

# Ilha de Koch

Jorge Nunes ([jorgefranconunes@gmail.com](mailto:jorgefranconunes@gmail.com))

Junho 2010

## Resumo

Neste artigo abordaremos resumidamente as figuras geométricas conhecidas como linha de Koch e ilha de Koch. O nome vem do matemático sueco Helge von Koch, que em 1904 referiu num artigo pela primeira vez a curva que é hoje conhecida como linha de Koch.

## 1 Linha de Koch

A linha de Koch é uma figura geométrica que nos será útil para definir a ilha de Koch. Consideremos a sequência de figuras que descrevemos em seguida. Partimos de um segmento horizontal, com uma unidade de comprimento.



Figura 1: Ponto de partida para a construção da linha de Koch.

Começamos por dividir este segmento em três partes iguais e substituímos a parte do meio por outros dois segmentos correspondendo a dois lados de um triângulo equilátero. Este passo está ilustrado na figura em baixo. O comprimento de cada um destes 4 segmentos é  $1/3$  pelo que o comprimento da linha completa é de  $4/3$ .



Figura 2: Primeira iteração da construção da linha de Koch.

No segundo passo fazemos algo semelhante ao realizado no primeiro passo, agora para cada um dos 4 segmentos da figura. Cada segmento é dividido em três e a parte do meio substituída por outros dois segmentos formando dois lados de um triângulo equilátero. Se no primeiro passo a figura era composta por segmentos de comprimento  $1/3$  agora os segmentos são de comprimento  $1/9$  e o comprimento total passou a ser  $16/9$ .



Figura 3: Segunda iteração da construção da linha de Koch.

As figuras em baixo correspondem aos passos 3, 4 e 5 deste processo.

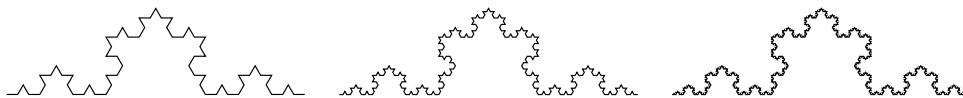


Figura 4: Iterações 3, 4 e 5 da construção da linha de Koch.

Continuando com o mesmo procedimento em cada passo, no limite obtém-se a figura designada por linha de Koch. Assumimos, sem demonstração, que existe efectivamente o limite desta sucessão.

A linha de Koch tem, entre outras, as seguintes propriedades interessantes:

- É uma linha contínua.
- Não tem derivada em nenhum ponto. Tomamos aqui a linha como uma aplicação de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- Tem comprimento infinito.

É simples verificar que o comprimento da linha de Koch é infinito. De facto, se chamarmos  $L_n$  ao comprimento da figura do passo  $n$  tem-se que

$$L_n = \frac{4}{3}L_{n-1}$$

Como  $L_0 = 1$  então

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n,$$

que é uma sucessão que cresce sem ter majorante. Ou seja, o comprimento da figura limite é infinito.

## 2 Ilha de Koch

A figura conhecida como ilha de Koch é obtida através de um procedimento semelhante ao usado para criar a linha de Koch, mas em vez de começar com um único segmento começa-se com um triângulo equilátero. As imagens em baixo representam as seis primeiras iterações do procedimento.

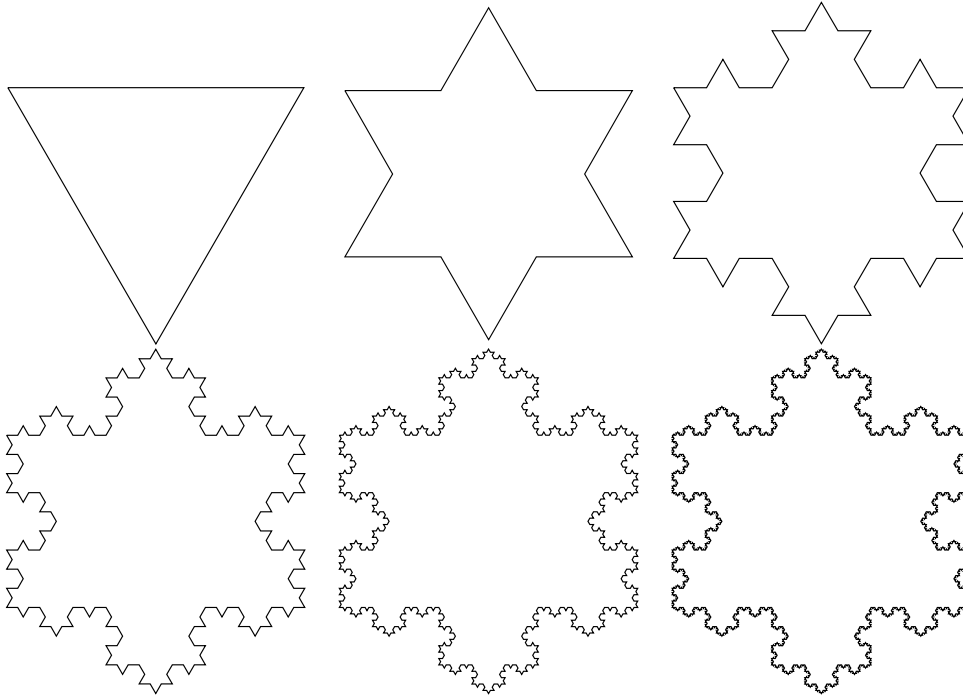


Figura 5: A figura inicial e as cinco primeiras iterações da construção da ilha de Koch.

O perímetro da ilha de Koch é infinito. Tal acontece porque esta figura é constituída pela união de três versões idênticas, apropriadamente rodadas e deslocadas, da linha de Koch. No entanto a área da ilha de Koch é claramente limitada. Podemos mesmo calcular a área como o limite da sucessão das áreas das figuras intermédias.

A área da ilha de Koch pode ser obtida como o limite das áreas das figuras intermédias. Vamos então calcular a área  $A_n$  da figura do passo  $n$ . A área da figura do passo  $n$  é dada pela soma da área da figura do passo  $n - 1$  com as áreas dos pequenos triângulos que são adicionados à figura do passo  $n - 1$  para obter a figura do passo  $n$ .

Precisamos de saber quantos pequenos triângulos são acrescentados no passo  $n-1$  para obter a figura do passo  $n$ . Precisamos também de saber o comprimento do lado desses pequenos triângulos, para calcular a respectiva área.

O número de pequenos triângulos que são acrescentados no passo  $n - 1$  corresponde ao número de troços no passo  $n - 1$ . Chamemos  $c_n$  ao número de troços no passo  $n$ . Tem-se então:

$$c_0 = 3, \quad c_n = 4c_{n-1} \quad \Rightarrow \quad c_n = 3 \times 4^n$$

O comprimento do lado dos pequenos triângulos que são acrescentados no passo  $n - 1$  corresponde ao número de troços que existem no passo  $n$ . Chamemos-lhe  $l_n$ . Tem-se que:

$$l_0 = 1, \quad l_n = \frac{1}{3}l_{n-1} \quad \Rightarrow \quad l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Chamemos  $a_n$  à área de cada um dos pequenos triângulos acrescentados no passo  $n - 1$ . Sendo a área  $a$  de um triângulo equilátero de lado  $l$  dada por  $a = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$  teremos

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{4}l_n^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

Com o que já foi dito temos

$$A_n = A_{n-1} + c_{n-1}a_n$$

$$A_n = A_0 + \sum_{k=1}^n c_{k-1}a_k$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k\right)$$

No limite temos a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão  $\frac{4}{9}$ . Sendo  $\sum_{k=0}^{\infty} = \frac{1}{1-r}$ , ou  $\sum_{k=1}^{\infty} = \frac{r}{1-r}$ , teremos finalmente a área  $A$  da ilha de Koch como

$$A = \lim A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

## Cólofon

As imagens PNG usadas neste artigo com os diferentes passos das iterações da linha de Koch e ilha de Koch foram geradas com **Inkscape** a partir de ficheiros SVG.

Os ficheiros SVG com as figuras foram gerados a partir de um programa para geração de iterações de Sistemas-L escrito na linguagem de scripting **Tea**.