Propiedades de QuickSort

Clase 05

IIC 2133 - Sección 1

Prof. Sebastián Bugedo

Sumario

Repaso: `Partition`

Supongamos que no hay elementos repetidos en la secuencia

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

`Partition` (A, i, f)**:**

```
1  p ← pivote aleatorio en A[i, f]
2  m, M ← secuencias vacías
3  Insertar p en M
4  for x ∈ A[i, f] :
5      if x < p : Insertar x en m
6      elif x > p : Insertar x en M
7  A[i, f] ← Concat(m, M)
8  return i + |m|
```

Notemos que `Partition` retorna y además reordena los elementos de A

Repaso: Complejidad de `Partition`

```
Partition (A, i, f):
1     p ← pivote aleatorio en A[i, f]
2     m, M ← secuencias vacías
3     Insertar p en M
4     for x ∈ A[i, f] :
5         if x < p : Insertar x en m
6         elif x > p : Insertar x en M
7     A[i, f] ← Concat(m, M)
8     return i + |m|
```

Las inserciones al final de la EDD

- $\mathcal{O}(1)$ en arreglos y listas
- Se hace una por elemento x
- Total: $\mathcal{O}(n)$

La concatenación

- $\mathcal{O}(1)$ en listas
- $\mathcal{O}(n)$ en arreglos

Además, usa memoria adicional $\mathcal{O}(n)$ para mantener las secuencias m, M

Más adelante veremos una versión *in place* de `Partition`

Repaso: `Median` (versión parametrizada)

Supongamos que no hay elementos repetidos en la secuencia

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índice $k \in \{0, \ldots, n-1\}$
output: k-ésimo estadístico de orden de A

`Median` (A, k):

```
1   i ← 0
2   f ← n − 1
3   x ← Partition(A, i, f)
4   while x ≠ k :
5       if x < k : i ← x + 1
6       else: f ← x − 1
7       x ← Partition(A, i, f)
8   return A[x]
```

`Median` nos entrega el k-ésimo estadístico de orden

Repaso: Complejidad de `Median`

La complejidad de `Median` depende la elección del pivote: es **probabilística**

El **mejor caso**

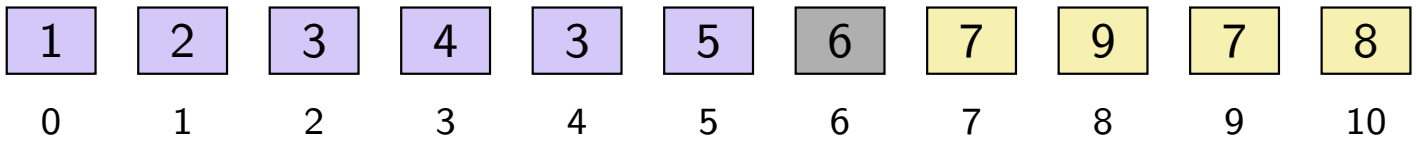
- Escoger la mediana como primer pivote
- Esto significa separar los demás elementos en m y M
- Eso toma $\mathcal{O}(n)$ por pivote $\mathcal{O}(n)$
- Como solo se debe tomar un pivote: Total: $\mathcal{O}(n)$

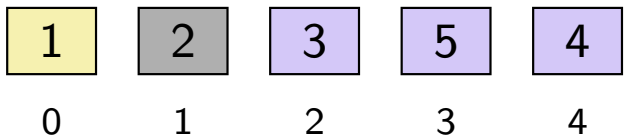
El **peor caso**

- Que todos los datos menos la mediana sean escogidos como pivote
- Para cada pivote hay que separar menores y mayores $\mathcal{O}(n)$
- Como solo se deben tomar $\mathcal{O}(n)$ pivotes: Total: $\mathcal{O}(n^2)$

Ordenar con `Partition`

Luego de cada ejecución de `Partition`, el pivote queda en su posición ordenada





Además, las dos sub-secuencias están "*del lado correcto*" del pivote

¿Cómo usar esto para ordenar?

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el uso de `Partition` para ordenar secuencias
- ☐ Demostrar correctitud de `Partition`
- ☐ Demostrar correctitud de `Quicksort`
- ☐ Determinar la complejidad de tiempo de `Quicksort`
- ☐ Comprender posibles mejoras para `Quicksort`

Sumario

Ordenar con `Partition`

Nuevamente podemos usar la estrategia dividir para conquistar

1. División del problema en dos sub-problemas con `Partition`
2. Aplicar recursivamente `Partition` para cada sub-secuencia
3. No necesitamos combinar nada: la secuencia queda ordenada

Llamaremos **Quicksort** a este algoritmo

Quicksort

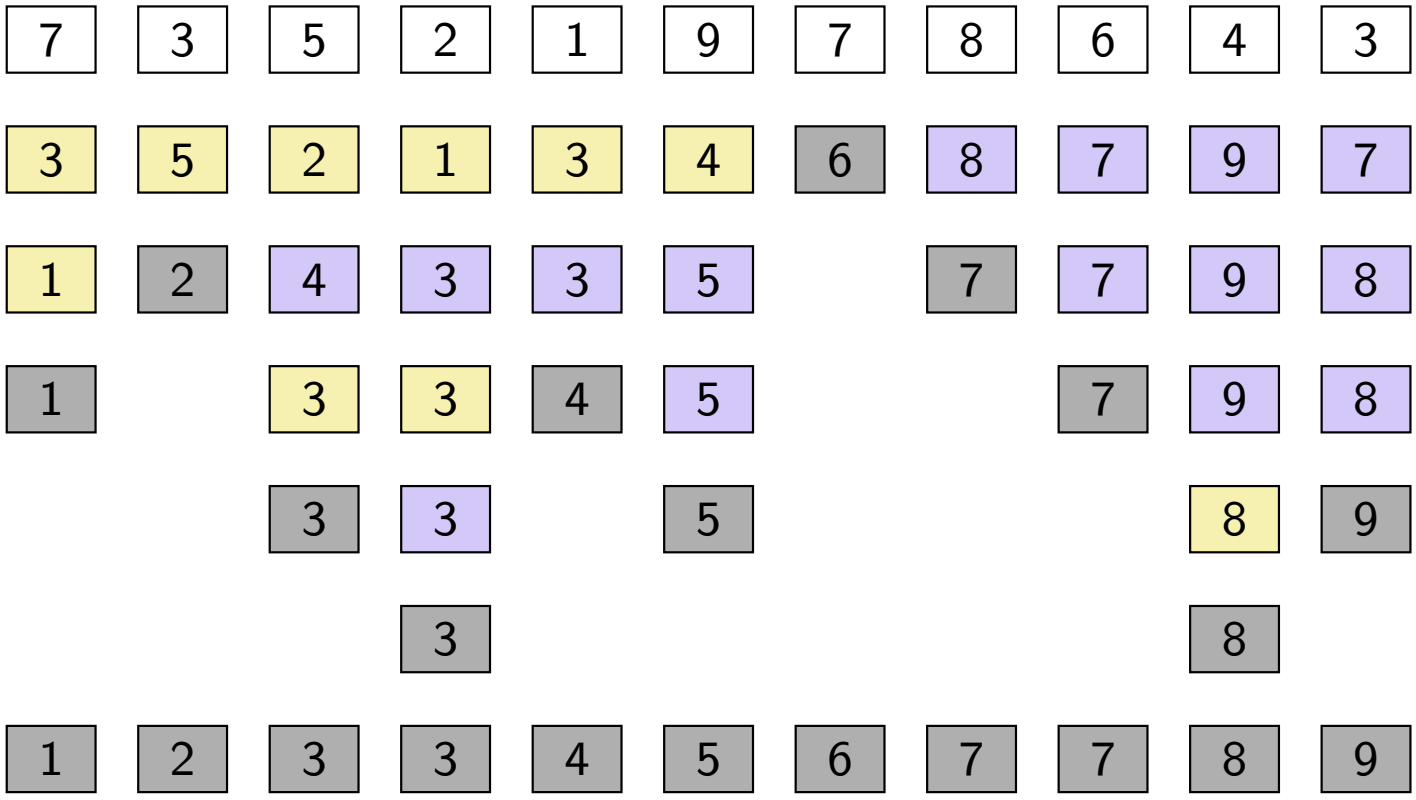
input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: $\varnothing$

`QuickSort` (A, i, f)**:**

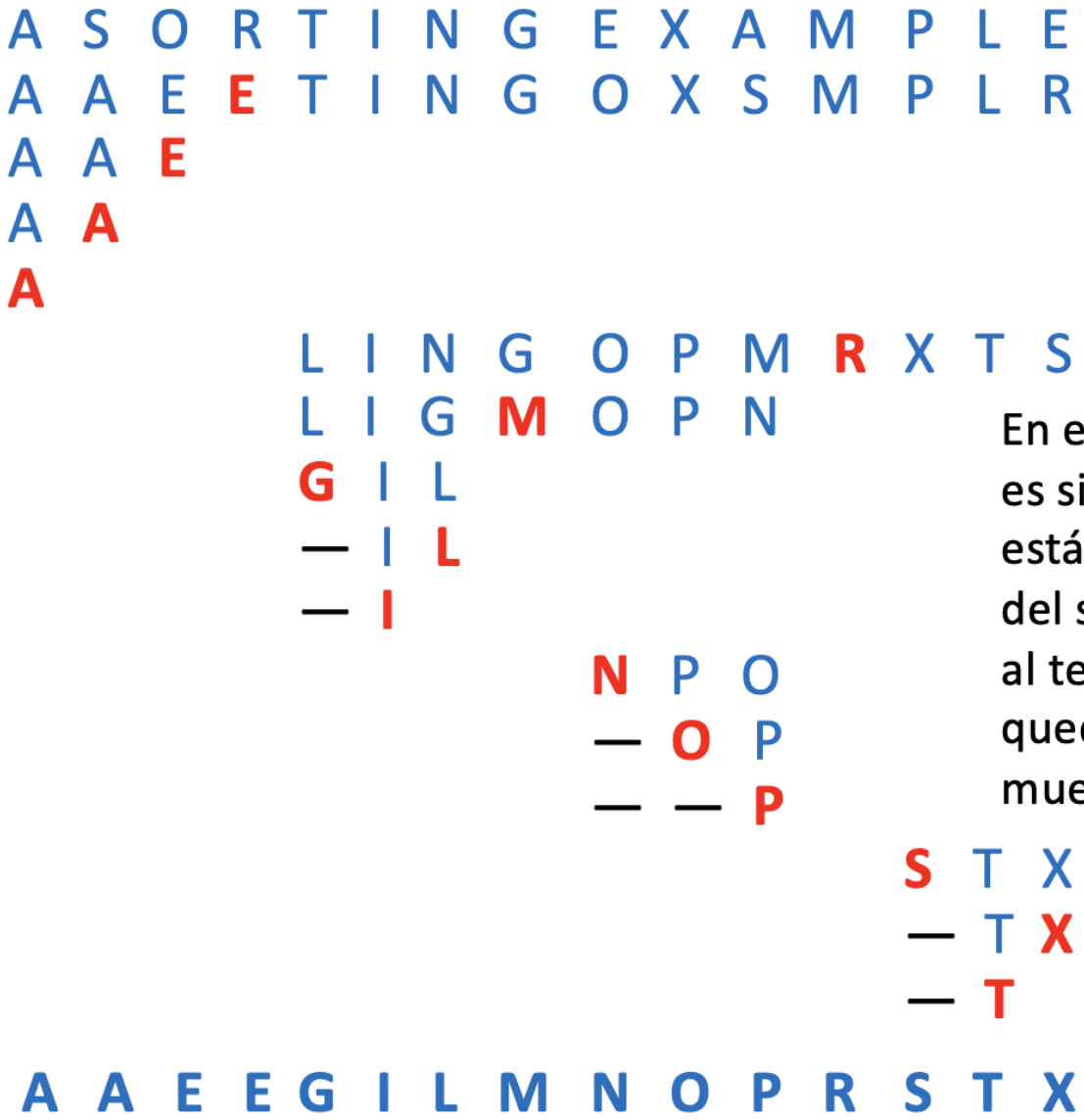
```
1    if i ≤ f :
2        p ← Partition(A, i, f)
3        Quicksort(A, i, p − 1)
4        Quicksort(A, p + 1, f)
```

El llamado inicial es `Quicksort`$(A, 0, n-1)$

Quicksort: Ejemplo de ejecución



Quicksort: Ejemplo de ejecución



En este ejemplo, el pivote es siempre el elemento que está en el extremo derecho del subarreglo, es decir, $A[f]$; al terminar *Partition*, el pivote queda en la posición que se muestra en rojo

Complejidad de memoria de `Quicksort`

En términos de memoria

- La complejidad de `Quicksort` depende solo de `Partition`
- Vimos una versión $\mathcal{O}(n)$ de `Partition`
- Es posible contar con una versión *in place*

Para la versión *in place* usaremos arreglos

- Haremos intercambios dentro del arreglo
- El truco será partir poniendo el pivote al final

Versión *in place* de `Partition`

input : Arreglo $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

`Partition` (A, i, f)**:**

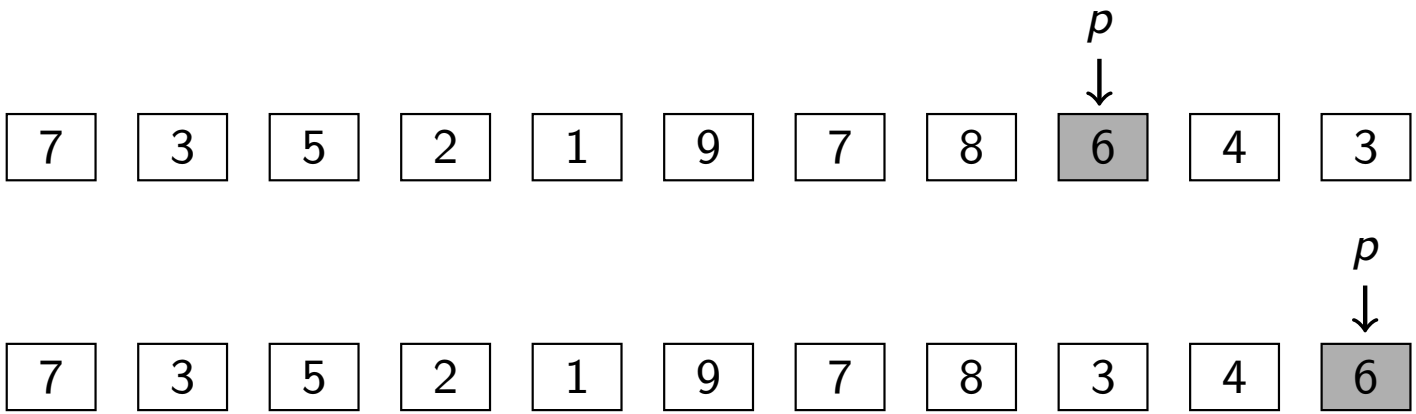
```
1   x ← índice aleatorio en {i, ..., f}
2   p ← A[x]
3   A[x] ⇄ A[f]
4   j ← i
5   for k = i ... f − 1 :
6       if A[k] < p :
7           A[j] ⇄ A[k]
8           j ← j + 1
9   A[j] ⇄ A[f]
10  return j
```

Con este cambio, `Quicksort` usa memoria adicional $\mathcal{O}(1)$

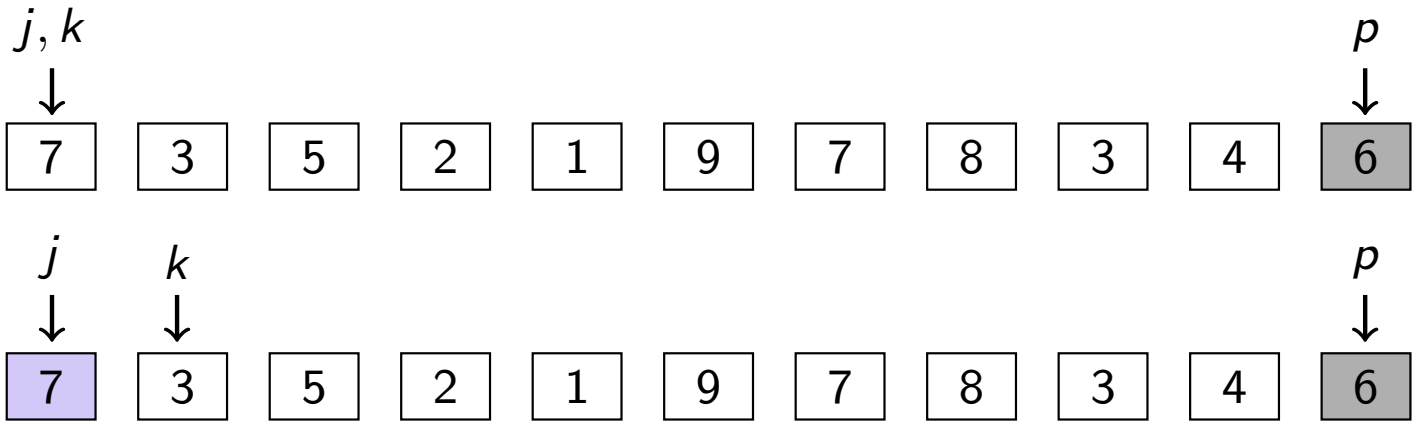
Versión *in place* de `Partition`

```
Partition (A, i, f):
1   x ← índice aleatorio en {i, ..., f};   p ← A[x]
2   A[x] ⇄ A[f]
3   j ← i
4   for k = i ... f − 1 :
5       if A[k] < p :
6           A[j] ⇄ A[k]
7           j ← j + 1
8   A[j] ⇄ A[f]
9   return j
```

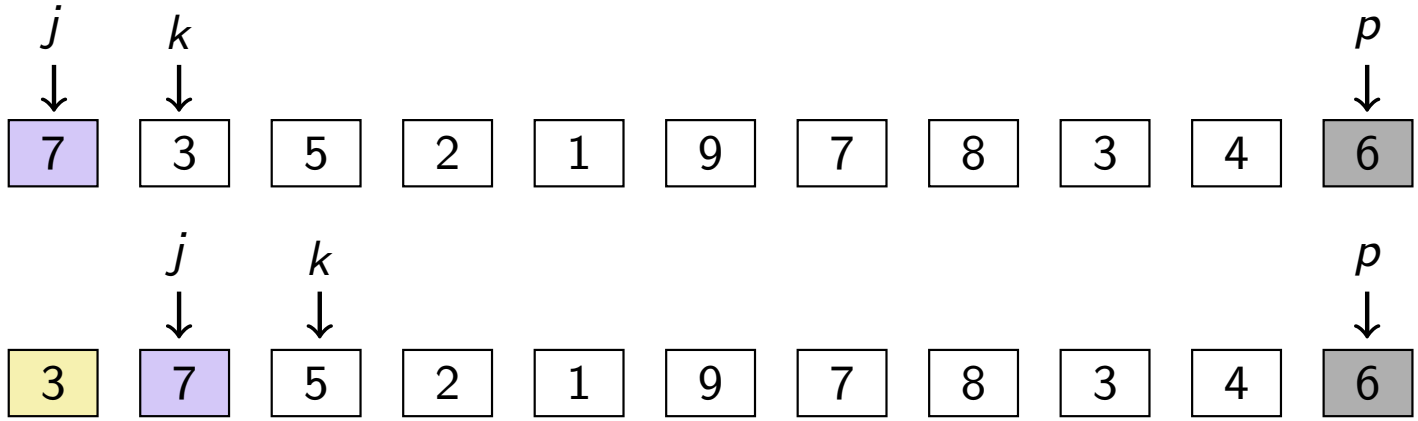
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



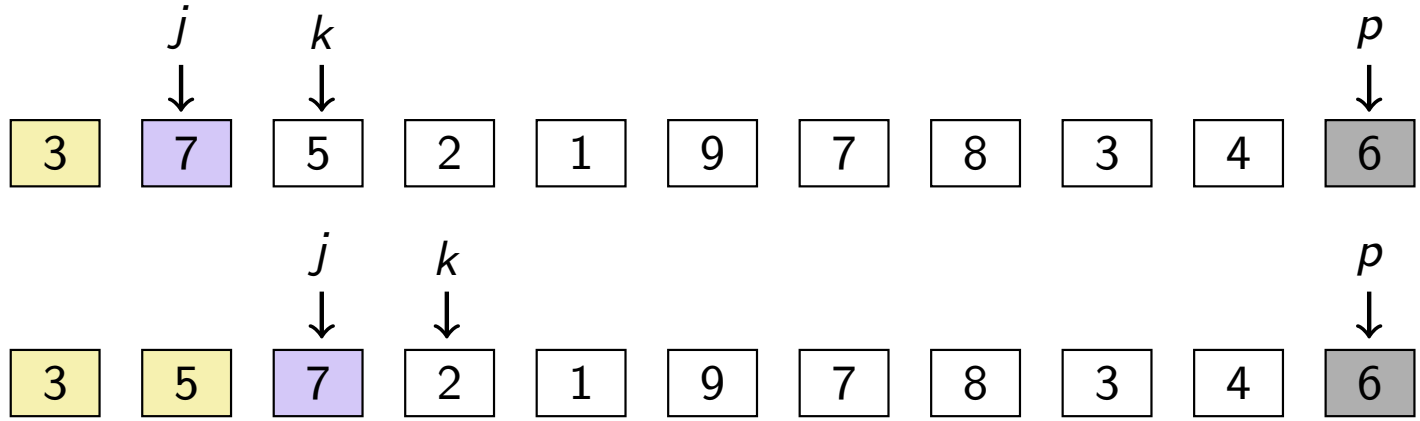
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



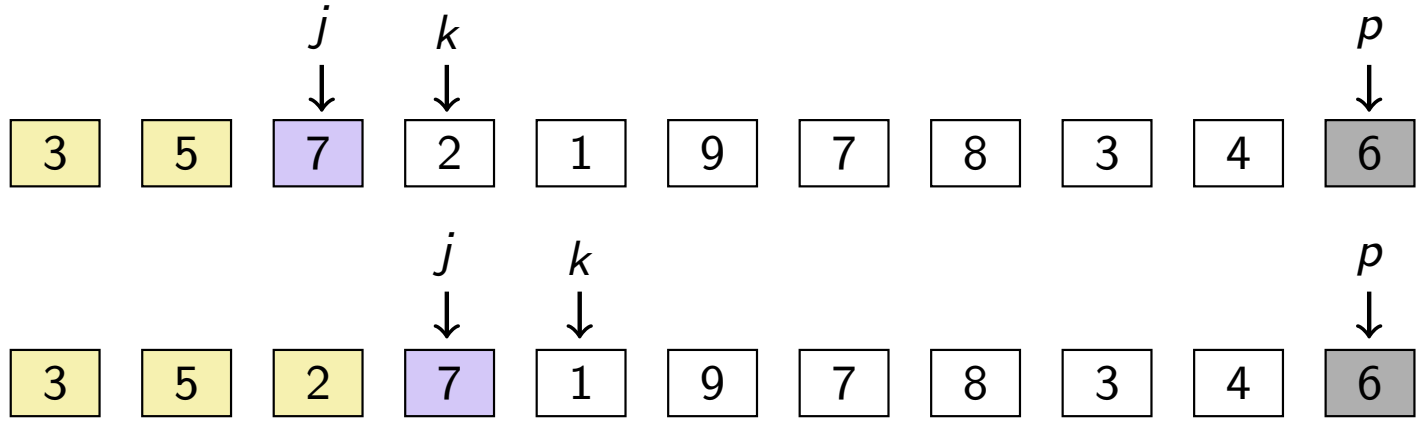
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



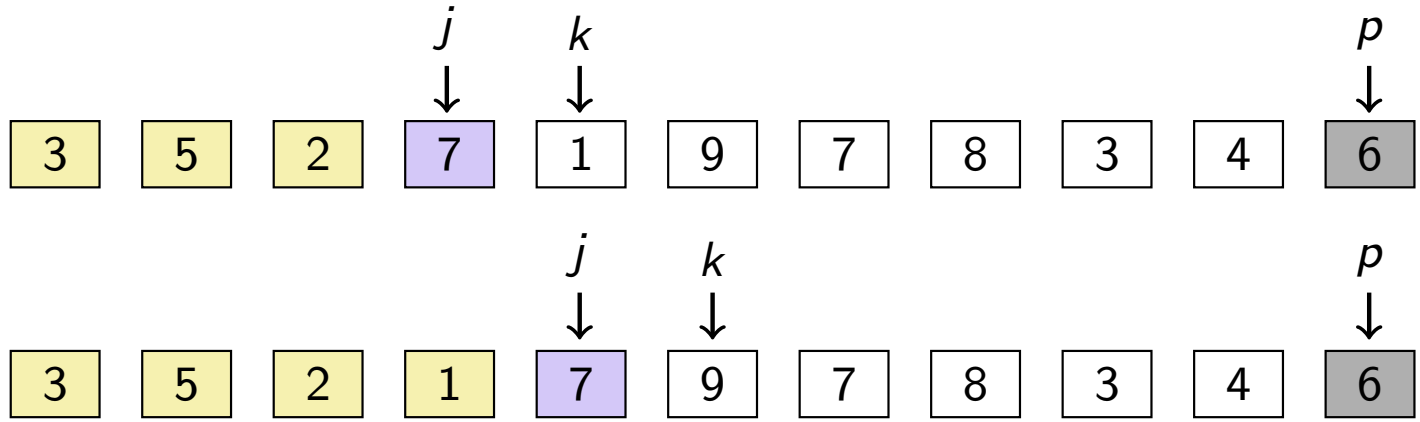
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



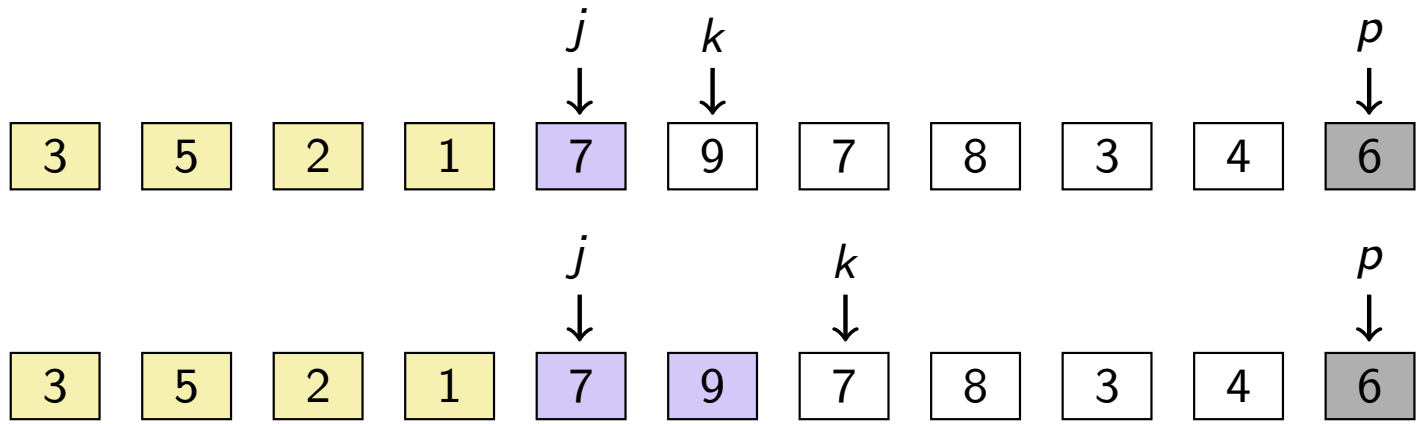
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



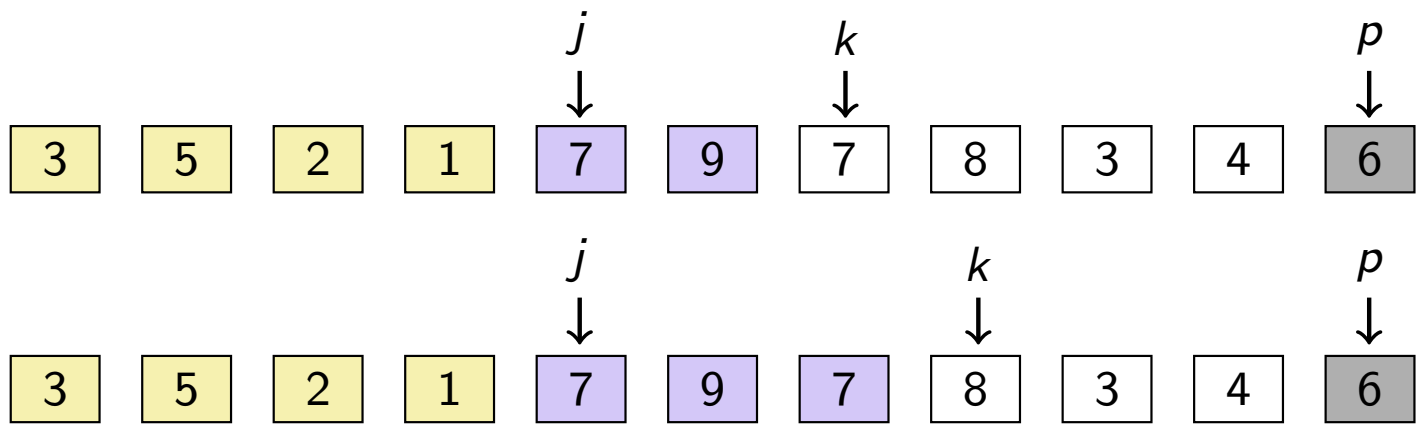
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



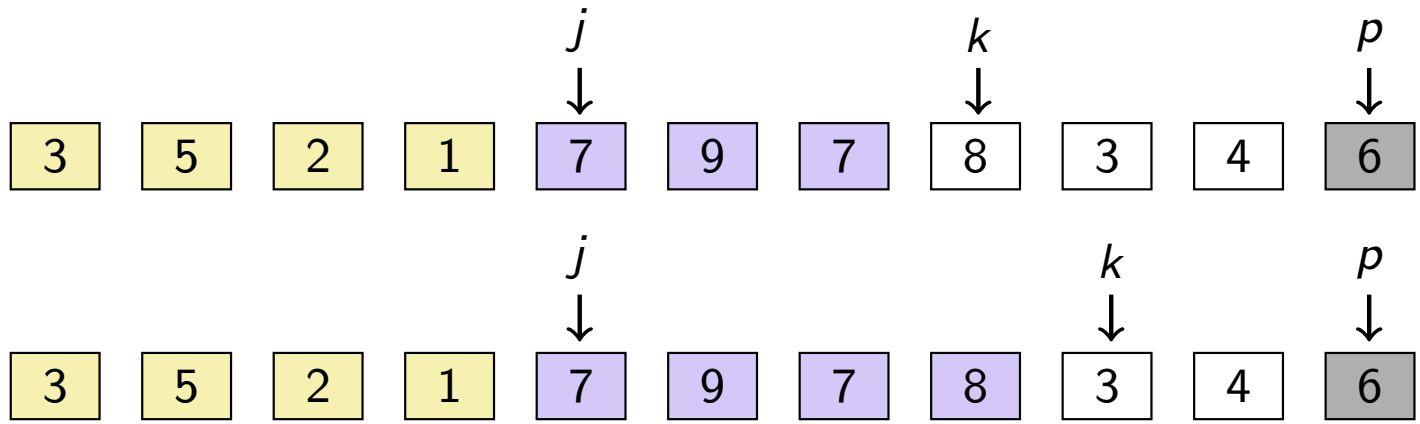
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



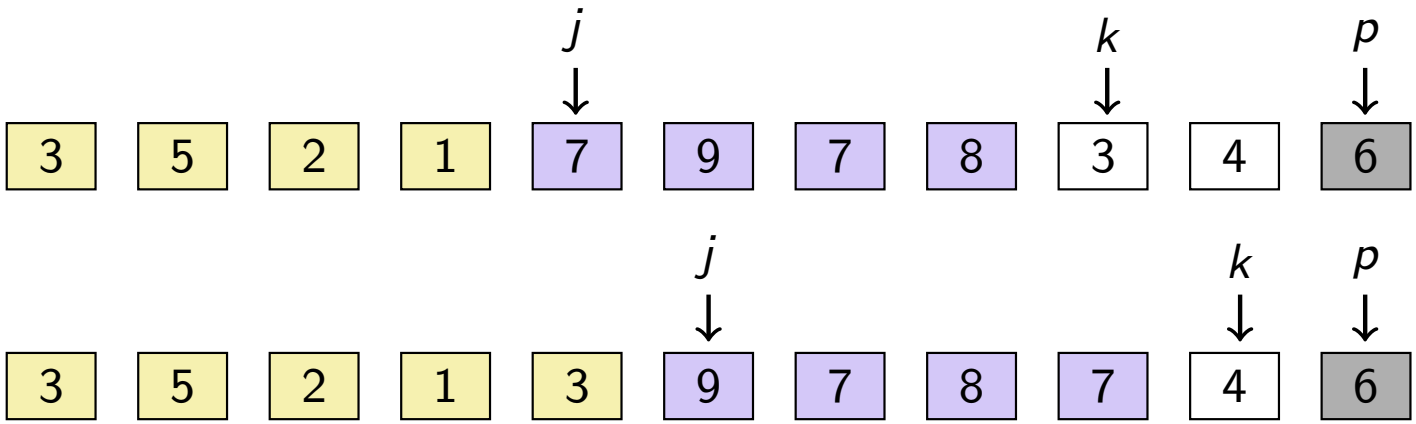
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



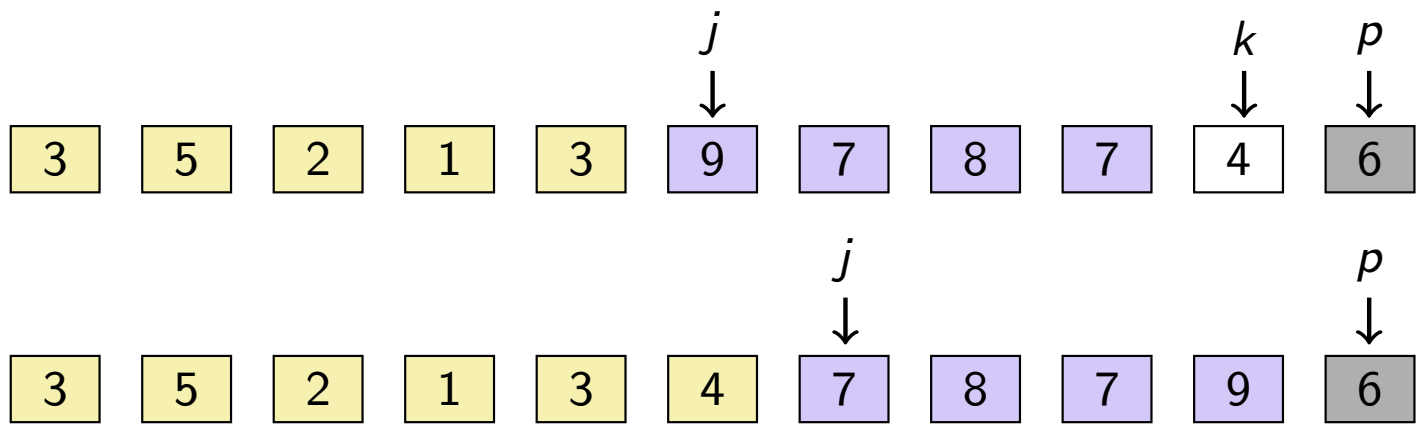
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



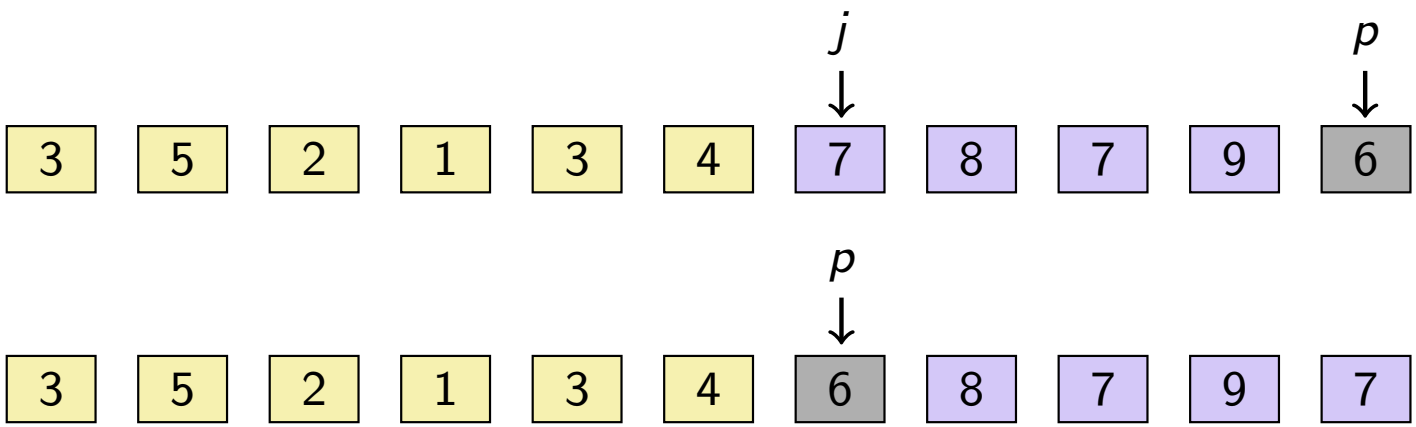
```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```



Sumario

Correctitud de `Partition`

Ejercicio

Demuestre que `Partition` es correcto

input : Arreglo $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

`Partition` (A, i, f)**:**

```
1   x ← índice aleatorio en {i, ..., f}
2   p ← A[x]
3   A[x] ⇄ A[f]
4   j ← i
5   for k = i ... f − 1 :
6       if A[k] < p :
7           A[j] ⇄ A[k]
8           j ← j + 1
9   A[j] ⇄ A[f]
10  return j
```

Correctitud de `Partition`

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada `Partition`(A, i, f) se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. □

Demostración (posición del pivote)

Probaremos que el pivote se encuentra en su posición ordenada en la secuencia. Para esto, dado que en la línea final se pone el pivote en la posición j, demostraremos la siguiente propiedad para un pivote p dado

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración, } A[i \ldots j-1] \text{ contiene solo elementos menores a } p \text{ y } A[j \ldots k-1] \text{ solo elementos mayores o iguales a } p$$

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

$\mathbf{P}(\mathbf{n})$:= Luego de la n-ésima iteración, $A[i \ldots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \ldots k-1]$ solo elementos mayores o iguales a p

1. **Caso base.** $\mathbf{P}(\mathbf{1})$ es el estado de $A[i \ldots k-1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
   - Si $A[i] < p$, como $i = j$, se mantiene $A[i]$ en su posición y j, k aumentan en 1. Luego, $A[i \ldots j-1]$ tiene solo el elemento $A[i]$, el cual es menor a p y $A[j \ldots k-1]$ no tiene elementos pues $j = k$.
   - Si $A[i] \geq p$, no se aumenta j y sí k, por lo tanto $A[i \ldots j-1]$ considera 0 elementos y $A[j \ldots k-1]$ tiene un elemento mayor o igual a p.

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n-ésima iteración, $A[i \ldots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \ldots k-1]$ solo mayores o iguales.

   Al término de la $(n+1)$-ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

   - Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p. Además, como los datos de $A[j \ldots k-1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.
   - Si $A[k] \geq p$, no se aumenta j y no se hacen intercambios. Por **H.I.** los elementos en $A[i \ldots j-1]$ son menores a p y como $A[k]$ al igual que los elementos de $A[j \ldots k-1]$ son mayores o iguales, luego de aumentar k el rango $A[j \ldots k-1]$ sigue cumpliendo la propiedad. □

Correctitud de Quicksort

Ejercicio

Demuestre que Quicksort es correcto

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: $\varnothing$

```
QuickSort (A, i, f):
1     if i ≤ f :
2         p ← Partition(A, i, f)
3         Quicksort(A, i, p − 1)
4         Quicksort(A, p + 1, f)
```

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

Para demostrar que `Quicksort` termina, primero usamos el hecho de que `Partition` termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de `Quicksort` se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada `Quicksort`(A, i, f) establece el *tamaño* de la instancia analizada como

$$d = f - i$$

Tenemos dos casos según el valor de d

- Si $d < 0$, `Quicksort` termina sin hacer más llamados recursivos

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

$$d_1 = p - 1 - i < d \qquad d_2 = f - p - 1 < d \quad \text{para } i \leq p \leq f$$

  Es decir, con cada llamado resursivo d disminuye al menos en 1.

Con ambos casos, tenemos que en cada llamado se reduce al menos en 1 el tamaño de la instancia y el algoritmo termina al llegar a tamaño 0.

Como el llamado inicial es `Quicksort`$(A, 0, n-1)$, la profundidad máxima de la recursión es $n-1$ y por lo tanto, el algoritmo termina. □

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0\ldots,n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort`(A,i,f) verifica si hay elementos en el rango $i\ldots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i \leq f$ el rango es de $f-i>0$ elementos, se escoge un pivote y se realizan dos llamados cuyos rangos suman $f-i-1$ elementos

Dado que en cada llamado no vacío se escoge un pivote, los llamados siempre reducen su tamaño y el algoritmo solo deja de hacer recursión cuando el llamado es vacío, todo elemento es escogido pivote en algún llamado. Como `Partition` es correcto, todo elemento queda ordenado. □

Quicksort

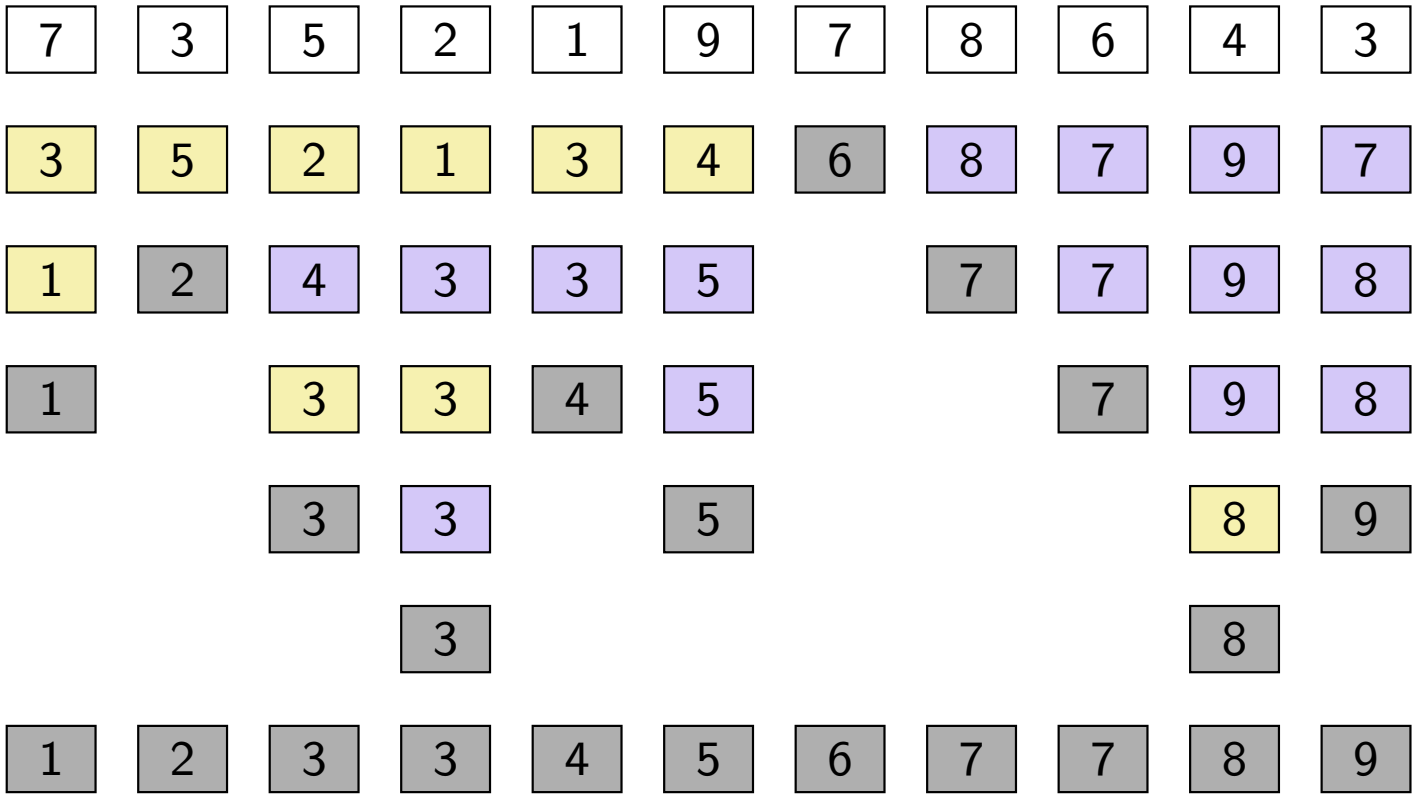
input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: $\varnothing$

`QuickSort` (A, i, f)**:**

```
1    if i ≤ f :
2        p ← Partition(A, i, f)
3        Quicksort(A, i, p − 1)
4        Quicksort(A, p + 1, f)
```

¿Cuál es la complejidad de `Quicksort` en los distintos casos?

Quicksort: Ejemplo de ejecución



Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en `MergeSort`)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- `Partition` genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n-1$
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + T(n-1)$
- Complejidad $\mathcal{O}(n^2)$

¿Qué hay del caso promedio?

Caso promedio de `Quicksort`

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

```
   Partition (A, i, f):
1      x ← índice aleatorio en
         {i, ..., f};    p ← A[x]
2      A[x] ⇄ A[f]
3      j ← i
4      for k = i ... f − 1 :
5          if A[k] < p :
6              A[j] ⇄ A[k]
7              j ← j + 1
8      A[j] ⇄ A[f]
9      return j
```

Contaremos el número de comparaciones de la línea 5 de `Partition`, pues mide cuántas iteraciones debe hacer este método

Definimos

$$C(n) := \quad \#\text{ comp. } A[k] < p \text{ en } \texttt{Quicksort}$$

Encontraremos una ecuación de recurrencia para $C(n)$

Caso promedio de `Quicksort`

```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en
       {i, ..., f};    p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```

- En la primera llamada se hacen $n-1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n-1$
- Supongamos que `Partition` termina retornando q, i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de `Quicksort` se harán sobre los
  - q elementos a la izq
  - $n-q-1$ elementos a la der
- Los llamados recursivos aportan

$$C(q) + C(n-q-1)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n-1+C(q)+C(n-q-1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) \;=\; n-1+\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\left(C(q)+C(n-q-1)\right)$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n-q-1) \;=\; C(n-1)+C(n-2)+\cdots+C(0) \;=\; \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

obtenemos la regla simplificada

$$C(n) \;=\; n-1+\frac{2}{n}\sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) \;=\; n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0$, pues corresponde al caso base de `Quicksort`
- $C(1) = 0$, pues `Partition` no itera si hay un solo elemento

Caso promedio de `Quicksort`

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n-1$

$$\begin{aligned} nC(n) &= n(n-1) + 2\sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\ (n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2\sum_{q=0}^{n-2} C(q) \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2$$

Dividimos por $n(n+1)$ y comenzamos una serie de inecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{C(n)}{n+1} &= \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} \\ &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

Caso promedio de `Quicksort`

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\cdots \\
&\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{2}{x} dx = 2\log(n)
\end{aligned}
$$

Concluimos que una cota superior para el número de comparaciones es

$$C(n) \leq 2(n+1)\log(n)$$

`Quicksort` es $\mathcal{O}(n\log(n))$ en el caso promedio

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - *Informar* la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos
- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores
  - Mejora para caso con datos repetidos
  - Evita que `Partition` particione innecesariamente sub-secuencias en que todos los valores son iguales

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Heap Sort	?	?	?	?

Ejercicio

Disfrute el video en este link

CONCURSO!

Próxima semana liberaremos el **Primer DatiConcurso**

Sumario

Ideas al cierre

- `Partition` puede ser usado para ordenar en `Quicksort`
- Usar una versión *in place* de `Partition` permite que `Quicksort` sea $\mathcal{O}(1)$ en memoria
- Los casos de complejidad `Quicksort` dependen de la posición en que se escoge el pivote
- `Quicksort` admite varias mejoras prácticas

Epílogo

Ve a

www.menti.com

Introduce el código

1087 5321

O usa el código QR