NOMBRE: Jorge De Goyeneche SECCIÓN: 1

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1° Semestre 2022

Tarea 2 – Respuesta Pregunta 2

1. Para un $N > 0$ cualquiera y un símbolo de predicado $<$, sea $\mathcal{I}_N$ tal que

$$\mathcal{I}_N(dom) := \{0, \ldots, N\}$$
$$\mathcal{I}_N(<) := x < y$$

Demuestre que para todo $0 \leq k \leq N$ se tiene que k es definible en lógica de predicados.

R: Buscamos una formula $\alpha(n)$ general tal que $\mathcal{I}_N \models \alpha$ para todo posible valor de k dentro del $\mathcal{I}_N(dom)$ pero no para los demás valores del dominio. Para lograr esto debemos encontrar sub-fórmulas para hacer mas fácil el cumplimiento de la definición de un valor del dominio.

Podemos comenzar con una formula que funcione para el $0 \in \mathcal{I}_N(dom)$:

$$\alpha_0(x) := \forall y.\neg(x < y)$$

Definimos a su sucesor:

$$S(x, y) := \neg(x < y) \wedge \forall z.((x < z) \wedge (z < y))$$

De esta manera para $2 \in \mathcal{I}_N(dom)$:

$$\alpha_2(x) := \forall y.\forall z.(\alpha_0(z) \wedge S(z, y)) \rightarrow S(y, x)$$

Finalmente para n:

$$\alpha_N(N) := \forall y.(\alpha_{n-1}(y) \rightarrow S(x, y))$$

2. A partir del ítem anterior, demuestre que existen infinitas fórmulas $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ que solo usan el símbolo de predicado $<$, tales que $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$ para todo $i \neq j$.

R: En el inciso anterior pudimos definir una fórmula que se define en $\mathcal{I}_N$ para n elementos del dominio. Como esta fórmula funciona para cualquier numero con el que sea evaluado ya que se construye en cadena desde su origen, en este caso el 0, existen infinitas formulas que definen otros valores dentro del dominio original de $\mathcal{I}_N$ y más allá de este, $\alpha_1, \alpha_2, etc....$ Cada fórmula es definible y cumple $\alpha_i \not\models \alpha_j$ para todo $i \neq j$.