quad \vee \quad \forall b \in B.\ \ \exists a \in A.\ \ f_1(a) = b$

Sea $c \in C$ tenemos que:

$$\exists a \in A.\ f_3(a) = c$$

Lo que por la igualdad es lo mismo que:

$$\exists a \in A.\ f_1 \circ f_2(a) = c$$

Descomponiendo por definición de composición:

$$\exists a \in A.\ f_2(f_1(a)) = c$$

Esta afirmación nos otorga las siguientes afirmaciones derivadas:

$$\exists b \in B.\ f_2(b) = c\ \wedge\ \exists a \in A.\ f_1(a) = b$$

Si la primera afirmación debe cumplirse por sobreyectividad para todo elemento en C, reinterpretando:

$$\forall c \in C.\ (\exists b \in B.\ f_2(b) = c\ \wedge\ \exists a \in A.\ f_1(a) = b)$$

Aquí vemos que para todo elemento en c, por la definicion de composicion y su sobreyectividad, debe existir una preimagen en b que lleve a ese elemento. Por lo tanto (SPDG):

$$\forall c \in C.\ \exists b \in B.\ f_2(b) = c$$

Lo que es la definición de sobreyectividad, por lo queda demostrado que existe un $i \in \{1, 2\}$ tal que f_i es sobreyectiva.

2) Usando la lógica del contrapositivo, el cual nos facilitará el cálculo en este caso:

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

Por lo que tenemos que si f_1 y f_2 no son inyectivas, f_3 tampoco lo es.

Asumiendo el lado izquierdo de la afirmación,para f_1 tenemos que:

$$\exists a_1, a_2 \in A.\ f(a_1) = f(a_2) \to a_1 \neq a_2$$

Esto nos da que en B, existe una imagen con dos pre-imágenes, lo que al tomar f_2 que relaciona de B a C, una vez el elemento del dominio de B que recibió ambas pre-imágenes termine en C, al realizar la composición, se tendrá que las dos pre-imágenes de A llevaran a un mismo elemento de C. Por lo tanto:

$$\exists a_1, a_2 \in A.\ f_3(a_1) = f_3(a_2) \to a_1 \neq a_2$$

Y por ende, la composición no es inyectiva ya que imposibilita el cumplimiento de la definición de inyectividad.