# Consecuencia lógica para lógica de predicados

Clase 07

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

# Recordatorio: Lógica de Predicados

## Definición

Decimos que una predicado es una formula si es:

- un predicado básico,
- la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuatificación **universal** ($\forall$) o **existencial** ($\exists$) de un pred. compuesto.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

# Recordatorio: Interpretaciones

## Definición

Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

1. un **dominio** $\mathcal{I}(dom)$ y
2. para cada símbolo $P_i$ un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$.

## Ejemplos

Considere los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$.

- $$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(dom) &:= \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_1(P) &:= x \text{ es par} \\ \mathcal{I}_1(O) &:= x < y \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(dom) &:= \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_2(P) &:= x > 0 \\ \mathcal{I}_2(O) &:= x + y = 0 \end{aligned}$$

# Recordatorio: Interpretaciones

## Definición (caso general)

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una formula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en $\alpha$.

Diremos que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** $\alpha$ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en $\alpha$ según $\mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I}$ **NO satisface** $\alpha$ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ lo anotaremos como:

$$\mathcal{I} \nvDash \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

Notar que: $\mathcal{I} \nvDash \alpha$ si, y solo si, $\mathcal{I} \vDash \neg\alpha$

# Recordatorio: Equivalencia lógica

## Definición

Sean $\alpha$ y $\beta$ dos oraciones en lógica de predicados (no tienen variables libres).
Decimos que $\alpha$ y $\beta$ son **lógicamente equivalentes**:

$$\alpha \equiv \beta$$

si **para toda interpretación** $\mathcal{I}$ se cumple:

$$\mathcal{I} \models \alpha \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{I} \models \beta$$

## Caso general

Sean $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ y $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ dos formulas en lógica de predicados.
Decimos que $\alpha$ y $\beta$ son **lógicamente equivalentes** ($\alpha \equiv \beta$),
si **para toda interpretación** $\mathcal{I}$ y **para todo** $a_1, \ldots, a_n$ **en** $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{I} \models \beta(a_1, \ldots, a_n)$$

# Recordatorio: Equivalencias lógicas sencillas

Todas las equivalencias de lógica proposicional
son equivalencias en lógica de predicados.

## Ejemplos

Para fórmulas $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ en lógica de predicados:

1. **Conmutatividad**: $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
2. **Asociatividad**: $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
3. **Distributividad**: $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
4. **De Morgan**: $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
5. ...

# Recordatorio: Nuevas equivalencias lógicas

Para formulas $\alpha$ y $\beta$ en lógica de predicados:

1. $\neg\forall x.\, \alpha \;\equiv\; \exists x.\, \neg\alpha$.
2. $\neg\exists x.\, \alpha \;\equiv\; \forall x.\, \neg\alpha$.
3. $\forall x.\, (\alpha \wedge \beta) \;\equiv\; (\forall x.\, \alpha) \wedge (\forall x.\, \beta)$.
4. $\exists x.\, (\alpha \vee \beta) \;\equiv\; (\exists x.\, \alpha) \vee (\exists x.\, \beta)$.

# Outline

Tautologías

Consecuencia lógica

# Outline

# Tautología en lógica de predicados

## Definición

Sea $\alpha$ una oración en lógica de predicados (sin variables libres).

Decimos que $\alpha$ es una **tautología** si **para toda interpretación** $\mathcal{I}$ se tiene:

$$\mathcal{I} \models \alpha$$

¿cuáles fórmulas son tautologías?

- $\forall x. \big(P(x) \vee \neg P(x)\big)$ ✓
- $\forall x. \exists y. R(x, y)$ ✗

# Tautología en lógica de predicados

## Definición

Sea $\alpha$ una oración en lógica de predicados (sin variables libres).

Decimos que $\alpha$ es una **tautología** si **para toda interpretación** $\mathcal{I}$ se tiene:

$$\mathcal{I} \models \alpha$$

## Caso general

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula con variables libres $x_1, \ldots, x_n$.

Decimos que $\alpha$ es una **tautología** si
**para toda interpretación** $\mathcal{I}$ y **para todo** $a_1, \ldots, a_n$ **en** $\mathcal{I}(dom)$ se tiene:

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

# Tautología en lógica de predicados

## Caso general

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula con variables libres $x_1, \ldots, x_n$.

Decimos que $\alpha$ es una **tautología** si
**para toda interpretación** $\mathcal{I}$ y **para todo** $a_1, \ldots, a_n$ **en** $\mathcal{I}(dom)$ se tiene:

$$\mathcal{I} \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

### ¿cuáles fórmulas son tautologías?

- $(\forall x.\, P(x)) \to P(y)$ ✓
- $(\exists x.\, P(x)) \to P(y)$ ✗

Una tautología es una formula que será verdad
en **cualquier interpretación y dominio** que consideremos.

# Outline

# Consecuencia lógica en lógica de predicados

Para un conjunto $\Sigma$ de oraciones, $\mathcal{I}$ **satisface** $\Sigma$ (notación $\mathcal{I} \vDash \Sigma$) si para todo $\alpha \in \Sigma$, se cumple que $\mathcal{I} \vDash \alpha$.

## Definición

Una oración $\alpha$ es **consecuencia lógica** de un conjunto de oraciones $\Sigma$:

$$\Sigma \vDash \alpha$$

si **para toda interpretación** $\mathcal{I}$, si $\mathcal{I} \vDash \Sigma$ entonces $\mathcal{I} \vDash \alpha$.

## ¿és consecuencia lógica?

1. $\{ (\forall x.\, \alpha) \vee (\forall x.\, \beta) \} \overset{?}{\vDash} \forall x.\, (\alpha \vee \beta)$ ✓
2. $\{ (\exists x.\, \alpha) \wedge (\exists x.\, \beta) \} \overset{?}{\vDash} \exists x.\, (\alpha \wedge \beta)$ ✗

# ¿cuáles son consecuencias lógicas válidas?

1. $\{\ (\exists x.\,\alpha) \wedge (\exists x.\,\beta)\ \} \vDash \exists x.\,(\alpha \wedge \beta)$ ✗
2. $\{\ (\exists x.\,\alpha(x)) \wedge \beta\ \} \vDash \exists z.\,(\alpha(z) \wedge \beta)$, $z$ no aparece en $\alpha$ o $\beta$ ✓
3. $\{\ \forall x.\,\alpha\ \} \vDash \exists x.\,\alpha$ ✓
4. $\{\ \forall x.\,\exists y.\,R(x,y)\ \} \vDash \exists y.\,\forall x.\,R(x,y)$ ✗

Demuestre estas consecuencias lógicas

# Consecuencia lógica (caso general)

Para un conjunto $\Sigma$ de formulas, $\mathcal{I}$ **satisface** $\Sigma$ con $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ si para todo $\alpha \in \Sigma$, se cumple que $\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$.

Si $\mathcal{I}$ satisface $\Sigma$ con $a_1, \ldots, a_n$ escribiremos $\mathcal{I} \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$.

## Caso general

Una oración $\alpha$ es **consecuencia lógica** de un conjunto de oraciones $\Sigma$:

$$\Sigma \models \alpha$$

si **para toda interpretación** $\mathcal{I}$ y **para todo** $a_1, \ldots, a_n$ **en** $\mathcal{I}(dom)$ se tiene:

$$\text{si} \quad \mathcal{I} \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{entonces} \quad \mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

# Consecuencia lógica (caso general)

## Ejemplo

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Todos los hombres son mortales.}\\ \text{Sócrates es hombre.}\end{array}}{\text{Por lo tanto, Sócrates es mortal.}}$$

Esto lo podemos modelar con el vocabulario $\mathsf{H}(\cdot)$, $\mathsf{M}(\cdot)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x.\ \mathsf{H}(x) \to \mathsf{M}(x)\\ \mathsf{H}(\mathsf{y})\end{array}}{\mathsf{M}(\mathsf{y})}$$

¿se cumple la **consecuencia lógica**?

# Inferencia en lógica de predicados

Para hacer inferencia lógica es muy útil usar nombres de variables!

1. **Instanciación universal:**

$$\frac{\forall x.\, \alpha(x)}{\alpha(a) \qquad \text{para cualquier } a}$$

2. **Generalización universal:**

$$\frac{\alpha(a) \qquad \text{para cualquier } a}{\forall x.\, \alpha(x)}$$

# Inferencia en lógica de predicados

Para hacer inferencia lógica es muy útil usar nombres de variables!

3. **Instanciación existencial:**

$$\frac{\exists x.\, \alpha(x)}{\alpha(a) \qquad \text{para algún } a \text{ (nuevo)}}$$

4. **Generalización existencial:**

$$\frac{\alpha(a) \qquad \text{para algún } a}{\exists x.\, \alpha(x)}$$

# Inferencia en lógica de predicados

## Ejemplo

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Algún estudiante en la sala no estudio para el examen} \\ \text{Todos los estudiantes en la sala pasaron el examen}\end{array}}{\text{Algún estudiante pasó el examen y no estudio}}$$

¿cómo **modelamos** este problema?

$$\begin{array}{rcl} S(x) & := & x \text{ está en la sala.} \\ E(x) & := & x \text{ estudio para el examen.} \\ X(x) & := & x \text{ pasó el examen.} \end{array}$$

¿cómo queda la **consecuencia lógica**?

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x.\, S(x) \wedge \neg E(x) \\ \forall x.\, S(x) \rightarrow X(x)\end{array}}{\exists x.\, X(x) \wedge \neg E(x)}$$

# Inferencia en lógica de predicados

## Ejemplo

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x.\, S(x) \wedge \neg E(x) \\ \forall x.\, S(x) \rightarrow X(x)\end{array}}{\exists x.\, X(x) \wedge \neg E(x)}$$

¿cómo **inferimos** esta consecuencia lógica?

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\exists x.\, S(x) \wedge \neg E(x)$ | (Premisa) |
| 2. | $S(a) \wedge \neg E(a)$ | (Inst. existencial 1.) |
| 3. | $S(a)$ | (Simpl. conjuntiva 2.) |
| 4. | $\forall x.\, S(x) \rightarrow X(x)$ | (Premisa) |
| 5. | $S(a) \rightarrow X(a)$ | (Inst. universal 4.) |
| 6. | $X(a)$ | (Modus ponens 3. y 5.) |
| 7. | $\neg E(a)$ | (Simpl. conjuntiva 2.) |
| 8. | $X(a) \wedge \neg E(a)$ | (Conjunción 6. y 7.) |
| 9. | $\exists x.\, X(x) \wedge \neg E(x)$ | (Gen. existencial 8.) |