



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2022

TAREA 2

Publicación: Viernes 1 de abril.

Entrega: **Jueves 7 de abril hasta las 23:59 horas.**

Indicaciones

- Debe entregar una solución para cada pregunta (sin importar si esta en blanco).
- Cada solución debe estar escrita en \LaTeX . No se aceptarán tareas escritas a mano ni en otro sistema de composición de texto.
- Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre y sección.
- Debe entregar una copia digital por el buzón del curso, antes de la fecha/hora de entrega.
- **Se penalizará con 1 punto en la nota final de la tarea por cada regla que no se cumpla.**
- La tarea es individual.

Pregunta 1

Suponga un contexto simplificado de exportación e importación de minerales entre distintos países. Para modelar este problema considere los símbolos de predicado $O(x)$, $P(x)$, $C(x)$, $V(x, y)$, $E(x, y)$ y $x = y$. Además considere la siguiente interpretación \mathcal{I} :

$\mathcal{I}(\text{dom}) :=$ países.

$\mathcal{I}(O(x)) := x$ produce oro.

$\mathcal{I}(P(x)) := x$ produce plata.

$\mathcal{I}(C(x)) := x$ produce cobre.

$\mathcal{I}(V(x, y)) := x$ es vecino de y (esto es, comparten frontera terrestre).

$\mathcal{I}(E(x, y)) := x$ exporta todos los tipos de minerales que él produce a y .

$\mathcal{I}(x = y) := x$ es el mismo país que y .

En otras palabras, para algún país p del dominio se tiene que $\mathcal{I} \models O(p)$ si, y sólo si, p tiene yacimientos de oro y lo produce. Análogamente para los otros predicados. En el caso de la igualdad, este predicado siempre funciona como la igualdad y no tiene otra interpretación. Es decir, para todo p_1, p_2 en $\mathcal{I}(\text{dom})$ se tiene que $\mathcal{I} \models (p_1 = p_2)$ si, y solo si, p_1 y p_2 son exactamente el mismo objeto (país).

Defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando brevemente su correctitud.

1. *Todo país exporta uno o más minerales a algún vecino si, y solo si, produce al menos un mineral.*
2. *Existe al menos un país que exporta cobre a todos los países (excluyendo a él mismo) y que además importa oro y plata de algún vecino.*

3. *Existe más de un país que produce más de un mineral.*

Para la siguiente afirmación considere $k > 1$:

4. *Existe un conjunto de k países que forma un monopolio, esto es, existen k países distintos que cumplen las siguientes propiedades simultáneamente:*
- a) *Cada uno de los k países produce al menos un mineral.*
 - b) *El resto de los países (distinto a los k países) no produce ningún mineral.*
 - c) *Cada país importa mineral solo de estos k países y solo en caso que sea su vecino.*
 - d) *Para todo par de vecinos de un mismo país, ellos no producen el mismo mineral (en otras palabras, no hay competencia).*

Notar que en esta pregunta, para cada k debe entregar una fórmula distinta que dependerá de k .

Hint: Escriba esta fórmula para $k = 2$ y $k = 3$ y generalice después para un k cualquiera.

Pregunta 2

Para una interpretación \mathcal{I} y un elemento a de $\mathcal{I}(\text{dom})$, decimos que a es *definible* en lógica de predicados si existe una fórmula $\alpha(x)$ en lógica de predicados tal que $\mathcal{I} \models \alpha(a)$ y $\mathcal{I} \not\models \alpha(b)$ para todo b en $\mathcal{I}(\text{dom})$ con $a \neq b$.

1. Para un $N > 0$ cualquiera y un símbolo de predicado $<$, sea \mathcal{I}_N tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_N(\text{dom}) &:= \{0, \dots, N\} \\ \mathcal{I}_N(<) &:= x < y\end{aligned}$$

Demuestre que para todo $0 \leq k \leq N$ se tiene que k es definible en lógica de predicados.

2. A partir del ítem anterior, demuestre que existen infinitas fórmulas $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ que solo usan el símbolo de predicado $<$, tales que $\alpha_i \not\models \alpha_j$ para todo $i \neq j$.

Evaluación y puntajes de la tarea

Cada **ítem** de cada pregunta se evaluará con un puntaje de:

- 0 (respuesta incorrecta)
- 2 (con errores importantes)
- 3 (con errores menores)
- 4 (correcta).

Todas las preguntas tienen la misma ponderación en la nota final.