Coloraciones, Caminos y ciclos

Clase 29

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

¿cómo programar los exámenes de fin de semestre?

- Debemos programar los exámenes de:

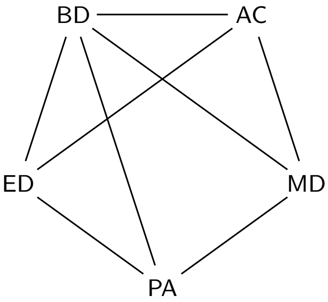
  Programación Avanzada (PA), Matemáticas Discretas (MD),
  Arquitectura de Computadores (AC), Bases de Datos (BD) y
  Estructuras de Datos (ED)

- Los exámenes pueden realizarse solo en las mañanas.

- No puede haber un alumno que tenga dos exámenes en un mismo día.

¿cuánto es el mínimo de días que necesitamos?

¿cómo programar los exámenes de fin de semestre?

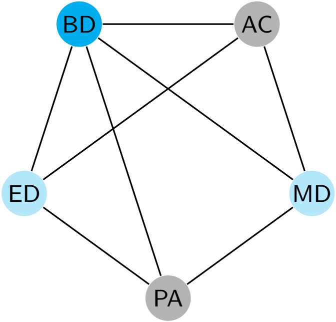


Grafo de **conflictos**:

"una arista entre los cursos c_1 y c_2
si ambos cursos tienen algún alumno en común."

¿podemos hacer los exámenes en 5 días? ¿en 4 días? ¿en 3 días?

Programar los exámenes en colores ...



Los colores en el grafo deben cumplir que:

"si c_1 esta conectado con c_2,

entonces c_1 y c_2 tienen colores distintos. "

Cantidad de colores = Cantidad de días para exámenes.

¿es posible colorear el grafo con menos de 3 colores?

Coloración de un grafo

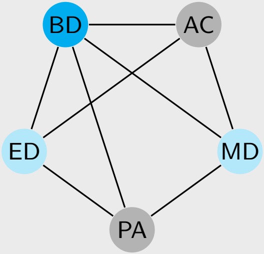
Definición

Una k-**coloración** de un grafo $G = (V, E)$ es una función:

$$C : V \to \{0, \ldots, k - 1\}$$

tal que para todo $u, v \in V$, si $\{u, v\} \in E$, entonces $C(u) \neq C(v)$.

Ejemplo



Coloración de un grafo

Definición

Una k-**coloración** de un grafo $G = (V, E)$ es una función:

$$C : V \to \{0, \ldots, k-1\}$$

tal que para todo $u, v \in V$, si $\{u, v\} \in E$, entonces $C(u) \neq C(v)$.

El mínimo valor k tal que $G = (V, E)$ tiene una k-coloración se define como el **número cromático** de G y lo denotaremos por $\chi(G)$.

¿cuál es el número cromático de ...

- el grafo completo K_n?
- el grafo línea L_n?
- el grafo ciclo C_n?

¿cómo encontramos el número cromático de un grafo?

Encontrar el número cromático de un grafo es muy díficil!

(NP-completo)

Teorema

Un grafo G con grado máximo a lo más k es $(k+1)$-coloreable.

Demostración

Por inducción simple (para un k fijo):

$$P(n) \quad := \quad \text{todo grafo } G \text{ con } n \text{ nodos y grado máximo a los más } k \text{ es } (k+1)\text{-coloreable.}$$

¿cómo encontramos el número cromático de un grafo?

Demostración

$$P(n) \quad := \quad \text{todo grafo } G \text{ con } n \text{ nodos y grado máximo a los más } k \text{ es } (k+1)\text{-coloreable.}$$

Caso base: $G = (\{u\}, \varnothing)$ ✓

¿cómo encontramos el número cromático de un grafo?

Demostración

$$P(n) \quad := \quad \begin{array}{l} \text{todo grafo } G \text{ con } n \text{ nodos y} \\ \text{grado máximo a los más } k \text{ es } (k+1)\text{-coloreable.} \end{array}$$

Caso inductivo: Suponemos $P(n-1)$ y demostramos $P(n)$.

Sea $G = (V, E)$ tal que $|V| = n$ y $\deg(v) \leq k$ para todo $v \in V$.

Sea $u \in V$ un vértice cualquiera.

Defina el grafo $G - u \;=\; (\, V \setminus \{u\},\ \{e \in E \mid u \notin e\}\,)$.

Como $|V \setminus \{u\}| = n - 1$,
sea $C : V \setminus \{u\} \to \{0, \ldots k\}$ una $k+1$-coloración de $G - u$. (?)

Escoja un color $b \in \{0, \ldots k\} \setminus \{C(v) \mid \{u, v\} \in E\}$. (?)

Defina $C' : V \to \{0, \ldots k\}$ como:

$$C'(v) \;=\; \begin{cases} C(v) & \text{si } v \neq u \\ b & \text{si } v = u \end{cases}$$

¿cómo encontramos el número cromático de un grafo?

Demostración

$$P(n) \quad := \quad \text{todo grafo } G \text{ con } n \text{ nodos y grado máximo a los más } k \text{ es } (k+1)\text{-coloreable.}$$

Caso inductivo:

Escoja un color $b \in \{0, \ldots k\} \setminus \{C(v) \mid \{u, v\} \in E\}$.

Defina $C' : V \to \{0, \ldots k\}$ como:

$$C'(v) = \begin{cases} C(v) & \text{si } v \neq u \\ b & \text{si } v = u \end{cases}$$

Para todo $\{v_1, v_2\} \in E$ se tiene que $C'(v_1) \neq C'(v_2)$:

- Si $v_1 \neq u \neq v_2$, entonces $C'(v_1) = C(v_1) \neq C(v_2) = C'(v_2)$.
- Si $u = v_1$ (SPDG), entonces $C'(u) = b \neq C(v_2)$. (?)

Por lo tanto, C' es una $k+1$ coloración de G. $\square$

Outline

Caminos en un grafo

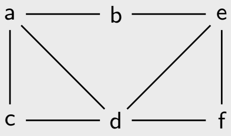
Definición

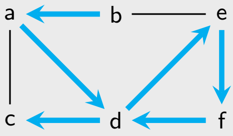
Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices:

$$v_0, v_1, \ldots, v_n$$

tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

¿cuál es un camino en G?





b, a, d, e, f, d, c

Caminos en un grafo

Definición

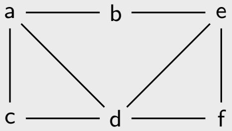
Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices:

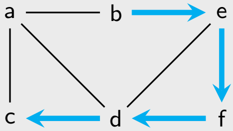
$$v_0, v_1, \ldots, v_n$$

tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en G se dice **simple** si
todos los vértices de la secuencia son distintos $(v_i \neq v_j)$.

¿cuál es un camino simple en G?





b, e, f, d, c

Caminos en un grafo

Definición

Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices:

$$v_0, v_1, \ldots, v_n$$

tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en G se dice **simple** si
todos los vértices de la secuencia son distintos $(v_i \neq v_j)$.

Lema

Si existe un camino entre dos nodos u y v de largo k,
entonces existe un camino simple entre u y v de largo menor o igual que k.

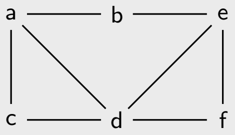
Demostración (ejercicio).

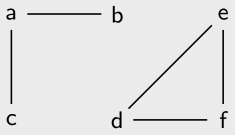
Conexidad

Definición

Dos vértices u y v se dicen **conectados** en G si existe un camino de u a v.

¿cuáles nodos estan conectados en G?





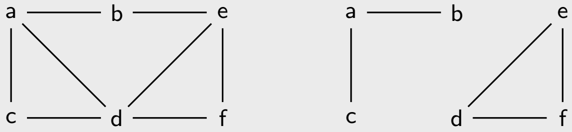
Conexidad

Definición

Dos vértices u y v se dicen **conectados** en G si existe un camino de u a v.

Un grafo se dice **conexo** si cualquier par de vértices están conectados.

¿cuáles grafos son conexos?



Conexidad

Definición

Dos vértices u y v se dicen **conectados** en G si existe un camino de u a v.

Un grafo se dice **conexo** si cualquier par de vértices están conectados.

Para un grafo $G = (V, E)$ se define la relación $R_G \subseteq V \times V$ tal que $(u, v) \in R_G$ si, y solo si, u esta conectado a v en G.

¿qué propiedades cumple la relación R_G?

1. Refleja. ✓
2. Simétrica. ✓
3. Transitiva. ✓

Conexidad

Definición

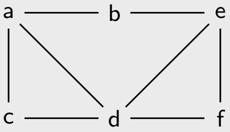
Dos vértices u y v se dicen **conectados** en G si existe un camino de u a v.

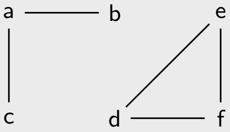
Un grafo se dice **conexo** si cualquier par de vértices están conectados.

Para un grafo $G = (V, E)$ se define la relación $R_G \subseteq V \times V$ tal que $(u, v) \in R_G$ si, y solo si, u esta conectado a v en G.

Para un grafo $G = (V, E)$ se define las **componentes conexas** de G como el conjunto de las **clases de equivalencia** de R_G.

¿cuáles son las componentes conexas de cada grafo?





Un grafo G es conexo si, y solo si, G tiene **una sola componente conexa**.

Conexidad

Teorema

Todo grafo $G = (V, E)$ tiene al menos $|V| - |E|$ componentes conexas.

Demostración

Por inducción fuerte:

$$\begin{aligned} P(n) \quad := \quad & \text{todo grafo } G = (V, E) \text{ con } n \text{ aristas} \\ & \text{tiene al menos } |V| - |E| \text{ componentes conexas.} \end{aligned}$$

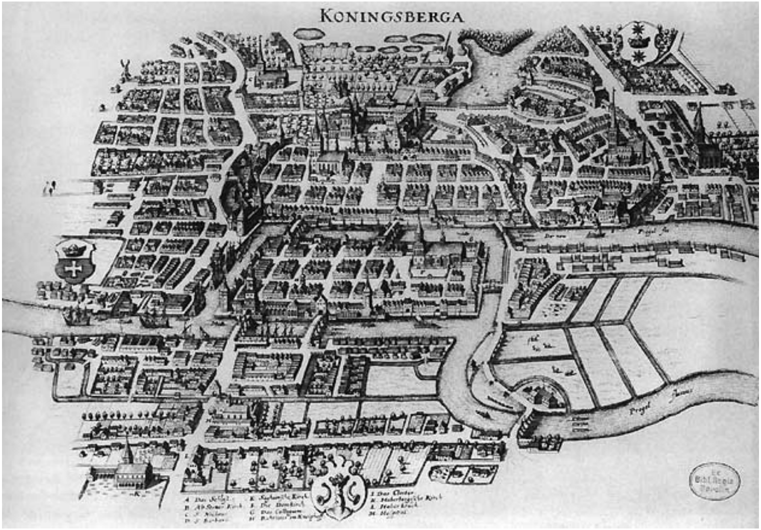
(Ejercicio: termine la demostración)

Corolario

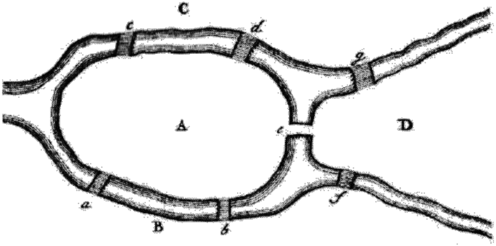
Todo grafo $G = (V, E)$ conexo tiene al menos $|V| - 1$ aristas.

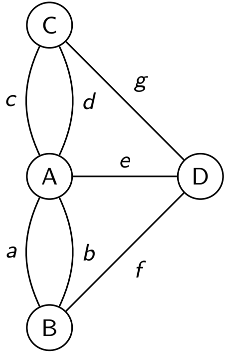
Outline

Los siete puentes de Köningsberg (Siglo XVIII)



Los siete puentes de Köningsberg (Siglo XVIII)





¿existe una caminata por la ciudad que recorra cada puente exactamente una vez?

Caminos cerrados y ciclos

Definición

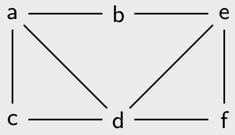
Un **camino cerrado** en $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices:

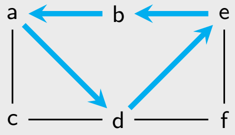
$$v_0, v_1, \ldots, v_n$$

tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $v_0 = v_n$.

Un camino cerrado $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en G es un **ciclo** si todos los vértices son distintos exceptuando v_0 y v_n.

¿cuál es un ciclo en G?





b, a, d, e, b

Caminos y tours Eulerianos

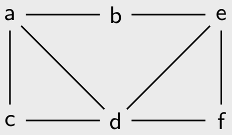
Definición

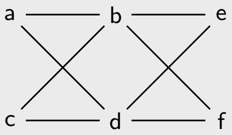
Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en $G = (V, E)$ es **Euleriano** si el camino **recorre todas las aristas** exactamente una vez, formalmente:

$$\text{para todo } e \in E \text{ existe un único } i < n \text{ tal que } e = \{v_i, v_{i+1}\}$$

Un **tour Euleriano** es un camino Euleriano **cerrado**.

¿cuál grafo tiene un tour Euleriano?





¿cómo verificamos si un grafo tiene un **tour Euleriano**?

¿cómo verificamos si un grafo tiene un tour Euleriano?

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo.

G tiene un tour Euleriano si, y solo si, todo vértice en G tiene **grado par**.

Demostración ($\Rightarrow$)

Si $G = (V, E)$ tiene un tour Euleriano, entonces sea $\pi = v_0, \ldots, v_n$ el tour.

Como π es Euleriano, entonces para todo vértice $v \in V$, se tiene que:

$$\deg(v) \;=\; 2 \cdot \left|\{\, i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid v = v_i \,\}\right| \qquad \text{(¿por qué?)}$$

Por lo tanto, todos vértice en G tiene grado par.

¿cómo verificamos si un grafo tiene un tour Euleriano?

Demostración ($\Leftarrow$)

Suponemos que todo vértice en G grado par.

Sea $\pi = v_0, \dots, v_n$ un **camino de largo máximal**
que recorre cada arista a lo más una vez.

- π recorre todas las aristas incidentes a v_0 y v_n. (¿por qué?)
- $v_0 = v_n$. (¿por qué?)

Por lo tanto, π tiene que ser un **camino cerrado**.

PD: π es un tour Euleriano.

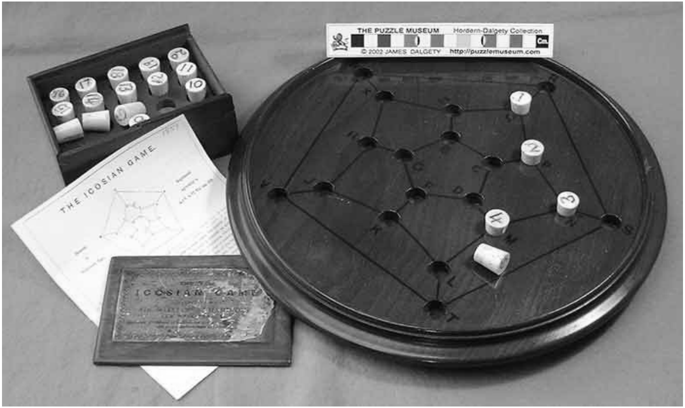
Por **contradicción**, suponga que
existe $\{u, v_i\} \in E$ con $i \leq n$ tal que $\{u, v_i\}$ NO es visitada por π.
(¿por qué existe $\{u, v_i\} \in E$?)

Entonces sea $\pi' = u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_i$ un nuevo camino.

Como π' recorre cada arista a lo más una vez, **contradicción**! (¿por qué?)

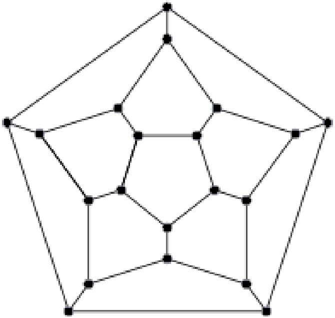
$\square$

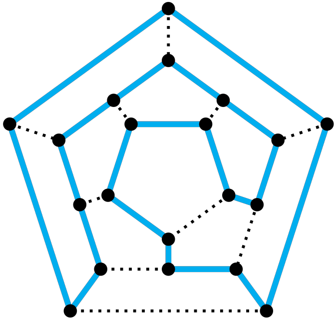
Juegos de Hamilton



Inventados por William Hamilton (1857)

Juegos de Hamilton





¿existe una caminata por el tablero que recorra cada nodo exactamente una vez?

Caminos y tours Hamiltoneanos

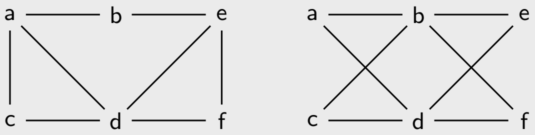
Definición

Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en $G = (V, E)$ es **Hamiltoneano** si el camino **recorre todos los vértices** exactamente una vez, formalmente:

$$\text{para todo } v \in V \text{ existe un único } i < n \text{ tal que } v = v_i$$

Un **tour Hamiltoneano** es un camino Hamiltoneano **cerrado**.

¿cuál grafo tiene un tour Hamiltoneano?



¿cómo verificamos si un grafo tiene un **tour Hamiltoneano**?

(NP-completo)

FIN . . .

FIN . . .
¿dónde puedo saber más sobre teoría de la computación?

Algunos cursos:

1. Teoría de autómatas y lenguajes formales.
2. Lógica para ciencia de la computación.
3. Complejidad computacional.
4. Teoría de modelos finitos.

Si están interesados, solo preguntar!