Cardinalidad

Clase 18

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Juego de niños

Juanita y Pedrito juegan a "**quién dice el número más grande**":

Juanita: 1

Pedrito: 2

Juanita: 3

Pedrito: 5

Juanita: 10

Pedrito: 100

Juanita: 200

Pedrito: ∞

☹

¿perdió Juanita? ¿hay algo más grande que ∞?
¿son igual de infinitos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$?

¿cómo medimos el tamaño de un conjunto?

$$\{\ a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e\ \}$$

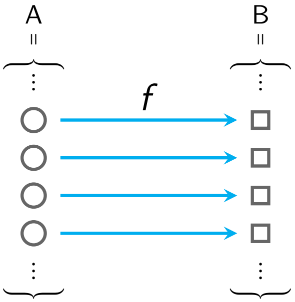
¿por qué el conjunto tiene tamaño 5?

Cardinalidad

Sea A y B dos conjuntos.

Definición

A y B son **equinumerosos** si existe una biyección $f : A \to B$.



Si A es **equinumeroso** con B lo anotaremos como $|A| = |B|$.

¿qué propiedad cumple la relación $|A| = |B|$?

Cardinalidad

Proposición

La relación $|\cdot| = |\cdot|$ es una **relación de equivalencia**, esto es:

1. refleja.
2. simétrica.
3. transitiva.

Por lo tanto, podemos tomar las clases de equivalencia de $|\cdot| = |\cdot|$.

Definición

Para un conjunto A, denotaremos por $|A|$
su **clase de equivalencia** según la relación $|\cdot| = |\cdot|$.

Cardinalidad (ejemplos)

Ejemplos

¿qué conjuntos están en las siguientes clases de equivalencia para $|\cdot| = |\cdot|$?

- $|\ \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}\ |$
- $|\ \varnothing\ |$
- $|\ \mathbb{N}\ |$

Cardinalidad de conjuntos finitos

Sea A un conjunto cualquiera.

Definición

- Diremos que A es **finito** si existe un n tal que:

$$|A| \ = \ |\{0,1,2,\ldots,n-1\}|$$

- Si $|A| = |\{0,1,2,\ldots,n-1\}|$ diremos que la **cardinalidad** de A es n.

$$|A| \ = \ n$$

¿sirve la relación $|\cdot| = |\cdot|$ para medir
la cardinalidad de conjuntos **infinitos**?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los números **pares**.

¿tiene $\mathbb{P}$ la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$?

$$\mathbb{N} = \left\{ \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad \ldots \right\}$$

$$\mathbb{P} = \left\{ \quad 0 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 8 \qquad 10 \quad \ldots \right\}$$

Con la biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ tal que $f(n) = 2 \cdot n$, se tiene que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{P}|$.

Demuestre que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ es una biyección.

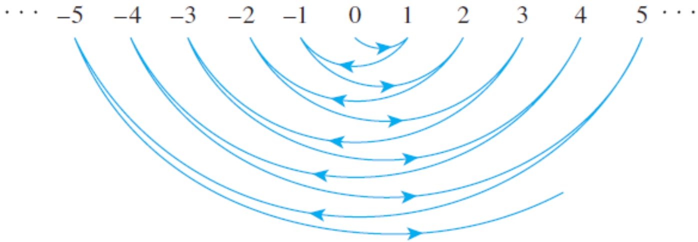
¿tiene $\mathbb{Z}$ la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$?

¿tiene $\mathbb{Z}$ la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$?

Teorema

Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son **equinumerosos**.

¿cómo demostramos que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$?



¿tiene $\mathbb{Z}$ la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$?

Teorema

Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son **equinumerosos**.

¿como demostramos que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$?

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \cdots & n & -n & \cdots
\end{array}
$$

Definimos la biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ como:

$$
f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}
$$

Por lo tanto, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$!!

Conjuntos numerables

Definición

A es **numerable** si tiene la misma cardinalidad que un subconjunto de $\mathbb{N}$.

$$\exists S \subseteq \mathbb{N}.\ \ |A| = |S|.$$

Proposición

A es **numerable** si, y solo si, existe una secuencia (finita o infinita) en A:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

1. $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$, y
2. para todo $a \in A$, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $a = a_i$.

A es numerable si, y solo si,
todos sus elementos se pueden poner en una **lista**.

¿hay más conjuntos numerables?

¿son los racionales $\mathbb{Q}$ numerables? ¿es $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ numerable?

¿hay más conjuntos numerables?

Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

¿cómo podemos enumerar $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ (0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & (0,4) & \cdots & (0,n) & (0,n+1) & \cdots \end{array}$$

¿funciona?

¿hay más conjuntos numerables?

Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,3) & (1,3) \arrow[ul] & (2,3) \arrow[ul] & (3,3) \arrow[ul] & \cdots \\
(0,2) & (1,2) \arrow[ul] & (2,2) \arrow[ul] & (3,2) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(0,1) & (1,1) \arrow[ul] & (2,1) \arrow[ul] & (3,1) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(0,0) \arrow[r] & (1,0) \arrow[ul] & (2,0) \arrow[ul] & (3,0) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

¿cuál es la secuencia que estamos siguiendo?

¿hay más conjuntos numerables?

Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

$$
\begin{array}{l}
(0,0),\\
(1,0),(0,1),\\
(2,0),(1,1),(0,2),\\
\dots\\
(n,0),(n-1,1),(n-2,2),\dots,(2,n-2),(1,n-1),(0,n),\dots
\end{array}
$$

¿hay más conjuntos numerables?

Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

$$
\begin{aligned}
S_0 &:= (0,0),\\
S_1 &:= (1,0),(0,1),\\
S_2 &:= (2,0),(1,1),(0,2),\\
&\ldots\\
S_n &:= (n,0),(n-1,1),(n-2,2),\ldots,(2,n-2),(1,n-1),(0,n),\ldots
\end{aligned}
$$

1. ¿$a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$? ✓
2. ¿para todo $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $(n_1, n_2) = a_i$? ✓

Por lo tanto, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un conjunto numerable.

¿hay más conjuntos numerables?

Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

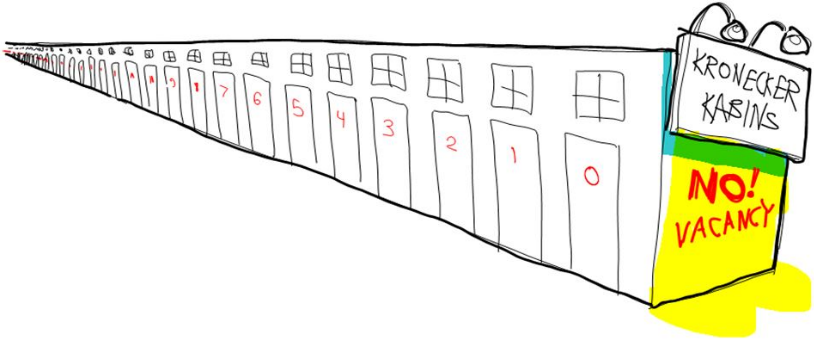
¿cómo podemos enumerar $\mathbb{Q}$?

(ejercicio)

¿por qué nos falla la intuición?

David Hilbert
(1862 - 1943)

Paradoja del gran hotel de Hilbert



¿son todos los conjuntos numerables?

¿es $\mathbb{R}$ numerable?

Teorema

$\mathbb{R}$ **NO** es numerable.

Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

- Demostraremos que el intervalo $(0, 1)$ de $\mathbb{R}$ NO es numerable.
- Por **contradicción**, supongamos que $(0, 1)$ es numerable.
- Entonces existe una **lista infinita** del los reales en (0,1):

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$$

donde cada real en $(0, 1)$ aparece una vez, y solo una vez.

¿son todos los conjuntos numerables?

Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

Reales	Representación decimal							
r_0	0.	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	$\cdots$
r_1	0.	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	$\cdots$
r_2	0.	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	$\cdots$
r_3	0.	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	$\cdots$
r_4	0.	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}	$\cdots$
r_5	0.	d_{50}	d_{51}	d_{52}	d_{53}	d_{54}	d_{55}	$\cdots$
$\vdots$					$\vdots$			$\ddots$

¿son todos los conjuntos numerables?

Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

Reales	Representación decimal							
r_0	0.	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	$\cdots$
r_1	0.	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	$\cdots$
r_2	0.	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	$\cdots$
r_3	0.	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	$\cdots$
r_4	0.	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}	$\cdots$
r_5	0.	d_{50}	d_{51}	d_{52}	d_{53}	d_{54}	d_{55}	$\cdots$
$\vdots$					$\vdots$			$\ddots$

- Para cada $i \geq 0$, definamos: $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$
- Defina el número real: $r = 0.d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

¿aparece r en la lista?

¿son todos los conjuntos numerables?

Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

- Para cada $i \geq 0$, definamos: $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$.
- Defina el número real: $r = 0.d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

¿aparece r en la lista?

Veamos:

- $r = r_0$? ✗
- $r = r_1$? ✗
- ...
- $r = r_n$? NO, porque el n-esimo digito de r es distinto al de r_n:

$$d_n \neq d_{nn}$$

$\rightarrow\leftarrow$ **CONTRADICCIÓN** $\rightarrow\leftarrow$