Triângulo de Sierpinski

Jorge Nunes (jorgefranconunes@gmail.com)

Agosto 2007

O triângulo de Sierpinsky é um fractal no plano dos reais. Na figura 1 pode ver-se uma representação do conjunto dos pontos que formam o triângulo de Sierpinski.

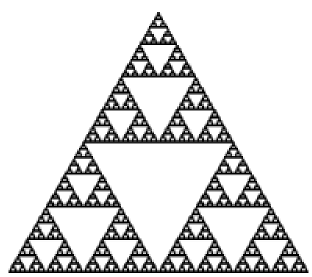


Figura 1: Representação do triângulo de Sierpinski.

Este conjunto é auto-similar. Por auto-similar entende-se que partes do todo são semelhantes ao todo. Efectivamente, tal como é destacado na figura 2, o conjunto completo pode ser obtido através da união de três cópias apropriadamente escaladas e deslocadas do próprio conjunto.

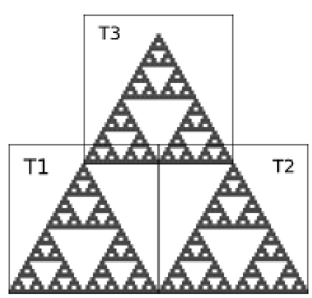


Figura 2: Representação da auto-similaridade do triângulo de Sierpinsky.

Se chamarmos S ao conjunto dos pontos do triângulo de Sierpinski então podemos dizer que

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S)$$

As funções $T_i : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ são transformações afim que realizam os escalamentos e as translações específicos para o triângulo de Sierpinski.

Uma transformação afim tem a forma

$$Tx = Ax + u$$

onde A é uma aplicação linear (i. e. corresponde a uma matriz) e o vector u é uma constante.

No caso do triângulo de Sierpinski as funções $T_i x = A_i x + u_i$ são caracterizadas da seguinte forma:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

Existem outras formas de definir o triângulo de Sierpinski. Definamos a função $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ como

$$F(\Lambda) = T_1(\Lambda) \cup T_2(\Lambda) \cup T_3(\Lambda)$$

Então, de acordo com o que tinha atrás já sido exposto temos que o triângulo de Sierpinsky corresponde ao conjunto dos pontos S onde $F(S) = S$. Ou seja, o triângulo de Sierpinsky é um ponto fixo da função F.

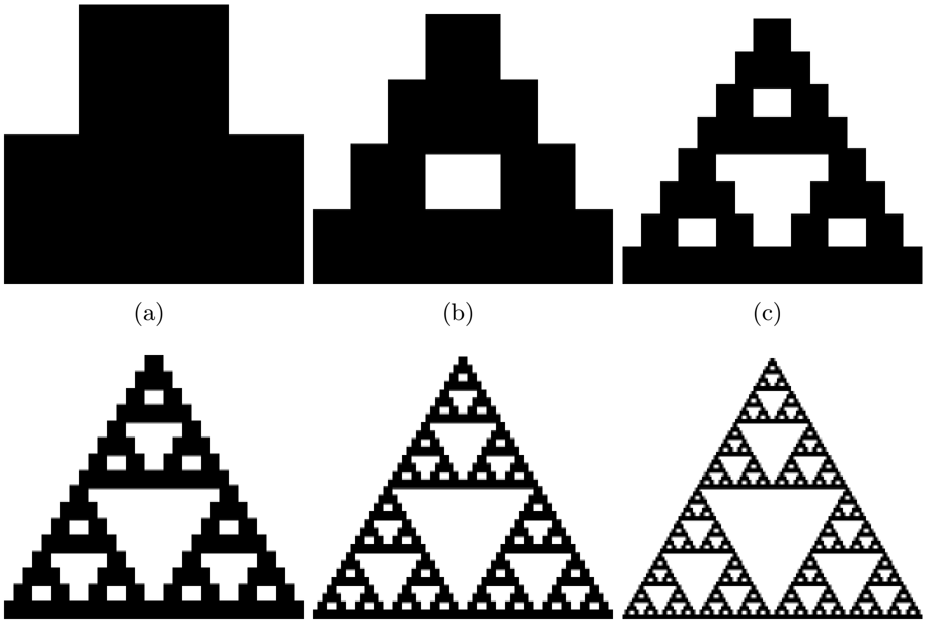
Mas será que existe mesmo um ponto fixo da função F definida desta forma? Sim, existe. Haveremos noutro artigo de ver com mais detalhe como tal pode ser confirmado. Para já fica a ideia de que a sucessão

$$S_k = F(S_{k-1}), \qquad k \geq 1$$

converge quando o ponto inicial S_0 é um conjunto compacto e desde que a função F seja uma contração.

Esta forma de definir o triângulo de Sierpinsky tem a vantagem de nos permitir criar um procedimento para obter uma aproximação desse conjunto.

As figuras seguintes representam os seis primeiros pontos da sucessão S_k quando o ponto inicial é o quadrado unitário $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$.



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Figura 3: As seis primeiras iterações da construção to Triângulo de Sierpinski.

Estas imagens foram geradas utilizando o Octave. Num futuro artigo veremos como tal foi conseguido.