Clausuras

Clase 15

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: elementos extremos

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Extremos superiores

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$
- $x^{\uparrow} \in S$ es un **máximo** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq x^{\uparrow}$

Extremos inferiores

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$
- $\check{x} \in S$ es un **minimal** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq \check{x} \rightarrow \check{x} = y$
- $x^{\downarrow} \in S$ es un **mínimo** ssi $\forall y \in S.\ x^{\downarrow} \preceq y$

Outline

Outline

Clausuras

Aplicación: DAGs

Clausura refleja

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

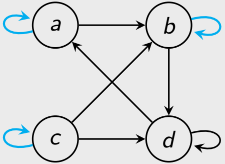
Definición

Una relación $R^r \subseteq A \times A$ es la **clausura refleja** de R si:

1. $R \subseteq R^r$.
2. R^r es refleja.
3. para toda relación refleja R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^r \subseteq R'$.

R^r es la **menor relación refleja** que contiene a R.

¿cuál es la clausura refleja de esta relación?



Clausura refleja

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Una relación $R^r \subseteq A \times A$ es la **clausura refleja** de R si:

1. $R \subseteq R^r$.
2. R^r es refleja.
3. para toda relación refleja R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^r \subseteq R'$.

R^r es la **menor relación refleja** que contiene a R.

¿cuál es la conección entre R^r y el **mínimo** de un conjunto?

Clausura transitiva

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

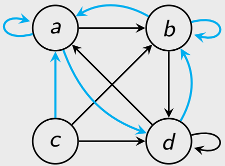
Definición

Una relación $R^t \subseteq A \times A$ es la **clausura transitiva** de R si:

1. $R \subseteq R^t$.
2. R^t es transitiva.
3. para toda relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^t \subseteq R'$.

R^t es la **menor relación transitiva** que contiene a R.

¿cuál es la clausura transitiva de esta relación?



Clausura transitiva

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Una relación $R^t \subseteq A \times A$ es la **clausura transitiva** de R si:

1. $R \subseteq R^t$.
2. R^t es transitiva.
3. para toda relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^t \subseteq R'$.

R^t es la **menor relación transitiva** que contiene a R.

¿cuál es la conección entre R^t y el mínimo de un conjunto?

Clausura transitiva y clausura refleja

- ¿siempre existen R^r y R^t para un R cualquiera?
- ¿cómo podemos calcular R^r y R^t (si existen)?

¿cómo calculamos la clausura refleja de una relación?

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^r \;=\; R \,\cup\, I_A$$

donde $I_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad.

Demostración: ejercicio.

¿cómo calculamos la clausura refleja de una relación?

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^r = R \cup I_A$$

donde $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad.

Propiedad

$\left(R^r\right)^r = R^r$ para todo $R \subseteq A \times A$.

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Recordatorio

- $R \circ R = \left\{ (x, y) \mid \exists z \in A.\ (x, z) \in R \wedge (z, y) \in R \right\}$
- Se define $R^1 = R$ y $R^2 = R \circ R$.
- Se define $R^i = R^{i-1} \circ R$ para $i > 1$.
- Notar que $R \circ (R \circ R) = (R \circ R) \circ R$ y $R^i \circ R^j = R^{i+j}$. (ejercicio)

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Demostración: $R^t \;=\; \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

¿qué debemos demostrar?

1. $R \;\subseteq\; \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. ✓
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.
3. para toda relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \;\subseteq\; R'$$

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Demostración: $R^t \;=\; \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.

PD: Si $(x,y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ y $(y,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, entonces $(x,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

Supongamos que $(x,y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ y $(y,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

$\Rightarrow$ existe k y j tal que $(x,y) \in R^k$ y $(y,z) \in R^j$.

$\Rightarrow$ $(x,z) \in R^k \circ R^j = R^{k+j}$

$\Rightarrow$ $(x,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Demostración: $R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

3. Para toda R' transitiva con $R \subseteq R'$ se cumple: $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$.

Sea R' transitiva tal que $R \subseteq R'$.

PD: para todo $i \geq 1$, $R^i \subseteq R'$. (por inducción)

Caso base: $i = 1$. ✓

Caso inductivo: se cumple $R^i \subseteq R'$ y demostramos que $R^{i+1} \subseteq R'$.

Supongamos que $(x,z) \in R^{i+1}$. (**PD**: $(x,z) \in R'$)

$\Rightarrow$ existe $y \in A$, tal que $(x,y) \in R^i$ y $(y,z) \in R$.

$\Rightarrow$ $(x,y) \in R'$ y $(y,z) \in R'$. (¿por qué?)

$\Rightarrow$ $(x,z) \in R'$. (¿por qué?)

Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$.

□

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

Algunas preguntas:

- Dado un R finito, ¿podemos computar R^t?
- ¿es verdad que $\left(R^t\right)^t = R^t$?

Demostración (ejercicio)

Outline

Clausuras

Aplicación: DAGs

Caminos y ciclos de un grafo

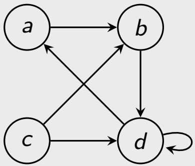
Definiciones (recordatorio)

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

- Un **camino** en G es una secuencia $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en V tal que:
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para todo $0 \leq i < n$.

  Decimos que $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es un **camino de v_0 a v_n**.
- Un **camino simple** es un camino donde todos los vértices son distintos.
- Dos nodos u y v estan **conectados en G** si existe un camino de u a v

Ejemplo



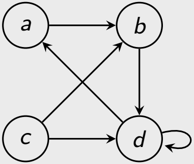
Caminos y ciclos de un grafo

Definiciones

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigído.

- Un **ciclo** en G es un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ donde $v_0 = v_n$.
- Un **ciclo simple** en G es un ciclo $v_0, v_1, \ldots, v_n$ tal que todos los vértices son distintos, exceptuando el primero y el último.
- El **largo** de un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es igual a n (el número de aristas que atraviesa).

Ejemplo



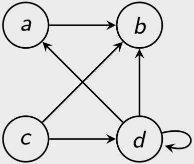
Grafos acíclicos o DAGs

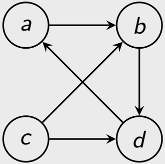
Definición

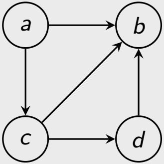
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigído.

- G se dice **acíclico** si NO tiene ciclos.
- Si G es acíclico decimos que G es un **DAG** (**D**irect **A**cyclic **G**raph).

¿cuáles grafos son DAGs?







¿és un orden parcial un DAG?

Teorema

Si $(A, \preceq)$ es un orden parcial,
entonces el grafo dirigido $(A, \preceq)$ NO tiene ciclos ≥ 2.

En otras palabras, el diagrama de Hasse de $(A, \preceq)$ es un DAG.

¿és un orden parcial un DAG?

Demostración: orden parcial $\Rightarrow (A, \preceq)$ NO tiene ciclos ≥ 2

Por contradicción, suponga que:

- $(A, \preceq)$ es un orden parcial.
- el grafo $(A, \preceq)$ tiene un ciclo de largo mayor o igual a 2.

Sea $v_0, v_1, \ldots, v_n$ con $n \geq 2$ el ciclo simple en $(A, \preceq)$ tal que:

- $v_i \preceq v_{i+1}$ para todo $i < n$,
- $v_i \neq v_j$ para todo $i < j < n$, y
- $v_0 = v_n$.

PD: $v_0 \preceq v_i$ para todo $i < n$. (demostración: ejercicio)

De lo anterior, podemos deducir que:

$$v_0 \preceq v_{n-1}, \quad v_{n-1} \preceq v_0 \quad \text{y} \quad v_0 \neq v_{n-1}$$

por lo tanto, tenemos una **contradicción** (¿por qué?).

□

¿és un orden parcial un DAG?

Teorema

Si $(A, \leq)$ es un orden parcial,
entonces el grafo dirigido $(A, \leq)$ NO tiene ciclos ≥ 2.

En otras palabras, el diagrama de Hasse de $(A, \leq)$ es un DAG.

Si (A, R) es un DAG, entonces ¿es (A, R) un orden parcial?

¿és un DAG un orden parcial?

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.ccc

Definición

Se define la **clausura refleja y transitiva** de R como:

$$R^* \;=\; \left(R^r\right)^t$$

Proposición

Si (A, R) es un **DAG**, entonces (A, R^*) es un **orden parcial**.

Relación entre DAGs y ordenes parciales

Demostración: DAG $\Rightarrow$ orden parcial

¿qué debemos demostrar?

1. R^* es refleja. ✓
2. R^* es antisimétrica.
3. R^* es transitiva. ✓

Relación entre DAGs y ordenes parciales

Demostración: DAG $\Rightarrow$ orden parcial

2. R^* es antisimétrica.

Suponga que (A, R) es un grafo acíclico.

Por contradicción: Supongamos que R^* NO es antisimétrica.

Existe $(x, y) \in R^*$ y $(y, x) \in R^*$, pero $x \neq y$.

$\Rightarrow$ existe $j, k \geq 1$, tal que $(x, y) \in R^j$ y $(y, x) \in R^k$. (¿por qué?)

$\Rightarrow$ existe una secuencia (un camino): (¿por qué?)

$$x = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k = y$$
$$y = y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_j = x$$

tal que $(x_i, x_{i+1}) \in R$ para $i < k$ y $(y_i, y_{i+1}) \in R$ para $i < j$.

$\Rightarrow$ $x = x_0, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_j$ es un ciclo de largo ≥ 2 en (A, R).

contradicción (¿por qué?)

$\square$