Equivalencia lógica y aplicaciones

Clase 02

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio última clase...

Proposiciones

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

verdadera (1) o **falsa** (0).

Conectivos lógicos

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Estos conectivos los usamos para crear **proposiciones compuestas**

Recordatorio última clase...

Variables y formulas

Una **variable proposicional** p es una variable que puede ser reemplazada por los valores $\mathtt{1}$ o $\mathtt{0}$.

Una **formula proposicional** α es una formula que puede ser:

1. una variable proposicional,
2. los valores $\mathtt{1}$ o $\mathtt{0}$, o
3. la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de formulas proposicionales.

Recordatorio última clase...

Sea $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ una formula con variables $p_1, \ldots, p_n$ y $v_1, \ldots, v_n$ una secuencia de valores 1 o 0.

Valuaciones (o asignación de verdad)

Una **valuación** (o asignación de verdad) $\alpha(v_1, \ldots, v_n)$ es el **valor de verdad** que resulta al considerar α como una proposición y $p_1, \ldots, p_n$ como proposiciones atómicas con valores de verdad $v_1, \ldots, v_n$, respectivamente.

Ejemplos

Si $\alpha(p, q, r) \;:=\; p \wedge (q \to r)$ y $\beta(p, q) \;:=\; (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge 1)$, entonces:

- $\alpha(1, 0, 1) = 1$
- $\alpha(0, 0, 0) = 0$
- $\beta(0, 1) = 1$

Recordatorio última clase...

Ejemplo (Tabla de verdad)

Para la formula $\alpha(p, q, r) := (\neg p \vee q) \wedge r$ tenemos

p	q	r	$(\neg p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Esta tabla se conoce como la **tabla de verdad** de la formula $\alpha(p, q, r)$.

¿qué ocurre si dos formulas tienen la **misma** tabla de verdad?

Outline

Outline

Equivalencia lógica entre formulas

Definición

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ dos formulas proposicionales con las mismas variables proposicionales.

Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes**:

$$\alpha \equiv \beta$$

si **para toda valuación** $v_1, \ldots, v_n$ se cumple que:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = \beta(v_1, \ldots, v_n)$$

¿qué propiedad tienen que cumplir las **tablas de verdad** de α y β para que α y β sean **lógicamente equivalentes**?

Equivalencia entre formulas

Ejemplo

Para las formulas $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Como ambas formulas son equivalentes para toda valuación, entonces:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Podemos demostrar varias **equivalencias útiles** de esta manera.

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes** :

1. **Conmutatividad**:

$$\begin{aligned} p \wedge q &\equiv q \wedge p \\ p \vee q &\equiv q \vee p \end{aligned}$$

2. **Asociatividad**:

$$\begin{aligned} p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r \end{aligned}$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

3. **Idempotente**:

$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \vee p \equiv p$$

4. **Doble negación**:

$$\neg\neg p \equiv p$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

5. **Distributividad**:

$$p \wedge (q \vee r) \quad \equiv \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Demostración

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

5. **Distributividad**:

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

6. **De Morgan**:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Demostración

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

7. **Implicación**:

$$
\begin{aligned}
p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\
p \rightarrow q &\equiv \neg q \rightarrow \neg p \\
p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)
\end{aligned}
$$

8. **Absorción**:

$$
\begin{aligned}
p \vee (p \wedge q) &\equiv p \\
p \wedge (p \vee q) &\equiv p
\end{aligned}
$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

9. **Identidad**:

$$\begin{aligned} p \vee 0 &\equiv p \\ p \wedge 1 &\equiv p \end{aligned}$$

10. **Dominación**:

$$\begin{aligned} p \wedge 0 &\equiv 0 \\ p \vee 1 &\equiv 1 \end{aligned}$$

Demuestre las equivalencias lógicas anteriores.

Tautología y contradicciones

Definición

Decimos que una formula $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ es:

- una **tautología** si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

- una **contradicción** si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

¿qué propiedad tiene que cumplir la **tabla de verdad** de $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ para que α sea una tautología o una contradicción?

Tautología y contradicciones

Definición

Decimos que una formula $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ es:

- una **tautología** si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

- una **contradicción** si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

¿cuáles formulas son tautologías/contradicciones?

- $p \vee \neg p$
- $p \wedge \neg p$
- $(p \leftrightarrow p) \rightarrow p$

(Composición de formulas proposicionales)

Definición

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y β_1, $\ldots \beta_n$ formulas proposicionales.

La **composición** $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es la formula resultante de reemplazar en α cada aparición de la variable p_i por la formula β_i para todo $i \leq n$.

Ejemplo

- $\alpha(p, q) \ := \ p \wedge (q \vee \neg p)$
- $\beta_1(r, s) \ := \ (r \wedge \neg s)$
- $\beta_2(t, u) \ := \ (t \rightarrow u)$

$$\alpha(\beta_1(r, s), \beta_2(t, u)) \ := \ (r \wedge \neg s) \wedge ((t \rightarrow u) \vee \neg(r \wedge \neg s))$$

(Composición de formulas proposicionales)

Definición

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y β_1, $\ldots \beta_n$ formulas proposicionales.

La **composición** $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es la formula resultante de reemplazar en α cada aparición de la variable p_i por la formula β_i para todo $i \leq n$.

Teorema

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$, $\alpha'(p_1, \ldots, p_n)$ y β_1, $\ldots$, β_n formulas proposicionales.

Si $\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \alpha'(p_1, \ldots, p_n)$, entonces $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv \alpha'(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

¿qué implicación tiene este teorema para las **equivalencias útiles**?

(Composición de formulas proposicionales)

Teorema

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$, $\alpha'(p_1, \ldots, p_n)$ y β_1, ..., β_n formulas proposicionales.

Si $\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \alpha'(p_1, \ldots, p_n)$, entonces $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv \alpha'(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Demostración

Sean $\alpha(p, q)$, $\alpha'(p, q)$, $\beta_1(r, s)$ y $\beta_2(r, s)$ formulas tal que:

$$\alpha(p, q) \quad \equiv \quad \alpha'(p, q)$$

¿qué debemos demostrar?

(Composición de formulas proposicionales)

Demostración

Sean $\alpha(p,q)$, $\alpha'(p,q)$, $\beta_1(r,s)$ y $\beta_2(r,s)$ formulas tal que:

$$\alpha(p,q) \quad \equiv \quad \alpha'(p,q)$$

Considere una valuación cualquiera (v_1, v_2) y defina los valores de verdad:

$$\begin{aligned} v_1' &:= \beta_1(v_1, v_2) \\ v_2' &:= \beta_2(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta_1(v_1,v_2), \beta_2(v_1,v_2)) &= \alpha(v_1', v_2') \\ &= \alpha'(v_1', v_2') \qquad (\mathbf{?}) \\ &= \alpha'(\beta_1(v_1,v_2), \beta_2(v_1,v_2)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha(\beta_1(r,s), \beta_2(r,s)) \equiv \alpha'(\beta_1(r,s), \beta_2(r,s))$ $\square$

¿para qué nos sirven las equivalencias lógicas?

Ejemplo

¿ $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$?

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(doble neg.)}\\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(distrib.)}\\
&\equiv 0 \vee (\neg p \wedge \neg q) && (\neg p \wedge p \equiv 0)\\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee 0 && \text{(conmut.)}\\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{(identidad)}
\end{aligned}
$$

Operadores generalizados

Gracias a la **asociatividad** de $\vee$ y $\wedge$, nos ahorraremos los **paréntesis**:

$$(p_1 \vee p_2) \vee p_3 \equiv p_1 \vee (p_2 \vee p_3) \equiv p_1 \vee p_2 \vee p_3$$
$$(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3 \equiv p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3) \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$

También usaremos una **generalización** de $\wedge$ y $\vee$:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$
$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \equiv p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$$

Operadores generalizados

Ejemplo equivalencias generalizadas

Distributividad:

$$p \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{n} q_i \right) \quad \equiv \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \big(p \vee q_i \big)$$
$$p \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} q_i \right) \quad \equiv \quad \bigvee_{i=1}^{n} \big(p \wedge q_i \big)$$

De Morgan:

$$\neg \bigwedge_{i=1}^{n} p_i \quad \equiv \quad \bigvee_{i=1}^{n} \neg p_i$$
$$\neg \bigvee_{i=1}^{n} p_i \quad \equiv \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \neg p_i$$

Outline

Conectivos ternarios

Queremos definir el conectivo lógico: if p then q else r

p	q	r	if p then q else r
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

¿cómo se puede representar este conectivo usando $\neg$, $\wedge$ y $\rightarrow$?

Conectivos ternarios

Solución: $(p \to q) \land ((\neg p) \to r)$

p	q	r	`if` p `then` q `else` r	$(p \to q) \land ((\neg p) \to r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Conectivos n-arios

Usando tablas de verdad podemos definir conectivos n-arios: $C(p_1, \ldots, p_n)$.

p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	$C(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$
0	0	$\cdots$	0	0	b_1
0	0	$\cdots$	0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	1	b_{2^n}

¿és posible representar $C(p_1, \ldots, p_n)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Conectivos n-arios

Ejemplo

p	q	r	$C(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

¿és posible representar $C(p,q,r)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Conectivos n-arios

Ejemplo

p	q	r	$C(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

p	q	r	$\alpha_4(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\alpha_4(p,q,r) \ := \ (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

¿és posible representar $C(p,q,r)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Conectivos n-arios

p_1	p_2		$\cdots$		p_{n-1}	p_n	$C(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$
0	0		$\cdots$		0	0	b_1
0	0		$\cdots$		0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_{i1}	v_{i2}	$\cdots$	v_{ij}	$\cdots$	$v_{i(n-1)}$	v_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1		$\cdots$		1	1	b_{2^n}

Suponiendo que $v_{i1}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{in}$ es la valuación correspondiente a la fila i con valor b_i de la tabla de verdad de $C(p_1, \ldots, p_n)$, entonces:

$$C(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n) \quad \equiv \quad \bigvee_{i\,:\,b_i=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right)$$

Toda tabla de verdad se puede representar con $\wedge$, $\vee$ y $\neg$!!!

Conectivos n-arios

$$C(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n) \equiv \bigvee_{i\,:\,b_i=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right)$$

Ejemplo (anterior)

p_1	p_2	p_3	$C(p_1, p_2, p_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

p_1	p_2	p_3	$\alpha(p_1, p_2, p_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$\alpha(p_1, p_2, p_3) := (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$

Formas normales

Un **literal** es una variable proposicional o la negación de una variable.

Definición

Una formula α está en **Forma Normal Disyuntiva** (DNF) si es una **disyunción de conjunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha \; = \; \beta_1 \; \vee \; \beta_2 \; \vee \; \ldots \; \vee \; \beta_k$$

con $\beta_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{ik_i})$ y $l_{i1}, \ldots, l_{ik_i}$ son literales.

¿cuáles formulas están en DNF?

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p \wedge s) \vee (r \wedge \neg s)$
- $(s \wedge (p \vee r)) \vee (\neg q \wedge r \wedge s)$
- $(s \wedge r) \vee \neg q \vee r \vee s$

Formas normales

Un **literal** es una variable proposicional o la negación de una variable.

Definición

Una formula α está en **Forma Normal Conjuntiva** (CNF) si es una **conjunción de disyunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha \quad = \quad \beta_1 \ \wedge \ \beta_2 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \beta_k$$

con $\beta_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{ik_i})$ y $l_{i1}, \ldots, l_{ik_i}$ son literales.

¿cuáles formulas estan en CNF?

- $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p \vee s) \wedge (r \vee \neg s)$
- $(s \wedge r) \wedge (\neg q \vee r \vee s)$

Formas normales y equivalencia lógica

Teorema

1. Toda formula α es **lógicamente equivalente** a una formula en **DNF**.
2. Toda formula α es **lógicamente equivalente** a una formula en **CNF**.

Demostración DNF (explicación)

Sea $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ la valuación correspondiente a la i-ésima fila de la tabla de verdad de α con valor $\alpha(v_{i1}, \ldots, v_{in})$, entonces:

$$\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \bigvee_{i\,:\,\alpha(v_{i1},\ldots,v_{in})=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right)$$

Solo por esta vez, daremos la afirmación de DNF
como verdadera sin dar una demostración.

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración CNF (asumiendo que DNF es verdadera)

Sea $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ una formula cualquiera.

Considere la formula $\neg\alpha(p_1, \ldots, p_n)$. Asumiendo DNF, sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\neg\alpha(p_1, \ldots, p_n) \quad &\equiv \quad \bigvee_{i \,:\, (\neg\alpha)(v_{i1}, \ldots, v_{in}) = 1} \left(\left(\bigwedge_{j \,:\, v_{ij} = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \,:\, v_{ij} = 0} \neg p_j \right) \right) \\
&\equiv \quad \bigvee_{i \,:\, \alpha(v_{i1}, \ldots, v_{in}) = 0} \left(\left(\bigwedge_{j \,:\, v_{ij} = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \,:\, v_{ij} = 0} \neg p_j \right) \right)
\end{aligned}
$$

¿cómo usamos lo anterior para demostrar CNF?

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (CNF)

Por el teorema de composición de formulas y De Morgan:

$$
\begin{aligned}
\alpha(p_1,\ldots,p_n) &\equiv \neg(\neg\alpha(p_1,\ldots,p_n)) \\
&\equiv \neg\left(\bigvee_{i\,:\,\alpha(v_{i1},\ldots,v_{in})=0}\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j\right)\right) \\
&\equiv \bigwedge_{i\,:\,\alpha(v_{i1},\ldots,v_{in})=0} \neg\left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=1} p_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_{ij}=0} \neg p_j\right)\right) \\
&\equiv \bigwedge_{i\,:\,\alpha(v_{i1},\ldots,v_{in})=0} \left(\bigvee_{j\,:\,v_{ij}=1} \neg p_j\right) \vee \left(\bigvee_{j\,:\,v_{ij}=0} p_j\right)
\end{aligned}
$$

$\square$ (significa "queda esto demostrado")