Inducción estructural

Clase 23

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Equivalencia de principios de inducción (clase pasada)

Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Principio del buen orden.
2. Principio de inducción simple.

$$\Big(\ P(0) \wedge \ \big(\forall n.\, P(n) \rightarrow P(n+1)\big)\ \Big) \ \rightarrow \ \forall n.\, P(n)$$

3. Principio de inducción fuerte.

$$\Big(\forall n.\ \big(\ \forall k < n.\ P(k)\ \big) \rightarrow P(n)\Big) \ \rightarrow \ \forall n.\ P(n)$$

Demostraremos solo que 2. $\Rightarrow$ 3.

Equivalencia de principios de inducción (clase pasada)

Demostración: 2. $\Rightarrow$ 3.

Suponemos que se cumple el principio de inducción **simple** sobre $\mathbb{N}$:

$$\Big(P(0) \wedge \big(\forall n.\, P(n) \rightarrow P(n+1) \big) \Big) \rightarrow \forall n.\, P(n)$$

PD: $\Big(\forall n.\ \big(\forall k < n.\ P(k) \big) \rightarrow P(n) \Big) \rightarrow \forall n.\ P(n).$

Suponga que se cumple: $\forall n.\ \big(\forall k < n.\ P(k) \big) \rightarrow P(n)$ (*)

PD: $\forall n.\ P(n)$

¿se cumplen las condiciones del **principio de inducción simple**?

1. $P(0)$ es verdadero ? ✓
2. $\forall n.\ P(n) \rightarrow P(n+1)$ es verdadero ? ?

¿cómo usamos inducción simple y (*) para demostrar $\forall n.\ P(n)$?

Equivalencia de principios de inducción (clase pasada)

Demostración: 2. $\Rightarrow$ 3.

Suponemos que se cumple el principio de inducción **simple** sobre $\mathbb{N}$.

PD: $\Big(\forall n.\ \big(\ \forall k < n.\ P(k)\ \big) \to P(n) \Big) \ \to\ \forall n.\ P(n).$

Suponga que se cumple: $\forall n.\ \big(\ \forall k < n.\ P(k)\ \big) \to P(n)$ (*)

PD: $\forall n.\ P(n)$

Defina el predicado $P'(n) := \forall k < n.\ P(k)$.

1. $P'(0)$ es verdadero ? ✓
2. $\forall n.\ P'(n) \to P'(n+1)$ es verdadero ? ✓

- Entonces, $\forall n.\ P'(n)$. (¿por qué?)
- Por lo tanto, $\forall n.\ P(n)$. (¿por qué?)

$\square$

Inducción sobre los naturales

Principio de inducción simple

Para todo predicado $P(\cdot)$ en $\mathbb{N}$, la siguiente formula es **siempre verdadera**:

$$\Big(\ P(0) \wedge \ \big(\ \forall n.\, P(n) \rightarrow P(n+1)\,\big)\ \Big) \ \rightarrow \ \forall n.\, P(n)$$

Principio de inducción fuerte

Para todo predicado $P(\cdot)$ en $\mathbb{N}$, la siguiente formula es **siempre verdadera**:

$$\Big(\ \forall n.\ \big(\ \forall k < n.\ P(k)\ \big) \rightarrow P(n)\Big) \ \rightarrow \ \forall n.\ P(n)$$

¿podemos generalizar este principio sobre cualquier estructura?

Outline

Definiciones recursivas

Inducción estructural

Definiciones recursivas

Definición

Una definición se dice **recursiva** si puede ser definida a partir de:

1. Casos **bases** sencillos.
2. Una **serie de reglas** que reducen la definición a casos anteriores.

Ejemplo

Caso **base**:

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

Regla **recursiva**:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad \text{para } n \geq 2$$

Definiciones recursivas

Mas ejemplos

- Sumatorias $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i$

  Caso **base**: $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} i = 0$

  Regla **recursiva**: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) + n$

- Exponencial 2^n

  Caso **base**: $2^0 = 1$

  Regla **recursiva**: $2^n = 2^{n-1} \cdot 2$

¿cómo generalizamos esta idea para definir conjuntos?

Definición recursiva de conjuntos

Definición

Una definición **recursiva** de un conjunto $\mathbb{S}$ consta de:

1. Un conjunto **base** $B = \{b_1, \dots, b_N\}$ tal que $b_i \in \mathbb{S}$ para todo $i \leq N$.
2. **Reglas** recursivas R de la forma:

$$\text{si} \quad s_1, \dots, s_n \in \mathbb{S} \quad \text{entonces} \quad R(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{S}$$

3. Una afirmación de **exclusión** de la forma:
   "El conjunto $\mathbb{S}$ son todos los elementos que
   se construyen solamente a partir de B y las reglas R."

¿para qué necesitamos la afirmación de **exclusión**?

Definición recursiva de conjuntos

Ejemplos

- Se define el conjunto $\mathbb{N}$ tal que:

  Caso **base**: $0 \in \mathbb{N}$

  Regla **recursiva**: Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $a + 1 \in \mathbb{N}$.

  $\mathbb{N}$ es el conjunto que se construye solo a partir de las reglas anteriores.

- Se define el conjunto $\mathbb{S}$ tal que:

  Caso **base**: $3 \in \mathbb{S}$

  Regla **recursiva**: Si $a \in \mathbb{S}$ y $b \in \mathbb{S}$, entonces $a + b \in \mathbb{S}$.

  $\mathbb{S}$ es el conjunto que se construye solo a partir de las reglas anteriores.

Desde ahora, siempre omitiremos la afirmación de exclusión.

Definición recursiva de conjuntos

Palabras

Sea Σ un alfabeto. El conjunto Σ^* se define recursivamente como:

1. $\epsilon \in \Sigma^*$.
2. si $w \in \Sigma^*$, entonces $wa \in \Sigma^*$ para todo $a \in \Sigma$.

Otro conjunto de palabras

Sea Σ un alfabeto. El conjunto $\mathcal{P}_\Sigma$ se define recursivamente como:

1. $\epsilon \in \mathcal{P}_\Sigma$ y $a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$.
2. si $w \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $a \cdot w \cdot a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$.

¿a qué corresponde el conjunto $\mathcal{P}_\Sigma$?

Definición recursiva de conjuntos

Otra definición recursiva

Sea $\bullet$ un símbolo cualquiera.

El conjunto $\mathcal{T}_2$ se se define recursivamente como:

1. $\bullet \in \mathcal{T}_2$.
2. si $t_1 \in \mathcal{T}_2$ y $t_2 \in \mathcal{T}_2$ entonces:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ t_1 & & t_2 & \end{tikzcd} \in \mathcal{T}_2$$

¿a qué corresponde el conjunto $\mathcal{T}_2$?

Definición recursiva de conjuntos

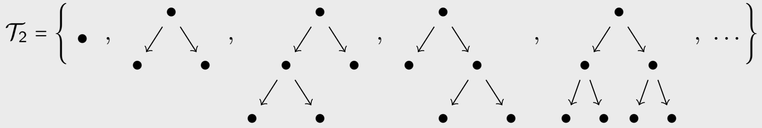
Otra definición recursiva

Sea $\bullet$ un símbolo cualquiera.

El conjunto $\mathcal{T}_2$ se se define recursivamente como:

1. $\bullet \in \mathcal{T}_2$.
2. si $t_1 \in \mathcal{T}_2$ y $t_2 \in \mathcal{T}_2$ entonces:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & & \in \mathcal{T}_2 \\ t_1 & & t_2 & \end{tikzcd}$$



(todos los árboles binarios)

Funciones sobre definiciones recursivas

Podemos utilizar la naturaleza recursiva de un conjunto $\mathbb{S}$
para definir funciones o propiedades sobre $\mathbb{S}$.

Ejemplo de funciones sobre palabras

Se define $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{array}{rcl} f(\epsilon) & = & 0 \\ f(wa) & = & f(w) + 1 \quad \text{para } w \in \Sigma^* \text{ y } a \in \Sigma \end{array}$$

¿qué define la función f?

Funciones sobre definiciones recursivas

Podemos utilizar la naturaleza recursiva de un conjunto $\mathbb{S}$ para definir funciones o propiedades sobre $\mathbb{S}$.

Ejemplo de funciones sobre palabras

Para $b \in \Sigma$ se define $|\cdot|_b : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ como:

$$
\begin{aligned}
|\epsilon|_b &= 0 \\
|w \cdot a|_b &= \begin{cases} |w|_b + 1 & \text{si } a = b \\ |w|_b & \text{si } a \neq b \end{cases} \qquad \text{para } w \in \Sigma^* \text{ y } a \in \Sigma
\end{aligned}
$$

¿qué define la función $|\cdot|_b$?

Funciones sobre definiciones recursivas

¿qué definen las siguientes funciones sobre $\mathcal{T}_2$?

Se define la función $g : \mathcal{T}_2 \to \mathbb{N}$ como:

$$
\begin{array}{rcll}
g(\bullet) & = & 1 & \\
g\left(\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \swarrow & & \searrow \\ t_1 & & t_2 \end{array} \right) & = & g(t_1) + g(t_2) + 1 & \quad \text{para } t_1, t_2 \in \mathcal{T}_2
\end{array}
$$

Se define la función $g' : \mathcal{T}_2 \to \mathbb{N}$ como:

$$
\begin{array}{rcll}
g'(\bullet) & = & 1 & \\
g'\left(\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \swarrow & & \searrow \\ t_1 & & t_2 \end{array} \right) & = & g'(t_1) + g'(t_2) & \quad \text{para } t_1, t_2 \in \mathcal{T}_2
\end{array}
$$

Outline

Inducción estructural

Sea $\mathbb{S}$ un conjunto definido a partir de:

- un conjunto **base** B y
- un conjunto de **reglas recursivas** $\mathcal{R}$.

Definimos la **capa** $\mathbb{S}[n]$ de $\mathbb{S}$ para todo $n \geq 0$ como:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[0] &= B \\ \mathbb{S}[n+1] &= \mathbb{S}[n] \cup \left\{ T(s_1, \ldots, s_k) \mid T \in \mathcal{R} \wedge s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{S}[n] \right\} \end{aligned}$$

¿cuál es el conjunto de **capas** para las definiciones anteriores?

Inducción estructural

Definimos la **capa** $\mathbb{S}[n]$ de $\mathbb{S}$ para todo $n \geq 0$ como:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}[0] &= B \\
\mathbb{S}[n+1] &= \mathbb{S}[n] \cup \{\ T(s_1, \ldots, s_k) \mid T \in \mathcal{R} \wedge s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{S}[n]\ \}
\end{aligned}
$$

Principio de inducción estructural

Para todo predicado $P(\cdot)$ sobre $\mathbb{S}$, es **siempre verdadero**:

$$
\Big[\ \big(\ \forall s \in \mathbb{S}[0].\ P(s)\ \big) \wedge \\
\forall n. \big(\ \forall s \in \mathbb{S}[n].\ P(s)\ \big) \rightarrow \big(\ \forall s' \in \mathbb{S}[n+1].\ P(s')\ \big)\ \Big] \\
\rightarrow\ \forall s \in \mathbb{S}.\ P(s)
$$

Demostración: defina $P'(n) := \forall s \in \mathbb{S}[n].\ P(s)$.

Ejemplo de inducción estructural

Ejemplo

Demuestre la afirmación para $w \in \mathcal{P}_\Sigma$:

$$P(w) \quad := \quad \text{si } |w| \text{ es par, entonces } |w|_b \text{ es par para todo } b \in \Sigma.$$

1. $P(\epsilon)$ o $P(a)$ para $a \in \Sigma^*$. ✓
2. si $P(w)$ es verdadero, entonces demostramos para $P(a \cdot w \cdot a)$:
   - si $|a \cdot w \cdot a|$ es par y $b \in \Sigma$:

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & |w| \text{ es par.} \\ \Rightarrow & |w|_b \text{ es par.} \qquad \text{(por HI)} \\ \Rightarrow & |a \cdot w \cdot a|_b \text{ es par.} \quad ✓ \end{array}$$

Por lo tanto, $P(w)$ se cumple para todo $w \in \mathcal{P}_\Sigma$.

Ejemplo de inducción estructural

Ejemplo

Demuestre la afirmación para $t \in \mathcal{T}_2$:

$$P(t) \quad := \quad \text{nodos}(t) \; < \; 2 \cdot \text{hojas}(t).$$

1. $P(\bullet)$. ✓

2. si $P(t_1)$ y $P(t_2)$ es verdadero, entonces dem. para $P(\,\bullet(t_1, t_2)\,)$:

$$\begin{array}{rcll}
\text{nodos}(\,\bullet(t_1, t_2)\,) & = & \text{nodos}(t_1) + \text{nodos}(t_2) + 1 & \\
 & < & 2 \cdot \text{hojas}(t_1) + \text{nodos}(t_2) + 1 & \text{(por HI)} \\
\text{nodos}(\,\bullet(t_1, t_2)\,) & \leq & 2 \cdot \text{hojas}(t_1) + \text{nodos}(t_2) & \\
 & < & 2 \cdot \text{hojas}(t_1) + 2 \cdot \text{hojas}(t_2) & \text{(por HI)} \\
 & < & 2 \cdot (\text{hojas}(t_1) + \text{hojas}(t_2)) & \\
 & < & 2 \cdot \text{hojas}(t) & \checkmark
\end{array}$$

Por lo tanto, $P(t)$ se cumple para todo $t \in \mathcal{T}_2$.