Notación asintótica

Clase 20

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Notación $\mathcal{O}$

Outline

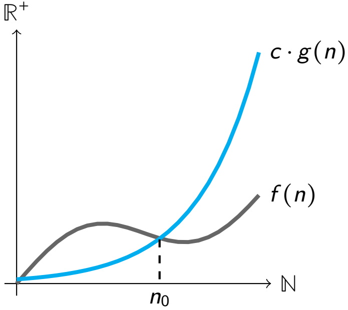
Notación $\mathcal{O}$

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función cualquiera.

Definición

Se define el conjunto $\mathcal{O}(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tal que **existe** $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$f(n) \ \leq \ c \cdot g(n)$$



Notación $\mathcal{O}$

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función cualquiera.

Definición

Se define el conjunto $\mathcal{O}(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$
tal que **existe** $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$f(n) \;\leq\; c \cdot g(n)$$

En notación lógica:

$$\mathcal{O}(g) \;=\; \{\; f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \;\mid\; \exists c > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\;\; f(n) \leq c \cdot g(n) \;\}$$

Si $f \in \mathcal{O}(g)$, entonces f **crece más lento o igual** que g.

Notación $\mathcal{O}$

Definición

$$\mathcal{O}(g) = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ \ f(n) \leq c \cdot g(n) \}$$

Ejemplo

Considere las funciones $f(x) = x^3 + 2x + 1$ y $g(x) = x^3$.

$$¿\ f \in \mathcal{O}(g)\ \ ?$$

Para $n \geq 1$ tenemos que:

$$n^3 + 2n + 1 \ \leq\ n^3 + 2n^3 + n^3 \ =\ 4n^3$$

Si tomamos $c = 4$ y $n_0 = 1$ entonces para todo $n \geq n_0$:

$$f(n) \ =\ n^3 + 2n + 1 \ \leq\ 4n^3 \ =\ c \cdot g(n)$$

Por lo tanto, $x^3 + 2x + 1 \in \mathcal{O}(x^3)$.

Notación $\mathcal{O}$

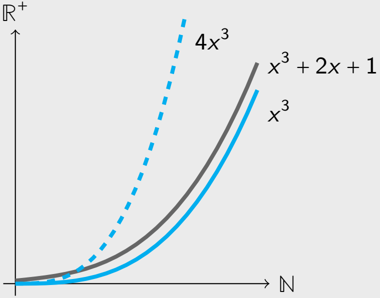
Definición

$$\mathcal{O}(g) = \{\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ \ f(n) \leq c \cdot g(n)\ \}$$

Ejemplo

Considere las funciones $f(x) = x^3 + 2x + 1$ y $g(x) = x^3$.

$$¿f \in \mathcal{O}(g)?$$



Notación $\mathcal{O}$

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función cualquiera.

Definición

Se define el conjunto $\mathcal{O}(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tal que **existe** $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Notación

Cuando $f \in \mathcal{O}(g)$ diremos alternativamente que:

- f es $\mathcal{O}(g)$ (se dice "f es O-grande de g").
- f es de **orden** g
- $f = \mathcal{O}(g)$ (ojo, esto es solo notación!)

Mas ejemplos de la notación $\mathcal{O}$

Definición

$$\mathcal{O}(g) \ = \ \{ \ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \ \mid \ \exists c > 0. \ \exists n_0 \in \mathbb{N}. \ \forall n \geq n_0. \ \ f(n) \leq c \cdot g(n) \ \}$$

Ejemplo

Considere las funciones $f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = x^k$.

$$¿f \in \mathcal{O}(g)?$$

Para $n \geq 1$ tenemos que:

$$a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0 \ \leq \ |a_k| n^k + \ldots + |a_1| n^k + |a_0| n^k \ = \ \left(\sum_{i=0}^{k} |a_i| \right) \cdot n^k$$

Si tomamos $c = \sum_{i=0}^{k} |a_i|$ y $n_0 = 1$ entonces para todo $n \geq n_0$:

$$f(n) \ = \ a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0 \ \leq \ c \cdot n^k \ = \ c \cdot g(n)$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{O}(g)$.

Notación $\mathcal{O}$ para polinomios

Teorema

1. Sea $f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio sobre $\mathbb{N}$, entonces:

$$f \in \mathcal{O}(x^k)$$

2. $x^{k+1} \notin \mathcal{O}(x^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración 2.

Por contradicción, suponga que existe $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n^{k+1} \;\leq\; c \cdot n^k \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

Si consideramos $n \geq \max\{c+1, n_0\}$, entonces:

$$\begin{aligned} n^{k+1} &= n \cdot n^k \\ &\geq (c+1) \cdot n^k \\ &= c \cdot n^k + n^k \;>\; c \cdot n^k \quad \times \end{aligned}$$

Mas ejemplos de la notación $\mathcal{O}$

Definición

$$\mathcal{O}(g) \;=\; \{\; f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+} \;\mid\; \exists c > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ \ f(n) \leq c \cdot g(n) \;\}$$

Ejemplo

Considere la función $f(n) = \log_a(n)$ y $g(n) = \log_b(n)$.

$$¿\log_a(n) \in \mathcal{O}(\log_b(n))?$$

Por propiedad de la función logaritmo sabemos:

$$\log_b(n) = \frac{\log_a(n)}{\log_a(b)}$$

Si consideramos $c = \log_a(b)$ y $n_0 = 1$, entonces:

$$\log_a(n) \;\leq\; c \cdot \log_b(n) \qquad \text{para todo } n \geq n_0$$

Por lo tanto, $\log_a(n) \in \mathcal{O}(\log_b(n))$.

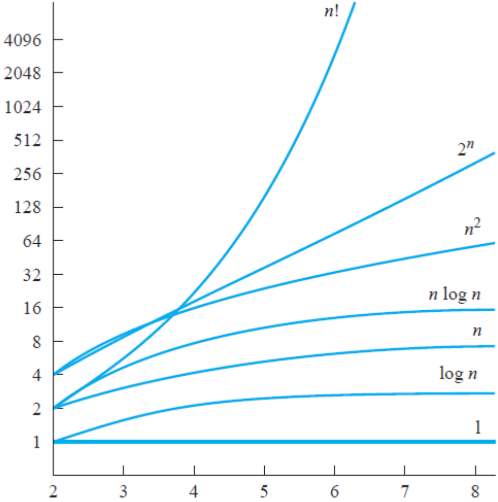
Logaritmos y exponenciales en notación $\mathcal{O}$

Teorema

1. Para todo $a, b > 1$, se tiene que $\log_a(n) \in \mathcal{O}(\log_b(n))$.
2. Para todo $a < b$ con $a, b \in \mathbb{N}$, se tiene que $a^n \in \mathcal{O}(b^n)$ y $b^n \notin \mathcal{O}(a^n)$.
3. Para todo $a \in \mathbb{N}$, se tiene que $a^n \in \mathcal{O}(n!)$ y $n! \notin \mathcal{O}(a^n)$.
4. $n! \in \mathcal{O}(2^{n \cdot \log(n)})$.

Demuestre 2., 3. y 4..

Jerarquía en notación $\mathcal{O}$



Jerarquía en notación $\mathcal{O}$

Notación	Nombre
$\mathcal{O}(1)$	Constante
$\mathcal{O}(\log n)$	Logarítmico
$\mathcal{O}(n)$	Lineal
$\mathcal{O}(n \log n)$	$n \log n$
$\mathcal{O}(n^2)$	Cuadrático
$\mathcal{O}(n^3)$	Cúbico
$\mathcal{O}(n^m)$	Polinomial
$\mathcal{O}(k^n)$	Exponencial
$\mathcal{O}(n!)$	Factorial

Algunas preguntas de la notación $\mathcal{O}$

Definición

$$\mathcal{O}(g) \;=\; \{\; f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+} \;\mid\; \exists c > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ \ f(n) \leq c \cdot g(n) \;\}$$

Preguntas

1. ¿Si $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in \mathcal{O}(g)$?
2. ¿Para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si $f \in \mathcal{O}(g)$ entonces $k \cdot f \in \mathcal{O}(g)$?
3. ¿Para todo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+}$ y $k \in \mathbb{N}$, si $f \in \mathcal{O}(g)$ entonces $f + k \in \mathcal{O}(g)$?
4. ¿Si $f \in \mathcal{O}(g)$ y $g \in \mathcal{O}(h)$, entonces $f \in \mathcal{O}(h)$?
5. ¿Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, entonces $f \in O(g)$?

Importante: esta última propiedad NO se puede usar en este curso.

Combinaciones de funciones en notación $\mathcal{O}$

Teorema

Si $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, entonces $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$.

Demostración

Suponga que:

- existe $C_1 > 0$, $n_0^1 \in \mathbb{N}$ tal que $f_1(n) \leq C_1 \cdot g_1(n)$ para todo $n \geq n_0^1$.
- existe $C_2 > 0$, $n_0^2 \in \mathbb{N}$ tal que $f_2(n) \leq C_2 \cdot g_2(n)$ para todo $n \geq n_0^2$.

Si $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$ y $C = C_1 + C_2$, entonces para todo $n \geq n_0$:

$$
\begin{aligned}
f_1(n) + f_2(n) &\leq C_1 \cdot g_1(n) + C_2 \cdot g_2(n) \\
&\leq C_1 \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\} + C_2 \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\} \\
&\leq (C_1 + C_2) \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\}
\end{aligned}
$$

Notar que $f_1 \in \mathcal{O}(g)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(g)$ implica $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(g)$

Combinaciones de funciones en notación $\mathcal{O}$

Teorema

Si $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, entonces $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$.

Demostración

Suponga que:

- existe $C_1 > 0$, $n_0^1 \in \mathbb{N}$ tal que $f_1(n) \leq C_1 \cdot g_1(n)$ para todo $n \geq n_0^1$.
- existe $C_2 > 0$, $n_0^2 \in \mathbb{N}$ tal que $f_2(n) \leq C_2 \cdot g_2(n)$ para todo $n \geq n_0^2$.

Si $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$ y $C = C_1 \cdot C_2$, entonces para todo $n \geq n_0$:

$$
\begin{aligned}
f_1(n) \cdot f_2(n) &\leq C_1 \cdot g_1(n) \cdot C_2 \cdot g_2(n) \\
&\leq (C_1 \cdot C_2) \cdot (g_1(n) \cdot g_2(n))
\end{aligned}
$$