

Lógica proposicional

Clase 01

IIC 1253 - Sección 1

Prof. Cristian Riveros

Razonamiento lógico

Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá una buena nota.

Pedro y Sofía estudiaron para la I1.

Por lo tanto, Pedro obtendrá una buena nota.

¿por qué es válido este razonamiento?

Razonamiento lógico

Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá una buena nota.

Pedro ☐ Sofía estudiaron para la I1.

Por lo tanto, Pedro obtendrá una buena nota.

¿y ahora? ¿és válido este razonamiento?

Razonamiento lógico

Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá una buena nota.

Pedro **no** estudió para la I1.

Por lo tanto, Pedro **no** obtendrá una buena nota.

¿és válido este razonamiento ?

Lógica

Lógica es el uso y estudio del razonamiento válido.

Wikipedia

¿cómo podemos decir cuál es un **razonamiento válido** y cuál no?

Lógica y razonamiento válido

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿és válido este razonamiento?

Lógica y razonamiento válido

Existen hombres mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿por qué este razonamiento **NO** es válido?

Lógica y razonamiento válido

Creo que todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿és este razonamiento válido o no?

Conclusión

La lógica y el razonamiento dependen del **lenguaje**.

Necesitamos un lenguaje formal para estudiar el razonamiento

Estudiaremos dos **lenguajes** o “lógicas”:

- Lógica proposicional.
- Lógica de predicados.

Ambas son lenguajes formales para entender una forma de “**razonamiento**”

¿por qué necesitamos estas lógicas?

Queremos usar este lenguaje en nuestro razonamiento matemático :

- Definición de **objetos** matemáticos:
conjunto, números naturales, números reales.
- Definición de **teorías** matemáticas:
teoría de conjuntos, teoría de los número naturales.
- Formalizar el concepto de **demostración**.

¿por qué necesitamos estas lógicas en computación?

Lógica es el **cálculo** de la computación!

1. Bases de datos.
2. Inteligencia artificial.
3. Ingeniería de software.
4. Teoría de la computación.
5. Criptografía.
6. Procesamiento de lenguaje natural.
7. ...

Outline

Lógica proposicional

Formulas y valuaciones

Outline

Lógica proposicional

Formulas y valuaciones

Lógica proposicional (LP)

Lenguaje para de estudiar el siguiente tipo de razonamiento:

Si Pedro estudia para la I3, entonces obtendrá una buena nota.

Pedro y Sofía estudiaron para la I3.

Por lo tanto, Pedro obtendrá una buena nota.

LP se preocupa del **argumento lógico** de la deducción no del significado.

Componentes básicas de LP: proposiciones

Definición

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

verdadera (1) o **falsa** (0).

Ejemplos

- | | |
|----------------------------|---|
| ■ Socrates es mortal. | 1 |
| ■ La luna es una estrella. | 0 |
| ■ El universo es infinito. | ? |

El valor 1 o 0 es independiente del **significado** de la afirmación.

Componentes básicas de LP: proposiciones

Definición

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

verdadera (1) o **falsa** (0).

¿cuáles son proposiciones y cuáles no?

■ cuatro más nueve es igual a once



■ $4 + 9 = 11$



■ $4 + 9 = 10$



■ $34 + 59$



■ ¿és el cielo azul?



Componentes básicas de LP: proposiciones

Definición

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

verdadera (1) o **falsa** (0).

- Usaremos letras **mayusculas** (como P , Q , R , ...) para denotar proposiciones básicas.
- Decimos que el valor 1 o 0 de una proposición P es su **valor de verdad**.

Nos interesa el valor de P y **NO** su significado.

Componentes básicas de LP: conectivos lógicos

LP usa **conectivos** muy sencillos para crear **proposiciones** más complejas.

Conectivos	Ejemplo	Significado
\wedge	$P \wedge Q$	"P y Q"
\vee	$P \vee Q$	"P o Q"
\neg	$\neg P$	"no P"
\rightarrow	$P \rightarrow Q$	"si P entonces Q"
\leftrightarrow	$P \leftrightarrow Q$	"P si, y solo si, Q"

Componentes básicas de LP: conectivos lógicos

LP usa **conectivos** muy sencillos para crear **proposiciones** más complejas.

Ejemplos

- \neg El universo es finito
- Pedro estudió para la I1 \wedge Sofía estudió para la I1
- Pedro estudió para la I1 \rightarrow Pedro obtuvo una buena nota

El **valor de verdad** de estas proposiciones depende del valor de verdad de las proposiciones **básicas**.

Conectivos lógicos: Conjunción (\wedge)

Definición

El valor de verdad de una **conjunción** $P \wedge Q$ es **verdadera** si P y Q son verdaderos, y falso de lo contrario.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

" $P \wedge Q$ es verdadero si P y Q son verdaderas, simultaneamente"

Conectivos lógicos: Disyunción (\vee)

Definición

El valor de verdad de una **disyunción** $P \vee Q$ es **verdadera** si P o Q son verdaderos, y falso de lo contrario.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

" $P \vee Q$ es falso si P y Q son falsas, simultaneamente"

Notar que $P \vee Q$ es un "o" **inclusivo**.

Conectivos lógicos: Negación (\neg)

Definición

El valor de verdad de una **negación** $\neg P$ es verdadera si P es falsa, y falsa si P es verdadera.

P	$\neg P$
0	1
1	0

Notar que \neg es un **operador unario**.

Proposición compuesta

Definición

Decimos que una proposición es **compuesta** si es una proposición básica, o la negación (\neg), conjunción (\wedge), o disyunción (\vee) de prop. compuestas.

Ejemplos

- $P \wedge (Q \vee R)$

- $\neg(R \vee (Q \wedge (\neg P)))$

Proposición compuesta

Definición

Decimos que una proposición es **compuesta** si es una proposición básica, o la negación (\neg), conjunción (\wedge), o disyunción (\vee) de prop. compuestas.

El **valor de verdad** de una proposición **compuesta** corresponde a la evaluación recursiva de sus conectivos lógicos y proposiciones básicas.

¿cuál es el valor de verdad de las proposiciones compuestas?

Si P es verdadero, Q es falso y R es verdadero , entonces:

- $P \wedge (Q \vee R)$

- $(P \wedge (\neg Q)) \vee (R \wedge (\neg P))$

Más conectivos lógicos: condicional (\rightarrow)

Definición

El valor de verdad de un **condicional** $P \rightarrow Q$ es **falso** si P es verdadero y Q es falso, y verdadero de lo contrario.

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

" $P \rightarrow Q$ es verdadero si P implica Q , esto es, si P es verdadero entonces necesariamente Q es verdadero"

Notar que si P es **falso**, entonces $P \rightarrow Q$ es verdadero **sin importar** el valor de Q .

Más conectivos lógicos: bicondicional (\leftrightarrow)

Definición

El valor de verdad de un **bicondicional** $P \leftrightarrow Q$ es **verdadero** si P y Q tienen el mismo valor de verdad, y falso de lo contrario.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$P \leftrightarrow Q$ es verdadero si,

P es verdadero si, y solo si, Q es verdadero"

Proposición compuesta (revisitado)

(re)Definición

Decimos que una proposición es **compuesta** si es una proposición básica, o la negación (\neg), conjunción (\wedge), disyunción (\vee), **condicional** (\rightarrow), **bicondicional** (\leftrightarrow) de proposiciones compuestas.

El **valor de verdad** de una proposición **compuesta** corresponde a la evaluación recursiva de sus conectivos lógicos y proposiciones básicas.

¿cuál es el valor de verdad de las proposiciones compuestas?

Si P es verdadero, Q es falso y R es verdadero , entonces:

- $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

- $P \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow R)$

Paréntesis y precedencia

Simplificación de formulas y parentésis

Desde ahora asumiremos el siguiente orden de precedencia entre operadores:

Conectivo	Precedencia
\neg	1
\wedge	2
\vee	3
\rightarrow	4
\leftrightarrow	5

Ejemplo

$$\blacksquare P \wedge \neg Q \vee R \wedge Q = ((P \wedge (\neg Q)) \vee (R \wedge Q))$$

$$\blacksquare P \wedge Q \rightarrow R \vee Q = ((P \wedge Q) \rightarrow (R \vee Q))$$

Outline

Lógica proposicional

Formulas y valuaciones

Variables y formulas

Definiciones

Una **variable proposicional** p es una variable que puede ser reemplazada por los valores 1 o 0.

Una **formula proposicional** α es una formula que puede ser:

1. una variable proposicional,
2. los valores 1 o 0, o
3. la negación (\neg), conjunción (\wedge), disyunción (\vee), condicional (\rightarrow), bicondicional (\leftrightarrow) de formulas proposicionales.

Ejemplos

$$\blacksquare \alpha(p, q, r) := p \wedge (q \rightarrow r)$$

$$\blacksquare \beta(p, q) := (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge 1)$$

Variables y formulas

Definiciones

Una **variable proposicional** p es una variable que puede ser reemplazada por los valores 1 o 0.

Una **formula proposicional** α es una formula que puede ser:

1. una variable proposicional,
2. los valores 1 o 0, o
3. la negación (\neg), conjunción (\wedge), disyunción (\vee), condicional (\rightarrow), bicondicional (\leftrightarrow) de formulas proposicionales.

Notación

- variables proposicionales las denotaremos por letras **minúsculas** como p, q, r, s , etc.
- formulas proposicionales las denotaremos por letras griegas junto con sus variables libres como $\alpha(p, q)$, $\beta(p, q, r)$, $\gamma(p_1, \dots, p_n)$, etc.

Valuaciones (o asignación de verdad)

Sea $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ una fórmula con variables p_1, \dots, p_n y v_1, \dots, v_n una secuencia de valores 1 o 0.

Definición

Una **valuación** (o asignación de verdad) $\alpha(v_1, \dots, v_n)$ es el **valor de verdad** que resulta al considerar α como una proposición y p_1, \dots, p_n como proposiciones atómicas con valores de verdad v_1, \dots, v_n , respectivamente.

Ejemplos

Si $\alpha(p, q, r) := p \wedge (q \rightarrow r)$ y $\beta(p, q) := (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge 1)$, entonces:

- $\alpha(1, 0, 1)$
- $\alpha(0, 0, 0)$
- $\beta(0, 1)$

Valuaciones (o asignación de verdad)

Sea $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ una fórmula con variables p_1, \dots, p_n y v_1, \dots, v_n una secuencia de valores 1 o 0.

Definición

Una **valuación** (o asignación de verdad) $\alpha(v_1, \dots, v_n)$ es el **valor de verdad** que resulta al considerar α como una proposición y p_1, \dots, p_n como proposiciones atómicas con valores de verdad v_1, \dots, v_n , respectivamente.

Interpretación de formulas y valuaciones

1. $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ define una **función** desde $\{1, 0\}^n$ en $\{1, 0\}$

$$\alpha : \{1, 0\}^n \rightarrow \{1, 0\}$$

2. $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ es una proposición compuesta, p_1, \dots, p_n son proposiciones básicas y las valuaciones son “**posibles mundos**”.

Tablas de verdad

Si vemos $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ como una **función**,
entonces podemos enumerar su “comportamiento” en una tabla!

Ejemplo

Para la formula $\alpha(p, q, r) := (\neg p \vee q) \wedge r$ tenemos que:

p	q	r	$(\neg p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Tablas de verdad

Si vemos $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ como una **función**,
entonces podemos enumerar su “comportamiento” en una tabla!

Ejemplo

Para la formula $\alpha(p, q, r) := (\neg p \vee q) \wedge r$ tenemos que:

p	q	r	$(\neg p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0

v_1	v_2	v_3	$\alpha(v_1, v_2, v_3)$

Esta tabla se conoce como la **tabla de verdad** de la formula $\alpha(p, q, r)$.

¿cuántas **filas** tiene la tabla de verdad de una formula $\alpha(p_1, \dots, p_n)$?