Ordenes parciales

Clase 13

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Tipos de relaciones (resumen)

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R.$
2. **Irrefleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \notin R.$
3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R\big) \rightarrow a = b.$
6. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big) \rightarrow (a, c) \in R.$
7. **Conexa**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \vee (b, a) \in R.$

¿es posible **caracterizar** cada propiedad
en termino de operaciones entre relaciones?

Recordatorio: operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Unión**: $R_1 \cup R_2$ son todos los pares (x, y) tal que $(x, y) \in R_1$ o $(x, y) \in R_2$.

$$R_1 \cup R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ o } (x, y) \in R_2\}$$

- **Intersección**: $R_1 \cap R_2$ son todos los pares (x, y) tal que $(x, y) \in R_1$ y $(x, y) \in R_2$.

$$R_1 \cap R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ y } (x, y) \in R_2\}$$

Recordatorio: operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso**: R^{-1} son todos los pares (x, y) tal que $(y, x) \in R$.

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: $R_1 \circ R_2$ son todos los elementos (x, y) tal que existe un z que cumple $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$.

$$R_1 \circ R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid \exists z \in A. \ (x, z) \in R_1 \ \text{ y } \ (z, y) \in R_2\}$$

- **Relación identidad**: I_A contiene solo los pares (x, x) para todo $x \in A$.

$$I_A \quad = \quad \{(x, x) \mid x \in A\}$$

Caracterización de propiedades en termino de operaciones

Teorema

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

1. R es **refleja** ssi $I_A \subseteq R$.
2. R es **irrefleja** ssi $R \cap I_A = \emptyset$.
3. R es **simétrica** ssi $R = R^{-1}$.
4. R es **asimétrica** ssi $R \cap R^{-1} = \emptyset$.
5. R es **antisimétrica** ssi $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
6. R es **transitiva** ssi $R \circ R \subseteq R$.
7. R es **conexa** ssi $R \cup R^{-1} = A \times A$.

Demostración: ejercicio.

Outline

Outline

¿en qué se parecen estas relaciones?

- subconjunto: $A \subseteq B$
- menor o igual: $n \leq m$
- divide a: $a \mid b$

Ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R$.
2. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge \ (b, a) \in R\big) \ \rightarrow \ a = b$.
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge \ (b, c) \in R\big) \ \rightarrow \ (a, c) \in R$.

Ejemplos

- subconjunto: A ⊆ B
- menor o igual: n ≤ m
- divide a: a | b

¿cómo comparamos el 6 con el 9 en la relación “divide a”?

Ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R$.
2. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, a) \in R\big) \rightarrow\ a = b$.
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, c) \in R\big) \rightarrow\ (a, c) \in R$.

Notación

Un orden parcial sobre A los denotaremos como $(\mathrm{A}, \preceq)$.

Ordenes totales

Sea A un conjunto y $(A, \preceq)$ un orden parcial.

Definición

Decimos que un orden parcial $(A, \preceq)$ es un **orden total** si $\preceq$ cumple ser:

- **Conexo**: $\forall a, b \in A. \ (a, b) \in R \ \vee \ (b, a) \in R$.

¿cuál de los ordenes parciales anteriores son **totales**?

Outline

Ejemplos de ordenes parciales

Definición

Se define la relación $\leq_2$ entre pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(i_1, i_2) \ \leq_2 \ (j_1, j_2) \qquad \text{si, y solo si,} \qquad (i_1 \neq j_1 \to i_1 < j_1) \ \wedge \ (i_1 = j_1 \ \to \ i_2 \leq j_2)$$

Ejemplos

- $(2, 100) \leq_2 (3, 5)$?
- $(2, 5) \leq_2 (2, 100)$?
- $(2, 5) \leq_2 (2, 3)$?

Ejemplos de ordenes parciales

Definición

Se define la relación $\leq_2$ entre pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(i_1, i_2) \leq_2 (j_1, j_2) \quad \text{si, y solo si,} \quad (i_1 \neq j_1 \rightarrow i_1 < j_1) \wedge (i_1 = j_1 \rightarrow i_2 \leq j_2)$$

¿qué propiedades cumple $\leq_2$?

1. ¿es $\leq_2$ **refleja**? ✓
2. ¿es $\leq_2$ **antisimétrica**? ✓
3. ¿es $\leq_2$ **transitiva**? ✓

Por lo tanto, $\leq_2$ es un **orden parcial**.

Orden lexicográfico

En general, si $(A, \preceq)$ es un orden parcial, entonces siempre podemos definir un orden parcial sobre $A \times A$.

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial.
Se define la relación $\preceq_2$ entre pares en $A \times A$ como:

$$(a_1, a_2) \preceq_2 (b_1, b_2) \quad \text{si, y solo si,} \quad (a_1 \neq a_2 \rightarrow a_1 \preceq a_2) \wedge (a_1 = a_2 \rightarrow b_1 \preceq b_2)$$

Demuestre que $\preceq_2$ es un **orden parcial**.

- La relación $\preceq_2$ se conoce como el **orden lexicográfico** en $A \times A$.
- Para todo k, es posible definir $\preceq_k$ sobre A^k. (¿cómo?)

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- Un **alfabeto** Σ es un conjunto finito de elementos.
- Un elemento $a \in \Sigma$ lo llamaremos una **letra** o **símbolo**.
- Una **palabra** w sobre Σ es una secuencia finita de letras en Σ.

Ejemplo

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ es un alfabeto con tres letras.
- aa, $abbca$, o $acaabaa$ son palabras.

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- El largo $|w|$ de una palabra w sobre Σ es el número de letras.

$$|w| \overset{\text{def}}{\equiv} \# \text{ de letras en } w$$

- Denotaremos ϵ como la **palabra vacía** de largo 0.

$$|\epsilon| \overset{\text{def}}{\equiv} 0$$

- Denotaremos por Σ^* como el **conjunto de todas las palabras** sobre Σ.

Ejemplo

- $\Sigma = \{a, b\}$ es un alfabeto con dos letras.
- $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, \ldots\}$

Concatenación de palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$:

$$u \cdot v \overset{\text{def}}{\equiv} u \ \textbf{concatenado} \text{ con } v$$

$u \cdot v$ corresponde a la secuencia u **seguido** de la secuencia v.

Ejemplo

- $aab \cdot bab = aabbab$
- $bc \cdot aabbc = bcaabbc$
- $\epsilon \cdot abaca = abaca$

Concatenación de palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$:

$$u \cdot v \quad \overset{\text{def}}{\equiv} \quad u \text{ **concatenado** con } v$$

$u \cdot v$ corresponde a la secuencia u **seguido** de la secuencia v.

Preguntas

- ¿es la concatenación **asociativa**: $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$?
- ¿es la concatenación **conmutativa**: $u \cdot v = v \cdot u$?

¿por qué nos podría interesar trabajar con **palabras**?

Relaciones entre palabras

Definición

Sea Σ un alfabeto. Se definen las siguientes relaciones entre palabras en Σ^*:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{u} \leq_{\mathrm{p}} \mathrm{v} & \text{si, y solo si,} & \exists w \in \Sigma^*.\ u \cdot w = v \\
\mathrm{u} \leq_{\mathrm{s}} \mathrm{v} & \text{si, y solo si,} & \exists w \in \Sigma^*.\ w \cdot u = v \\
\mathrm{u} \leq_{\mathrm{i}} \mathrm{v} & \text{si, y solo si,} & \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*.\ w_1 \cdot u \cdot w_2 = v
\end{array}
$$

Ejemplos

- $aaab \leq_p aaabba$? ✓
- $bab \leq_s baab$? ✗
- $cba \leq_i aabbcbaaa$? ✓

Relaciones entre palabras

Definición

Sea Σ un alfabeto. Se definen las siguientes relaciones entre palabras en Σ^*:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{u} \ \leq_{\mathrm{p}} \ \mathrm{v} & \text{si, y solo si,} & \exists w \in \Sigma^*.\ \ u \cdot w = v \\
\mathrm{u} \ \leq_{\mathrm{s}} \ \mathrm{v} & \text{si, y solo si,} & \exists w \in \Sigma^*.\ \ w \cdot u = v \\
\mathrm{u} \ \leq_{\mathrm{i}} \ \mathrm{v} & \text{si, y solo si,} & \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*.\ \ w_1 \cdot u \cdot w_2 = v
\end{array}
$$

¿qué propiedades cumple $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$?

1. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **refleja**? ✓
2. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **anti-simétrica**? ✓
3. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **transitiva**? ✓

Por lo tanto, $\leq_p$, $\leq_s$ y $\leq_i$ son **ordenes parciales**.

Outline

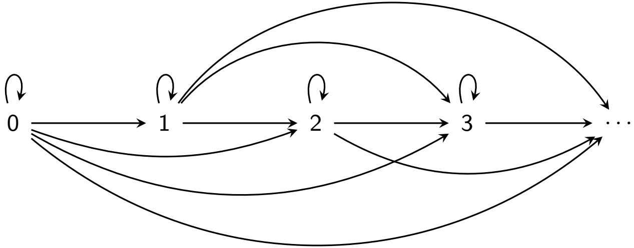
Ordenes parciales

Ejemplos

Representación

¿cómo se ve un orden parcial?

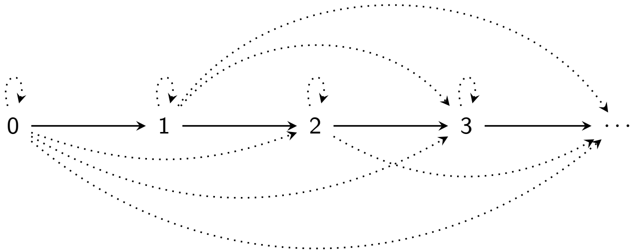
orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$



¿podemos **simplificar** la visualización de este grafo?

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$

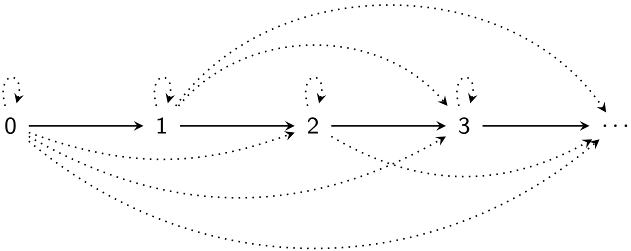


Para simplificar la visualización del grafo podemos:

- Remover **loops**.
- Remover aristas "**transitivas**"

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$



Definición

El **diagrama de Hasse** de $(A, \leq)$ es el diagrama del grafo de $\leq$ pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \leq$ se omite si existe un c tal que $(a, c) \in \leq$ y $(c, b) \in \leq$.

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

Diagrama de Hasse de $(\mathbb{N}, \leq)$

Definición

El **diagrama de Hasse** de $(A, \preceq)$ es el diagrama del grafo de $\preceq$ pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \preceq$ se omite si existe un c tal que $(a, c) \in \preceq$ y $(c, b) \in \preceq$.

¿cómo se ve el orden parcial $\subseteq$?

Diagrama de Hasse de $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}),\subseteq)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

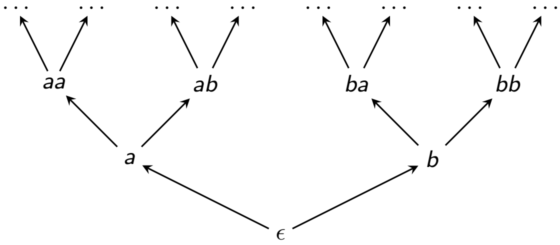
¿cómo se ve el orden lexicográfico $\leq_2$?

Diagrama de Hasse del orden lexicográfico $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_2)$

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) \arrow[u] & (1,4) \arrow[u] & (2,4) \arrow[u] & (3,4) \arrow[u] & (4,4) \arrow[u] & \cdots \\
(0,3) \arrow[u] & (1,3) \arrow[u] & (2,3) \arrow[u] & (3,3) \arrow[u] & (4,3) \arrow[u] & \cdots \\
(0,2) \arrow[u] & (1,2) \arrow[u] & (2,2) \arrow[u] & (3,2) \arrow[u] & (4,2) \arrow[u] & \cdots \\
(0,1) \arrow[u] & (1,1) \arrow[u] & (2,1) \arrow[u] & (3,1) \arrow[u] & (4,1) \arrow[u] & \cdots \\
(0,0) \arrow[u] & (1,0) \arrow[u] & (2,0) \arrow[u] & (3,0) \arrow[u] & (4,0) \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

¿cómo se ve el orden parcial $\leq_p$ sobre palabras?

Diagrama de Hasse de $(\Sigma^*, \leq_p)$



¿qué tienen de parecido todos estos grafos?