

# Funciones

Clase 17

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

# Outline

Funciones

Tipos de funciones

Principio del palomar

# Outline

## Funciones

Tipos de funciones

Principio del palomar

# Funciones

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos.

## Definición

Una relación  $f \subseteq A \times B$  es una **función** si para todo elemento  $a \in A$  existe un único elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ .

1.  $\forall a \in A. \exists b \in B. (a, b) \in f.$
2.  $\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. ((a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f) \rightarrow b_1 = b_2.$

## Ejemplo

Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$ . ¿cuáles son funciones?

$$f_1 = \{ (3, c), (1, a), (2, b), (3, d) \} \quad \times$$



# Funciones

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos.

## Definición

Una relación  $f \subseteq A \times B$  es una **función** si para todo elemento  $a \in A$  existe un único elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ .

1.  $\forall a \in A. \exists b \in B. (a, b) \in f.$
2.  $\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. ((a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f) \rightarrow b_1 = b_2.$

## Ejemplo

Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$ . ¿cuáles son funciones?

$$f_2 = \{ (1, a), (3, b) \} \quad \times$$



# Funciones

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos.

## Definición

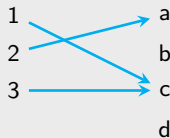
Una relación  $f \subseteq A \times B$  es una **función** si para todo elemento  $a \in A$  existe un único elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ .

1.  $\forall a \in A. \exists b \in B. (a, b) \in f.$
2.  $\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. ((a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f) \rightarrow b_1 = b_2.$

## Ejemplo

Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$ . ¿cuáles son funciones?

$$f_3 = \{ (1, c), (3, c), (2, a) \} \quad \checkmark$$



# Funciones

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos.

## Definición

Una relación  $f \subseteq A \times B$  es una **función** si para todo elemento  $a \in A$  existe un único elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ .

1.  $\forall a \in A. \exists b \in B. (a, b) \in f.$
2.  $\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. ((a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f) \rightarrow b_1 = b_2.$

Si  $f \subseteq A \times B$  es una **función**, entonces escribiremos:

- $f : A \rightarrow B$  para decir que  $f$  es una función de  $A$  a  $B$ .
- $f(a) = b$  para decir que  $(a, b) \in f$ .
  - “ $b$  es la imagen de  $a$  en  $f$ ”
  - “ $a$  es una preimagen de  $b$  en  $f$ ”

# Funciones

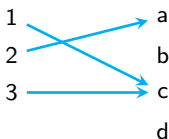
Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos.

## Definición

Una relación  $f \subseteq A \times B$  es una **función** si para todo elemento  $a \in A$  existe un único elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ .

1.  $\forall a \in A. \exists b \in B. (a, b) \in f.$
2.  $\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. ((a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f) \rightarrow b_1 = b_2.$

Una función **siempre** puede ser visto como una “**tabla**”:



A	B
1	c
2	a
3	c



# Funciones parciales

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos.

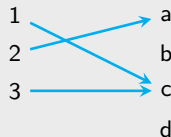
## Definición

Una relación  $f \subseteq A \times B$  es una **función parcial** si para todo elemento  $a \in A$ , si existe un elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ , entonces  $b$  es único.

$$\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. ((a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f) \rightarrow b_1 = b_2$$

## Ejemplo

Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$ . ¿cuáles son funciones parciales?



# Funciones parciales

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos.

## Definición

Una relación  $f \subseteq A \times B$  es una **función parcial** si para todo elemento  $a \in A$ , si existe un elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ , entonces  $b$  es único.

$$\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. ((a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f) \rightarrow b_1 = b_2$$

Si  $f \subseteq A \times B$  es una **función parcial**, entonces escribiremos:

- $f : A \rightarrow B$  para decir que  $f$  es una función parcial de  $A$  a  $B$ .  
(notar la diferencia en la flecha)
- $f(a) = b$  para decir que  $(a, b) \in f$ .

# Funciones parciales (mas definiciones)

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos y  $f : A \rightarrow B$  una función parcial.

## Definición

Se define el **dominio** e **imagen** de  $f$  como:

$$\text{dom}(f) = \pi_1(f) = \{ a \in A \mid \exists b \in B. (a, b) \in f \}.$$

$$\text{img}(f) = \pi_2(f) = \{ b \in B \mid \exists a \in A. (a, b) \in f \}.$$

## Ejemplo

Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$ .



$$\text{dom}(f) = \{1, 3\}$$

$$\text{img}(f) = \{a, b\}$$

# Funciones parciales (mas definiciones)

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos y  $f : A \rightarrow B$  una función parcial.

## Definición

Se define el **dominio** e **imagen** de  $f$  como:

$$\text{dom}(f) = \pi_1(f) = \{ a \in A \mid \exists b \in B. (a, b) \in f \}.$$

$$\text{img}(f) = \pi_2(f) = \{ b \in B \mid \exists a \in A. (a, b) \in f \}.$$

## Proposición

Sea  $f : A \rightarrow B$  una función parcial. Entonces:

$$f \text{ es una función} \quad \text{ssi} \quad \text{dom}(f) = A$$

# Ejemplos de funciones

## Ejemplos

Sea  $A = B = \mathbb{R}$ .

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \lfloor x + \sqrt{x} \rfloor$$

$$f_3(x) = 0$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

# Ejemplos de funciones

## Algunas preguntas

- ¿es necesario definir funciones de más “dimensiones”?
  - Por ejemplo:  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- Si  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ¿qué es  $\text{dom}(f)$ ?

Tanto el **dominio** como la **imagen** de una función pueden ser números, conjuntos, relaciones, grafos, palabras, ...

# Mas ejemplos de funciones

## Ejemplos

Las siguientes son funciones de  $A$  en  $2^A$ :

$$g_1 : A \rightarrow 2^A \quad g_1(a) = \{a\}$$

$$g_2 : A \rightarrow 2^A \quad g_2(a) = A - \{a\}$$

$$g_3 : A \rightarrow 2^A \quad g_3(a) = \emptyset$$

# Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea  $A$  un conjunto cualquiera.

## Definición

Una **secuencia**  $S$  sobre  $A$  es una función  $S : \mathbb{N} \rightarrow A$ .

## Ejemplo

■  $S_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \dots$$

■  $S_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

■  $S_3 : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 9, \dots$$



# Outline

Funciones

**Tipos de funciones**

Principio del palomar

# Tipos de funciones

Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos no vacíos.

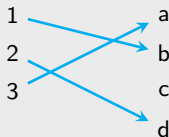
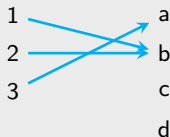
## Definiciones

Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice:

1. **inyectiva** si no existen dos elementos en  $A$  con la misma imagen.

$$\forall a_1, a_2 \in A. f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$$

¿cuál de las siguientes funciones son inyectivas?



Alternativamente:  $\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

# Tipos de funciones

Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos no vacíos.

## Definiciones

Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice:

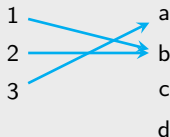
1. **inyectiva** si no existen dos elementos en  $A$  con la misma imagen.

$$\forall a_1, a_2 \in A. f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$$

2. **sobreyectiva** si todo elemento en  $B$  tienen una preimagen.

$$\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$$

¿cuál de las siguientes funciones son sobreyectivas?



# Tipos de funciones

Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos no vacíos.

## Definiciones

Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice:

1. **inyectiva** si no existen dos elementos en  $A$  con la misma imagen.

$$\forall a_1, a_2 \in A. f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$$

2. **sobreyectiva** si todo elemento en  $B$  tienen una preimagen.

$$\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$$

3. **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva **a la vez**.

## Notación

- inyectica  $\equiv$  **1-a-1**.
- sobreyectiva  $\equiv$  función **sobre**, **onto** o **epiyectiva**.

# Tipos de funciones

## Definiciones

1. **inyectiva**:  $\forall a_1, a_2 \in A. f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$ .
2. **sobreyectiva**:  $\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$ .
3. **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva **a la vez**.

¿cuál es el tipo de cada función?

- $f_1 : A \rightarrow 2^A$  tal que para todo  $a \in A$ :

$$f_1(a) = \{a\}$$

- $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para todo  $r \in \mathbb{R}$ :

$$f_2(r) = \lfloor r \rfloor$$

# Tipos de funciones

## Definiciones

1. **inyectiva**:  $\forall a_1, a_2 \in A. f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2.$
2. **sobreyectiva**:  $\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b.$
3. **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva **a la vez**.

¿cuál es el tipo de cada función?

■  $f_3 : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$  tal que para todo  $w = a_0 \dots a_n \in \{0,1\}^*$ :

$$f_3(w) = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

# Recordatorio: operaciones entre relaciones

Sea  $A$  un conjunto y  $R$ ,  $R_1$  y  $R_2$  relaciones sobre  $A$ .

## Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso:**  $R^{-1}$  son todos los pares  $(x, y)$  tal que  $(y, x) \in R$ .

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición:**  $R_1 \circ R_2$  son todos los elementos  $(x, y)$  tal que existe un  $z$  que cumple  $(x, z) \in R_1$  y  $(z, y) \in R_2$ .

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) \mid \exists z \in A. (x, z) \in R_1 \wedge (z, y) \in R_2\}$$

# Inverso y composición de funciones

- Dado que  $f : A \rightarrow B$  es una relación,

¿qué significa  $f^{-1}$ ?

... la relación inversa, no necesariamente una función.

- Dado que  $f_1 : A \rightarrow B$  y  $f_2 : B \rightarrow C$  son relaciones,

¿qué significa  $f_1 \circ f_2$ ?

... la composición de dos funciones.

## Proposición (ejercicio)

Sea  $f_1 : A \rightarrow B$  y  $f_2 : B \rightarrow C$ , entonces para todo  $a \in A$  y  $c \in C$ :

$$(a, c) \in f_1 \circ f_2 \quad \text{si, y solo si,} \quad f_2(f_1(a)) = c$$

OJO: anotaremos  $f_1 \circ f_2$  y NO  $f_2 \circ f_1$  (que es lo usual en cálculo).



# Caracterización de funciones

## Teorema

Sea  $f : A \rightarrow B$  una función. Entonces:

1.  $f$  es **inyectiva** si, y solo si,  $f^{-1}$  es una función parcial.
2.  $f$  es **sobreyectiva** si, y solo si,  $\text{img}(f) = B$ .

## Demostración (1. $\Rightarrow$ )

Sea  $f$  inyectiva.

Para todo  $a_1, a_2 \in A$ , si  $f(a_1) = f(a_2)$ , entonces  $a_1 = a_2$ .

**PD:**  $\forall b \in B. \forall a_1, a_2 \in A. ((b, a_1) \in f^{-1} \wedge (b, a_2) \in f^{-1}) \rightarrow a_1 = a_2$

Suponga  $(b, a_1) \in f^{-1}$  y  $(b, a_2) \in f^{-1}$ .

$$\Rightarrow f(a_1) = b \text{ y } f(a_2) = b \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

# Caracterización de funciones

## Teorema

Sea  $f : A \rightarrow B$  una función. Entonces:

1.  $f$  es **inyectiva** si, y solo si,  $f^{-1}$  es una función parcial.
2.  $f$  es **sobreyectiva** si, y solo si,  $\text{img}(f) = B$ .

### Demostración (1. $\Leftarrow$ )

Sea  $f^{-1}$  una función parcial.

$$\forall b \in B. \forall a_1, a_2 \in A. ((b, a_1) \in f^{-1} \wedge (b, a_2) \in f^{-1}) \rightarrow a_1 = a_2$$

**PD:** Para todo  $a_1, a_2 \in A$ , si  $f(a_1) = f(a_2)$ , entonces  $a_1 = a_2$ .

Supongamos  $f(a_1) = f(a_2) = b$  para algún  $b \in B$ .

$$\Rightarrow (b, a_1) \in f^{-1} \text{ y } (b, a_2) \in f^{-1} \Rightarrow a_1 = a_2.$$



# Caracterización de funciones

## Teorema

Sea  $f : A \rightarrow B$  una función. Entonces:

1.  $f$  es **inyectiva** si, y solo si,  $f^{-1}$  es una función parcial.
2.  $f$  es **sobreyectiva** si, y solo si,  $\text{img}(f) = B$ .

## Corolario

Sea  $f : A \rightarrow B$  una función. Entonces:

$f$  es **biyectiva** si, y solo si,  $f^{-1}$  es una función.

# Composición de funciones

## Teorema

Sea  $f_1 : A \rightarrow B$  y  $f_2 : B \rightarrow C$ . Entonces:

- Si  $f_1$  y  $f_2$  son **inyectivas**, entonces  $f_1 \circ f_2$  es **inyectiva**.
- Si  $f_1$  y  $f_2$  son **sobreyectivas**, entonces  $f_1 \circ f_2$  es **sobreyectiva**.

## Demostración

( ejercicio )

¿es verdadero el inverso de cada implicación?

# Outline

Funciones

Tipos de funciones

Principio del palomar

## ¿cómo demostrarían estas afirmaciones?

- En esta sala hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.
- En Santiago, hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.
- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto  $\{1, 2, \dots, 8\}$ , tiene que haber por lo menos un par que suma 9.
- Sea  $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$  y  $S \subseteq A$  tal que  $|S| = n + 1$ . Siempre hay dos números en  $S$  tal que uno divide al otro.

# Principio del palomar



## Principio

*"Si  $N$  palomas se distribuyen en  $M$  palomares y tengo mas palomas que palomares ( $N > M$ ), entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma"*

# Principio del palomar



Principio (en nuestros términos)

Si  $f : A \rightarrow B$  y  $|B| < |A|$ , entonces  $f$  **NO** puede ser **inyectiva**, esto es:

$$\exists a_1, a_2 \in A. \quad a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)$$

Principio muy útil y usado en matemáticas y computación!!



# Principio del palomar

## Ejemplos

- En esta sala hay dos alumnos que nacieron en el mismo año.

**Demostración:**      cantidad de alumnos  $> 100$   
                                 cantidad de años  $< 70$ .

- En Santiago, hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

**Demostración:**      cantidad de personas  $> 6.300.000$   
                                 cantidad de pelos en un cabeza  $< 300.000$

# Principio del palomar

## Ejemplos

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto  $\{1, 2, \dots, 8\}$ , tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

### **Demostración:**

Sea  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  los cinco números distintos seleccionados.

Palomas:  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

Palomares:  $\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$

Función:  $f(a_i) =$  el conjunto que contiene a  $a_i$ .

# Principio del palomar

## Ejemplos

- Sea  $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$  y  $S \subseteq A$  tal que  $|S| = n + 1$ .  
Siempre hay dos números en  $S$  tal que uno divide al otro.

### Demostración:

- Sea  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  los números seleccionados.
- Para todo  $a \in A$ , sea  $a = 2^k \cdot m$  donde  $m$  es un número impar.

Palomas:  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$

Palomares:  $\{ a \in \mathbb{N} \mid a \leq 2n - 1 \text{ y } a \text{ es impar} \}$

Función:  $F(a_i) = m$