Teoría de conjuntos

Clase 09

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

¿qué es un conjunto?

Definición

Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos. Estos objetos son llamados **elementos del conjunto** y se dice que **pertenecen** a él.

Las siguiente nociones son **primitivas** y no requieren definición:

- Conjunto.
- Elemento del conjunto.
- Pertenencia ($\in$).

Definiremos la teoría de conjuntos a partir de estas **nociones primitivas**.

Nociones primitivas: predicado de pertenencia ($\in$)

Si S es un conjunto y a es un objeto:

$a \in S$	**significa**	a es un elemento de S
$a \notin S$	**significa**	a NO es un elemento de S

Un conjunto esta **completamente determinado** por sus elementos.

Definición

Para definir un conjunto S en particular,
es posible especificar sus elementos usando **llaves** como:

$$
\begin{aligned}
S &= \{1, 2, 3\} \\
S' &= \{0, 1, 2, \dots\}
\end{aligned}
$$

Nociones primitivas: conjunto y elementos de un conjunto

"En teoría de conjuntos, un objeto puede ser un conjunto."

Ejemplos

Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{1, 2\}\}$

- ¿es cierto que $2 \in A$?
- ¿es cierto que $2 \in B$?
- ¿es cierto que $A \in B$?

¿es cierto que si $A \in B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$?

Subconjunto ($\subseteq$)

Definición

Para dos conjuntos A y B, diremos que A es **subconjunto** de B si, y solo si:

$$\forall x. \quad x \in A \rightarrow x \in B$$

Si A es subconjunto de B escribiremos $A \subseteq B$.

Ejemplos

- ¿es cierto que $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$?
- ¿es cierto que $\{1, \{2\}\} \subseteq \{1, 2\}$?
- ¿es cierto que $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{1, 2\}\}$?

¿es cierto que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$?

Igualdad entre conjuntos ($=$)

Definición

Para dos conjuntos A y B, diremos que A es **igual** de B si, y solo si:

$$A \subseteq B \;\; \wedge \;\; B \subseteq A.$$

Si A es igual a B escribiremos $A = B$. En otras palabras:

$$A = B \qquad \text{si, y solo si,} \qquad \forall x.\; x \in A \leftrightarrow x \in B$$

Ejemplos

- ¿es cierto que $\{1,2\} = \{2,1\}$?
- ¿es cierto que $\{1,2\} = \{\{1,2\}\}$?
- ¿es cierto que $\{1,2\} = \{1,1,2\}$?

¿es cierto que $A = A$ para todo conjunto A?

Negación de subconjunto ($\nsubseteq$) e igualdad ($\neq$)

Escribiremos la negación de la relación de subconjunto e igualdad como:

$A \nsubseteq B$ si, y solo si, A **NO** es **subconjunto** de B

$A \neq B$ si, y solo si, A **NO** es **igual** a B

- ¿qué debe suceder para que se cumpla $A \nsubseteq B$?

$$A \nsubseteq B \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists x.\ x \in A \wedge x \notin B$$

- ¿qué debe suceder para que se cumpla $A \neq B$?

$$A \neq B \quad \text{si, y solo si,} \quad A \nsubseteq B \ \vee \ B \nsubseteq A$$

Conjunto vació

Definición (axioma)

Existe un conjunto $\varnothing$ tal que para todo x se cumple que $x \notin \varnothing$.

$$\forall x.\ \ x \notin \varnothing$$

El conjunto $\varnothing$ lo llamaremos el **conjunto vació**.

Proposición

Existe un único conjunto vacío.

Demostración

Por contradicción , suponga que existe un conjunto $\varnothing'$ tal que:

1. $\forall x.\ \ x \notin \varnothing'$ y
2. $\varnothing' \neq \varnothing$.

$$¿\ \ \varnothing' \subseteq \varnothing\ \ ?$$

$\square$

Conjunto vació

Definición (axioma)

Existe un conjunto $\varnothing$ tal que para todo x se cumple que $x \notin \varnothing$.

$$\forall x.\ x \notin \varnothing$$

El conjunto $\varnothing$ lo llamaremos el **conjunto vació**.

Proposición

Existe un único conjunto vacío.

¿es cierto que $\varnothing \in A$ para todo A? ¿$\varnothing \subseteq A$ para todo A?

Outline

¿cómo definir un conjunto?

1. Por **extensión**: listando todos sus elementos.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

   Para todo a: $a \in S \iff a$ **aparece** en la lista.

2. Por **comprensión**: una propiedad $\phi(x)$ en **algún lenguaje formal** (ej. lógica de predicados) que solo cumplen los elementos del conjunto.

$$S = \{\, x \mid \phi(x) \text{ es verdadero } \}$$

   Para todo a: $a \in S \iff a$ **satisface** $\phi(x)$. ($\phi(a)$ es verdadero)

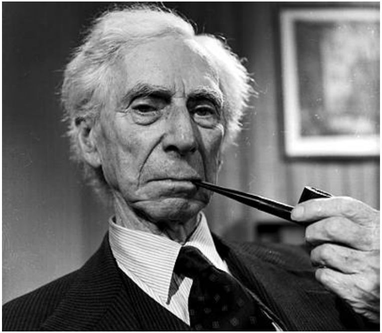
¿cómo definir un conjunto?

¿cuáles son definiciones válidas?

- $S_1 = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$
- $S_2 = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $S_3 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \land x < 0\}$
- $S_4 = \{A \mid A \text{ es un conjunto con más de tres elementos}\}$
- $S_5 = \{B \mid B \in B\}$

¿existen definiciones **inválidas** en teoría de conjuntos?

Paradoja de Russell (1901)



Bertrand Russell
(1872 - 1970)

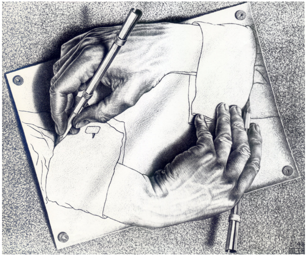
Paradoja de Russell (1901)

Defina el siguiente conjunto:

$$S^* = \{ B \mid B \notin B \}$$

¿es la definición de S^* **válida**?

¿ $S^* \in S^*$?



Paradoja del Barbero

Paradoja del Barbero

¿cuál es el problema de este tipo de definiciones?

Problema

"Considerar definiciones que se referencian a si mismas"

Moraleja: **NO** todas las definiciones son válidas en teoría de conjuntos.

. . . hay que tener cuidado, **pero** todas las definiciones que veamos en este curso serán válidas.

Outline

Operaciones sobre conjuntos

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre conjuntos:

- **Union**: $A \cup B$ son todos los elementos que están en A o en B.

$$A \cup B \;=\; \{\, x \;\mid\; x \in A \vee x \in B \,\}$$

- **Intersección**: $A \cap B$ todos los elem. que están en A y en B, simult..

$$A \cap B \;=\; \{\, x \;\mid\; x \in A \wedge x \in B \,\}$$

Operaciones sobre conjuntos

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre conjuntos:

- **Diferencia**: $A \setminus B$ son todos los elem. que están en A pero no en B.

$$A \setminus B \;=\; \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}$$

- **Complemento**: A^c son todos los elementos que NO están en A.

$$A^c \;=\; \{\, x \mid x \notin A \,\}$$

(**relativo** a un universo $\mathcal{U}$ tal que $A \subseteq \mathcal{U}$)

Operaciones sobre conjuntos

Ejemplos

Suponiendo que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$ con $\mathcal{U} = \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$:

- $A \cup B \; = \; \{1, 2, \{2\}\}$
- $A \cap B \; = \; \{1\}$
- $A \setminus B \; = \; \{2\}$
- $B \setminus A \; = \; \{\{2\}\}$
- $A^c \; = \; \{\{1\}, \{2\}\}$

Propiedades de las operaciones

Propiedades

Para conjuntos A, B y C, con un universo $\mathcal{U}$.

1. **Asociatividad**:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

2. **Conmutatividad**:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

Demostración: ejercicio!

Propiedades de las operaciones

Propiedades

Para conjuntos A, B y C, con un universo $\mathcal{U}$.

3. **Idempotencia**:

$$\begin{aligned} A \cup A &= A \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

4. **Absorción**:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= A \\ A \cap (A \cup B) &= A \end{aligned}$$

Demostración: ejercicio!

Propiedades de las operaciones

Propiedades

Para conjuntos A, B y C, con un universo $\mathcal{U}$.

5. **Distributividad**:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

6. **De Morgan**:

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{aligned}$$

Demostraremos **Distributividad** (**De Morgan** es ejercicio)

Propiedades de las operaciones

Demostración: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Vamos a demostrar: $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(la otra dirección es similar)

Sea $x \in A \cup (B \cap C)$.

Por demostrar: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \;\vee\; x \in B \cap C && \text{(por def.)} \\
&\Rightarrow \quad x \in A \;\vee\; (x \in B \wedge x \in C) && \text{(por def.)} \\
&\Rightarrow \quad (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) && \text{(por distrib.)} \\
&\Rightarrow \quad (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) && \text{(por def.)} \\
&\Rightarrow \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) && \text{(por def.)}
\end{aligned}
$$

Todas las propiedades son consecuencia de una **equivalencia lógica**!

Propiedades de las operaciones

Propiedades

Para conjuntos A, B y C, con un universo $\mathcal{U}$.

7. **Elemento neutro**:

$$\begin{aligned} A \cup \varnothing &= A \\ A \cap \mathcal{U} &= A \end{aligned}$$

8. **Dominación**:

$$\begin{aligned} A \cup \mathcal{U} &= \mathcal{U} \\ A \cap \varnothing &= \varnothing \end{aligned}$$

9. **Elemento inverso**:

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= \mathcal{U} \\ A \cap A^c &= \varnothing \end{aligned}$$

Demostración: ejercicio!

Paréntesis y precedencia

Simplificación de operadores de conjuntos y parentésis

Desde ahora asumiremos el siguiente orden de precedencia entre operadores:

Operadores	**Precedencia**
$\cdot^c$	1
$\cap$	2
$\cup$	3

Ejemplo

$$P \cap Q^c \cup R \cap Q \quad = \quad ((P \cap (Q)^c) \cup (R \cap Q))$$

Operaciones generalizadas

Definición

Para un conjunto $\mathcal{S}$, se definen las siguientes operaciones :

- **Union generalizada**: $\bigcup \mathcal{S}$ son todos los elementos que pertenecen a algún elemento de $\mathcal{S}$.

$$\bigcup \mathcal{S} \;=\; \{x \mid \exists A.\; A \in \mathcal{S} \wedge x \in A\}$$

- **Intersección generalizada**: $\bigcap \mathcal{S}$ son todos los elementos que pertenecen a todos los elementos en $\mathcal{S}$, simultaneamente.

$$\bigcap \mathcal{S} \;=\; \{x \mid \forall A.\; A \in \mathcal{S} \rightarrow x \in A\}$$

Operaciones generalizadas

Definición (alternativa)

Para un conjunto $\mathcal{S}$, se definen las siguientes operaciones:

- **Union generalizada**:

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

- **Intersección generalizada**:

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

Operaciones generalizadas

Ejemplos

Suponiendo que $\mathcal{S} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\}\}$:

- $\bigcup \mathcal{S} \; = \; \{1,2,3,4\}$
- $\bigcap \mathcal{S} \; = \; \{2\}$

¿cuál es el conjunto $\bigcup \varnothing$? ¿ $\bigcap \varnothing$?

Operaciones generalizadas

Caso especial

Si $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, se definen las siguientes operaciones:

- **Union generalizada** (conjunto indexado):

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

- **Intersección generalizada** (conjunto indexado)

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$$

Outline

Conjunto potencia

Definición

Para un conjunto A, se define el **conjunto potencia** $\mathcal{P}(A)$ de todos los subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Ejemplo

Suponga que $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces:

- ¿es cierto que $2 \in \mathcal{P}(A)$?
- ¿es cierto que $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$?
- ¿es cierto que $A \in \mathcal{P}(A)$?
- ¿es cierto que $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$?

¿cuál es el resultado de $\bigcup \mathcal{P}(A)$? ¿o de $\bigcap \mathcal{P}(A)$?

Conjunto potencia

Ejemplo 1

Para el conjunto $\{1, 2\}$, ¿cuáles son todos los elementos de $\mathcal{P}(\{1, 2\})$?

$\mathcal{P}(\{1, 2\})$

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2\} & \\
\{1\} \arrow[ur, "\subseteq"] & & \{2\} \arrow[ul, "\subseteq"'] \\
 & \varnothing \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}$$

(¿qué flecha estaría faltando?)

Conjunto potencia

Ejemplo 2

Para el conjunto $\{1,2,3\}$, ¿cuáles son todos los elementos de $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$?

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\{1,2,3\}) & & \{1,2,3\} & \\
& \{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
& \{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
& & \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Cardinalidad de un conjunto

Definición

Para todo conjunto A, se define el valor:

$$|A| = \text{número de elementos distintos en } A.$$

Ejemplo

- $|\{1,2\}| = 2$
- $|\{1,1,2\}| = 2$
- $|\{1,2,3,\ldots\}| = \infty$

¿para cuál conjunto se tiene que $|A| = 0$?

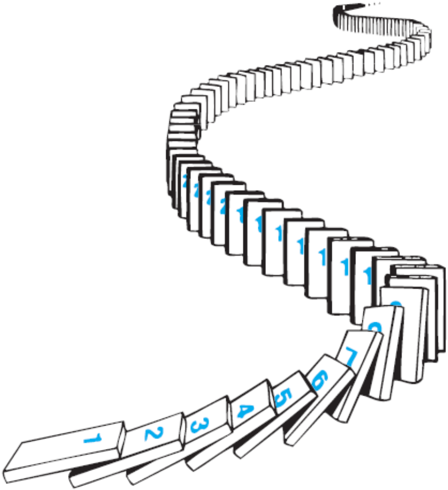
¿cuál es la cardinalidad de $\mathcal{P}(A)$?

Suponga $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, ¿cuál es la **cardinalidad** de $\mathcal{P}(A)$ según n?

$$
\begin{tikzcd}
& \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
& \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

¿2^n? ¿cómo lo demostramos?

Demostración por inducción



Demostración por inducción

Suponga que deseamos demostrar una afirmación $\forall x. P(x)$ sobre $\mathbb{N}$.

Principio de inducción

Para una afirmación $P(x)$ sobre los naturales, si $P(x)$ cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero,
2. si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo n en los naturales se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Notación

- $P(0)$ se llama el **caso base**.
- En el paso 2.
  - $P(n)$ se llama la **hipótesis de inducción**.
  - $P(n+1)$ se llama la **tesis de inducción** o paso inductivo.

Cardinalidad de un conjunto

Teorema

Si $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Demostración

Demostramos que se cumple para $n = 0$:

Caso base ($n = 0$): $\quad |\mathcal{P}(\varnothing)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0$

Cardinalidad de un conjunto

Demostración (continuación)

Suponemos que se cumple para un n cualquiera y demostramos para $n+1$:

Hipótesis de inducción:

$$|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})| \quad = \quad 2^n$$

Inducción (idea):

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Cardinalidad de un conjunto

Demostración (continuación)

Suponemos que se cumple para un n cualquiera y demostramos para $n+1$:

Hipótesis de inducción:

$$|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})| = 2^n$$

Inducción:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n+1\})| &= \left|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}) \cup \left\{A \cup \{n+1\} \mid A \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})\right\}\right| \\
&= \left|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})\right| + \left|\left\{A \cup \{n+1\} \mid A \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})\right\}\right| \\
&= |\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})| + |\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})| \\
&= 2^n + 2^n = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

$\square$