Elementos extremos

Clase 14

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R$.
2. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R\ \wedge\ (b, a) \in R\big) \rightarrow\ a = b$.
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R\ \wedge\ (b, c) \in R\big) \rightarrow\ (a, c) \in R$.

Notación

Un orden parcial sobre A los denotaremos como $(\mathrm{A}, \preceq)$.

Recordatorio: Ordenes totales

Sea A un conjunto y $(A, \preceq)$ un orden parcial.

Definición

Decimos que un orden parcial $(A, \preceq)$ es un **orden total** si $\preceq$ cumple ser:

- **Conexo**: $\forall a, b \in A.\ \ (a, b) \in R \ \lor \ (b, a) \in R$.

Recordatorio: Ejemplos de ordenes parciales

Definición

Se define la relación $\leq_2$ entre pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(i_1, i_2) \leq_2 (j_1, j_2) \quad \text{si, y solo si,} \quad (i_1 \neq j_1 \rightarrow i_1 < j_1) \wedge (i_1 = j_1 \rightarrow i_2 \leq j_2)$$

¿qué propiedades cumple $\leq_2$?

1. ¿es $\leq_2$ **refleja**? ✓
2. ¿es $\leq_2$ **antisimétrica**? ✓
3. ¿es $\leq_2$ **transitiva**? ✓

Por lo tanto, $\leq_2$ es un **orden parcial**.

Recordatorio: Otro ejemplo de ordenes parciales

Definición

Sea Σ un alfabeto. Se definen las siguientes relaciones entre palabras en Σ^*:

$$u \leq_{\mathrm{p}} v \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w \in \Sigma^*.\; u \cdot w = v$$

$$u \leq_{\mathrm{s}} v \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w \in \Sigma^*.\; w \cdot u = v$$

$$u \leq_{\mathrm{i}} v \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*.\; w_1 \cdot u \cdot w_2 = v$$

¿qué propiedades cumple $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$?

1. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **refleja**? ✓
2. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **anti-simétrica**? ✓
3. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **transitiva**? ✓

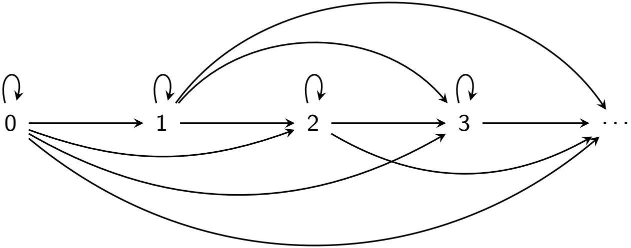
Por lo tanto, $\leq_p$, $\leq_s$ y $\leq_i$ son **ordenes parciales**.

Outline

Outline

¿cómo se ve un orden parcial?

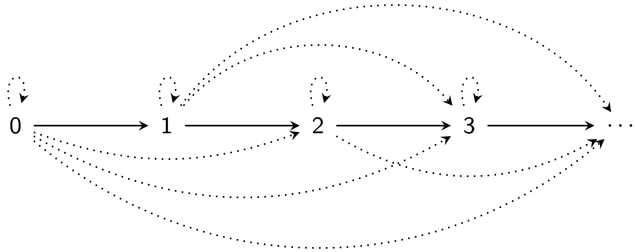
orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$



¿podemos **simplificar** la visualización de este grafo?

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$

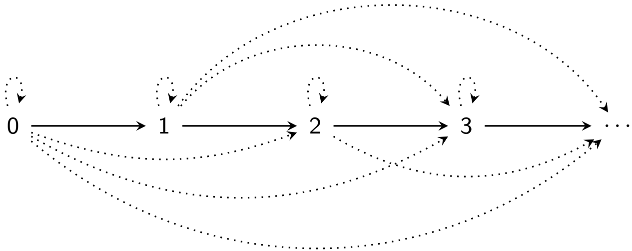


Para simplificar la visualización del grafo podemos:

- Remover **loops**.
- Remover aristas "**transitivas**"

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$



Definición

El **diagrama de Hasse** de $(A, \leq)$ es el diagrama del grafo de $\leq$ pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \leq$ se omite si existe un c tal que $(a, c) \in \leq$ y $(c, b) \in \leq$.

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

Diagrama de Hasse de $(\mathbb{N}, \leq)$

Definición

El **diagrama de Hasse** de $(A, \preceq)$ es el diagrama del grafo de $\preceq$ pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \preceq$ se omite si existe un c tal que $(a, c) \in \preceq$ y $(c, b) \in \preceq$.

¿cómo se ve el orden parcial $\subseteq$?

Diagrama de Hasse de $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

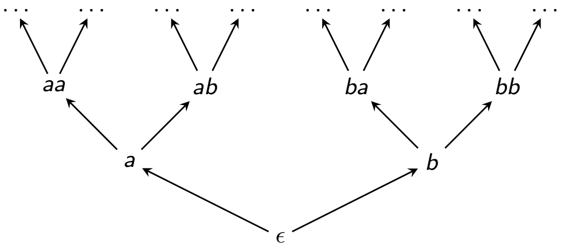
¿cómo se ve el orden lexicográfico $\leq_2$?

Diagrama de Hasse del orden lexicográfico $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_2)$

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) \arrow[u] & (1,4) \arrow[u] & (2,4) \arrow[u] & (3,4) \arrow[u] & (4,4) \arrow[u] & \cdots \\
(0,3) \arrow[u] & (1,3) \arrow[u] & (2,3) \arrow[u] & (3,3) \arrow[u] & (4,3) \arrow[u] & \cdots \\
(0,2) \arrow[u] & (1,2) \arrow[u] & (2,2) \arrow[u] & (3,2) \arrow[u] & (4,2) \arrow[u] & \cdots \\
(0,1) \arrow[u] & (1,1) \arrow[u] & (2,1) \arrow[u] & (3,1) \arrow[u] & (4,1) \arrow[u] & \cdots \\
(0,0) \arrow[u] & (1,0) \arrow[u] & (2,0) \arrow[u] & (3,0) \arrow[u] & (4,0) \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

¿cómo se ve el orden parcial $\leq_p$ sobre palabras?

Diagrama de Hasse de $(\Sigma^*, \leq_p)$



¿qué tienen de parecido todos estos grafos?

Outline

Cotas superiores

Definición

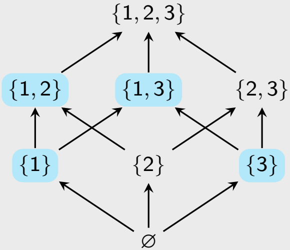
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$

¿cuál es una cota superior para S_1?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.



Cotas superiores

Definición

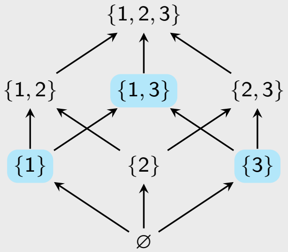
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$

¿cuál es una cota superior para S_2?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_2 = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$.



$c \in A$ es una cota superior si es **mayor o igual a todos los elementos** de S

Cotas superiores y maximales

Definición

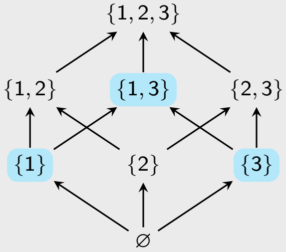
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$

¿cuál es un **maximal** para S_2?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_2 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$.



Cotas superiores y maximales

Definición

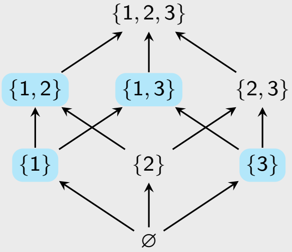
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$

¿cuál es un **maximal** para S_1?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.



$\hat{x} \in S$ es un maximal si **ningún elemento es mayor que** $\hat{x}$

Cotas superiores, maximales y máximo

Definición

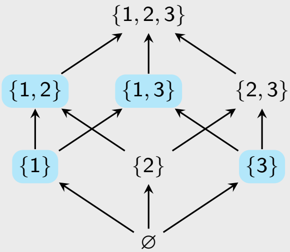
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$
- $x^{\uparrow} \in S$ es un **máximo** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq x^{\uparrow}$

¿cuál es un **máximo** para S_1?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.



Cotas superiores, maximales y máximo

Definición

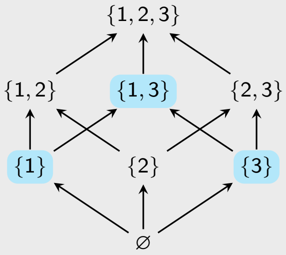
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$
- $x^{\uparrow} \in S$ es un **máximo** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq x^{\uparrow}$

¿cuál es un **máximo** para S_2?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_2 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$.



Cotas superiores, maximales y máximo

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$
- $x^{\uparrow} \in S$ es un **máximo** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq x^{\uparrow}$

$x^{\uparrow} \in S$ es un máximo si $x^{\uparrow}$ es **mayor o igual a cualquier elemento** en S

Cotas inferiores

Definición

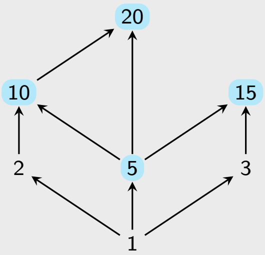
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$

¿cuál es una cota inferior para T_1?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_1 = \{5, 10, 15, 20\}$.



Cotas inferiores

Definición

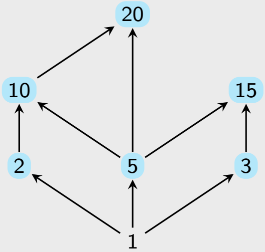
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$

¿cuál es una cota inferior para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.



Cotas inferiores y minimales

Definición

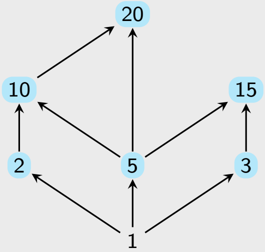
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$
- $\check{x} \in S$ es un **minimal** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq \check{x} \rightarrow \check{x} = y$

¿cuál es un **minimal** para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.



$\check{x} \in S$ es un minimal si **ningún elemento es menor que** $\check{x}$

Cotas inferiores, minimales y mínimo

Definición

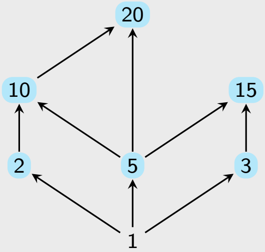
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$
- $\check{x} \in S$ es un **minimal** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq \check{x} \rightarrow \check{x} = y$
- $x^{\downarrow} \in S$ es un **mínimo** ssi $\forall y \in S.\ x^{\downarrow} \preceq y$

¿cuál es un **mínimo** para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.



Cotas inferiores, minimales y mínimo

Definición

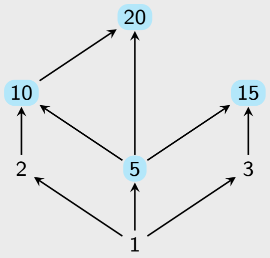
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$
- $\check{x} \in S$ es un **minimal** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq \check{x} \rightarrow \check{x} = y$
- $x^{\downarrow} \in S$ es un **mínimo** ssi $\forall y \in S.\ x^{\downarrow} \preceq y$

¿cuál es un **mínimo** para T_1?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_1 = \{5, 10, 15, 20\}$.



Cotas inferiores, minimales y mínimo

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$
- $\check{x} \in S$ es un **minimal** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq \check{x} \rightarrow \check{x} = y$
- $x^{\downarrow} \in S$ es un **mínimo** ssi $\forall y \in S.\ x^{\downarrow} \preceq y$

$x^{\downarrow} \in S$ es un mínimo si $x^{\downarrow}$ es **menor o igual a cualquier elemento** en S

Sobre minimales y mínimos

Preguntas

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

1. Si S tiene un elemento mínimo, entonces ¿es único?
2. ¿tiene S siempre un mínimo?
3. Si x es mínimo, entonces ¿es x minimal?
4. Si x es minimal, entonces ¿es x mínimo?
5. ¿tiene S siempre un elemento minimal?

Demuestre o de un contra-ejemplo.

... lo mismo es cierto sobre maximales / máximos.

Outline

Ínfimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

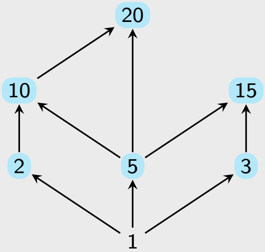
Decimos que $c^* \in A$ es un **ínfimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c de S se cumple que $c \preceq c^*$.

¿cuál es un ínfimo para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.



Ínfimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\emptyset$.

Definición

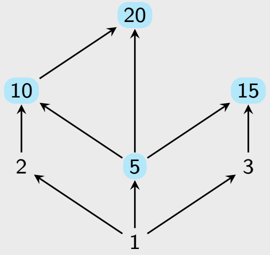
Decimos que $c^* \in A$ es un **ínfimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c de S se cumple que $c \preceq c^*$.

¿cuál es un ínfimo para T_1?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_1 = \{5, 10, 15, 20\}$.



Para cualquier $T \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$, ¿quién es el **ínfimo** de T según $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$?

Ínfimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **ínfimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c de S se cumple que $c \preceq c^*$.

c^* es la **mayor de las cotas inferiores**

Definición alternativa

Decimos que $c^* \in A$ es un **ínfimo** de S si c es un máximo del conjunto:

$$S_{\succeq} = \{ c \mid c \text{ es una cota inferior de } S \}$$

Supremo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

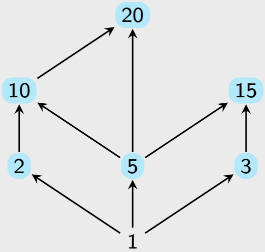
Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si:

1. c^* es una cota superior de S y
2. para toda cota superior c de S se cumple que $c^* \preceq c$.

¿cuál es un supremo para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.



Para cualquier $T \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$, ¿quién es el **supremo** de T según $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$?

Supremo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si:

1. c^* es una cota superior de S y
2. para toda cota superior c de S se cumple que $c^* \preceq c$.

c^* es el **menor de las cotas superiores**

Definición alternativa

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si c es un mínimo del conjunto:

$$S_{\preceq} = \left\{ c \mid c \text{ es una cota superior de } S \right\}$$

Sobre ínfimos y supremos

Preguntas

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

1. Si S tiene un ínfimo, entonces ¿es único?
2. Si x es el mínimo, ¿es x el ínfimo?
3. Si S NO tiene mínimo, ¿entonces tiene ínfimo?

Demuestre o de un contra-ejemplo.

...lo mismo es cierto sobre máximos / supremos.