NOMBRE: Jorge De Goyeneche SECCIÓN: 1

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1° Semestre 2022

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 2

Tenemos la relación $R \subseteq N \times N$ definida como $R = \{(A, B) \mid \ \min[(A \cup B) - (A \cap B)] \in A\}$.

1) Demuestre que R es refleja, anti-simétrica y conexa.

Refleja:
La definición de una relación refleja es:

$$\forall A \subseteq N.\ (A, A) \in R$$

Es decir, para todo elemento del dominio general, la tupla de él consigo mismo pertenece a la relación.

Demostramos de la siguiente manera:
Primero asumimos que se cumple que la relación R es refleja, por lo tanto se cumple que existe un elemento cualquiera tal que:

$$(A, A) \in R \tag{1}$$

Para que esto se cumpla, debemos utilizar la definición de la relación y su requerimiento de desigualdad:

$$(A, B) \in R \Longleftrightarrow A \neq B \rightarrow min[(A \cup B) - (A \cap B)] \in A \tag{2}$$

Como en este caso $A = A$, no se cumple el lado izquierdo de la condición ($\longrightarrow$), y trivialmente adquiere valor verdadero. Es decir, siempre que sean iguales los elementos de una tupla dentro de la relación esta existirá ya que trivializa la necesidad de utilizar el principio de pertenencia, y por ende se cumple la propiedad refleja para la relación R.

Anti-Simétrica:
La definición de una relación anti-simétrica es:

$$\forall A, B \subseteq N.\ (A, B) \in R \wedge (B, A) \in R \longrightarrow (A = B)$$

Es decir, para todo par de elementos del dominio, las tuplas con sus posiciones intercambiadas pertenecen a la relación ssi los dos elementos son iguales.

Demostramos de la siguiente manera:
Primero asumimos que se cumple que la relacion R es anti-simétrica y por lo tanto existen dos elementos cualquiera tal que:

$$(A, B) \in R \wedge (B, A) \in R \longrightarrow (A = B) \tag{1}$$

Utilizando la definición de la relación para verificar la pertenencia de las tuplas:

$$\begin{aligned} min[(A \cup B) - (A \cap B)] \in A \\ min[(B \cup A) - (B \cap A)] \in B \end{aligned} \tag{2}$$

Deben cumplirse ambos criterios de pertenencia. Por conmutatividad de conjuntos tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{aligned} \tag{3}$$

Reemplazando las igualdades en las operaciones de conjuntos dentro del criterio de pertenencia, se visualiza que ambos conjuntos resultantes de la resta de la intersección son equivalentes.

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) \tag{4}$$

Por lo que el mínimo encontrado será el mismo para cada conjunto. Para ejemplificar en este caso se representará el mínimo como m. Reemplazando en la defínción de anti-simetría:

$$m \in A \wedge m \in B \longrightarrow (A = B) \tag{5}$$

Si se cumple siempre esta expresión tenemos dos casos:

Caso 1) m no pertenece a uno de los conjuntos, y la expresión adquiere valor verdadero por la definición del operador ($\longrightarrow$).

Caso 2) m pertenece a ambos conjuntos y los conjuntos son iguales. Esto se da al analizar la pertenencia de m en ambos conjuntos. Si m pertenece a A y también a B se tendrá que $m \in A \cap B$. Sin embargo en la operación de pertenencia a $A \cup B$ se le restan todos los elementos de la intersección de los conjuntos, por ende m es restado. La única manera de que el mínimo efectivamente después de la resta de la intersección se encuentre en ambos conjuntos es si los dos son el mismo conjunto, donde nuevamente se trivializa la necesidad de utilizar el criterio de pertenencia como se ve en la propiedad refleja. Como la definición de Anti-Simetría se cumple por lógica y propiedades de conjuntos para cualquier par de conjuntos, la relación R sí es anti-simétrica.

Conexa:
La definición de una relación conexa es:

$$\forall A, B \subseteq N.\ (A, B) \in R \vee (B, A) \in R$$

Es decir, para todo par de elementos en el dominio, esta uno de los órdenes de la tupla en la relación.

Demostramos de la siguiente manera:
Primero asumimos que se cumple que la relación R es conexa y por lo tanto existen dos elementos cualquiera tal que:

$$(A, B) \in R \vee (B, A) \in R \tag{1}$$

Expresamos nuevamente el criterio de pertenencia:

$$min[(A \cup B) - (A \cap B)] \in A \vee min[(B \cup A) - (B \cap A)] \in B \tag{2}$$

Nuevamente mediante la conmutatividad de unión e intersección de conjuntos podemos realizar la siguiente igualdad:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = K \tag{3}$$

De esta manera:

$$min[K] \in A \vee min[K] \in B \tag{4}$$

Debido a que en K encontramos la conjunción de ambos conjuntos menos su intersección, el mínimo no puede estar en ambos conjuntos al mismo tiempo ya que hubiera sido eliminado, por lo tanto el mínimo que expresaremos como m, $m \in A \cup B$. Lo que significa que:

$$m \in A \vee m \in B \tag{5}$$

Una expresión que es análoga a la expresión (4), por lo tanto como m esta en la unión de los conjuntos y no en la intersección, siempre se encontrará en uno de ambos conjuntos y por ende se cumple la propiedad de conexidad en la relación R.

2) Demuestre que R es transitiva.

La definición de una relación transitiva es:

$$\forall A, B, C \subseteq N.\ (A, B) \in R \wedge (B, C) \in R \longrightarrow (A, C) \in R$$

Es decir, si existen dos tuplas de conjuntos donde el mismo elemento se encuentra en la primera y segunda posición de un par de tuplas, la tupla complementaria debe estar en la relación también.

Demostramos de la siguiente manera:
Primero asumimos que se cumple la definición, por lo que se debe cumplir:

$$\begin{aligned} (A, B) &\in R \\ (B, C) &\in R \\ (A, C) &\in R \end{aligned} \tag{1}$$

Para los primeros dos tendremos el criterio de pertenencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} min[A \cup B - A \cap B] &\in A \\ min[B \cup C - B \cap C] &\in B \end{aligned} \tag{2}$$

Analizando el significado de estos dos criterios nos dice que el valor mínimo entre los valores de el conjunto A y B fuera de su intersección se encuentra en A. Para el segundo criterio tenemos que el valor mínimo entre B y C fuera de su intersección está en B. Tomando K como el conjunto resultante del criterio de pertenencia para cualquier par de conjuntos:

$$\begin{aligned} \exists m_A \in K.\ m_A \in A \wedge m_A \notin B \wedge (\forall n \in K.\ m_A \leq n) \\ \exists m_B \in K.\ m_B \in B \wedge m_B \notin C \wedge (\forall n \in K.\ m_B \leq n) \\ \exists m_A \in K.\ m_A \in A \wedge m_A \notin C \wedge (\forall n \in K.\ m_A \leq n) \end{aligned} \tag{3}$$

El valor mínimo de su respectivo conjunto, pongámosle $m_{conjunto}$, cumple la siguiente desigualdad:

$$m_A < m_B \ \ y \ \ m_B < m_C \tag{4}$$

Si el valor m_A es menor a m_B y este simultáneamente es menor a m_C:

$$m_A < m_C \tag{5}$$

El unico caso en que no se podría hacer esta comparación es si $m_A \in A \cap C$. Si el mínimo en $A \cup B - A \cap B$ pertenece a $A \cap C$ encontraríamos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} m_A &< m_B \\ m_B &< m_C \end{aligned} \tag{6}$$

Donde $m_A = m_C$. Ya que el mínimo encontrado en A es menor a los valores de B, y si este mínimo se encuentra también en C, al hacer la comparación entre B y C el mínimo se encontrará en C, contradiciendo nuestra hipótesis, por lo que evidenciando esto tenemos que:

$$\begin{aligned} m_A &< m_B \\ m_B &< m_A \end{aligned} \tag{7}$$

Lo que nos entrega una contradicción matemática. Por lo tanto con esto se puede corroborar la posibilidad de la expresión (5) debido a que el mínimo entre A y B debe estar en A y debe encontrarse fuera de la intersección $A \cap C$ ya que si estuviera en ella, el mínimo entre B y C estaría en C ya que el mínimo de A es menor a los valores de B contradiciendo la afirmación.
Y, por lo tanto, $(A, C) \in R$.