Desde conjuntos a relaciones

Clase 10

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Conjunto potencia

Definición

Para un conjunto A, se define el **conjunto potencia** $\mathcal{P}(A)$ de todos los subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Ejemplo

Suponga que $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces:

- ¿es cierto que $2 \in \mathcal{P}(A)$?
- ¿es cierto que $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$?
- ¿es cierto que $A \in \mathcal{P}(A)$?
- ¿es cierto que $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$?

¿cuál es el resultado de $\bigcup \mathcal{P}(A)$? ¿o de $\bigcap \mathcal{P}(A)$?

Conjunto potencia

Ejemplo 1

Para el conjunto $\{1, 2\}$, ¿cuáles son todos los elementos de $\mathcal{P}(\{1, 2\})$?

$\mathcal{P}(\{1, 2\})$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1,2\} & \\
\{1\} \arrow[ur, "\subseteq"] & & \{2\} \arrow[ul, "\subseteq"'] \\
 & \varnothing \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}
$$

(¿qué flecha estaría faltando?)

Conjunto potencia

Ejemplo 2

Para el conjunto $\{1,2,3\}$, ¿cuáles son todos los elementos de $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$?

$\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Cardinalidad de un conjunto

Definición

Para todo conjunto A, se define el valor:

$$|A| = \text{número de elementos distintos en } A.$$

Ejemplo

- $|\{1, 2\}| = 2$
- $|\{1, 1, 2\}| = 2$
- $|\{1, 2, 3, \ldots\}| = \infty$

¿para cuál conjunto se tiene que $|A| = 0$?

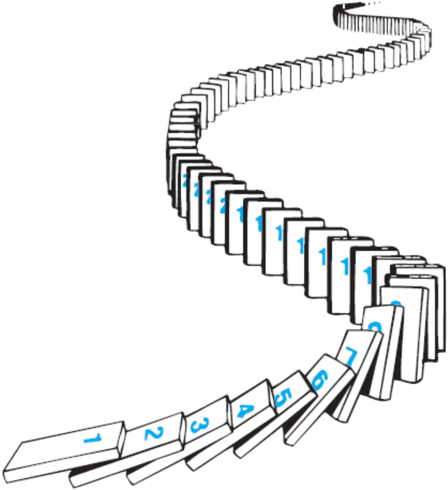
¿cuál es la cardinalidad de $\mathcal{P}(A)$?

Suponga $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, ¿cuál es la **cardinalidad** de $\mathcal{P}(A)$ según n?

$$\begin{tikzcd}
& \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
& \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

¿2^n? ¿cómo lo demostramos?

Demostración por inducción



Demostración por inducción

Suponga que deseamos demostrar una afirmación $\forall x.\, P(x)$ sobre $\mathbb{N}$.

Principio de inducción

Para una afirmación $P(x)$ sobre los naturales, si $P(x)$ cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero,
2. si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo n en los naturales se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Notación

- $P(0)$ se llama el **caso base**.
- En el paso 2.
  - $P(n)$ se llama la **hipótesis de inducción**.
  - $P(n+1)$ se llama la **tesis de inducción** o paso inductivo.

Cardinalidad de un conjunto

Teorema

Si $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Demostración

Demostramos que se cumple para $n = 0$:

Caso base ($n = 0$): $\quad |\mathcal{P}(\varnothing)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0$

Cardinalidad de un conjunto

Demostración (continuación)

Suponemos que se cumple para un n cualquiera y demostramos para $n+1$:

Hipótesis de inducción:

$$|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})| \quad = \quad 2^n$$

Inducción (idea):

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Cardinalidad de un conjunto

Demostración (continuación)

Suponemos que se cumple para un n cualquiera y demostramos para $n+1$:

Hipótesis de inducción:

$$|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})| \quad = \quad 2^n$$

Inducción:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n+1\})| &= \left|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}) \cup \left\{A \cup \{n+1\} \mid A \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})\right\}\right| \\
&= \left|\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})\right| + \left|\left\{A \cup \{n+1\} \mid A \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})\right\}\right| \\
&= |\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})| + |\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})| \\
&= 2^n + 2^n \;=\; 2^{n+1}
\end{aligned}$$

$\square$

Outline

Teoría de conjuntos es la base de las matemáticas

Con conjuntos podemos **representar**:

- Números naturales, enteros, racionales, ...
- Funciones, secuencias, ...
- Grafos, árboles, tablas, matrices, ...

Veremos algunos ejemplos

¿desde donde empiezan los naturales? ¿0 o 1?

Para todo conjunto A considere el operador:

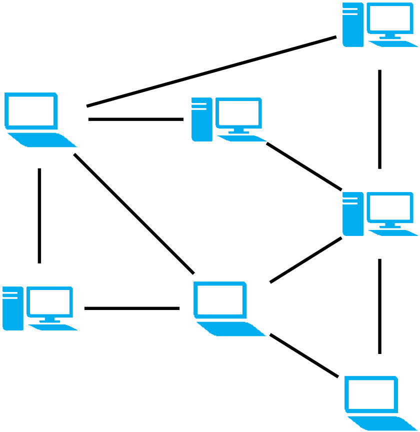
$$\sigma(A) = A \cup \{A\}$$

El **conjunto de los números naturales** se define como sigue:

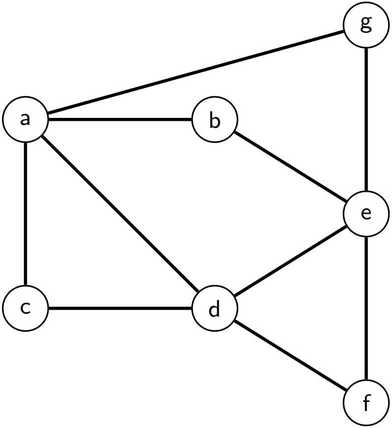
$$\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \sigma(0) = \sigma(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\} \\
2 &= \sigma(1) = \sigma(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\
3 &= \sigma(2) = \sigma(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

¿cuál es el significado del operador σ en $\mathbb{N}$?

¿cómo representamos redes con teoría de conjuntos?



¿cómo representamos redes con teoría de conjuntos?



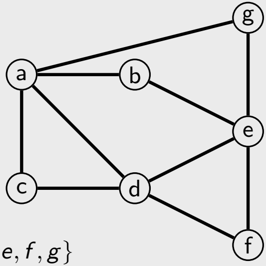
¿cómo modelamos las conecciones entre los nodos?

Grafos como conjuntos

Definición

Un **grafo** G sobre el dominio V es un subconjunto $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que para todo $e \in E$ se cumple que $|e| = 2$.

Ejemplo



- $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $E = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, g\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{e, g\}\big\}$

Grafos como conjuntos

Definición

Un **grafo** G sobre el dominio V es un subconjunto $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que para todo $e \in E$ se cumple que $|e| = 2$.

Notación

- Los elementos en V los llamaremos los **vértices** o nodos del grafo.
- Los elementos en E los llamaremos las **aristas** del grafo.

Grafos serán estructuras muy útiles durante el curso!

¿cómo representamos tablas con teoría de conjuntos?

Nombre	**Curso**
Marcelo	Criptografía
Juan	Lógica
Cristian	Matemáticas Discretas

¿cómo representamos esta estructura con **conjuntos**?

Necesitamos relaciones

Una **relación** es una correspondencia entre objetos.

Varios ejemplos en matemáticas como:

- 'menor que', 'subconjunto', 'igualdad', ...

Relaciones nos darán **orden** a nuestros objectos

Outline

Pares ordenados

Definición (informal)

Un pareja de objetos (a, b) es un **par ordenado** si
se distingue un **primer** elemento y un **segundo** elemento.

Definición

Para dos elementos a y b, se define el **par ordenado** (a, b) como:

$$(a, b) \;=\; \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

Proposición

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si, y solo si,} \quad a = c \;\; \text{y} \;\; b = d$$

En particular, $\quad (a, b) \neq (b, a)$

Pares ordenados

Demostración: $(a,b) = (c,d)$ ssi $a = c$ y $b = d$

($\Leftarrow$) Por definición de par ordenado.

($\Rightarrow$) Suponga que $(a,b) = (c,d)$. **Por casos**:

1. Si $c = d$, entonces:
   - Como $c = d$, entonces $\{\{c\},\{c,d\}\} = \{\{c\}\}$.
   - Como $(a,b) = (c,d)$, entonces:
   $$\{\{a\},\{a,b\}\} \subseteq \{\{c\}\}$$
   - Entonces $\{a\} = \{c\}$ y $\{a,b\} = \{c\}$.
   - Como $\{a\} = \{c\}$, entonces $a = c$.
   - Como $\{a,b\} = \{c\}$, entonces $b = c = d$.

   Por lo tanto, $a = c$ y $b = d$. ✓

Pares ordenados

Demostración: $(a,b)=(c,d) \quad$ ssi $\quad a=c$ y $b=d$

($\Leftarrow$) Por definición de par ordenado.

($\Rightarrow$) Suponga que $(a,b)=(c,d)$. **Por casos**:

1. Si $c=d$, entonces ... ✓

2. Si $c \neq d$,entonces:
   - Como $(a,b)=(c,d)$, entonces:
   $$\big\{\{c\},\{c,d\}\big\} \subseteq \big\{\{a\},\{a,b\}\big\} \qquad (*)$$
   - De (*), sabemos que $\{c,d\} \in \big\{\{a\},\{a,b\}\big\}$:
     - Como $c \neq d$, entonces $a \neq b$.
     - Como $a \neq b$, entonces $\{c,d\}=\{a,b\}$.
   - De (*), sabemos que $\{c\} \in \big\{\{a\},\{a,b\}\big\}$:
     - Como $a \neq b$, entonces $a=c$.
   - Como $\{c,d\}=\{a,b\}$ y $a=c$, entonces $b=d$. $\square$

Pares ordenados (generalización)

Definición

- Para tres elementos a, b, c se define el **triple ordenado** (a, b, c) como:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

- En general, para $a_1, \ldots, a_n$, se define una ***n*-tupla ordenada** como:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

Proposición

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \quad \text{si, y solo si} \quad a_i = b_i \text{ para todo } i \leq n$$

Demostración: ejercicio.

Producto cartesiano

Definición

- Para dos conjuntos A y B se define el **producto cartesiano** como:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

- En general, para conjuntos $A_1, \dots, A_n$ se define el **producto cartesiano generalizado**:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \}$$

Ejemplos

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$

Producto cartesiano

Algunas preguntas

1. ¿ $A \times B = B \times A$?
2. ¿ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$?

Ejemplo

- $\{1\} \times \{2\} = \{2\} \times \{1\}$?
- $(\{1\} \times \{1\}) \times \{1\} = \{1\} \times (\{1\} \times \{1\})$?

Outline

Relaciones

Definición

Dado un conjunto A y B, R es una **relación binaria** sobre A y B si:

$$R \subseteq A \times B$$

Si $B = A$ decimos que R es una relación binaria sobre A.

¿qué relaciones binarias conocen?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo 1

Considere el conjunto A:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

Considere la siguiente relación:

$$R_2 = \big\{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\big\}$$

- ¿es cierto que $(d, a) \in R_2$?
- ¿es cierto que $(c, c) \in R_2$?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo 2

Nombre	**Curso**
Marcelo	Criptografía
Marcelo	Matemáticas Discretas
Juan	Lógica
Cristian	Matemáticas Discretas

Considere los siguientes conjuntos A y B:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Marcelo}, \text{Juan}, \text{Cristian}\} \\ B &= \{\text{Criptografía}, \text{Lógica}, \text{MD}\} \end{aligned}$$

Una relación que modela la tabla anterior es:

$$\begin{aligned} R_1 = \{&(\text{Marcelo}, \text{Criptografía}), (\text{Marcelo}, \text{MD}), \\ &(\text{Juan}, \text{Lógica}), (\text{Cristian}, \text{MD})\} \end{aligned}$$

¿cuál es la diferencia entre una “tabla” y una relación?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo 3

Considere el conjunto $\mathbb{N}$ y las relaciones:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\} \\
T_2 &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\} \\
T_3 &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\}
\end{aligned}
$$

- ¿es cierto que $T_1 \subseteq T_2$?
- ¿es cierto que $T_3 \subseteq T_1$?
- ¿es cierto que $(T_2 \cup T_3) = T_1$?

Relaciones (notación)

Definición

Para una relación R y un par (a,b) usaremos la siguiente **notación**:

$$\left.\begin{array}{c} (a,b) \in R \\ \text{o} \\ a\ R\ b \end{array}\right\} \quad (a,b) \text{ pertenece a la relación } R$$

$$\left.\begin{array}{c} (a,b) \notin R \\ \text{o} \\ a\ \not R\ b \end{array}\right\} \quad (a,b) \textbf{ NO} \text{ pertenece a la relación } R$$

Ejemplos

- $(2,3) \in \leq$ o $2 \leq 3$
- $(5,2) \notin \leq$ o $5 \nleq 2$