
# Number Theory

# Divisibilidad

- Dados dos enteros $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se dice que $\boldsymbol{a}$ divide a $\boldsymbol{b}$ si existe un entero $\boldsymbol{c}$ tal que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{ac}$.
- Se denota de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{a} | \boldsymbol{b}$$

# Divisibilidad

**Proposición 1**

Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ números enteros, si $\mathbf{d}|\boldsymbol{a}$ y $\mathbf{d}|\mathbf{b}$ entonces $\mathbf{d}|(\boldsymbol{ma} + \boldsymbol{nb})$

# Números Primos

- Un número entero positivo $\mathbf{n}$ es denominado primo, si $\boldsymbol{n} > \mathbf{1}$ y sus únicos divisores son $\mathbf{1}$ y $\boldsymbol{n}$.
- Un número entero positivo diferente a $\mathbf{1}$ y que no es primo, se denomina compuesto.

# Test de Primalidad

Podemos saber si un número es primo fácilmente en $\boldsymbol{O(n)}$ , iterando por todos los posibles divisores.

¿ podemos reducir la complejidad?

# Test de Primalidad

**Teorema 1**

Si $\mathbf{n}$ es un número compuesto, entonces $\mathbf{n}$ tiene al menos un divisor que es mayor que $\mathbf{1}$ y menor o igual a $\sqrt{\boldsymbol{n}}$.

# Test de Primalidad

**Demostración**

Sea $n = ab$; donde $a, b$ son enteros y $1 < a \leq b < n$ , entonces:

$a \leq \sqrt{n}$, ya que si no caeríamos en una contradicción, porque tendríamos que $a, b > \sqrt{n}$ y por ende $ab > n$.

# Test de Primalidad

```
bool isPrime(Long n) {
    if (n <= 1) return false;
    for (Long i = 2; i * i <= n; i++) {
        if (n % i == 0) return false;
    }
    return true;
}
```

Complejidad: $\boldsymbol{O(\sqrt{n})}$

# Problemas

UVA 382 - Perfection

UVA 10879 – Code Refactoring

UVA 1246 - Find Terrorists

# Cantidad de Números Primos

Sabemos que existen infinitos números primos, pero podemos estimar cuántos son menores o iguales que un número $\boldsymbol{x}$.

Se define la función $\boldsymbol{\pi(x)}$, siendo $\boldsymbol{x}$ un número real positivo, denotando el número de primos que no exceden a $\boldsymbol{x}$.

$$\pi(4) = 2$$

$$\pi(5) = 3$$

$$\pi(10) = 4$$

# Cantidad de Números Primos

**Teorema de los Números Primos**

Cuando $x$ es un número grande $x/lnx$ es una buena aproximación de $\pi(x)$.

| $x$ | $\pi(x)$ | $x/log\ x$ | $\pi(x)/\frac{x}{\log x}$ |
|---|---|---|---|
| $10^3$ | 168 | 144.8 | 1.160 |
| $10^4$ | 1229 | 1085.7 | 1.132 |
| $10^5$ | 9592 | 8685.9 | 1.104 |
| $10^6$ | 78498 | 72382.4 | 1.085 |
| $10^7$ | 664579 | 620420.7 | 1.071 |
| $10^8$ | 5761455 | 5428681.0 | 1.061 |
| $10^9$ | 50847534 | 48254942.4 | 1.054 |
| $10^{10}$ | 455052512 | 434294481.9 | 1.048 |
| $10^{11}$ | 4118054813 | 3948131663.7 | 1.043 |
| $10^{12}$ | 37607912018 | 36191206825.3 | 1.039 |
| $10^{13}$ | 346065535898 | 334072678387.1 | 1.036 |

# Cantidad de Números Primos

**Proposición 2**

Dado un entero positivo $\boldsymbol{n}$, es posible tener $\boldsymbol{n}$ números compuestos consecutivos.

# Cantidad de Números Primos

**Demostración**

Consideremos los siguientes $\boldsymbol{n}$ enteros consecutivos:

$$(n+1)!+2, (n+1)!+3, \dots, (n+1)!+n+1$$

Para todo $2 \leq d \leq n+1$ sabemos que $d|(n+1)!$

Dado que $d|d$, usando la Proposición 1 entonces $d \mid (n+1)! + \mathrm{d}$

# Distancia entre Primos Consecutivos

Se define la $\boldsymbol{n}$-ésima distancia (gap) entre números primos consecutivos como $\boldsymbol{g_n}$ igual a la diferencia entre el $(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})$-ésimo y el $\boldsymbol{n}$-ésimo primo.

$$\boldsymbol{g_n = p_{n+1} - p_n}$$

$g_1 = 1$
$g_3 = 2$
$g_4 = 4$
$g_9 = 6$

# Distancia entre Primos Consecutivos

- De la Proposición 2 podemos deducir que la distancia entre dos primos consecutivos puede llegar a ser muy grande.

- Para los valores que se manejan en los concursos esta distancia no es mucha.

| Primo | Máximo gap |
|---|---|
| $p_n \leq 10^9$ | 282 |
| $p_n \leq 10^{12}$ | 540 |
| $p_n \leq 10^{18}$ | 1442 |

# Números Primos

**¿Listar todos los números primos desde el 1 hasta n?**

Si utilizamos el algoritmo explicado anteriormente por cada número del $\mathbf{1}$ al $\mathbf{n}$, tendríamos una complejidad de $\boldsymbol{O(\, n\sqrt{n}\,)}$.

¿ se puede reducir la complejidad?

# Criba de Eratóstenes

Algoritmo que nos permite hallar todos los números primos desde el $\mathbf{1}$ hasta $\mathbf{n}$ de una manera eficiente.

# Criba de Eratóstenes

1. Construimos un arreglo de tamaño $\mathbf{n}$ , el cual nos indicará si un número es primo.
2. Inicialmente consideramos a todos los números como primos a excepción del $\mathbf{1}$.
3. Iteramos en orden creciente por los números empezando desde el $\mathbf{2}$.

   En cada iteración verificamos si el número en proceso no se encuentra marcado (primo), de ser así inmediatamente marcamos todos sus múltiplos como compuestos.

# Criba de Eratóstenes

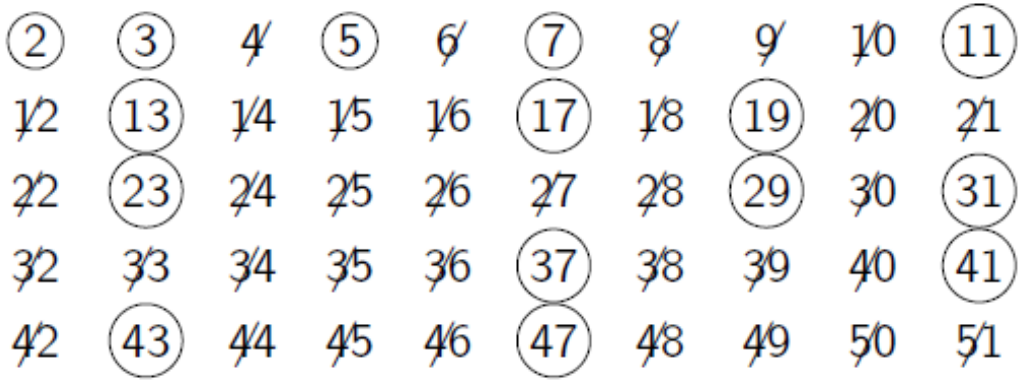
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | 9 | ~~10~~ | 11 |
| ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | 15 | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ | 21 |
| ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | 25 | ~~26~~ | 27 | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ | 31 |
| ~~32~~ | 33 | ~~34~~ | 35 | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | 39 | ~~40~~ | 41 |
| ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | 45 | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | 49 | ~~50~~ | 51 |

# Criba de Eratóstenes

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | (3) | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ | 11 |
| ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ | ~~21~~ |
| ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | 25 | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ | 31 |
| ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | 35 | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ | 41 |
| ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | 49 | ~~50~~ | ~~51~~ |

# Criba de Eratóstenes

Continuamos así hasta haber recorrido todos los números.



# Criba de Eratóstenes

```
const Long MX = 4e6;
bool isPrime[MX];

void sieve(Long n){
    fill(isPrime, isPrime + n + 1 , true);
    isPrime[0] = isPrime[1] = false;
    for(Long i = 2; i <= n; i++){
        for(Long j = 2 * i; j <= n; j += i){
            isPrime[j] = false;
        }

    }
}
```

¿Complejidad?

# Criba de Eratóstenes - Complejidad

```
const Long MX = 4e6;
bool isPrime[MX];

void sieve(Long n){
    fill(isPrime, isPrime + n + 1 , true);
    isPrime[0] = isPrime[1] = false;
    for(Long i = 2; i <= n; i++){
        for(Long j = 2 * i; j <= n; j += i){
            isPrime[j] = false;
        }

    }
}
```

Analicemos el 2do for.

Por ejemplo, el número 2 tendrá que recorrer al 4 , 6 , 8 … es decir **todos los pares** entre 1 y n (a excepción del 2).

¿Cuántos pares hay entre 1 y n ?

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

De la misma forma, el 3 recorrerá a todos sus múltiplos ( $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ) y luego el 4 y así sucesivamente.

# Criba de Eratóstenes - Complejidad

Denotemos al número de operaciones totales del segundo for como T(n)

$$T(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \cdots$$

$$T(n) \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{n}{p} = n \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p}$$ **(Serie Armónica)**

# Criba de Eratóstenes - Complejidad

Analicemos la serie armónica. Denotemos a la serie armónica como $H_n$ . Asumiendo que n + 1 es una potencia de 2 , tendríamos lo siguiente.

$$
\begin{aligned}
H_n &= \underbrace{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{(n+1)/2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}} \\
&\leq \underbrace{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{(n+1)/2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)/2} + \frac{1}{(n+1)/2}} \\
&= \underbrace{\underbrace{1} + \underbrace{1} + \underbrace{1} + \underbrace{1} + \cdots + \underbrace{1}}_{k \text{ times}} \\
&= k = \log_2(n+1)
\end{aligned}
$$

# Criba de Eratóstenes - Complejidad

De lo anterior, tenemos una cota para T(n)

$$T(n) \leq n \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = n \log_2(n+1)$$

$$T(n) = O(n \log n)$$

¿Podemos mejorarlo?

# Criba de Eratóstenes

Podemos notar que solo es necesario ejecutar el 2do *for* cuando el $i$ es primo

```
const Long MX = 4e6;
bool isPrime[MX];

void sieve(Long n){
    fill(isPrime, isPrime + n + 1 , true);
    isPrime[0] = isPrime[1] = false;
    for(Long i = 2; i <= n; i++){
        if(isPrime[i]){
            for(Long j = 2 * i; j <= n; j += i){
                isPrime[j] = false;
            }
        }
    }
}
```

¿Habrá mejorado la complejidad?

# Criba de Eratóstenes - Complejidad

Denotemos al número de operaciones totales del segundo for como T(n)

$$T(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \cdots$$

$$T(n) = \sum_{\substack{p\ primo \\ p \le n}} \frac{n}{p} = n \sum_{\substack{p\ primo \\ p \le n}} \frac{1}{p}$$

# Criba de Eratóstenes - Complejidad

Usaremos **El Teorema de los números primos**.

- La cantidad de números primos menores o iguales a *"n"* es aproximadamente $\frac{n}{\ln(n)}$
- Del teorema anterior, se deduce que el n-ésimo primo es aproximadamente $n \ln(n)$

Entonces podemos reemplazar eso en nuestra fórmula, trabajando el caso del primer primo (el 2) por separado para que el denominador no sea 0.

$$T(n) = n \sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p \le n}} \frac{1}{p} \approx \frac{n}{2} + n \sum_{k=2}^{\frac{n}{\ln(n)}} \frac{1}{k \ln(k)}$$

# Criba de Eratóstenes - Complejidad

Como la función $\frac{1}{k \ln(k)}$ es decreciente, podemos aplicar las sumas de Riemman para poder aproximar la suma con una **integral**

$$\sum_{k=2}^{\frac{n}{\ln(n)}} \frac{1}{k \ln(k)} \approx \int_{2}^{\frac{n}{\ln(n)}} \frac{dk}{k \ln(k)} = [\ln(\ln(k))]_{2}^{\frac{n}{\ln(n)}} = \ln(\ln n - n) - \ln\ln 2 \approx \ln\ln n$$

Finalmente, reemplazando esto en nuestra expresión final, nos queda en notación Big O

$$T(n) = O(n \log\log n) + O(n) = O(n \log\log n)$$

# Criba de Eratóstenes

Es posible realizar ciertas optimizaciones que no mejorarán la complejidad, pero reducirán un poco la constante.

Usando el **Teorema 1**, solo necesitamos recorrer los números hasta la $\sqrt{n}$, ya que todos los números compuestos deben ser tachados por alguno de éstos números.

# Criba de Eratóstenes

```
const Long MX = 4e6;
bool isPrime[MX];

void sieve(Long n){
    fill(isPrime, isPrime + n + 1 , true);
    isPrime[0] = isPrime[1] = false;
    for(Long i = 2; i * i <= n; i++){
        if(isPrime[i]){
            for(Long j = 2 * i; j <= n; j += i){
                isPrime[j] = false;
            }
        }
    }
}
```

# Criba de Eratóstenes

Podemos hacer otra optimización en el 2do for, al darnos cuenta que no es necesario empezar desde 2 * i para un número mayor a 2, ya que el 2 ya lo habría tachado. Tampoco empezar desde 3 * i para un número mayor a 3. Siguiendo esta lógica, deberíamos empezar en i * i.

```
const Long MX = 4e6;
bool isPrime[MX];

void sieve(Long n){
    fill(isPrime, isPrime + n + 1 , true);
    isPrime[0] = isPrime[1] = false;
    for(Long i = 2; i * i <= n; i++){
        if(isPrime[i]){
            for(Long j = i * i; j <= n; j += i){
                isPrime[j] = false;
            }
        }
    }
}
```

# Criba Lineal

Aún con las anteriores optimizaciones, la complejidad se mantiene en O(n log log n).

Sin embargo, existe una versión óptima O(n). Para más información, revisar estas fuentes :

- CP - Algorithm: https://cp-algorithms.com/algebra/prime-sieve-linear.html
- Blog Codeforces - Sección Linear Sieve: https://codeforces.com/blog/entry/54090

# Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número entero $\mathbf{n} > \mathbf{1}$ puede ser representado de forma única como producto de potencias de números primos.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

donde $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ son primos y $\alpha_i$ son enteros positivos.

# Descomposición Factores Primos

Podemos descomponer un número $\mathbf{n}$ en $\mathbf{O}(\sqrt{n})$

```
struct Factor {
    int base, exp;
};
```

```
vector<Factor> factorizeBrute(Long x) { // O(sqrt (x))
    vector<Factor> factors = {};
    Long f = 2;
    while (f * f <= x) {
        int e = 0;
        while (x % f == 0) {
            x /= f;
            e++;
        }
        if (e > 0) {
            factors.push_back(Factor(f, e));
        }
        f++;
    }

    if (x > 1) {
        factors.push_back(Factor(x, 1));
    }
    return factors;
}
```

# Descomposición Factores Primos

- En la Criba además de saber si un número es primo , podemos guardar un divisor primo de cada número.
- Teniendo un factor primo de cada número, podemos descomponer cualquier otro de manera recursiva.
- Luego del costo de la criba $O(n)$, podemos factorizar cualquier número $n$ en complejidad $O(log\ n)$.

muy útil cuando tenemos muchas consultas

# Descomposición Factores Primos

```cpp
const int MX = 1e7;
bool isPrime[MX];
int fact[MX];

void sieve() { // O(n log log n)
    fill(isPrime, isPrime + MX, true);
    isPrime[0] = isPrime[1] = false;
    for (int i = 2; i < MX; i++) fact[i] = i;

    for (int i = 2; i * i < MX; i++) {
        if (isPrime[i]) {
            for (int k = i * i; k < MX; k += i) {
                isPrime[k] = false;
                fact[k] = i;
            }
        }
    }
}
```

```cpp
struct Factor {
    int base, exp;
};

vector<Factor> factorize(int x) { // O(log x)
    vector<Factor> factors = {};
    while (x > 1) {
        int e = 0;
        int f = fact[x];
        while (x % f == 0) {
            x /= f;
            e++;
        }
        factors.push_back(Factor(f, e));
    }
    return factors;
}
```

# Máximo Común Divisor

El máximo común divisor de dos enteros $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (con al menos uno distinto a cero) es el más grande entero que divide a ambos.

Se denota de varias formas:

$$\mathbf{gcd}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\,,\mathbf{mcd}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

# Máximo Común Divisor

**Propiedades:**

Sean $a$, b, $k$ números enteros:

- **Commutatividad:** $\gcd(a,b) = \gcd(b,a)$
- $gcd(a,1) = 1$
- $\gcd(a,b) \leq \min(a,b)\,, \forall a,b > 0$
- $\gcd(a,0) = a, \forall a > 0$
- $\gcd(a,ka) = a\,, \forall a > 0$
- $\gcd(a+\mathrm{kb},b) = \gcd(a,\mathrm{b})$

# Máximo Común Divisor

**Demostración**

$$\mathbf{gcd}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}\mathbf{b}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{gcd}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

- Todos los divisores comunes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ también son divisores de $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}\mathbf{b}$ y $\boldsymbol{b}$
- Todos los divisores comunes de $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}\mathbf{b}$ y $\boldsymbol{b}$ también son divisores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$
- Por lo tanto ambos tienen los mismos divisores comunes, por ello también el gcd.

# Máximo Común Divisor

**Teorema 3**

Para todos los enteros $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ mayores o iguales a **0** (con al menos uno distinto a **0**).

$$\mathbf{gcd}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{gcd}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \ \boldsymbol{mod} \ \boldsymbol{b})$$

# Máximo Común Divisor

**Demostración**

- Podemos expresar $a$ como $a = \mathrm{qb} + \mathrm{r}$ , donde $\mathrm{q}, \mathrm{r}$ son enteros y $0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{b}$
- Entonces $\mathrm{r} = a \bmod b$
- Sabemos que: $\gcd(a, \mathrm{b}) = \gcd(a + \mathrm{kb}, b)$

$$\gcd(a, \mathrm{b}) = \gcd(a - \mathrm{qb}, b)$$

$$\gcd(a, \mathrm{b}) = \gcd(\mathrm{r}, \mathrm{b})$$

$$\gcd(a, \mathrm{b}) = \gcd(b, a \bmod b)$$

# Algoritmo de Euclides

Podemos hallar el gcd de dos números aplicando el teorema 3 varias veces

$$Sea\ a \geq b.$$

$$Definamos\ r_0 = a\ ,\qquad r_1 = b$$

$$\gcd(a\ ,b\ ) = \gcd(r_0\ ,r_1) = \gcd(r_1\ ,r_2) = \cdots = \gcd(r_n, 0) = \ r_n$$

$$Donde\ 0 < r_n < r_{n-1} < \cdots < r_2 < r_1 = b \leq r_0 = a$$

En caso a < b , luego de una iteración, llegaremos al caso anterior

# Algoritmo de Euclides

```cpp
int gcdRecursive(int a, int b) {
    if (b == 0) return a;
    return gcdRecursive(b, a % b);
}

int gcdIterative(int a, int b) {
    while (b > 0) {
        int r = a % b;
        a = b;
        b = r;
    }
    return a;
}
```

# Algoritmo de Euclides - Complejidad

$$\gcd(a\,,b\,) = \gcd(r_0\,,r_1) = \gcd(r_1\,,r_2) = \cdots = \gcd\,(r_{n-2}\,,r_n) = \gcd(r_n, 0) = \; r_n$$

$$Donde\; 0 < r_n < r_{n-1} < \cdots < r_2 < r_1 = b \leq r_0 = a$$

$$Sabemos\; que\;\; r_0 = a\,,\;\; r_1 = b,\;\; r_2 = a\; mod\; b = r_0\; mod\; r_1\,,\;\; r_3 = r_1\; mod\; r_2\,, \ldots$$

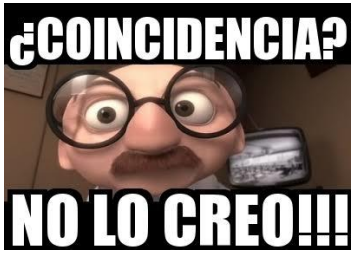
$$Podemos\; notar\; que\; r_i = r_{i-2}\; mod\; r_{i-1}\;\;\; ,para\; i \geq 2$$

$$Es\; decir\;\; r_{i-2} = q_{i-1}\;\times r_{i-1} + r_i\;\; \ldots (*)$$

$$Como\; todos\; los\; residuos\; son\; positivos, sabemos\; que\; r_i \geq 1\,, \forall i$$

$$Además\; como\; r_i < r_{i-1}, entonces\; q_i \geq 1\,, \forall\; i$$

# Algoritmo de Euclides - Complejidad




*Utilizando el hecho de que* $r_{n-1} < r_{n-2}$ *, y que* $r_{n-1} \geq 1$ *, entonces* $r_{n-2} \geq 2$

$$De\ (*):\ r_{n-3} = q_{n-2} \times r_{n-2} + r_{n-1}$$

$$\Rightarrow r_{n-3} \geq 1 \times 2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$De\ (*):\ r_{n-4} = q_{n-3} \times r_{n-3} + r_{n-2}$$

$$\Rightarrow r_{n-4} \geq 1 \times 3 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$De\ (*):\ r_{n-5} = q_{n-4} \times r_{n-4} + r_{n-3}$$

$$\Rightarrow r_{n-5} \geq 1 \times 5 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$De\ (*):\ r_i = q_{i+1} \times r_{i+1} + r_{i+2}$$

$$\Rightarrow r_i \geq r_{i+1} + r_{i+2}$$

$$r_n \geq 1 = f_2$$

$$r_{n-1} \geq 2 = f_3$$

$$r_{n-2} \geq 3 = f_4$$

$$r_{n-3} \geq 5 = f_5$$

$$r_{n-4} \geq 8 = f_6$$

# Algoritmo de Euclides - Complejidad

Se puede demostrar por inducción que las cotas de los residuos siguen la secuencia de fibonacci, pero parece bastante obvio a simple vista.

De lo anterior podemos deducri que $b = r_1 \geq f_{n+1}(el\ n+1\ \acute{e}simo\ fibonacci)$

$a = r_0 \geq f_{n+2}(el\ n+2\ \acute{e}simo\ fibonacci)$

Por lo que $b \geq \frac{\varphi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1}}{\sqrt{5}}$ $n = O(\log b)$

Finalmente la complejidad del algoritmo de euclides es $O(\log b)$

# Primos Relativos

Dos enteros $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son llamados primos relativos (coprimos) si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen el máximo común divisor igual a 1.

# Propiedades coprimos

- Dos números consecutivos siempre son coprimos. Es decir $\gcd(a+1, a) = 1$

**Demostración:**

Usamos la fórmula $\gcd(a, b) = \gcd(a + kb, b)$ con $k = -1$

$\Longrightarrow \gcd(a+1, a) = \gcd(a+1-a, a) = \gcd(1, a) = 1$ ■

# Referencias


- Rosen, K. Elementary number theory and its applications.
- CP- Algorithm : https://cp-algorithms.com/algebra/sieve-of-eratosthenes.html
- Topocoder https://goo.gl/nKOtvL

# ¡ Good luck and have fun !