PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2022

PAUTA INTERROGACIÓN 2

Pregunta 1

Sea A un conjunto y $\sim \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Demuestre que el conjunto cuociente $A/{\sim}$ es una partición de A.

<u>Solución:</u>

Se demuestran las siguientes tres propiedades:

1. $\forall X \in A/\sim .\ X \neq \emptyset$

   Sea $X \in A/\sim$. Se quiere demostrar que $X \neq \emptyset$

   Por definición de $A/\sim$, sabemos que existe un $x \in A$ tal que $X = [x]_\sim$, entonces por la propiedad 1 de las clases de equivalencia ($\forall x \in A.\ x \in [x]_\sim$), se tiene que:

   $\Rightarrow x \in [x]_\sim$

   $\Rightarrow x \in X$

   Por lo tanto, $X \neq \emptyset$

   ** También, se puede justificar usando la definición de las clases de equivalencia, argumentando que la relación es relfeja

   Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

   (**1.5 Puntos**) Por desarrollo

   (**0.5 Puntos**) Por justificación

2. $\bigcup A/\sim = A$

   Sea $A/\sim = \{[x]_\sim \subseteq A \mid x \in A\}$. Utilizando esta definición, se debe demostrar que $\bigcup A/\sim \subseteq A$ y $A \subseteq \bigcup A/\sim$.

   - Por definición de $A/\sim$, se obtiene directamente que $\bigcup A/\sim \subseteq A$
   - $A \subseteq \bigcup A/\sim$. Sea $x \in A$.

     $\Rightarrow$ Por definición de $A/\sim$ se tiene que $[x]_\sim \in A/\sim$ y, por propiedad 1 de la definición de clases de equivalencia, se obtiene $x \in [x]_\sim$.

     $\Rightarrow x \in \bigcup A/\sim$

   Por lo tanto, $\bigcup A/\sim = A$.

   Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

($\mathbf{0.5}$ **Puntos**) Por mostrar que $\bigcup A/\sim \subseteq A$

(**1.5 Puntos**) Por mostrar que $A \subseteq \bigcup A/\sim$. (**1 Punto** sin justificación).

3. $\forall X, Y \in A/\sim . X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$ Sea $X, Y \in A/\sim$ tales que $X \neq Y$.
   - Sabemos que existen $x, y \in A$ tales que $[x]_\sim = X$ y $[y]_\sim = Y$.
   - Usando la propiedad 2 de clases de equivalencia se tiene que como $[x]_\sim \neq [y]_\sim$, entonces $x \not\sim y$.
   - Finalmente usando la propiedad 3 se obtiene $x \not\sim y \rightarrow [x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$.

   Por lo tanto concluimos que $X \cap Y = \emptyset$.

   Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

   (**0.5 Puntos**) Por llegar al primer item correcto.

   (**0.75 Puntos**) Por segundo item. (**0.5 Puntos** sin justificación).

   (**0.75 Puntos**) Por tercer item. (**0.5 Puntos** sin justificación).

Pregunta 2

Para $I \subseteq \mathbb{N}$, decimos que I es un *intervalo* si existen $a, b \in \mathbb{N}$ tal que:

$$I = \{c \in \{0, ..., n\} \mid a \leq c \leq b\}$$

y lo denotamos por $[a, b]$. Sea $\mathcal{X} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ y } a \leq b\}$, esto es, el conjunto de todos los intervalos en $\mathbb{N}$. Se define la relación $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ entre intervalos tal que $(I_1, I_2) \in R$ si, y solo si, para todo $a_1 \in I_1$ y para todo $a_2 \in I_2$ se cumple que $a_1 \leq a_2$. Por último, sea R^r la clausura refleja de R.

Pregunta 2.a

Demuestre que R^r es un orden parcial sobre $\mathcal{X}$.

Solución:

PD: R^r es orden parcial.
Para esto, es necesario demostrar que la relación es refleja, antisimetrica y transitiva.

- Refleja:
  Como $R^r = R \cup \{(I, I) \mid I \in X\}$, entonces por definición, para todo $I \in X$, $(I, I) \in R^r$, y por tanto es refleja.

- Antisimetrica:
  Suponga que $(I_1, I_2) \in R^r$ y $(I_2, I_1) \in R^r$.
  PD: $I_1 = I_2$
  Como $R^r = R \cup \{(I, I) \in X\}$, entonces tenemos dos posibles casos: (1) $(I_1, I_2) \in \{(I, I) \mid I \in X\}$ y $(I_2, I_1) \in \{(I, I) \mid I \in X\}$, o (2) $(I_1, I_2) \in R$ y $(I_2, I_1) \in R$.

  (1) Si $(I_1, I_2) \in \{(I, I) \mid I \in X\}$, entonces se cumple que $I_1 = I_2$.

  (2) Si $(I_1, I_2) \in R$ y $(I_2, I_1) \in R$: como I_1 e I_2 son intervalos, suponga que $I_1 = [a_1, b_1]$ y que $I_2 = [a_2, b_2]$, luego:
     - Como $(I_1, I_2) \in R$, entonces $b_1 \leq a_2$.
     - Como $(I_2, I_1) \in R$, entonces $b_2 \leq a_1$.

Por ende, si juntamos lo anterior, queda:

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_1$$

Por lo que se debe cumplir:

$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_1$$

Y por lo tanto:

$$I_1 = I_2 = [a, a]$$

- Transitiva:
  Suponga que $(I_1, I_2) \in R^r$ y que $(I_2, I_3) \in R^r$
  PD: $(I_1, I_3) \in R^r$

  (1) Si $I_1 = I_2$ o $I_2 = I_3$, entonces tenemos directamente que $(I_1, I_3) \in R^r$.

  (2) Si $I_1 \neq I_2$ y $I_2 \neq I_3$, entonces $(I_1, I_2) \in R$ y $(I_2, I_3) \in R$. Como I_1, I_2, y I_3 son intervalos, entonces sea $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$ y $I_3 = [a_3, b_3]$. Demostraremos que $(I_1, I_3) \in R$, y para eso tomemos cualquier $a \in I_1$ y $a' \in I_3$.
  PD: $a \leq a'$
  - Como $a \in I_1$ y $(I_1, I_2) \in R$, entonces $a \leq a_2$.
  - Como $a' \in I_3$ y $(I_2, I_3) \in R$, entonces $a_2 \leq a'$.

  Por lo que se cumple $a \leq a'$, y por ende se cumple que $(I_1, I_3) \in R$, lo que implica que $(I_1, I_3) \in R^r$.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**1 Punto**) Por la demostración de la propiedad refleja.

(**0.25 Puntos**) Por la demostración del caso (1) de la propiedad antisimetrica.

(**0.75 Puntos**) Por la demostración del caso (2) de la propiedad antisimetrica.

(**0.25 Puntos**) Por la demostración del caso (1) de la propiedad transitiva.

(**0.75 Puntos**) Por la demostración del caso (2) de la propiedad transitiva.

Pregunta 2.b

Demuestre que existe $S \subseteq \mathcal{X}$ con $S \neq \emptyset$ tal que S NO tiene elemento mínimo según R^r.

Solución:

Para responder esta pregunta, un ejemplo bastaba. Un ejemplo posible es $S = \{I_1, I_2\}$ con $I_1 = [1, 3]$ y $I_2 = [2, 4]$. Después había que demostrar que no tiene mínimo:

- Como $3 \in I_1$, $2 \in I_2$ y $2 < 3$, entonces $(I_1, I_2) \notin R^r$.
- Como $4 \in I_2$, $3 \in I_1$, y $3 < 4$, entonces $(I_2, I_1) \notin R^r$.

Entonces, como I_1 e I_2 son incomparables, S no tiene mínimo.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**2 Puntos**) Por encontrar un ejemplo de S.

(**1 Punto**) Por demostrar correctamente por qué se cumple que S no tiene mínimo.

Pregunta 3

Sea A un conjunto, y $S, T \subseteq A \times A$ ambas relaciones de equivalencia sobre A. Demuestre que:

$$S \circ T = T \circ S \quad \Leftrightarrow \quad S \circ T \text{ es una relación de equivalencia.}$$

Solución:

($\Rightarrow$) Suponiendo $S \circ T = T \circ S$, debemos demostrar que $S \circ T$ sea una relación de equivalencia:

- Refleja:
  Dado que S y T son reflejas, $\forall a \in A.(a,a) \in S \wedge (a,a) \in T$.
  Luego por la definición de $S \circ T$, $\forall a \in A.(a,a) \in S \circ T$, por lo que es refleja.
- Simétrica:
  Sea $(a,b) \in S \circ T$, como $S \circ T = T \circ S$, $(a,b) \in T \circ S$. Por lo tanto
  $$\exists z \in A.(a,z) \in T \wedge (z,b) \in S$$
  que puede ser reescrito como
  $$\exists z \in A.(z,b) \in S \wedge (a,z) \in T$$
  y luego, dado que las relaciones S y T son simétricas, tenemos que $(b,z) \in S \wedge (z,a) \in T$ y así $(b,a) \in S \circ T$
- Transitiva:
  Sea $(a,b),(b,c) \in S \circ T$ entonces:
  $$\exists z_1 \in A.(a,z_1) \in S \wedge (z_1,b) \in T$$
  $$\exists z_2 \in A.(b,z_2) \in S \wedge (z_2,c) \in T$$
  Y dado que $(z_1,z_2) \in T \circ S$ ya que $(z_1,b) \in T \wedge (b,z_2) \in S$, por lo tanto, como $S \circ T = T \circ S$ ocurre que:
  $$(z_1,z_2) \in S \circ T$$
  $$\exists z_3 \in A.(z_1,z_3) \in S \wedge (z_3,z_2) \in T$$
  Como S y T son transitivas
  $$(a,z_3) \in S \wedge (z_3,c) \in T$$
  y entonces $(a,c) \in S \circ T$

$\therefore S \circ T$ es una relación de equivalencia.

($\Leftarrow$) Suponiendo que $S \circ T$ es una relación de equivalencia, para demostrar que $S \circ T = T \circ S$, se busca probar que $S \circ T \subseteq T \circ S$ y $T \circ S \subseteq S \circ T$.

(1) En primer lugar, sea $(a,b) \in S \circ T$, por la simetría de $S \circ T$ se tiene que también $(b,a) \in S \circ T$. Luego, por la definición de composición se cumple que
$$\exists z \in A.(b,z) \in S \wedge (z,a) \in T$$
Ahora, dada la simetría de S y T se tiene que
$$\exists z \in A.(z,b) \in S \wedge (a,z) \in T$$
Además, por definición de composición dado que $\exists z \in A.(a,z) \in T \wedge (z,b) \in S$ entonces $(b,a) \in T \circ S$. Así queda demostrado que $S \subseteq T$.

(2) De manera análoga, sea $(a,b) \in T \circ S$, por definición de composición se tiene que

$$\exists z \in A.(a,z) \in T \land (z,b) \in S$$

Luego por simetría de S y T también se cumple que

$$\exists z \in A.(z,a) \in T \land (b,z) \in S$$

Finalmente dado que $\exists z \in A.(b,z) \in S \land (z,a) \in T$, se tiene que $(b,a) \in S \circ T$, y por simetría de $S \circ T$, también $(a,b) \in S \circ T$. Así queda demostrado que $T \circ S \subseteq S \circ T$.

Quedando demostrado que $S \circ T \subseteq T \circ S$ y $T \circ S \subseteq S \circ T$, se ha probado que $S \circ T = T \circ S$ dado que $S \circ T$ es una relación de equivalencia.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**0.5 Puntos**) Por concluir que $S \circ T$ es refleja.

(**1 Punto**) Por concluir que $S \circ T$ es simétrica.

(**1.5 Puntos**) Por concluir que $S \circ T$ es transitiva.

(**0.7 Puntos**) Por plantear y utilizar la simetría de $S \circ T$ para demostrar $S \circ T \subseteq T \circ S$.

(**0.7 Puntos**) Por plantear y utilizar la simetría de S y T para demostrar $S \circ T \subseteq T \circ S$.

(**0.1 Puntos**) Por concluir $S \circ T \subseteq T \circ S$.

(**0.7 Puntos**) Por plantear y utilizar la simetría de S y T para demostrar $T \circ S \subseteq S \circ T$.

(**0.7 Puntos**) Por plantear y utilizar la simetría de $S \circ T$ para demostrar $T \circ S \subseteq S \circ T$.

(**0.1 Puntos**) Por concluir $T \circ S \subseteq S \circ T$.

Pregunta 4

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ es inyectiva}\}$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}$ es no-numerable.

Solución:

Supongamos que F es numerable.
Entonces existe una forma de listar los elementos de F. Suponemos que ese orden es:

$$f_0, f_1, f_2, ...$$

con $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva para $i \geq 0$

Consideremos la siguiente tabla:

	0	1	2	3	...
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	
.					.
.					.
.					.

Definimos la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por:

$$g(i) = 1 + i + \sum_{k=0}^{i} f_k(k)$$

Para la demostración se debe probar que g es inyectiva:
Sean $i \neq j$ (SPDG $i < j$)

$$g(i) = 1 + i + \sum_{k=0}^{i} f_k(k)$$

$$g(j) = 1 + i + (j - i) + \sum_{k=0}^{i} f_k(k) + \sum_{k=i+1}^{j} f_k(k)$$

$$= g(i) + (j - i) + \sum_{k=i+1}^{j} f_k(k)$$

Como $j > i \to j - i > 0$ y $g(j) > g(i)$
Entonces $g(j) = g(i)$. Esto prueba que g es inyectiva.

Como g es inyectiva, debe aparecer en la lista de F, i.e en alguna fila de la tabla.
Supongamos que aparece en la fila m.

$$f_m(m) \neq g(m) = 1 + m + \sum_{k=0}^{m} f_k(k)$$

$$= \underbrace{1 + m + \sum_{k=0}^{m} f_k(k)}_{>0} + f_m(m)$$

Como $g(m) \neq f_m(m) \forall m \in \mathbb{N}$, g no aparece en la lista. Como es función inyectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, debiera aparecer, lo que es una contradicción.
$\therefore F$ no es numerable.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**1 Punto**) Por encontrar una secuencia cualquiera sobre las funciones, para demostrar la enumerabilidad

(**2 Puntos**) Por encontrar una función que no esté en la secuencia

(**2 Puntos**) Por demostrar que la función es inyectiva

(**1 Punto**) Por concluir que el conjunto no es numerable.