Lógica de predicados

Clase 05

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Lógica proposicional y sus limitaciones

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿cómo podemos modelar esta deducción en **lógica proposicional**?

Lógica proposicional y sus limitaciones

Todo número natural es par o impar

2 no es impar

Por lo tanto, 2 es par

¿cómo podemos modelar esta deducción en **lógica proposicional**?

¿qué le falta a la lógica proposicional?

- objetos (no solo proposiciones).
- predicados.
- cuantificadores: **para todo** ($\forall$) o **existe** ($\exists$).

Lógica de predicados

Lógica de predicados $\subseteq$ Lógica de primer orden

Lógica nos permitirá expresar propiedades de estructuras como:

- Números naturales, enteros, racionales, reales, ...
- Conjuntos, relaciones, ...
- Grafos, árboles, palabras, ...

Podremos definir propiedades como:

- Para todo hombre x, x es mortal.
- Para todo número n, existe un m tal que $n \geq m$.

Outline

Outline

Predicados

Ejemplos

1. x es par
2. $x \leq y$
3. $x + y = z$

¿cuál de estos ejemplos son **proposiciones**?

Ninguno!!

Pero, si reemplazamos las **variables** por objetos obtenemos **proposiciones**:

1. 2 es par, 3 es par, ...
2. $2 \leq 3$, $6 \leq 0$, $10 \leq 5$, ...
3. $10 + 5 = 15$, $3 + 8 = 1$, ...

Predicados

Definición

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta,
  cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

Ejemplos

- $P(x) := x$ es par
- $R(x) := x$ es primo
- $M(x) := x$ es mortal

Predicados

Definición

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cuál es evaluado.
- Para un predicado $P(x)$ y un valor a, la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $P(x) := x$ es par

$$P(1) = 0$$
$$P(4) = 1$$

x	$P(x)$
0	1 (True)
1	0 (False)
2	1 (True)
3	0 (False)
$\vdots$	$\vdots$

Predicados

Definición

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta,
  cuyo valor de verdad depende del objeto en el cuál es evaluado.

- Para un predicado $P(x)$ y un valor a,
  la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $P(x) \;:=\; x$ es par
- $R(y) \;:=\; y$ es primo

$$R(31) \;=\; 1$$

y	$R(y)$
0	0
1	0
2	1
3	1
4	0
$\vdots$	$\vdots$

Predicados

Definición

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta,
  cuyo valor de verdad depende del objeto en el cuál es evaluado.

- Para un predicado $P(x)$ y un valor a,
  la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $P(x) \ := \ x$ es par
- $R(y) \ := \ y$ es primo
- $M(z) \ := \ z$ es mortal

z	$M(z)$
Socrates	1
Zeus	0
Maradona	0
$\vdots$	$\vdots$

$$M(Socrates) = 1$$
$$M(Zeus) = 0$$

Predicados n-arios

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $O(x, y) \;:=\; x \leq y$

  $O(2,3) \;=\; 1$

x	y	$O(x,y)$
0	0	1
0	1	1
0	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0
1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Predicados n-arios

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $O(x, y) \ := \ x \leq y$
- $S(x, y, z) \ := \ x + y = z$

$$S(5, 10, 14) \ = \ 1$$

Predicados n-arios

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $O(x, y) \;:=\; x \leq y$
- $S(x, y, z) \;:=\; x + y = z$
- $Padre(x, y) \;:=\; x$ es padre de y

$$Padre(\text{Homero}, \text{Bart}) \;=\; 1$$

¿cuál es el valor de verdad de $O(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$? ¿$O(\text{Homero}, \text{Bart})$?

Predicados y dominio

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \dots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \dots, x_n)$ y valores $a_1, \dots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \dots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \dots, a_n$.
- Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Ejemplos depredicados y sus dominios

- $O(x, y) \ := \ x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$
- $S(x, y, z) \ := \ x + y = z$ sobre $\mathbb{Q}$
- $Padre(x, y) \ := \ x$ es padre de y sobre todas las personas

Predicados y dominio

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$,
  la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

- Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Notación

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$,
  diremos que $x_1, \ldots, x_n$ son las **variables libres** de P.

- Un predicado **0-ario** ("caso degenerado") es un predicado sin variables y tiene valor de verdad verdadero o falso sin importar la valuación.

Predicados compuestos (o formulas)

Definición

Un predicado es **compuesto** si es un predicado básico, o
la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) := \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) := O(x, y) \wedge O(y, z)$
- $P''(x, y) := (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x, y)$

x	$P(x)$	$P'(x)$
0	1	0
1	0	1
2	1	0
3	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Outline

Cuantificador universal

Sea $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D.

Definición

- Definimos el cuantificador **universal**:

  $$P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \forall x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$$

  donde x es la **variable cuantificada** y $y_1, \ldots, y_n$ son las **variables libres**.

- Para $b_1, \ldots, b_n$ en D, definimos la valuación:

  $$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

  si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador universal

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \; := \; \forall x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \; = \; 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

$$\begin{array}{cccc|c} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & P' \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{ccccc|c} x & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & P \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \\ a_2 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \\ a_3 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \\ a_4 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

¿cuándo ocurre que $P'(b_1, \ldots, b_n) \; = \; 0$?

Cuantificador universal (ejemplos)

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \;:=\; \forall x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \;=\; 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \forall x.\, O(x, y)$

$$O'(2) = \forall x.\, O(x, 2) \;=\; 0$$

x	y	$O(x, y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	2	1
1	2	1
2	2	1
3	2	0
4	2	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuantificador universal (ejemplos)

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \forall x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \forall x.\, O(x, y)$
- $O''(x) := \forall y.\, O(x, y)$

$$O''(0) = \forall y.\, O(0, y) \ = \ 1$$

x	y	$O(x,y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	1
0	1	1
0	2	1
0	3	1
0	4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuantificador universal (ejemplos)

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \forall x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \forall x.\, O(x, y)$
- $O''(x) := \forall y.\, O(x, y)$
- $P_0 := \forall x.\, P(x)$

x	$P(x)$
0	1
1	0
2	1
3	0
4	1
$\vdots$	$\vdots$

Cuantificador universal (ejemplos)

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \forall x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \forall x.\, O(x, y)$
- $O''(x) := \forall y.\, O(x, y)$
- $P_0 := \forall x.\, P(x)$
- $P_0' := \forall x. \big(P(x) \vee \neg P(x)\big)$

x	$P(x)$	$\neg P(x)$	$P(x) \vee \neg P(x)$
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	0	1	1
4	1	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuantificador existencial

Sea $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D.

Definición

- Definimos el cuantificador **existencial**:

$$P'(y_1, \ldots, y_n) \;:=\; \exists x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$$

  donde x es la **variable cuantificada** y $y_1, \ldots, y_n$ son las **variables libres**.

- Para $b_1, \ldots, b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \;=\; 1$$

  si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador existencial

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \exists x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

$$\begin{array}{cccc|c} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & P' \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{ccccc|c} x & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & P \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

¿cuándo ocurre que $P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 0$?

Cuantificador existencial (ejemplos)

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \;:=\; \exists x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \;=\; 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \exists x.\, O(x, y)$

  $$O'(2) = \exists x.\, O(x, 2) \;=\; 1$$

x	y	$O(x, y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	2	1
1	2	1
2	2	1
3	2	0
4	2	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuantificador existencial (ejemplos)

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \; := \; \exists x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \; = \; 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) :=$ x es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \exists x.\, O(x, y)$
- $O''(x) := \exists y.\, O(x, y)$

$$O''(2) = \exists y.\, O(2, y) \; = \; 1$$

x	y	$O(x, y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	0	0
2	1	0
2	2	1
2	3	1
2	4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuantificador existencial (ejemplos)

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \exists x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x,y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \exists x.\, O(x,y)$
- $O''(x) := \exists y.\, O(x,y)$
- $N(y) := \exists x.\, \neg P(x) \wedge O(x,y)$

$$N(0) \ = \ 0$$

x	y	$\neg P(x)$	$O(x,y)$	$\neg P(x) \wedge O(x,y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	1	0
1	0	1	0	0
2	0	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Interpretación de cuantificadores

Sea $P(x)$ un predicado compuesto sobre el dominio $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$.

Los cuantificadores **universal** y **existencial** se pueden **"interpretar"** como:

$$\forall x.\, P(x) \quad := \quad P(a_1) \,\wedge\, P(a_2) \,\wedge\, P(a_3) \,\wedge\, \ldots \quad = \quad \bigwedge_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

$$\exists x.\, P(x) \quad := \quad P(a_1) \,\vee\, P(a_2) \,\vee\, P(a_3) \,\vee\, \ldots \quad = \quad \bigvee_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

SOLO interpretar. **NO** lo usen en ejercicios.

Es posible combinar cuantificadores

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes formulas?

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $\forall x.\, \forall y.\, O(x, y)$
- $\exists x.\, \exists y.\, O(x, y)$
- $\forall x.\, \exists y.\, O(x, y)$
- $\exists x.\, \forall y.\, O(x, y)$
- $\forall x.\, P(x) \rightarrow \exists y.\, O(x, y)$

Predicados compuestos (con cuantificadores)

(re)Definición

Decimos que una predicado es **compuesto** (o también formula) si es:

- un predicado básico,
- la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuatificación **universal** ($\forall$) o **existencial** ($\exists$) de un pred. compuesto.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Predicados compuestos (mas ejemplos)

¿qué representan las siguientes formulas?

Para los predicados $x \leq y$, $x = y$, e $x + y = z$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $C(x) \ := \ x + x = x$
- $L(x, y) \ := \ x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y)$
- $S(x, y) \ := \ L(x, y) \wedge \neg\exists z. \, (L(x, z) \ \wedge \ L(z, y))$
- $U(x) \ := \ \exists y. \, S(y, x) \wedge C(y)$
- $I \ := \ \forall x. \, \exists y. \, \exists z. \ C(z) \wedge x + y = z$