NOMBRE: Jorge De Goyeneche SECCIÓN: 1

PUNTAJE:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1° Semestre 2022

# Tarea 4 – Respuesta Pregunta 2

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $A \subseteq \{0, ..., n\}$, decimos que $A$ es un *intervalo en* $\{0, ..., n\}$ si existen $a, b \in A$ tal que:

$$A = \{c \in \{0, ..., n\} \mid a \leq c \leq b\}$$

y lo denotamos por $[a, b]$. Por otro lado, para $a, b \in \{0, ..., n\}$ definimos el *intervalo absoluto* entre $a$ y $b$ como

$$[\![a, b]\!] := [\min(\{a, b\}), \max(\{a, b\})].$$

Sea $S \subseteq \{0, ..., n\}$ un conjunto distinto de vacío. Considere la relación $\sim_S \subseteq \{0, ..., n\} \times \{0, ..., n\}$ tal que para todo $a, b \in \{0, ..., n\}$, $a \sim_S b$ si, y solo si,

$$[\![a, b]\!] \cap S \neq \varnothing \rightarrow [\![a, b]\!] \subseteq S.$$

Por ejemplo, tomando $n = 20$, para $S = \{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 15\}$ se cumple que $7 \sim_S 5$ y $12 \sim_S 13$ pero $3 \not\sim_S 1$. Demuestre que para un $n$ cualquiera:

1. Para todo $S \subseteq \{0, ..., n\}$, $\sim_S$ es una relación de equivalencia sobre $\{0, ..., n\}$.
2. Para todo $S \subseteq \{0, ..., n\}$ y $c \in \{0, ..., n\}$, la clase de equivalencia $[c]_{\sim_S}$ es un intervalo en $\{0, ..., n\}$.

R1:

Para demostrar que una relación es una relación de equivalencia, debemos comprobar que cumple las siguientes tres propiedades:

1. Refleja
2. Simétrica
3. Transitiva

Refleja:

Por definición se debe cumplir la siguiente afirmación:

$$\forall a \in A.(a, a) \in R$$

Por lo que debemos demostrar que se cumple la relación $a \sim_S a$, que es la siguiente definición:

$$[\![a, a]\!] \cap S \neq \varnothing \rightarrow [\![a, a]\!] \subseteq S$$

$$[\![a, a]\!] := [\min(\{a, a\}), \max(\{a, a\})]$$

Donde el mínimo y el máximo entre $a$ y $a$ es $a$ mismo por lo que queda:

$$[\![a, a]\!] = a$$

El cual es un conjunto de $|[\![a, a]\!]| = 1$.

Si asumimos que se cumple que:

$$[\![a, a]\!] \cap S \neq \varnothing$$

Esto nos dice lo mismo que:

$$a \in S$$

Porque quedó demostrado que el conjunto es el mismo objeto. Si nuevamente hacemos el cambio tenemos que:

$$[\![a, a]\!] \in S$$

Por lo que cumple la definición y concluye que para todo $a \in A$ la relación $\sim_S$ es refleja.

Simétrica:

Por definición se debe cumplir la siguiente afirmación:

$$\forall (a, b) \in A.\ (a, b) \in R \to (b, a) \in R$$

Por lo que debemos demostrar que se cumple la relación $a \sim_S a$, que es la siguiente definición:

$$([\![a, b]\!] \cap S \neq \varnothing \to [\![a, b]\!] \subseteq S) \to ([\![b, a]\!] \cap S \neq \varnothing \to [\![b, a]\!] \subseteq S)$$

$$[\![a, b]\!] := [\min(\{a, b\}), \max(\{a, b\})]$$

Definiendo una relación posible entre $a$ y $b$ (SPDG):

$$a < b$$

Nos dará los siguientes valores para el máximo y el mínimo:

$$\min(a, b) = a$$

$$\max(a, b) = b$$

Si se cumple que:

$$[\![a, b]\!] \cap S \neq \varnothing \to [\![a, b]\!] \subseteq S$$

También se cumplirá para el conjunto inverso porque el máximo entre ellos seguirá siendo el mismo, y el mínimo entre ellos también seguirá siendo el mismo, por lo que la condición de permanencia será la misma:

$$\min(b, a) = a$$

$$\max(b, a) = b$$

De esto deducimos que para cualquier $(a, b) \in A$ se cumple que $\sim_S$ es simétrica debido a que los elementos se ordenan de mayor a menor automáticamente o se hace verdadero por trivialidad.

Transitividad:

Por definición se debe cumplir la siguiente afirmación:

$$\forall a, b, c \in A.(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$$

Asumiendo el lado izquierdo de la afirmación tenemos que:

$$\forall a, b, c \in A.(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$$

Lo que significa que se cumplen ambas afirmaciones:

$$[\![a, b]\!] \cap S \neq \varnothing \rightarrow [\![a, b]\!] \subseteq S$$

$$[\![b, c]\!] \cap S \neq \varnothing \rightarrow [\![b, c]\!] \subseteq S$$

Si el intervalo entre $a$ y $b$ se encuentra en S y el intervalo entre $b$ y $c$ se encuentra en S, significa que el intervalo entre $a$ y $c$ también se encuentra en S ya que el intervalo [a,c] es la unión de ambos intervalos [a,b] y [b,c], los cuales cuya intersección con S no es vacío debido a la pertenencia de los intervalos de la composición y además se cumple el lado derecho porque si ambos conjuntos base pertenecen a S, el conjunto combinado también. Por lo que se cumple:

$$[\![a, c]\!] \cap S \neq \varnothing \rightarrow [\![a, c]\!] \subseteq S$$

Por esta razón se cumple que es transitiva y por lo tanto, se cumple que $\sim_s$ es una relación de equivalencia sobre $\{0, ..., n\}$.

R2:

Para todo $S \subseteq \{0, ..., n\}$ y $c \in \{0, ..., n\}$, la clase de equivalencia $[c]_{\sim_S}$ es un intervalo en $A = \{0, ..., n\}$

Por definición de clase de equivalencia se tiene:

$$[c]_{\sim_S} = \{x \in A | c \sim_s x\}$$

Definiendo el conjunto cociente de la relación:

$$A/ \sim_s = \{[c]_{\sim_S} | x \in A\}$$

Por propiedad del conjunto cociente:

$$\bigcup A/ \sim_s = \text{A}$$

La clase $[c]_{\sim_S}$, necesariamente es un intervalo en A = {0,...,n}, ya que se comporta como un subconjunto del conjunto cociente $[c]_{\sim_S} \in A/ \sim_s$, el cual es una partición del dominio.