NOMBRE: Jorge De Goyeneche SECCIÓN: 1

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1° Semestre 2022

# Tarea 3 – Respuesta Pregunta 1

1) $R \circ R$ es asimétrica si, y solo si, $R$ es asimétrica.

$(\longrightarrow)$
La definición de composición de un conjunto consigo mismo esta expresada como:

$$R \circ R = \{(x, z) \mid (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\}$$

Donde el conjunto resultante es el producto de la transitividad de tuplas pareadas del conjunto base.

Asumimos que $R \circ R$ es asimétrica.
PD: $R$ es asimétrica.
Por contradicción diremos que $R$ no es asimétrica.
Para que $R \circ R$ sea asimétrica, no puede poseer pares del mismo elemento como por ejemplo (a,a):

$$\forall a \in R \circ R.\ (a, a) \notin R \circ R$$

Esto nos dice que en $R$:

$$\nexists b \in R.\ (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$$

Donde $b$ puede ser el mismo elemento. Por lo tanto, como no existe un elemento intermediario que mediante la propiedad del producto transitivo de la composición genere nuestro par $(a, a)$, no existe ningún par de elementos iguales ni pares simétricos en $R$ lo que contradice nuestra proposición y por ende, $R$ debe ser asimétrica siempre que su composición lo sea.

$(\longleftarrow)$
Por lógica general la afirmación es falsa, por lo que buscaré un contra-ejemplo. Tenemos un conjunto A tal que $|A| = 4$. Con propósitos de trabajar con sus elementos definimos el conjunto como:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

A raiz del conjunto definimos una relación $R \subseteq A \times A$ como:

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$

Aquí vemos que la arista del grafo generado por la relación $(c, a)$ no posee su contraparte $(a, c)$, por lo que por definición de simetría, es asimétrica. Realizamos la composición de $R \circ R$:

$$R \circ R = \{(d, b), (c, a), (a, c), (b, d)\}$$

En la composición, se cumple que es simétrica, pese a que la relación base es asimétrica. Es por esta razón que la afirmación no se cumple en esta dirección.

2) $R \circ R$ es transitiva si, y solo si, $R$ es transitiva.

$(\longrightarrow)$
Por definición transitividad es:

$$\forall a, b, c \in A.\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \longrightarrow (a, c) \in R$$

Siguiendo la estructura de los contraejemplos definidos en el inciso 1, solo expresaré lo que defina.

$$\text{Conjunto } C = \{a, b, c\}$$

$$R \subseteq A \times A$$

$$R \circ R = \{(a, c)\}$$

$$R = \{(a, b), (b, c)\}$$

Tenemos que $R \circ R$ que definí arbitrariamente es transitiva, dado que al solamente tener una relación entre dos elementos del conjunto $C$, cumple la propiedad de transitividad trivialmente. Se evidencia también que la relación base de la composición $R$, no es transitiva, ya que posee dos elementos que detonan la necesidad de existencia del tercero $(a, c)$ que no pertenece al conjunto. Por esta razón la afirmación en esta dirección es falsa.

$(\longleftarrow)$
Tomando la definición de transitividad:

$$\forall a, b, c \in A.\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \longrightarrow (a, c) \in R$$

Asumiremos que $R$ es transitiva y por ende cumple esta definición.
PD: $R \circ R$ es transitiva.
Si tomamos un conjunto $R$ de $n$ elementos, es decir $|R| = n$, viendo el menor caso posible:

$$R = \{(x_1, x_1)\}$$

Donde, se cumple la definición al ser un par de elementos iguales, en la composición tenemos:

$$R \circ R = \{(x_1, x_1)\}$$

Para un par de elementos distintos, la trivialidad se cumplirá trivialmente, ya que no existirá un par complementario y la composición dará el conjunto vacío que también cumple la propiedad.
Ahora, para dos pares de elementos distintos tendremos:

$$R = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_1, x_3)\}$$

El cual es la expresión más pequeña de transitividad para más de dos elementos. La composición en este caso nos quedará:

$$R \circ R = \{(x_1, x_3)\}$$

La cual es transitiva por trivialidad. Vemos que en estos tres casos $R \circ R$ es transitiva por trivialidad.
Para cualquier otro caso, donde agreguemos mas tuplas que la cantidad de elementos del conjunto, tendremos que completar la transitividad del par $(x_1, x_3)$ resultante de la transitividad base y el agregado. Haciendo esto generaremos múltiples conexiones que nos darán pares iguales, como $(x_1, x_1)$. De esta manera siempre la composición $R \circ R$ será transitiva porque $R$ tendrá los elementos necesarios para reconstruirse a sí mismo en la composición generando $n^2$ tuplas, donde todos los elementos están conectados transitivamente. Por esta razón esta afirmación se cumple en esta dirección, ya que se cumple trivialmente por independencia de las tuplas resultantes o se genera el grafo completo.