Equivalencia lógica para lógica de predicados

Clase 06

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Predicados n-arios

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $O(x, y) \; := \; x \leq y$
- $S(x, y, z) \; := \; x + y = z$
- $Padre(x, y) \; := \; x$ es padre de y

$O(2, 3) \qquad S(5, 10, 15) \qquad S(4, 12, 1) \qquad Padre(\text{Homero}, \text{Bart})$

Recordatorio: Predicados y dominio

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

- Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Ejemplos depredicados y sus dominios

- $O(x, y) \;:=\; x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$

- $S(x, y, z) \;:=\; x + y = z$ sobre $\mathbb{Q}$

- $Padre(x, y) \;:=\; x$ es padre de y sobre todas las personas

Recordatorio: Predicados compuestos (o formulas)

Definición

Un predicado es **compuesto** si es un predicado básico, o
la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) \ := \ \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) \ := \ O(x, y) \wedge O(y, z)$
- $P''(x, y) \ := \ (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x, y)$

Recordatorio: Cuantificador universal

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \forall x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

y_1	y_2	$\cdots$	y_n	P'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_1	b_2	$\cdots$	b_n	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ssi

x	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	P
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_1	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	1
a_2	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	1
a_3	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	1
a_4	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

¿cuándo ocurre que $P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 0$?

Recordatorio: Cuantificador existencial

Definición

Para $b_1, \dots, b_n$ en D y $P'(y_1, \dots, y_n) \;:=\; \exists x.\, P(x, y_1, \dots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \dots, b_n) \;=\; 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

y_1	y_2	$\cdots$	y_n	P'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_1	b_2	$\cdots$	b_n	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ssi

x	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	P
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_1	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	0
a_2	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	1
a_3	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	1
a_4	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

¿cuándo ocurre que $P'(b_1, \dots, b_n) \;=\; 0$?

Recordatorio: Lógica de Predicados

(re)Definición

Decimos que una predicado es **compuesto** (o también formula) si es:

- un predicado básico,
- la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuatificación **universal** ($\forall$) o **existencial** ($\exists$) de un pred. compuesto.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Outline

Outline

¿de qué depende si una formula sea verdadera o falsa?

¿és la formula verdadera o falsa?

$$\alpha = \exists x.\, \forall y.\, x \leq y$$

- si el "dominio" donde se evalúa α son los naturales.
- si el "dominio" donde se evalúa α son los enteros.
- si el "dominio" donde se evalúa α son nombres de personas. (?)

Depende de la **interpretación** (significado) del dominio y el símbolo $\leq$.

Interpretaciones

Notación

Desde ahora, diremos que $P(x_1, \ldots, x_n)$ es un **símbolo de predicado**.

Definición

Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

1. un **dominio** $\mathcal{I}(dom)$ y
2. para cada símbolo P_i un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$.

Interpretaciones

Definición

Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

1. un **dominio** $\mathcal{I}(dom)$ y
2. para cada símbolo P_i un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$.

Ejemplos

Considere los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$.

- $$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}_1(dom) & := & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_1(P) & := & x \text{ es par} \\ \mathcal{I}_1(O) & := & x < y \end{array}$$
- $$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}_2(dom) & := & \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_2(P) & := & x > 0 \\ \mathcal{I}_2(O) & := & x + y = 0 \end{array}$$

Interpretaciones

Definición

Sea α una oración (sin variables libres) y $\mathcal{I}$ una interpretación de α.

Diremos que $\mathcal{I}$ **satisface** α y lo denotamos como:

$$\mathcal{I} \vDash \alpha$$

si α es **verdadero** al evaluar cada símbolo en α según $\mathcal{I}$.

Ejemplos

Para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{I}_1(dom) & := & \mathbb{N} \\
\mathcal{I}_1(P) & := & x \text{ es par} \\
\mathcal{I}_1(O) & := & x < y
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\mathcal{I}_2(dom) & := & \mathbb{Z} \\
\mathcal{I}_2(P) & := & x > 0 \\
\mathcal{I}_2(O) & := & x + y = 0
\end{array}$$

- $\mathcal{I}_1 \vDash \forall x. \exists y. P(y) \wedge O(x, y) \;:=\; \forall x. \exists y.\; y \text{ es par} \wedge x < y$ ✓
- $\mathcal{I}_2 \vDash \forall x. \exists y. P(y) \wedge O(x, y) \;:=\; \forall x. \exists y.\; y > 0 \wedge x + y = 0$ ✗

Interpretaciones

Definición (caso general)

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una formula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en α.

Diremos que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en α según $\mathcal{I}$.

Ejemplos

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{I}_1(dom) & := & \mathbb{N} \\
\mathcal{I}_1(P) & := & x \text{ es par} \\
\mathcal{I}_1(O) & := & x < y
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lcl}
\mathcal{I}_2(dom) & := & \mathbb{Z} \\
\mathcal{I}_2(P) & := & x > 0 \\
\mathcal{I}_2(O) & := & x + y = 0
\end{array}$$

$$\alpha(x) \ := \ \exists y.\, P(y) \wedge O(x, y)$$

- $\mathcal{I}_1 \ \vDash \ \alpha(1) \ := \ \exists y.\ y \text{ es par} \wedge 1 < y$ ✓
- $\mathcal{I}_2 \ \vDash \ \alpha(-1) \ := \ \exists y.\ y > 0 \wedge -1 + y = 0$ ✓

Interpretaciones

Definición (caso general)

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una formula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en α.

Diremos que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en α según $\mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I}$ **NO** **satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ lo anotaremos como:

$$\mathcal{I} \not\models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

Notar que: $\mathcal{I} \not\models \alpha$ si, y solo si, $\mathcal{I} \models \neg\alpha$

Outline

Equivalencia lógica en lógica de predicados

Definición

Sean α y β dos oraciones en lógica de predicados (no tienen variables libres). Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes**:

$$\alpha \equiv \beta$$

si **para toda interpretación** $\mathcal{I}$ se cumple:

$$\mathcal{I} \models \alpha \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{I} \models \beta$$

¿son lógicamente equivalentes?

- $(\forall x.\, P(x)) \rightarrow (\exists y.\, R(y)) \stackrel{?}{\equiv} (\neg \exists y.\, R(y)) \rightarrow (\neg \forall x.\, P(x))$ ✓
- $\forall y.\, \exists x.\, P(x, y) \stackrel{?}{\equiv} \exists x.\, \forall y.\, P(x, y)$ ✗

Equivalencia lógica en lógica de predicados

Definición

Sean α y β dos oraciones en lógica de predicados (no tienen variables libres).
Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes**:

$$\alpha \equiv \beta$$

si **para toda interpretación** $\mathcal{I}$ se cumple:

$$\mathcal{I} \models \alpha \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{I} \models \beta$$

Caso general

Sean $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ y $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ dos formulas en lógica de predicados.
Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes** ($\alpha \equiv \beta$),
si **para toda interpretación** $\mathcal{I}$ y **para todo** $a_1, \ldots, a_n$ **en** $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{I} \models \beta(a_1, \ldots, a_n)$$

Equivalencias lógicas sencillas

Todas las equivalencias de lógica proposicional
son equivalencias en lógica de predicados.

Ejemplos

Para fórmulas α, β y γ en lógica de predicados:

1. **Conmutatividad**: $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
2. **Asociatividad**: $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
3. **Distributividad**: $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
4. **De Morgan**: $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
5. ...

Demostración (ejercicio)

Nuevas equivalencias lógicas

Para formulas α y β en lógica de predicados:

1. $\neg\forall x.\, \alpha \;\equiv\; \exists x.\, \neg\alpha.$
2. $\neg\exists x.\, \alpha \;\equiv\; \forall x.\, \neg\alpha.$

Demostración: $\neg\forall x.\, \alpha \;\equiv\; \exists x.\, \neg\alpha$ $(\Rightarrow)$

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera, y suponga que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \neg\forall x.\, \alpha(x) \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{I} \not\models \forall x.\, \alpha(x) \\
&\Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \not\models \alpha(a) \\
&\Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \neg\alpha(a) \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists x.\, \neg\alpha(x)
\end{aligned}
$$

✓

Nuevas equivalencias lógicas

Para formulas α y β en lógica de predicados:

1. $\neg\forall x.\, \alpha \;\equiv\; \exists x.\, \neg\alpha.$
2. $\neg\exists x.\, \alpha \;\equiv\; \forall x.\, \neg\alpha.$

Demostración: $\neg\forall x.\, \alpha \;\equiv\; \exists x.\, \neg\alpha$ $(\Leftarrow)$

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera, y suponga que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \exists x.\, \neg\alpha(x) \quad & \Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \neg\alpha(a) \\
& \Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \not\models \alpha(a) \\
& \Rightarrow \quad \mathcal{I} \not\models \forall x.\, \alpha(x) \\
& \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \neg\forall x.\, \alpha(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Demuestre la otra equivalencia!

Nuevas equivalencias lógicas

Para formulas α y β en lógica de predicados:

3. $\forall x.\,(\alpha \wedge \beta) \;\equiv\; (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$.
4. $\exists x.\,(\alpha \vee \beta) \;\equiv\; (\exists x.\,\alpha) \vee (\exists x.\,\beta)$.

Demostración: $\exists x.\,(\alpha \vee \beta) \;\equiv\; (\exists x.\,\alpha) \vee (\exists x.\,\beta)$ $(\Rightarrow)$

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera, y suponga que:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{I} \models \exists x.\,(\alpha(x) \vee \beta(x)) & \Rightarrow & \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \alpha(a) \vee \beta(a) \\ & \Rightarrow & \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \alpha(a) \text{ (SPDG)} \\ & \Rightarrow & \mathcal{I} \models \exists x.\,\alpha(x) \\ & \Rightarrow & \mathcal{I} \models \exists x.\,\alpha(x) \vee \exists x.\,\beta(x) \quad \checkmark \end{array}$$

SPDG := *Hay dos (o más casos) y "Sin Perdida De Generalidad" demostramos un caso (el otro es análogo).*

Nuevas equivalencias lógicas

Para formulas α y β en lógica de predicados:

3. $\forall x. (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x. \alpha) \wedge (\forall x. \beta)$.
4. $\exists x. (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x. \alpha) \vee (\exists x. \beta)$.

Demostración: $\exists x. (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x. \alpha) \vee (\exists x. \beta)$ $(\Leftarrow)$

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera, y suponga que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \exists x. \alpha(x) \vee \exists x. \beta(x) \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists x. \alpha(x) \quad \text{(SPDG)} \\
&\Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \alpha(a) \\
&\Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \alpha(a) \vee \beta(a) \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists x. (\alpha(x) \vee \beta(x)) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Demuestre la otra equivalencia!

Nuevas equivalencias lógicas

¿es verdad que . . . ?

- $\forall x.\,(\alpha \vee \beta) \stackrel{?}{\equiv} (\forall x.\,\alpha) \vee (\forall x.\,\beta)$ ✕

  . . . en $\mathbb{N}$

  $\forall x.\,(x \text{ es par} \vee x \text{ es impar}) \not\equiv (\forall x.\, x \text{ es par}) \vee (\forall x.\, x \text{ es impar})$

- $\exists x.\,(\alpha \wedge \beta) \stackrel{?}{\equiv} (\exists x.\,\alpha) \wedge (\exists x.\,\beta)$ ✕

  . . . en $\mathbb{N}$

  $\exists x.\,(x \text{ es par} \wedge x \text{ es impar}) \not\equiv (\exists x.\, x \text{ es par}) \wedge (\exists x.\, x \text{ es impar})$