Propiedades de relaciones

Clase 12

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Pares ordenados

Definición

Para dos elementos a y b, se define el **par ordenado** (a, b) como:

$$(a, b) \; = \; \big\{ \{a\}, \{a, b\} \big\}$$

Proposición

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si, y solo si,} \quad a = c \;\text{ y }\; b = d$$

Recordatorio: Producto cartesiano

Definición

- Para dos conjuntos A y B se define el **producto cartesiano** como:

$$A \times B \ = \ \{ \ (a, b) \ | \ a \in A \wedge b \in B \ \}$$

- Para conjuntos $A_1, \ldots, A_n$
  se define el **producto cartesiano generalizado**:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \ = \ \{ (a_1, \ldots, a_n) \ | \ a_i \in A_i \}$$

Recordatorio: Relaciones

Definición

Dado un conjunto A y B, R es una **relación binaria** sobre A y B si:

$$R \subseteq A \times B$$

Si $B = A$ decimos que R es una relación binaria sobre A.

Ejemplos

- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}.\ a \cdot k = b\big)$

Outline

Propiedades

Caracterizaciones

Outline

Propiedades

Caracterizaciones

Propiedades de relaciones binarias

1. Refleja
2. Irrefleja
3. Simétrica
4. Asimétrica
5. Antisimétrica
6. Transitiva
7. Conexa

Relaciones reflejas e irreflejas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

1. R es una relación **refleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a, a) \in R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a, a) \in R$$

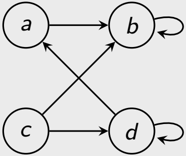
2. R es una relación **irrefleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a, a) \notin R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a, a) \notin R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{\ &(a, b),\ (b, b),\ (c, b),\\ &(c, d),\ (d, a),\ (d, d)\ \} \end{aligned}$$

NO es refleja ni irrefleja



Relaciones reflejas e irreflejas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

1. R es una relación **refleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a,a) \in R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a,a) \in R$$

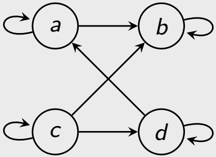
2. R es una relación **irrefleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a,a) \notin R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a,a) \notin R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{\ & (a,b),\ (a,a),\ (b,b),\ (c,b), \\ & (c,c),\ (c,d),\ (d,a),\ (d,d)\ \} \end{aligned}$$

Refleja



Ejemplo de relaciones reflejas e irreflejas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

1. **Refleja**: $\forall a \in A. \ (a, a) \in R$.
2. **Irrefleja**: $\forall a \in A. \ (a, a) \notin R$.

¿cuáles relaciones son reflejas o irreflejas?

- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}. \ a \cdot k = b\big)$

Si R NO es refleja, entonces ¿es R irrefleja?

Relaciones simétricas y asimétricas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

3. R es **simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$$

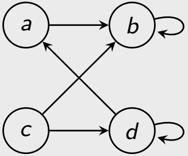
4. R es **asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \notin R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$$

Ejemplo

$$R = \{ (a,b),\ (b,b),\ (c,b),\ (c,d),\ (d,a),\ (d,d) \}$$

NO es simétrica ni asimétrica



Relaciones simétricas y asimétricas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

3. R es **simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$$

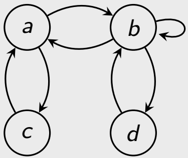
4. R es **asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \notin R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$$

Ejemplo

$$R = \{ (a,b),\ (a,c),\ (b,a),\ (b,b),\ (b,d),\ (c,a),\ (d,b) \}$$

Relación simétrica



Relaciones antisimétricas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

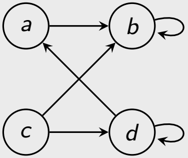
5. R es **antisimétrica** si
   para cada $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$.

$$\forall a, b \in A. \ \big((a, b) \in R \ \wedge \ (b, a) \in R \big) \ \rightarrow \ a = b$$

Ejemplo

$$R \ = \ \{ (a, b), \ (b, b), \ (c, b), \ (c, d), \ (d, a), \ (d, d) \}$$

Relación antisimétrica



Ejemplo de relaciones (a, anti)simétricas

Definiciones

3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R\big) \rightarrow a = b.$

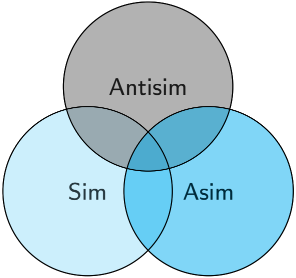
¿cuáles relaciones son (a, anti)simétricas?

- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a$ divide b ssi $\exists k \in \mathbb{N}.\ a \cdot k = b\big)$

Ejemplo de relaciones (a, anti)simétricas

Definiciones

3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R\big) \rightarrow a = b.$



Encuentre un ejemplo para cada intersección.

Relaciones transitivas y conexas

Definición

6. R es **transitiva** si
para cada $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

$$\forall a, b, c \in A. \ \big((a, b) \in R \ \wedge \ (b, c) \in R \big) \ \to \ (a, c) \in R$$

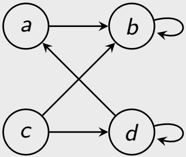
7. R es **conexa** si para cada $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A. \ (a, b) \in R \ \vee \ (b, a) \in R$$

Ejemplo

$$R = \{ (a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d) \}$$

NO es transitiva ni conexa



Relaciones transitivas y conexas

Definición

6. R es **transitiva** si
para cada $a, b, c \in A$, si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$, entonces $(a,c) \in R$.

$$\forall a, b, c \in A.\ \big((a,b) \in R \ \wedge\ (b,c) \in R\big) \ \rightarrow\ (a,c) \in R$$

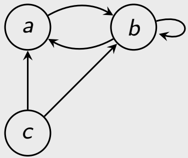
7. R es **conexa** si para cada $a, b \in A$, $(a,b) \in R$ o $(b,a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \ \vee\ (b,a) \in R$$

Ejemplo

$$R = \{\ (a,b),\ (b,a),\ (b,b),\ (c,a),\ (c,b)\}$$

No es conexa ni transitiva



Relaciones transitivas y conexas

Definición

6. R es **transitiva** si
   para cada $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

$$\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, c) \in R \big) \ \to\ (a, c) \in R$$

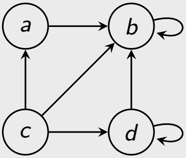
7. R es **conexa** si para cada $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \ \vee\ (b, a) \in R$$

Ejemplo

$$R = \{ (a, b),\ (b, b),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, d),\ (d, b),\ (d, d) \}$$

Relación transitiva no conexa



Ejemplo de relaciones transitivas y conexas

Definiciones

6. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a,b) \in R\ \wedge\ (b,c) \in R\big) \rightarrow (a,c) \in R.$
7. **Conexa**: $\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R\ \vee\ (b,a) \in R.$

¿cuáles relaciones son transitivas o conexas?

- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}.\ a \cdot k = b\big)$

Outline

Tipos de relaciones (resumen)

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R.$
2. **Irrefleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \notin R.$
3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \big) \rightarrow a = b.$
6. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \big) \rightarrow (a, c) \in R.$
7. **Conexa**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \vee (b, a) \in R.$

¿es posible **caracterizar** cada propiedad
en termino de operaciones entre relaciones?

Caracterización de propiedades en termino de operaciones

Teorema

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

1. R es **refleja** ssi $I_A \subseteq R$.
2. R es **irrefleja** ssi $R \cap I_A = \varnothing$.
3. R es **simétrica** ssi $R = R^{-1}$.
4. R es **asimétrica** ssi $R \cap R^{-1} = \varnothing$.
5. R es **antisimétrica** ssi $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
6. R es **transitiva** ssi $R \circ R \subseteq R$.
7. R es **conexa** ssi $R \cup R^{-1} = A \times A$.

Demostración: ejercicio.