

# Triângulo de Sierpiński

Jorge Nunes (jorgefranconunes@gmail.com)

Agosto 2007

O triângulo de Sierpiński é um fractal no plano dos reais. Na figura 1 pode ver-se uma representação do conjunto dos pontos que formam o triângulo de Sierpiński.

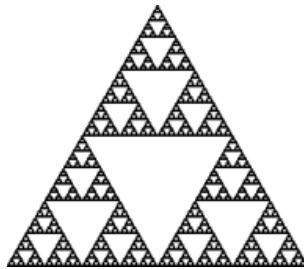


Figura 1: Representação do triângulo de Sierpiński.

Este conjunto é auto-similar. Por auto-similar entende-se que partes do todo são semelhantes ao todo. Efectivamente, tal como é destacado na figura 2, o conjunto completo pode ser obtido através da união de três cópias apropriadamente escaladas e deslocadas do próprio conjunto.

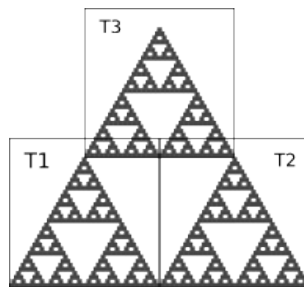


Figura 2: Representação da auto-similaridade do triângulo de Sierpiński.

Se chamarmos  $S$  ao conjunto dos pontos do triângulo de Sierpiński então podemos dizer que

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S)$$

As funções  $T_i : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  são transformações afim que realizam os escalamentos e as translações específicos para o triângulo de Sierpiński.

Uma transformação afim tem a forma

$$Tx = Ax + u$$

onde  $A$  é uma aplicação linear (i. e. corresponde a uma matriz) e o vector  $u$  é uma constante.

No caso do triângulo de Sierpiński as funções  $T_ix = A_ix + u_i$  são caracterizadas da seguinte forma:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

Existem outras formas de definir o triângulo de Sierpiński. Definamos a função  $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  como

$$F(\Lambda) = T_1(\Lambda) \cup T_2(\Lambda) \cup T_3(\Lambda)$$

Então, de acordo com o que tinha atrás já sido exposto temos que o triângulo de Sierpiński corresponde ao conjunto dos pontos  $S$  onde  $F(S) = S$ . Ou seja, o triângulo de Sierpiński é um ponto fixo da função  $F$ .

Mas será que existe mesmo um ponto fixo da função  $F$  definida desta forma? Sim, existe. Haveremos noutro artigo de ver com mais detalhe como tal pode ser confirmado. Para já fica a ideia de que a sucessão

$$S_k = F(S_{k-1}), \quad k \geq 1$$

converge quando o ponto inicial  $S_0$  é um conjunto compacto e desde que a função  $F$  seja uma contração.

Esta forma de definir o triângulo de Sierpiński tem a vantagem de nos permitir criar um procedimento para obter uma aproximação desse conjunto.

As figuras seguintes representam os seis primeiros pontos da sucessão  $S_k$  quando o ponto inicial é o quadrado unitário  $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ .

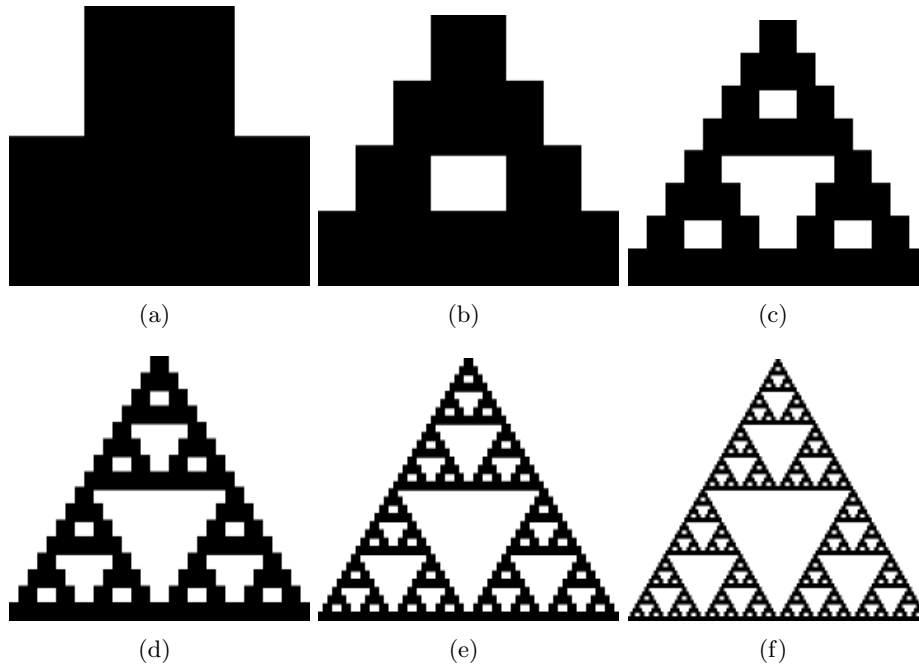


Figura 3: As seis primeiras iterações da construção do Triângulo de Sierpiński.

Estas imagens foram geradas utilizando o Octave. Num futuro artigo veremos como tal foi conseguido.