Relaciones de equivalencia

Clase 16

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Relaciones de equivalencia

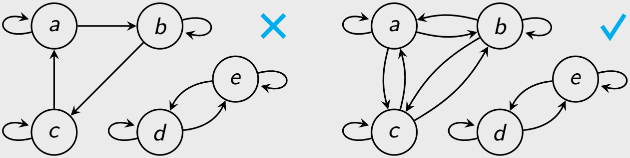
Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es una **relación de equivalencia** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R$
2. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big) \rightarrow (a, c) \in R$

Ejemplos



Relaciones de equivalencia

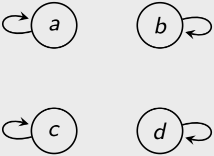
Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

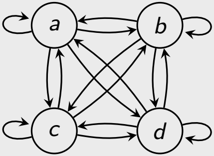
Decimos que R es una **relación de equivalencia** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R$
2. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big) \rightarrow (a, c) \in R$

Ejemplos



✓



✓

¿qué otras relaciones de equivalencia conocen?

Mas ejemplos de relaciones de equivalencia

Personas y cumpleaños: (P, C).

- $P \;=\; \{p \mid p \text{ es una persona}\}$
- $C \subseteq P \times P$ tal que:
  $(p_1, p_2) \in C$ si, y solo si, p_1 esta de **cumpleaños** el mismo día que p_2.

Rectas y paralelas: $(L, \|)$.

- $L \;=\; \{\ell \mid \ell \text{ es una linea en } \mathbb{R}^2\}$
- $\| \;\subseteq\; L \times L$ tal que: $(\ell_1, \ell_2) \;\in\; \|$ si, y solo si, ℓ_1 es **paralela** a ℓ_2.

Ejemplo de relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Se define la relación $\downarrow \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ como:

$$(a, b) \downarrow (c, d) \quad \text{si, y solo si} \quad a - b = c - d$$

1. ¿Refleja? ✓
2. ¿Simétrica? ✓
3. ¿Transitiva? ✓

¿qué representa la relación $\downarrow$?

Ejemplo de relaciones de equivalencia

Definición

Sea $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Para $a, b \in \mathbb{Z}$ decimos que a es **equivalente** a b **módulo** n:

$$a \equiv_n b \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists k \in \mathbb{Z}.\ n \cdot k = (a - b)$$

En otros palabras, $a \equiv_n b$ ssi $n \mid (a - b)$.

Ejemplos para $n = 4$

- ¿ $0 \equiv_4 8$? ✓ $\qquad 4 \cdot (-2) = (0 - 8)$
- ¿ $1 \equiv_4 8$? ✗ $\qquad \forall k \in \mathbb{Z}.\ 4 \cdot k \neq (1 - 8)$
- ¿ $9 \equiv_4 1$? ✓ $\qquad 4 \cdot 2 = (9 - 1)$
- ¿ $1 \equiv_4 -3$? ✓ $\qquad 4 \cdot 1 = (1 - (-3))$

Ejemplo de relaciones de equivalencia

Definición

Sea $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Para $a, b \in \mathbb{Z}$ decimos que a es **equivalente** a b **módulo** n:

$$\mathrm{a} \equiv_{\mathrm{n}} \mathrm{b} \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists k \in \mathbb{Z}.\ n \cdot k = (a - b)$$

En otros palabras, $\mathrm{a} \equiv_{\mathrm{n}} \mathrm{b}$ ssi $n \mid (a - b)$.

1. ¿Refleja? ✓
2. ¿Simétrica? ✓
3. ¿Transitiva? ✓

¿qué representa la relación $\equiv_n$?

Outline

Particiones

Sea A un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq 2^A$ (un conjunto de subconjuntos de A).

Definición

Decimos que $\mathcal{S}$ es una **partición** de A si:

1. todos los elementos de $\mathcal{S}$ son distinto de vacío.

$$\forall X \in \mathcal{S}.\ X \neq \varnothing$$

2. la unión de todos los elementos de $\mathcal{S}$ es igual a A.

$$\bigcup \mathcal{S} = A$$

3. todos los elementos de $\mathcal{S}$ son disjuntos de a pares.

$$\forall X, Y \in \mathcal{S}.\ X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \varnothing$$

Particiones (ejemplos)

Sea A un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq 2^A$ un conjunto de subconjuntos de A.

Definición

Decimos que $\mathcal{S}$ es una **partición** de A si:

1. $\forall X \in \mathcal{S}.\ X \neq \varnothing$
2. $\bigcup \mathcal{S} = A$
3. $\forall X, Y \in \mathcal{S}.\ X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \varnothing$

Ejemplo

Sea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, ¿cuáles son particiones?

- $\{\ \{1,3\},\{2,5\},\{4,6\}\ \}$ ✓
- $\{\ \{1,2,3\},\{4,5\},\{3,6\}\ \}$ ✗
- $\{\ \{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\ \}$ ✓
- $\{\ \{1,2,3\},\{4,5\}\ \}$ ✗

Particiones (ejemplos)

¿en qué se parecen las **particiones** a las **relaciones de equivalencia**?

Clases de equivalencia

Sea A un conjunto y $\simeq \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

Sea $x \in A$. Se define la **clase de equivalencia de x** según $\simeq$ como:

$$[x]_{\simeq} = \{y \in A \mid x \simeq y\}$$

$[x]_{\simeq}$ son todos los elementos de A que son "equivalentes" a x.

Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere la relación $\downarrow$, ¿cuáles son sus clases de equivalencia?

$$(a,b) \downarrow (c,d) \quad \text{si, y solo si} \quad a - b = c - d$$

$$\begin{array}{rcccl}
[(0,0)]_{\downarrow} & = & \{(c,d) \mid 0 = c - d\} & = & \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\} \\
[(1,0)]_{\downarrow} & = & \{(c,d) \mid 1 = c - d\} & = & \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),\ldots\} \\
[(2,0)]_{\downarrow} & = & \{(c,d) \mid 2 = c - d\} & = & \{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),\ldots\} \\
 & \vdots & & & \\
[(0,1)]_{\downarrow} & = & \{(c,d) \mid -1 = c - d\} & = & \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\} \\
[(0,2)]_{\downarrow} & = & \{(c,d) \mid -2 = c - d\} & = & \{(0,2),(1,3),(2,4),(3,5),\ldots\} \\
[(0,3)]_{\downarrow} & = & \{(c,d) \mid -3 = c - d\} & = & \{(0,3),(1,4),(2,5),(3,6),\ldots\} \\
 & \vdots & & &
\end{array}$$

Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere la relación $\downarrow$, ¿cuáles son sus clases de equivalencia?

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & \boxed{(4,4)} & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & \boxed{(3,3)} & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & \boxed{(2,2)} & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & \boxed{(1,1)} & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
\boxed{(0,0)} & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}
$$

Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere $\equiv_4$, ¿cuáles son sus clases de equivalencia?

$$a \equiv_4 b \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists k \in \mathbb{Z}.\ 4 \cdot k = (a - b)$$

$$\begin{array}{rclcl}
[0]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k = b\} & = & \{0, 4, 8, 12, \ldots, \text{-}4, \text{-}8, \text{-}12, \ldots\} \\
[1]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 1 = b\} & = & \{1, 5, 9, 13, \ldots, \text{-}3, \text{-}7, \text{-}11, \ldots\} \\
[2]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 2 = b\} & = & \{2, 6, 10, 14, \ldots, \text{-}2, \text{-}6, \text{-}10, \ldots\} \\
[3]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 3 = b\} & = & \{3, 7, 11, 15, \ldots, \text{-}1, \text{-}5, \text{-}9, \ldots\} \\
[4]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot (k + 1) = b\} & = & [0]_{\equiv_4} \\
[5]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot (k + 1) + 1 = b\} & = & [1]_{\equiv_4} \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere $\equiv_4$, ¿cuáles son sus clases de equivalencia?

$$\text{a} \equiv_4 \text{b} \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists k \in \mathbb{Z}.\ 4 \cdot k = (a - b)$$

$$\begin{array}{lclcl}
[0]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k = b\} & = & \{0, 4, 8, 12, \ldots, \text{-}4, \text{-}8, \text{-}12, \ldots\} \\
[1]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 1 = b\} & = & \{1, 5, 9, 13, \ldots, \text{-}3, \text{-}7, \text{-}11, \ldots\} \\
[2]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 2 = b\} & = & \{2, 6, 10, 14, \ldots, \text{-}2, \text{-}6, \text{-}10, \ldots\} \\
[3]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 3 = b\} & = & \{3, 7, 11, 15, \ldots, \text{-}1, \text{-}5, \text{-}9, \ldots\}
\end{array}$$

$\cdots$ -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 $\cdots$

Propiedades de las clases de equivalencia

Sea A un conjunto y $\simeq \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

Sea $x \in A$. Se define la **clase de equivalencia de x** según $\simeq$ como:

$$[x]_{\simeq} \; = \; \{y \in A \mid x \simeq y\}$$

Propiedades

1. $\forall x \in A. \;\; x \in [x]_{\simeq}$
2. $x \simeq z$ si, y solo si, $[x]_{\simeq} = [z]_{\simeq}$
3. si $x \not\simeq z$, entonces $[x]_{\simeq} \cap [z]_{\simeq} = \varnothing$

Ejercicio!

Conjunto cuociente

Sea A un conjunto y $\simeq \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

El **conjunto cuociente** $A/{\simeq}$ de A con respecto a $\simeq$ se define:

$$A/{\simeq} \; = \; \{ \, [x]_{\simeq} \mid x \in A \, \}$$

Conjunto cuociente (ejemplos)

Ejemplo

Considere la relación $\downarrow$ y sus clases de equivalencia:

$$
\begin{array}{rcl}
[(0,0)]_{\downarrow} & = & \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\} \\
[(1,0)]_{\downarrow} & = & \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),\ldots\} \\
[(2,0)]_{\downarrow} & = & \{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),\ldots\} \\
 & \vdots & \\
[(0,1)]_{\downarrow} & = & \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\} \\
[(0,2)]_{\downarrow} & = & \{(0,2),(1,3),(2,4),(3,5),\ldots\} \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Entonces:

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\downarrow \;=\; \{\ \ldots,\ [(0,2)],\ [(0,1)],\ [(0,0)],\ [(1,0)],\ [(2,0)],\ \ldots\ \}$$

Conjunto cuociente (ejemplos)

Ejemplo

Considere $\equiv_4$ y sus clases de equivalencia:

$$\begin{aligned}
[0]_{\equiv_4} &= \{0, 4, 8, 12, \ldots, \text{-}4, \text{-}8, \text{-}12, \ldots\} \\
[1]_{\equiv_4} &= \{1, 5, 9, 13, \ldots, \text{-}3, \text{-}7, \text{-}11, \ldots\} \\
[2]_{\equiv_4} &= \{2, 6, 10, 14, \ldots, \text{-}2, \text{-}6, \text{-}10, \ldots\} \\
[3]_{\equiv_4} &= \{3, 7, 11, 15, \ldots, \text{-}1, \text{-}5, \text{-}9, \ldots\}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathbb{Z}/ \equiv_4 \; = \; \{\ [0],\ [1],\ [2],\ [3]\ \}$$

Particiones vs clases de equivalencia

Sea A un conjunto y $\simeq \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

El **conjunto cuociente** $A/{\simeq}$ de A con respecto a $\simeq$ se define:

$$A/{\simeq} \; = \; \{ \, [x]_{\simeq} \mid x \in A \, \}$$

Teorema

El conjunto cuociente $A/{\simeq}$ es una **partición** de A.

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\simeq \; = \; \{ \; [x]_\simeq \subseteq A \; \mid \; x \in A \; \}$.

¿que debemos demostrar?

1. $\forall X \in A/\simeq . \;\; X \neq \varnothing$
2. $\bigcup A/\simeq \;\; = \;\; A$
3. $\forall X, Y \in A/\simeq . \;\; X \neq Y \;\; \rightarrow \;\; X \cap Y = \varnothing$

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\simeq \; = \; \{ \; [x]_{\simeq} \subseteq A \; \mid \; x \in A \; \}$.

1. $\forall X \in A/\simeq \, . \;\; X \neq \varnothing$

   Sea $X \in A/\simeq$.

   PD: $X \neq \varnothing$.

   Por definición de $A/\simeq$, sabemos que existe un $x \in A$ tal que $X = [x]_{\simeq}$.

   $\Rightarrow \;\; x \in [x]_{\simeq}$ (¿por qué?)

   $\Rightarrow \;\; x \in X$

   Por lo tanto, $X \neq \varnothing$.

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\simeq \; = \; \{ \; [x]_{\simeq} \subseteq A \; \mid \; x \in A \; \}$.

2. $\bigcup A/\simeq \; = \; A$

PD: $\bigcup A/\simeq \; \subseteq \; A$ y $A \; \subseteq \; \bigcup A/\simeq$.

- $\bigcup A/\simeq \; \subseteq \; A$ (por definición de $A/\simeq$)
- $A \; \subseteq \; \bigcup A/\simeq$

  Sea $x \in A$.

  $\Rightarrow \; [x]_{\simeq} \in A/\simeq$ y $x \in [x]_{\simeq}$

  $\Rightarrow \; x \in \bigcup A/\simeq$

Por lo tanto, $\bigcup A/\simeq \; = \; A$.

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/{\simeq} \; = \; \{ \; [x]_{\simeq} \subseteq A \; | \; x \in A \; \}$.

3. $\forall X, Y \in A/{\simeq} \; . \; X \neq Y \; \rightarrow \; X \cap Y = \varnothing$

Sea $X, Y \in A/{\simeq}$ tal que $X \neq Y$.

PD: $X \cap Y = \varnothing$.

Sea $x, y \in A$ tal que $[x]_{\simeq} = X$ y $[y]_{\simeq} = Y$.

Como $[x]_{\simeq} \neq [y]_{\simeq}$, entonces $x \not\simeq y$ (¿por qué?)

Como $x \not\simeq y$, entonces $[x]_{\simeq} \cap [y]_{\simeq} = \varnothing$ (¿por qué?)

Por lo tanto, concluimos que $X \cap Y = \varnothing$.

$\square$