Grado en Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

FINANZAS CUANTITATIVAS: TEORÍA MATEMÁTICA Y MÉTODOS NUMÉRICOS DE LA VALORACIÓN DE ACTIVOS

Junio 2024

Jorge Lorenzo García

Tutor:
José Orihuela Calatayud

Agradecimientos

A mi familia que me ha acompañado todos estos año. Especialmente a mi madre que me inculcó la curiosidad científica.

Igualmente a todos mis amigos. A Manolo que me instó a que me metiera a esta carrera.

Abstract

In the field of finance, mathematics becomes an essential tool to understand and analyze markets, value assets and manage risks. This work seeks to delve into the importance of mathematical contributions to finance, exploring the field known as financial mathematics or quantitative finance.

Advanced mathematics finds its application in various aspects of the financial world, from derivatives valuation to portfolio management. In this context, stochastic calculus emerges as a fundamental piece. This approach allows us to model systems in which certain random behavior is found, such as the prices of financial assets, and to better understand market uncertainty.

Within stochastic calculus, concepts such as Brownian motion, martingales, and the Itô Integral play a crucial role. Studying these elements not only provides a deeper understanding of the underlying mathematical foundations, but also allows the development of more sophisticated models for valuing financial assets.

One of the highlights of this work is the exploration of two fundamental concepts in quantitative finance: arbitrage and replication. These concepts have been fundamental in the development of financial models for asset valuation and risk management. The absence of arbitrage opportunities, which implies that there are no opportunities to make risk-free profits through the simultaneous purchase and sale of related assets. While this assumption is useful for simplifying mathematical models, in reality, arbitrage opportunities can arise due to market inefficiencies or the inability of prices to adjust instantaneously to new information. These inefficiencies have been corrected, in part, by the use of this sophisticated mathematics.

The Black-Scholes model, perhaps the best-known example of derivatives pricing, illustrates how these concepts are applied in practice. Furthermore, the Black-Scholes model assumes that the return of the underlying asset follows a geometric Brownian motion process, implying that changes in price are independent and normally distributed. Although this assumption may be valid in certain contexts, in practice, financial asset prices usually exhibit more complex behaviors, such as stochastic volatility or the presence of price jumps.

In addition to examining the Black-Scholes model, this work also addresses other asset pricing methodologies and their relationship with the Fundamental Theorem of Pricing (TFAP). This theorem provides an important theoretical framework for understanding how asset prices are determined in an efficient market.

Finally, a section is dedicated to numerical methods in finance and their importance in practice. We discuss why these methods are essential and present some practical examples implemented in the Python programming language. This section offers a practical view of how mathematical concepts are applied in solving real-world financial problems, highlighting the intersection between theory and practice in quantitative finance.

Furthermore, it's imperative to acknowledge that while mathematical models serve as valuable tools for understanding and navigating the complexities of financial markets, they are not without limitations. These models are often based on assumptions that may not fully capture the intricacies of real-world market dynamics. As such, practitioners must exercise caution and employ a combination of quantitative analysis and qualitative judgment to make informed decisions. Additionally, ongoing advancements in mathematical finance, coupled with the ever-evolving landscape of financial markets, necessitate a continuous refinement of models and methodologies. By embracing a holistic approach that integrates mathematical rigor with practical insights, professionals in the field can enhance their ability to effectively navigate the dynamic and multifaceted world of finance.

Resumen

En el ámbito de las finanzas, las matemáticas se convierten en una herramienta esencial para comprender y analizar los mercados, valorar activos y gestionar riesgos. Este trabajo busca ahondar en la importancia de los aportes matemáticos a las finanzas, explorando el campo conocido como matemáticas financieras o finanzas cuantitativas.

Las matemáticas avanzadas encuentran su aplicación en diversos aspectos del mundo financiero, desde la valoración de derivados hasta la gestión de carteras. En este contexto, el cálculo estocástico emerge como una pieza fundamental. Este enfoque permite modelar sistemas en los que se encuentra cierto comportamiento aleatorio como es el caso de los precios de los activos financieros y comprender mejor la incertidumbre del mercado.

Dentro del cálculo estocástico, conceptos como el movimiento browniano, las martingalas y la Integral de Itô desempeñan un papel crucial. Estudiar estos elementos no solo proporciona una comprensión más profunda de los fundamentos matemáticos subyacentes, sino que también permite desarrollar modelos más sofisticados para la valoración de activos financieros.

Uno de los aspectos más destacados de este trabajo es la exploración de dos conceptos fundamentales en las finanzas cuantitativas: el arbitraje y la replicación. Estos conceptos han sido fundamentales en el desarrollo de modelos financieros para la valoración de activos y la gestión de riesgos. La ausencia de oportunidades de arbitraje, lo que implica que no existen oportunidades para obtener ganancias sin riesgo mediante la compra y venta simultánea de activos relacionados. Si bien este supuesto es útil para simplificar los modelos matemáticos, en la realidad, las oportunidades de arbitraje pueden surgir debido a ineficiencias del mercado o a la incapacidad de los precios de ajustarse instantáneamente a nuevas informaciones. Estas ineficiencias han sido subsanadas, en parte, por el uso de estas matemáticas sofisticadas.

El modelo de Black-Scholes, quizás el ejemplo más conocido de valoración de derivados, ilustra cómo estos conceptos se aplican en la práctica. Además, el modelo de Black-Scholes asume que el rendimiento del activo subyacente sigue un proceso de movimiento browniano geométrico, lo que implica que los cambios en el precio son independientes y distribuidos normalmente. Si bien este supuesto puede ser válido en ciertos contextos, en la práctica, los precios de los activos financieros suelen exhibir comportamientos más complejos, como la volatilidad estocástica o la presencia de saltos en los precios.

Además de examinar el modelo de Black-Scholes, este trabajo también aborda otras metodologías de valoración de activos y su relación con el Teorema Fundamental de Asignación de Precios (TFAP). Este teorema proporciona un marco teórico importante para comprender cómo se determinan los precios de los activos en un mercado eficiente.

Por último, se dedica un apartado a los métodos numéricos en finanzas y su importancia en la práctica. Se discute por qué estos métodos son esenciales y se presentan algunos ejemplos prácticos implementados en el lenguaje de programación Python. Esta sección ofrece una visión práctica de cómo se aplican los conceptos matemáticos en la resolución de problemas financieros del mundo real, destacando la intersección entre la teoría y la práctica en las finanzas cuantitativas.

Además, es imperativo reconocer que si bien los modelos matemáticos sirven como herramientas valiosas para comprender y modelar las complejidades de los mercados financieros, no están exentos de limitaciones. Estos modelos a menudo se basan en suposiciones que pueden no captar plenamente las complejidades de la dinámica del mercado del mundo real. Como tal, los profesionales deben tener cuidado y emplear una combinación de análisis cuantitativo y cualitativo para tomar decisiones informadas. Además, los avances continuos en matemáticas financieras, junto con el panorama en constante evolución de los mercados financieros, requieren un perfeccionamiento continuo de modelos y metodologías. Adoptando un enfoque holístico que integra el rigor matemático con conocimientos prácticos los profesionales en el campo pueden mejorar su capacidad para

modelar eficazmente en el dinámico y multifacético mundo de las finanzas.

Índice

1 Introducción

En el mundo contemporáneo las finanzas juegan un papel crucial en la economía mundial. Y la buena gestión de estas puede llevarnos a mejor nivel de vida por el impacto que tienen en el crecimiento de la economía.

Por otro lado, en los últimos siglos se ha demostrado cómo el uso de las matemáticas y la modelización por ordenador, en las últimas décadas, en distintos campos de la ingeniería ha mejorado la eficiencia de las tecnologías permitiendo un desarrollo exponencial en producción, demografía y calidad de vida.

La aplicación de matemáticas avanzadas al mundo financiero se hizo esperar puesto que fue más difícil encontrar una teoría que diera buenos resultados dado el aspecto inherentemente humano que tienen la gestión de activos.

En esta primera parte haremos una introducción para legos en la materia de las finanzas explicando en qué sentido las matemáticas avanzadas pueden ser útiles en este sector.Luego se entrará en la cuestión matemática de la valoración de derivados haciendo un paso por los desarrollos en el campo del cálculo estocástico. Por último, se verán los métodos numéricos más relevantes para las finanzas.

2 El mundo de las finanzas y la aplicación de las matemáticas

Esta sección se centrará en explicar superficialmente cómo funciona el mercado financiero introduciendo los conceptos claves que necesitaremos más adelante. Una vez introducido presentaremos cuáles son los retos relacionados con las finanzas en los que se han empleado las matemáticas y se ha desarrollado un campo en sí mismo de las matemáticas conocido comúnmente como **matemáticas financieras** o **finanzas cuantitativas**.

2.1 Mercados

Una palabra que aparece constantemente prácticamente en cualquier rama de la economía y que es crucial para esta ciencia es **mercado**. Es un concepto muy genérico pero que normalmente cuando va acompañado se estrecha mucho su significado. Entender los distintos mercados y como se relacionan entre ellos es clave para entender el sentido de este trabajo y de las matemáticas financieras.

Lo que entendemos en el día a día por mercado es un lugar físico donde se intercambian bienes. En economía se abstrae su significado para entenderlo como un conjunto de transacciones. Esta definición recoge lo que tienen en común tanto los mercados donde compramos fruta como los mercados de capitales, valores y financieros. Estos últimos son los que nos atañen, pero está correlacionado con el resto (también matemáticamente como veremos). Entendiendo un poco de la función empresarial y un poco de cada uno de los mercados será suficiente para la finalidad de este trabajo.

En esta sección solo daremos definiciones formales de aquellos conceptos que vayan a necesitarse posteriormente en el desarrollo matemático. Para explicaciones y definiciones no formales seguirmos [Hull, 2022].

2.1.1 Mercado de valores

Las empresas en muchas ocasiones necesitan financiación para realizar sus funciones (pagar maquinaria o empleados por ejemplo). Y hay dos formas habituales de conseguirla:

- Emitiendo deuda en forma de bonos. Esto es pedir dinero y devolverlo con un interés en un plazo determinado. De esta forma la empresa obtiene la financiación que requiere y el prestamista gana el interés.
- En el mercado de valores. Esto es poner parte de la empresa a la venta vía acciones. Si alguien compra ese porcentaje obtiene el derecho a cobrar la parte proporcional de los beneficios de la empresa, lo que se llama el **dividendo**. Así como obtiene el derecho de poder vender la acción.

Obviamente esto tiene mucha más enjundia, los sistemas financieros y la administración de empresas en sí mismos son grados en el sistema universitario español.

A modo de ejemplo pongo algunas reglas y características que se suelen dar para ver que estas no son elegidas de forma arbitraria sino por el buen funcionamiento del sistema.
En caso de quiebra (imposibilidad de pagar a todos los deudores) los prestamistas cobran antes que los accionistas. Además los bonos tienen calificaciones en función del riesgo que tengan. Esto fue un tema controvertido durante la crisis del 2008 y, en parte, se ha culpado a las Agencias de calificación.
O por ejemplo, para la adquisición de una gran parte de una empresa que cotiza en el mercado de valores esta se realiza legalmente mediante una Oferta Pública de Adquisición (OPA), donde se decide entre los accionistas si se venden o no las acciones.

Unos términos que utilizaremos con frecuencia serán:

- Estar en **largo** en un acción: Cuando posees una acción, porque la has comprado normalmente.
- Estar en **corto** en una acción: Cuando te han prestado una acción para venderla y debes recomprarla en algún momento.

Además, se le llama **cerrar la posición** cuando dejamos de tener la acción o el deber de comprarla, respectivamente.

En resumen, el mercado de valores contiene al conjunto de las transacciones de participaciones de empresas. Tiene un papel fundamental en el escalamiento de empresas así como en las grandes empresas que son las que más influyen en la economía.

2.1.2 Mercado financiero

El mercado financiero es aquel donde se venden securities y derivados. A nosotros nos interesan estos últimos. En general un **derivado** es un instrumento que depende de otro más elemental llamado **subyacente**. Entre los subyacentes más comunes están los valores de empresas(**stocks**), bonos, tipos de cambio, tipos de interés o mercancías (**commodities**) como podría ser el trigo.

Existen dos tipos principales de derivados en función del tipo que sea el subyacente. Los financieros y los de commodities.

Un ejemplo nos servirá para entender mejor los derivados, la utilidad de estos y un tipo de derivados, los futuros.

Example 2.1.1. *Ejemplo de uso de derivados*

Imaginemos un agricultor cuya cosecha de trigo se producirá en unos meses. Este agricultor necesitará pagar en esa fecha un tractor para que la siguiente cosecha sea más eficiente. La prioridad del agricultor es asegurar tener ese dinero para el tractor disponible. Pero el precio del trigo es variable. Por otro lado, un experto en geopolítica considera que habrá guerra en Ucrania por lo que el precio del trigo subirá mucho. Por tanto, le conviene establecer un contrato con el agricultor para la fecha de la cosecha. El agricultor se compromete a vender cierta cantidad de trigo al experto en geopolítica por una cantidad de dinero concreta. Y el experto se compromete a pagarlo. Finalmente, el agricultor ha asegurado tener el tractor para la próxima cosecha y el experto en geopolítica conseguirá dinero si sus predicciones son ciertas.

Esto es lo que sería un contrato a futuros cuyo subyacente es una commodity negociado de forma bilateral y privada, fuera de los mercados públicos, lo que en jerga financiera se llama Over-the-counter(OTC).

Algunos autores llamarían a esto contrato forward por ser negociado OTC pero la forma del contrato, que es lo que nos interesa en este caso, es la misma. Esto es así porque los derivados sobre commodities se negocian entorno a los índices de mercado de estas, lo que sería el precio esperado por el conjunto de agentes del mercado, por comodidad. Ya que así no hace falta estar transfiriendo de forma física el subyacente entre comprador y vendedor simplemente pagando la diferencia del valor real al momento del fin del contrato respecto al fijado en este.

Otro tipo de derivado más complejo y, por razones que veremos más adelante, más importante para las matemáticas financieras son las opciones. Una opción es un contrato entre dos partes dando a una de ellas la posibilidad de comprar o vender el subyacente a un precio fijado en el futuro bajo las condiciones que se especifiquen. Esta definición es, de nuevo, muy genérica. Veamos un ejemplo con las opciones europeas.

Las opciones europeas son dos: call y put. La opción call(o de compra) sobre una acción, con una fecha de vencimiento y un precio llamado strike S da la opción(pero no la obligación) de comprar dicha acción al precio de strike S en la fecha de vencimiento. Es decir si yo poseo la call de una acción de Endesa para el 31 de diciembre de 2024 con un precio strike de 5 euros podré decidir ese día si compro la acción por 5 euros o no. Claramente ejecutaré dicha opción de compra si ese día el precio es superior a 5 euros y no lo haré si es inferior.

Una opción put es lo mismo pero da el derecho a vender la acción. La venderé si el precio strike es superior al valor de la acción y no lo haré si es inferior.

De manera formal (basada en [Björk, 1988], p. 2):

Definition 2.1.2. *Una **opción call** sobre un **subyacente** S con un **precio strike** K y **fecha de vencimiento** T es un contrato escrito en un $t = 0$ con las siguientes propiedades:*

- *El poseedor(comprador normalmente) de la opción pueda en el momento $t = T$ el derecho a comprar el subyacente S por el precio K.*
- *El poseedor no tiene la obligación de comprar el subyacente*

La función que dice cuánto dinero recibes en función del valor de la acción se llama **payoff** y suele representarse por una función H que depende de los valores de los subyacentes en distintos momentos del tiempo. En caso de call y put solo del valor del subyacente a fecha de vencimiento por lo que es una función de una variable:

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (S_T) & \longmapsto & H(S_T) = \begin{cases} S_T - K & si \quad S_T \geq K \\ & \\ 0 & si \quad S_T < K \end{cases} \end{array}$$

Siendo S_T el valor de la acción en $t = T$. Veremos más adelante por qué se usa esa notación S_T.

Otros tipos de opciones son las opciones americanas. En estas el derecho a ejecutar la opción es durante todo el periodo que esta dure hasta fecha de vencimiento. La función de payoff H dependerá en este caso de S en distintos momentos del tiempo.

Europeas y americanas forman parte de las llamadas **opciones vanilla** por su simplicidad. Las más complejas son conocidas como **opciones exóticas**. Veamos algunas:

- Opciones asiáticas: Dependen de la media ponderada del valor del subyacente en distintos momentos del tiempo.
- Opciones con barrera: La opción deja de existir(o empieza a existir) si el valor del subyacente sobrepasa una cota (máxima o mínima) que sería la barrera.

Aunque más adelante trabajaremos principalmente con opciones vanilla precisamente por su sencillez, en el día a día lo que más trabajo da son las exóticas por su dificultad precisamente. Ya que requieren más cálculos y estos son más complejos.

Example 2.1.3. *Ejemplo de uso de opciones.*

Una empresa de construcción de barcos necesitará acero en unos meses, sus almacenes están llenos y la posibilidad de que suba el acero y esa remesa de barcos sea un fracaso provocaría la quiebra de la empresa cuya proyección a futuro es buena por el crecimiento del tráfico marítimo. Aunque no es probable la posibilidad de la subida del acero la junta directiva decide no asumirla y comprar una opción call sobre el precio del acero. Si sube el acero les irá mal pero no se hundirán y podrán tener otra remesa de barcos y si va bien solo perderán una parte del beneficio.

Tanto en el caso del agricultor como la empresa de acero se tratan de casos en los que se cubren de riesgos. Lo que se llaman **estrategias de cobertura**. Pero hay una diferencia. En el caso del agricultor la otra parte es un especulador que cree que el precio subirá. En el caso de la empresa la otra parte , ¿quién es? Pues entidades financieras que venden esta clase de productos. Esto será importante más adelante.

2.1.3 La relevancia del mercado de derivados

Para saber el peso de estos productos financieros podemos ver las estimaciones realizadas por el Bank of international Settlements en 2023 que daban estas cifras([BIS, 2023]):

- El valor nominal pendiente de los derivados OTC a nivel mundial era de 715$ billones de dólares.

Estos datos destacan la considerable magnitud de los derivados financieros en los mercados globales en ese momento. El término **valor nominal** no representa el valor real intercambiado, sino más bien el tamaño del contrato sobre el cual se calculan los pagos. Por otro lado, el **valor de mercado bruto** representa el valor total de todas las posiciones de derivados en caso de liquidación en un momento específico, lo que puede ser significativamente menor que el valor nominal. Por ejemplo en 2013 mientras que el nominal era de 693$ millones el bruto era de 20$ billones (lo que es unas 14 veces el PIB de España en 2023) [BIS, 2013].

2.1.4 Resumen

En resumen, tenemos empresas e individuos con distintas necesidades. Para las empresas estas necesidades suelen ser financiarse (mediante mercado de valores) o cubrirse de riesgos(mediante mercados financieros). Además hay individuos que buscan ganar dinero ya sea prestándolo mediante bonos o participando de empresas en los mercados de valores. Y otros individuos, los **especuladores**, que predicen una tendencia contraria a la que la mayoría de individuos o empresas creen e intentan beneficiarse de ello mediante contratos de futuros. Por otro lado, hay entidades financieras que crean los derivados que empresas piden. Y como hemos visto estos mercados de derivados mueven cuantiosísimas cantidades de dinero.

2.2 Gestión de carteras

Para esta sección que pretende ser introductoria como la anterior no nos detendremos en formalidades ni será exhaustiva. Nos basaremos en [Reilly, 2002].

Una **cartera** o **portfolio** es una combinación de activos, que para nuestro caso podemos imaginar como acciones de empresas o derivados que hemos visto en la sección anterior.

La **gestión de carteras** se podría resumir en la combinación de activos en una cartera con una finalidad. La finalidad depende de las necesidades del cliente que en general se resumen en el grado de riesgo que está dispuesto a adoptar. Veamos algunos ejemplos.

Example 2.2.1. *Ejemplos de distintos tipos de clientes*

- Una persona que quiere pagarse la jubilación y antepone la seguridad y protección ante la inflación.
- Un fondo de inversión que intenta maximizar beneficios con un grado medio de riesgo.
- Un fondo de capital riesgo(**venture capital**) que se especializa en inversiones con un alto grado de riesgo pero con una gran recompensa potencial. Como podría ser una **start-up** tecnológica.

En estos distintos casos hay prioridades distintas y estas prioridades condicionan los activos que contendrán sendas carteras. Para la persona que quiere protegerse frente a la inflación no tiene sentido que tenga buena parte de su dinero invertida en una **start-up** pero los fondos de **venture capital** están especializados en ello.

Ígualmente se pueden cubrir riesgos incluyendo derivados en las carteras como en los casos de la sección anterior.

Un enfoque sugerente que quiero incluir es el de la **Teoría de la cartera Maslowiana** de [De Brouwer, 2009] donde se sugiere basar las carteras personales en la **pirámide de Maslow** que ordena las necesidades humanas de la siguiente forma:

- Necesidades básicas
- Necesidades de seguridad y protección
- Necesidades sociales
- Reconocimiento
- Autorrealización

Una distinción importante que se suele hacer en cuanto a gestión de carteras es el modo en el que se gestiona. La gestión **pasiva** intenta replicar al mercado. Por ejemplo, mediante **ETFs** o **fondos indexados** los cuales son en sí mismos carteras que combinan activos que replican a secciones del mercado. Esta estrategia, aunque simple, puede generar grandes beneficios durante épocas de crecimiento, pero claramente es sensible frente los **ciclos económicos**. Por otro lado, tenemos la gestión **activa** de carteras que intenta mejorar los rendimientos frente al mercado con elecciones precisas de empresas con buenas expectativas así como cambios en la cartera con más frecuencia que en la gestión pasiva. La contrapartida de esto es que esas operaciones también tienen coste.

2.3 Los objetivos de las matemáticas financieras

Abandonamos ya las cuestiones financieras y nos adentramos en los desarrollos matemáticos que surgieron en el **siglo XX**, principalmente en la segunda mitad de este. En esta época ya se desarrollaron con herramientas matemáticas y tecnológicas mucho más potentes como veremos. No por casualidad sino porque hubo desarrollos claves en las matemáticas sin los cuales sería imposible entender las matemáticas financieras de hoy en día. Destaco dos de ellos:

- El **cálculo estocástico**: Desarrollado principalmente por **Kiyosi Itô** en los años 40 y 50 ([Itô, 1944], [Itô, 1946], [Itô, 1951]). Y **Paul-André Meyer** que continuó con el desarrollo ([Meyer, 1967]).
- La computación y los métodos numéricos: La computación ha supuesto un gran cambio en todo los sectores de la sociedad. También la **computación científica**. Como veremos más adelante en las finanzas es necesario poder resolver cálculos muy complejos.

Todos estos temas los trataremos más adelante. Ahora plantearemos los dos principales problemas que las matemáticas han tratado de resolver

2.3.1 La optimización de carteras

El apartado al que no le dedicaremos más tiempo es a la **optimización de carteras**. La optimización es parte importante de las matemáticas y como es lógico se tratará de usar herramientas matemáticas para optimizar carteras. Como ya sabemos la gestión de carteras tiene dos caras, maximizar beneficios y limitar riesgos. Ambos han sido desarrollados ampliamente en las últimas décadas. Sin embargo, estos desarrollos no se tratarán en este trabajo.

2.3.2 La valoración de derivados

Otro de los objetivos de las matemáticas financieras, y al que le dedicaremos más tiempo, es a dar un precio racional a los derivados financieros. Esta rama es conocida como **valoración de derivados** (o activos, o valoración a secas, pero nosotros nos centraremos en la de derivados) y, en ocasiones, asignación de precios.

La importancia de esto radica en que si se valora por debajo de lo justo la entidad financiera que venda el derivado tendrá problemas económicos y será imposible que siga vendiendo derivados. Por el contrario, si se vende por encima del valor justo, como es lógico que se haga a falta de una valoración justa y si el negocio quiere ser sostenible, los productos ya no serán tan interesantes para los posibles compradores porque la prima por evitar el riesgo será demasiado alta. Produciéndose en ambos casos ineficiencias que llevarán a una limitación en el progreso económico haciendo a las empresas más sensibles ante crisis incluso por crisis de otros sectores relacionados indirectamente. Lo que al mismo tiempo hará que las crisis se extiendan por toda la economía más fácilmente.

Por otro lado, desde el punto de vista de las entidades financieras, vender derivados es un negocio redondo, porque siempre que se venda por encima del valor justo habrá beneficios sin apenas riesgo. Por tanto, si conocieran el valor justo por encima del cual ya tienen beneficios podrían ajustar mucho su precio por debajo del de la competencia para así tener más cuota de mercado. En ese caso una mejora en las matemáticas llevaría a copar el mercado. Ya que, al ser un derivado igual independientemente de que lo venda una entidad u otra se deberían aplicar las curvas de oferta y demanda de la teoría microeconómica clásica de forma prácticamente apodíctica. Como sucede, por ejemplo, con el mercado eléctrico, donde dar un precio por debajo del de mercado te asegura vender el cien por cien de tu electricidad.

Un ejemplo de vender por debajo del precio racional se puede encontrar ya en la Grecia clásica. Cuenta [Aristóteles, 1988] (Libro I cap. IV, p.77) que Tales de Mileto consiguió asegurarse un precio barato por los molinos de aceite para la temporada de aceitunas. Estoy sería una opción conseguida por un precio inferior al justo.

3 Valoración de derivados

3.1 Cálculo estocástico

La herramienta matemática clave para la valoración de derivados ha sido el **cálculo estocástico**. Esta rama trata fundamentalmente de estudiar los **procesos estocáticos** que son familias de variables aleatorias.

Para ello primero definimos lo que es una filtración. Que es la extensión de lo que es un espacio de probabilidad para una variable aleatoria pero para una familia de ellas. Porque cada una de las variables aleatorias deben tener su espacio de probabailidad y qué relación debe haber entre ellos ya que deben tener sentido en el espacio de probabilidad de las "siguientes".

En palabras de [Shreve, 2004b] : ”una filtración nos dice la información que tendremos en momentos futuros”. De su libro tomamos también la siguiente definición.

Definition 3.1.1. *Sea Ω un conjunto no vacío. Fijamos T un número positivo y asumimos que $\forall t \in [0, T]$ hay un σ-álgebra $\mathcal{F}_t$. Además, si $s \leq t$ entonces todo conjunto en $\mathcal{F}_s$ está también en $\mathcal{F}_t$. Entonces, llamamos a la colección de σ-álgebras $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ una* ***filtración****.*

Definition 3.1.2. *Un* ***proceso estocástico*** *es una colección de variables aleatorias $X(t)$. Tal que, si fijamos una t, $0 \leq t \leq T$, $X(t)$ es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}_t)$. Si además $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible $\forall t \in [0, T]$ se dice que es un* ***proceso adapatado a la filtración*** *$\mathbb{F}$.*

El cálculo estocástico es fundamental porque da una manera (varias en realidad como veremos) de resolver ecuaciones diferenciales con diferenciales estocáticas, es decir, ruido aleatorio. Ya que una de las premisas de las matemáticas financieras es que el precio de las acciones, como consecuencia de la oferta y demanda continuamente cambiante por parte de los actores del mercado, tiene una componente aleatoria que nosotros intentaremos introducir en nuestros modelos.

El problema, en general, se reduce a ser capaces de integrar respecto de estos procesos aleatorios. Ya que serán ecuaciones diferenciales que se pueden escribir en forma integral. En un principio estas integrales se resolvieron solo cuando el proceso estocástico era un movimiento browniano, después para martingalas y finalmente para martingalas locales y semi-martingalas. Vamos a ver ahora qué son estos conceptos.

3.1.1 Movimiento Browniano

.

La explicación que pongo a continuación es basada en la de [Klebaner, 2012]: El **movimiento browniano** debe su nombre al botánico Robert Brown. Este botánico describió el movimiento de las partículas de polen en un fluido en el año

1828. Observó que las partículas se movían de una forma irregular y aparentemente aleatoria. Albert Einstein en el año 1905 argumentó que ese movimiento era debido al bombardeo de la partícula por parte de las moléculas del fluido y obtuvo las ecuaciones de este movimiento. Años antes, en el 1900, pero sin demasiada relevancia en dicho momento Louis Bachelier usó el movimiento browniano como modelo para el movimiento de los precios de las acciones. La fundación matemática del movimiento browniano como proceso estocástico la hizo Norbert Wiener en 1923. A razón de esto el movimiento browniano en algunas ocasiones es llamado también **proceso de Wiener**.

Veremos que el proceso estocástico de un movimiento browniano $B(t)$ sirve como modelo básico para el efecto acumulado del ruido. Si B(t) denota la posición de una partícula en tiempo t, el desplazamiento $B(t) - B(0)$ es el efecto de bombardeo aleatorio por las moléculas de fluido, o el efecto del ruido durante el tiempo t(que es como lo usaremos para los modelos financieros).

Antes de dar una definición matemática del movimiento browniano veremos lo que es un **paseo aleatorio** ya que luego desarrollaremos este tema en otra sección porque será importante.

Para las siguientes definiciones matemáticas nos basaremos en [Shreve, 2004b]. Un **paseo aleatorio** es la trayectoria resultante de hacer sucesivos pasos aleatorios. Un paso aleatorio será el resultado de un evento aleatorio que tiene dos posibilidades. Empezando por los paseos aleatorios simétricos. En este caso el paso aleatorio nos lo modela una variable aleatoria que siga una distribución de Bernoulli con $p = q = \frac{1}{2}$.

Definition 3.1.3. *Sea X_n una sucesión de variables aleatorias que siguen una distribución de Bernoulli con $p = q = \frac{1}{2}$. El proceso M_k con $M_0 = 0$ y*

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$$

es un paseo aleatorio simétrico.

Para aproximar el browniano mediante paseos aleatorios simétricos aceleramos el tiempo y reducimos el tamaño del paso.

Definition 3.1.4. *Fijado entero positivo n. Definimos el paseo aleatorio simétrico escalado como:*

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$$

La idea es que el límite con $n \to \infty$ es el movimiento browniano. Ahora damos una definición de movimiento browniano.

Definition 3.1.5. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Para cada $\omega \in \Omega$, suponemos que hay una función continua W(t) en $t \geq 0$ que satisface $W(0) = 0$ y depende de ω. Entonces W(t), $t \geq 0$, es un movimiento browniano si para todo $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ los incrementos*

$$W(t_i) = W(h) - W(t_0), W(t_2) - W(t_i), ..., W(t_m) - W(t_{m-1})$$

son independientes y cada uno de estos incrementos es normalmente distribuido con:

$$\mathbb{E}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0,$$
$$Var[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i.$$

En palabras de [Shreve, 2004b]: "Una diferencia entre el movimiento browniano $W(t)$ y un paseo aleatorio escalado, digamos $W^{100}(t)$,es que el paseo aleatorio escalado tiene un tiempo de paso natural 100 y es lineal entre estos pasos, mientras que el movimiento browniano no tiene porcionales lineales. La otra diferencia es que, mientras el paseo aleatorio escalado es solo aproximadamente normal para cada t, el movimiento browniano es exactamente normal. Esto es consecuencia del Teorema Central del Límite."

Una definición alternativa de browniano se da como teorema:

Theorem 3.1.6. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Para cada $\omega \in \Omega$, suponemos que hay una función continua W(t) en $t \geq 0$ que satisface $W(0) = 0$ y depende de ω. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *La definición anterior.*
2. *Para todo $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ las variables aleatorias $W(t_1), W(t_2), ..., W(t_m)$ son conjuntamente distribuidas normalmente con medias igual a 0 y matriz de covarianzas:*

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_m & t_m & \cdots & t_m \end{pmatrix}$$

3. *Para todo $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ las variables aleatorias $W(t_1), W(t_2), ..., W(t_m)$ tienen una función generatriz de momentos conjunta:*

$$\varphi(u_1, u_2, ..., u_m) =$$
$$exp\{\frac{1}{2}(u_1 + u_2 + ... + u_m)^2 t_1 + \frac{1}{2}(u_2 + ... + u_m)^2(t_2 - t_1) + ... + \frac{1}{2}u_m^2(t_m - t_{m-1})\}$$

3.1.2 Martingala y submartingala

.

Las **martingalas** son procesos estocásticos que matematizan un juego justo. En una martingala se tiene que el valor esperado en un momento futuro t dada la información hasta un momento $s < t$ es exactamente el valor en el momento. Se dicen que representan un juego justo ya que si modelan un juego de azar en media, es decir el caso esperado, es que no se gane ni se pierda.

Por otro lado, las **submartingalas** sirven como concepto matemático más amplio que el da la martingala para el cual también se ha desarrollado la teoría del cálculo estocástico.

Definition 3.1.7. *Un proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ adaptado a la filtración $\mathbb{F}$ es una martingala (resp. submartingala) si para todo t es integrable, $E[X(t)] < \infty$, y para todo $s < t$*

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s), \textit{ (resp. } E[X(t)|\mathcal{F}_s] \geq X(s))$$

Además, vamos a ver que el **movimiento browniano** es claramente un tipo particular de martingala (y por tanto de submartingala).

Theorem 3.1.8. *El movimiento browniano es una martingala.*

Demostración. Dados $0 \leq s \leq t$. Entonces:

$$\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[W(t) - W(s) + W(s)|\mathcal{F}(s)]$$
$$= \mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + W(s) = W(s)$$

La segunda igualdad es por la linealidad de la esperanza. La tercera igualdad es porque s solo depende de la información hasta el momento s. La cuarta igualdad por que esa esperanza es 0 por la definición de browniano(los movimientos son independientes). □

Las **martingalas locales** y **semi-martingalas** las veremos más adelante.

3.1.3 La imposibilidad de integrar respecto del browniano

.

Decíamos al principio de la sección que el cálculo estocástico nos servía para resolver ecuaciones diferenciales con diferenciales de procesos estocásticos. Sabemos que las ecuaciones diferenciales se pueden escribir en muchas ocasiones como ecuaciones integrales equivalentes. Y ese será el caso de las ecuaciones diferenciales que usaremos.

Pues bien lo que vamos a mostrar es que no se puede integrar, de la forma usual, respecto del browniano. Y si no se puede integrar, las ecuaciones diferenciales estocásticas no tienen sentido de existir. Más adelante veremos que si hay formas de integrar respecto del browniano y martingalas, lo que es la esencia del cálculo estocástico.

De momento haremos un repaso por la integración clásica y veremos la imposibilidad de integrar respecto del browniano.

Definition 3.1.9. *Sea g una función de variable real, su **variación** en el intervalo $[a, b]$ es:*

$$V_g([a,b]) = sup\sum_{i=1}^{n}|g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)|,$$

donde el supremo se toma en particiones:

$$a = t_0^n < t_n^n < ... < t_n^n = b$$

Por razones que veremos a continuación necesitaremos la definición de **variación cuadrática**.

Definition 3.1.10. *Sea g una función de variable real se define su variación cuadrática en $[0,t]$ como el límite(cuando existe):*

$$[g](t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n}(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n))^2,$$

donde el límite es tomado sobre particiones

$$0 = t_0^n < t_n^n < ... < t_n^n = t,$$

con $\delta_n = \max_{1\leq i\leq n}(t_i^n - t_{i-1}^n)$.

Y un teorema que relaciona ambas variaciones.

Theorem 3.1.11. *Si g es continua y de variación finita entonces tiene variación cuadrática cero.*

Demostración. $[g](t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n}(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n))^2$

$\leq \max_i |g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)|\sum_{i=1}^{n}(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)) \leq \max_i |g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)|V_g(t)$.

Dado que g es continua, es uniformemente continua en $[0,t]$ y por tanto $\lim_{\delta_n \to 0} \max_i |g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)| = 0$, de ahí se sigue el resultado. □

Para resolver una integral respecto de una función tenemos la **Integral de Riemann-Stieltjes** respecto de funciones de variación finita:

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)),$$

con $\xi_i^n \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$ y $\delta_n = \max_i |t_i^n - t_{i-1}^n|$.

Sin embargo, esta integral no es aplicable respecto a funciones con varianza infinita.

Theorem 3.1.12. *Si la suma* $\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n))$*, con $\xi_i^n \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$ y $\delta_n = \max_i |t_i^n - t_{i-1}^n|$ converge para cualquier función f, entonces g es de variación finita.*

Demostración. Ver [Protter, 2004], p. 43. □

Vamos a ver ahora qué pasa con el movimiento browniano y por qué no se le puede aplicar esta integral.

Una ocurrencia o realización del movimiento browniano entre 0 y T es una función de variable real. Y se le suele llamar **camino** o **trayectoria**.

Las funciones con derivada continua tienen variación cuadrática 0 es por eso que la variación cuadrática no se suele usar en el cálculo diferencial normal. Sin embargo, el movimiento browniano no es derivable como veremos en el siguiente teorema. Mejor dicho, el conjunto de las trayectorias en las que es derivable tiene probabilidad 0.

Theorem 3.1.13. *Para cualquier t casi todas las trayectorias del movimiento browniano no son diferenciables en t.*

Demostración. Consideramos $\frac{B(t+\Delta)-B(t)}{\Delta} = \frac{\sqrt{\Delta}Z}{\Delta} = \frac{Z}{\sqrt{\Delta}}$, para una variable aleatoria normal estándar Z. Este cociente converge a ∞ en distribución dado que $P(|\frac{Z}{\sqrt{\Delta}}| > K) = 1$ para cualquier K cuando $\Delta \to 0$. □

Vamos a ver para terminar que la varianza cuadrática del movimiento browniano es casi seguramente mayor que 0 (será T de hecho). Es decir, que el conjunto de las realizaciones del movimiento browniano entre 0 y T tiene variación cuadrática 0 tiene probabilidad 0.

Theorem 3.1.14. *La variación cuadrática del movimiento browniano en* $[0, t]$ *es t casi seguramente.*

Demostración. Ver [Shreve, 2004b]. □

A consecuencia de esto, el movimiento browniano tiene variación infinita y por tanto no se puede integrar respecto a él en el sentido de Riemann-Stieltjes.

3.1.4 Integral de Itô

Habrá, por tanto, que encontrar una nueva forma de integrar respecto del browniano que sea coherente con lo que entendemos por integrar y que nos sirva para dar solución a las ecuaciones diferenciales estocásticas que modelen precios de los mercados.

Nos vamos a basar en la explicación que da [Shreve, 2004b] pero añadiendo la formalización de conceptos que aparecen en dicho libro pero que no se formalizan y cuya formalización nos servirá más adelante.

Fijamos un $T \in \mathbb{R}^+$ y queremos encontrar algo que de sentido a:

$$\int_0^T \Delta(t) dW(t)$$

$W(t)$ es un movimiento browniano con $t \geq 0$ junto con una filtración $\mathcal{F}(t)$ para este movimiento browniano. Consideramos que el integrando $\Delta(t)$ está adaptado a dicho filtración. E interpretamos el integrando como la posición(el número de participaciones) que tenemos en un activo modelado por el movimiento browniano $W(t)$. Es lo que llamaríamos una **estrategia de trading** o estrategia a secas.

Para construir la integral primero se hace para **procesos simples**. Esto es, dada una partición de $[0, T]$ $\Pi = t_0, ..., t_n$ con la definición normal de partición. Un proceso simple sería constante en $[t_i, t_{i+1}]$ para cada $i = 0, ..., n-1$

Definition 3.1.15. *Definimos la **Integral de Itô para un proceso simple** $\Delta(t)$ con $t \geq 0$ como:*
Siendo $t_k \leq t < t_{k+1}$, entonces:

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)].$$

Si $t \geq T$:

$$I(t) = I(T) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]$$

Cabe interpretar esta definición de forma sencilla. Lo que habremos ganado con la estrategia $\Delta(t)$ en el momento t será la suma de lo que ganamos en cada intervalo hasta el momento t. Y lo que ganemos en cada intervalo será el número de acciones que tengamos $\Delta(t_i)$ por el cambio de valor que experimente la acción en dicho intervalo, es decir, $W(t_{i+1}) - W(t_i)$.

Por tanto, si $I(t)$ es la ganacia de ir cambiando el número de acciones en la martingala, cuya esperanza es en cada momento mantenerse igual, entonces la ganacia esperada en cada momento deberá mantenerse igual. Por tanto, viendo la integral $I(t)$ como un proceso, este proceso será una martingala.

Theorem 3.1.16. *La Integral de Itô es una martingala.*

Demostración. Ver [Shreve, 2004b]. □

Como $I(t)$ es una martingala e $I(0) = 0$ tenemos que $\mathbb{E}I(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Se sigue que $Var I(t) = \mathbb{E}I^2(t)$, cuyo valor se puede calcular de la siguiente forma.

Theorem 3.1.17. *(Isometría de Itô) La Integral de Itô satisface:*

$$\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E}\int_0^t \Delta^2(u)du$$

Demostración. Ver [Shreve, 2004b]. □

Ahora, continuando con la Integral de Itô, vemos la definición para un integrando cualquiera $\Delta(t)$ que puede variar continuamente con el tiempo e incluso saltar. Asumismo, al igual que antes, que está adaptado a la filtración del movimiento browniano. Además, asumimos que es de cuadrado integrable:

$$\mathbb{E}\int_0^T \Delta^2(t)dt < \infty$$

Ahora, aproximamos $\Delta(t)$ por procesos simples.Construida de forma que, tomamos una partición de n+1 puntos y definimos el proceso simple $\Delta_n(t)$ de forma que $\Delta_n(t_j) = \Delta(T_j)$.
En general es posible escoger una sucesión de $\Delta_n(t)$ que convergan a $\Delta(t)$ de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T |\Delta_n(t) - \Delta(t)|^2 dt = 0$$

Definition 3.1.18. *La* ***Integral de Itô para un proceso de cuadrado integrable*** $\Delta(t)$ *es:*

$$I(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \Delta_n(u)dW(u) = 0$$

Siendo Δ_n una sucesión de procesos simples que converge a Δ en el sentido dicho antes.

Para cada t, dicho límite existe porque $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t \Delta_n(u)dW(u)$ es una sucesión de Cauchy en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Esto es debido a la isometría de Itô que se cumple para $\mathbb{E}(I_n(t) - I_m(t))^2 = \mathbb{E}\displaystyle\int_0^t |\Delta_n(u) - \Delta_m(u)|^2 du$. Como consecuancia de la convergencia de Δ_n esto converge a 0 conforme n y m tienden a infinito.

Vamos a ver las propiedades más importantes de esta integral reunidas en el siguiente teorema:

Theorem 3.1.19. *Sea $T \in \mathbb{R}^+$ y $\Delta(t)$, $t \geq 0$, un proceso adaptado a la filtración del movimiento browniano W(t) y de cuadrado integrable. Entonces $I(t)$ tiene las siguientes propiedades:*

- ***(Continuidad)*** *Como función del límite superior de integración t, los caminos de I(t) son continuos.*
- ***(Adaptatividad)*** *Para cada t, I(t) es $\mathcal{F}(t) -$ medible.*
- ***(Linealidad)*** *Sea $I(t) = \int_0^t \Delta(u)dW(u)$ y $J(t) = \int_0^t \Gamma(u)dW(u)$. Entonces $I(t)+J(t) = \int_0^t (\Delta(u)+\Gamma(u))dW(u)$. Además, sea $c \in \mathbb{R}$, $cI(t) = \int_0^t c\Delta(u)du$*
- ***(Martingala)*** *$I(t)$ es una martingala.*
- ***(Isometría de Itô)*** *$\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E}\int \Delta^2(u)du$.*
- ***(Variación cuadrática)*** *$[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u)du$*

Demostración. Ver [Shreve, 2004b]. □

3.1.5 Integral de Stratonovich

Es relevante mencionar que el cálculo de Itô no es la única forma de resolver integrales respecto de brownianos o martingalas. Existe una alternativa a la integral de Itô que es la **integral de Stratonovich**. Con la integral de Itô aproximamos el integrando por el valor en la izquierda de cada intervalo de la partición. Mientras que con Stratonovich lo hacemos por el punto medio.

Definition 3.1.20. *La integral de Stratonovich* $\int_0^t Y(s)\partial X(s)$ *es el límite en* L_2 *de las sumas:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \tfrac{1}{2}(Y(t_{i+1}^n) + Y(t_i^n))(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)),$$

cuando las particiones t_i^n *se vuelven más finas.*

Pero como dice [Shreve, 2004b]:" Sin embargo, es inapropiado para finanzas. En finanzas, el integrando representa una posición en un activo y el integrador representa el precio de ese activo. Debemos decidir la posición al comienzo de cada intervalo de tiempo, y la integral de Ito es el límite de la ganancia lograda por ese tipo de operaciones a medida que el tiempo entre operaciones se aproxima a cero."

Aunque con Stratonovich se consigue que mantener la regla de la cadena tal y como la entendemos normalmente:

Theorem 3.1.21. *Sea* X *continua y* $f \in C^3$*, entonces:*

$$f(X(t)) - f((X(0)) = \int_0^t f'(X(s))\partial X(s)$$
$$\partial f(X(t)) = f'(X(t))\partial X(t)$$

Siendo ∂ *la diferencial en sentido Stratonovich.*

Demostración. Ver [Klebaner, 2012], p.146. □

En otras disciplinas puede ser de utilidad. Hay artículos comparando el cálculo de Itô con el de Stratonovich en distintos campos. Por ejemplo en cosmología ([Escudero, 2022]). O en modelos de crecimiento de población con fluctuaciones azarosas ([Braumann, 2007]).

3.1.6 Fórmula de Itô

Una vez tenemos la integral respecto del browniano queremos desarrollar esto hasta lograr integrar y diferenciar modelos más complejos. Tomando como base esto podemos pensar en funciones que se forman a partir del browniano pero que puedan introducir nuevos términos que no sean puramente aleatorios.

Para esto el papel fundamental lo juega lo que sería una regla de la cadena para el cálculo estocástico. Lo que se conoce como **fórmula de Itô**.

El teorema que damos a continuación es una ampliación de la fórmula de Itô estándar que presentaremos después. Esta fórmula extendida nos servirá más adelante.

Theorem 3.1.22. *(Fórmula de Itô extendida) Sea $f(t,x)$ una función con derivadas parciales f_t, f_x y f_{xx} definidas y continuas y W(t) un movimiento browniano. Entonces, para cada $T \geq 0$:*

$$f(T,W(T)) = f(0,W(0)) + \int_0^T f_t(t,W(t))dt + \int_0^T f_x(t,W(t))dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,W(t))dt \tag{1}$$

Demostración. De [Shreve, 2004b].
Primero mostramos por qué (1) se cumple cuando $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. En este caso, $f'(x) = x$ y $f''(x) = 1$. Sean x_{i+1} y x_j números. La fórmula de Taylor implica

$$f(x_{i+1}) = f(x_j) + f'(x_j)(x_{i+1} - x_j) + \frac{1}{2}f''(x_j)(x_{i+1} - x_j)^2 \tag{2}$$

En este caso, la fórmula de Taylor hasta segundo orden es exacta (no hay término de resto) porque f''' y todas las derivadas superiores de f son cero. Volveremos a este asunto más adelante.

Fijemos $T > 0$, y sea $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[0,T]$. Nos interesa la diferencia entre $f(W(0))$ y $f(W(T))$. Este cambio en $f(W(t))$ entre los tiempos $t = 0$ y $t = T$ puede escribirse como la suma de los cambios en $f(W(t))$ sobre cada uno de los subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$. Hacemos esto y luego usamos la fórmula de Taylor (4.4.4) con $x_j = W(t_j)$ y $x_{j+1} = W(t_{j+1})$ para obtener:

$$f(W(T)) - f(W(0)) = \sum_{j=0}^{n-1}[f(W(t_{j+1})) - f(W(t_j))]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f'(W(t_j))[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f''(W(t_j))[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 \tag{3}$$

Para la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, el lado derecho de (3) es:

$$\sum_{j=0}^{n-1} W(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 \tag{4}$$

Si dejamos que $||\Pi|| \to 0$, el lado izquierdo de (3) no se ve afectado y los términos en el lado derecho convergen a una integral de Itô y la mitad de la variación cuadrática del movimiento browniano, respectivamente.

$$f(W(T)) - f(W(0))$$

$$= \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \lim_{||\Pi||\to 0} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2$$

$$= \int_0^T W(t)\, dW(t) + \frac{1}{2} T$$

$$= \int_0^T f'(W(t))\, dW(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f''(W(t))\, dt. \tag{5}$$

Esta es la fórmula de Itô en forma integral para la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Si en lugar de la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ tuviéramos una función $f(x)$, entonces en (3)tendríamos también una suma de términos conteniendo $[W(t_{j+1})-W(t_j)]^3$.Pero la suma $\sum_{j=0}^{n-1}[W(t_{j+1})-W(t_j)]^3$ tiene límite cero cuando $||\Pi|| \to 0$. Por tanto, este término no tendrá contibución.

Si tomamos la función $f(t,x)$ de ambas variables t y la variable x, entonces el Teorema de Taylor nos dice:

$$\begin{aligned} f(t_{j+1}, x_{j+1}) - f(t_j, x_j) &= f_t(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f_x(t_j, x_j)(x_{j+1} - x_j) \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(t_j, x_j)(x_{j+1} - x_j)^2 + f_{tx}(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j)(x_{j+1} - x_j) \\ &+ \frac{1}{2} f_{tt}(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j)^2 + \text{higher-order terms.} \end{aligned}$$

Reemplazamos x_j por $W(t_j)$ y x_{j+1} por $W(t_{j+1})$, y lo escribimos como suma:

$$\begin{aligned} f(T, W(T)) - f(0, W(0)) &= \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}, W(t_{j+1})) - f(t_j, W(t_j))] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f_t(t_j, W(t_j))(t_{j+1} - t_j) + \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} f_{tx}(t_j, W(t_j))(t_{j+1} - t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f_{tt}(t_j, W(t_j))(t_{j+1} - t_j)^2 + \text{higher-order terms.} \end{aligned} \tag{6}$$

Si tomamos el límite cuando $\|\Pi\| \to 0$, el lado izquierdo de (6) no cambia. El primer término del lado derecho nos da la integral de Lebesgue.

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f_t(t_j, W(t_j))(t_{j+1}-t_j) = \int_0^T f_t(t, W(t))\, dt$$

A medida que $\|\Pi\| \to 0$, el segundo término converge a la integral de Itô $\int_0^T f_x(t, W(t))\, dW(t)$. El tercer término da otra integral de Lebesgue, $\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, W(t))\, dt$, similar a la manera en que obtuvimos esta integral en (5). En otras palabras, en el tercer término podemos reemplazar $(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$ por $t_{j+1} - t_j$. Esto no es una sustitución exacta, pero cuando sumamos los términos, esta sustitución da el límite correcto cuando $\|\Pi\| \to 0$. Con esta sustitución, el tercer término del lado derecho de (6) converge en $\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, W(t))\, dt$. Estos límites de los primeros tres términos aparecen en el lado derecho de (1). El cuarto y quinto término convergen a cero. De hecho, para el cuarto término, observamos que:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, W(t_j)) \cdot (t_{j+1}-t_j) \cdot (W(t_{j+1}) - W(t_j)) \\
&\quad < \lim_{\|\Pi\|\to 0} \max_{j=0}^{n-1} |W(t_{k+1}) - W(t_k)| \cdot \lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} |f_x(t_j, W(t_j))| \cdot (t_{j+1}-t_j) \\
&\quad = 0 \cdot 1 \cdot \int_0^T f_x(t, W(t))\, dt = 0. \qquad (4.4.10)
\end{aligned}$$

El quinto término se trata de manera similar:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} f_{tt}(t_j, W(t_j)) \cdot (t_{j+1}-t_j)^2 \\
&= 0 \\
&\leq \lim_{\|\Pi\|\to 0} -2 \cdot \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(t_j, W(t_j))| \cdot (t_{j+1}-t_j) \\
&\leq -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \int_0^T f_{tt}(t, W(t))\, dt = 0. \qquad (4.4.11)
\end{aligned}$$

Los términos de orden superior igualmente contribuyen con cero a la respuesta final.

□

La forma matemáticamente rigurosa de estas fórmulas que vamos a ver, y esta que hemos visto, es la forma integral. Porque, como ya hemos visto, el browniano no es diferenciable. Sin embargo, como forma intuitiva se puede expresar lo que sería la forma diferencial equivalente de la forma integral. En el caso de esta última forma (y con solo la variable x) nuestra regla de la cadena del cálculo estocástico en forma diferencial sería la siguiente:

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \tfrac{1}{2}f''(W(t))dt$$

El segundo sumando nos hace diferir de la regla de la cadena estándar. Este nuevo término es debido a que la variación cuadrática no es cero, y hay un término durante el desarrollo en la demostración que no desaparece (se puede ver claramente el paralelismo con el desarrollo de la fórmula de taylor).

Procesos de Itô .
Ahora vamos a ver una forma más general de procesos estocásticos que el simple movimiento browniano. Estos procesos estocásticos son conocidos como **procesos de Itô**. Según [Shreve, 2004b]: "Casi todos los procesos estocásticos, excepto aquellos con saltos, son procesos de Itô".

Definition 3.1.23. *Sea W(t), $t \geq 0$, un movimiento browniano y $\mathcal{F}(t)$ la filtración asociada. Un* ***proceso de Itô*** *es un proceso estocástico de la forma:*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u)dW(u) + \int_0^t \Theta(u)du,$$

donde X(0) no es aleatorio y $\Delta(u)$ y $\Theta(u)$ son procesos estocásticos adaptados. Además, $\Delta(u)$ es de cuadrado integrable y la integral del valor absoluto de $\Theta(u)$ existe y es finita.

Ahora, el siguiente paso lógico, es definir la integral respecto de un proceso estocástico con las herramientas que tenemos de la integral respecto del browniano.

Definition 3.1.24. *Sea X(t), $t \geq 0$, un proceso de Itô y $\Gamma(t)$ un proceso adaptado. Definimos la integral respecto del proceso de Itô como:*

$$\int_0^t \Gamma(u)dX(u) = \int_0^t \Gamma(u)\Delta(u)dW(u) + \int_0^t \Gamma(u)\Theta(u)du$$

Finalmente daremos una fórmula de Itô para procesos de Itô. Es decir, una regla de diferenciación compuesta para modelos más complejos que el browniano.

Theorem 3.1.25. *Sea X(t),$t \geq 0$, un proceso de Itô y f(t,x) una función con derivadas parciales f_t, f_x y f_{xx} definidas y continuas. Entonces, para cada $T \geq 0$:*

$$f(t, X(T)) =$$
$$f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t))dt + \int_0^T f_x(t, X(t))dX(t) + \tfrac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(t, X(t))d[X, X](t) =$$
$$f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t))dt + \int_0^T f_x(t, X(t))\Delta(t)dW(t) +$$
$$\int_0^T f_x(t, X(t))\Theta(t)dt + \tfrac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(t, X(t))\Delta^2(t)dt$$

Con esta sección ya finalizada quiero hacer un apunte. La condición sobre el proceso $\Delta(t)$ de ser de cuadrado integrable puede ser relajada a ser de cuadrado integrable casi seguramente(recordemos que $\Delta(t)$ puede ser aleatorio) pero ya no podemos garantizar que el proceso integral de Itô sea una martingala, solo una **martingala local**.

3.2 No arbitraje

Un concepto clave que cambió el paradigma de las matemáticas financieras que usaremos más adelante es el de **arbitraje**. Aunque se usará más el de no arbitraje.
En palabras de [Schachermayer, 2006] : " El no arbitraje se da en un mercado si no hay posibilidad de sacar un beneficio sin riesgo y sin inversión neta de capital".

Desde mi punto de vista el no arbitraje tiene dos caras:

- Como condición que exigimos a nuestro modelo matemático. Esta restricción nos proporcionará soluciones a problemas de valoración de activos.
- Como característica deseable en los mercados como resultado de eliminar ineficiencias. Véase la labor que los especuladores hacen eliminando oportunidades de arbitraje al aumentar demanda en los mercados/activos con precios bajos y haciendo lo mismo con la oferta en mercados/activos con precios altos.

Example 3.2.1. *Ejemplo de arbitraje entre mercados.*

Si en un mercado se está pagando x€ por un activo y en otro se está pagando x + Δ€ el resultado de comprar uno en el primer mercado y venderlo luego en el segundo es de Δ€ sin haber tenido ningún riesgo. Estas oportunidades de arbitraje obvias y fácilmente aprovechables no se suelen dar en los mercados por la presencia de especuladores que al aumentar la demanda por el precio barato y la oferta por el precio caro se acabarán moviendo hasta eliminar la posibilidad de arbitraje.

En los mercados actuales se cumple el no arbitraje. En parte como profecía autocumplida. Ya que, al incluir el no arbitraje en los modelos matemáticos, se ha llegado a la idea de precio justo y se han eliminado esas oportunidades.

Otros tipo de arbitraje serían dar precios distintos a productos financieros con flujos (es decir ganancias y pérdidas de dinero) idénticos. Esto nos dará pie al siguiente apartado.
Vemos la definición formal del libro de [Shreve, 2004b].

Definition 3.2.2. *Un arbitraje es un proceso de valor de cartera $X(t)$ que satisface $X(0) = 0$ y también satisface, para algún tiempo $T > 0$,*

$$\mathbb{P}\{X(T) \geq 0\} = 1, \quad \mathbb{P}\{X(T) > 0\} > 0.$$

3.2.1 Valoración por replicación

Si suponemos un mercado sin arbitraje. Y suponemos una cartera (o portfolio) que replique los flujos de un derivado financiero entonces el valor de ambos deberá ser el mismo. Y ese valor al inicio del intervalo de tiempo que consideremos será el precio racional al que vender el derivado.

Veamos un ejemplo del uso de esta idea con un modelo sencillo, sacado de [Shreve, 2004a]:

Supongamos un activo S que vale S_0 en tiempo $t = 0$ y para t_1 tiene dos posibilidades, $S_1(H)$ y $S_1(T)$ (por head y tails, cara y cruz), con probabilidad de que sucedad H igual a p y probabilidad de que suceda T igual a $q = 1 - p$. La subida será $u = \frac{S_1(H)}{S_0}$ y la bajada $d = \frac{S_1(T)}{S_0}$. Además, suponemos que prestar dinero no tiene riesgo y se paga con un tipo de interés $r \geq 0$.
Por tanto se deberá cumplir la siguiente desigualdad:

$$0 < d < 1 + r < u,$$

$d > 0$ se cumple porque el valor de la acción deberá ser positivo. Mientras que las otras dos se cumplen por no arbitraje, ya que:

- Si $d \geq 1 + r$, podemos pedir dinero prestado e invertirlo en S de forma que en tiempo 1, en el peor de los casos, podremos pagar el tipo de interés por pedir dinero prestado y habremos ganado $S_0 \cdot (d - 1 + r)$. Por tanto, tendremos una estrategia sin riesgo que puede ganar dinero.
- Si $u \leq 1 + r$, nos podremos poner en corto en S y lo prestaremos en el mercado de dinero. En tiempo 1 podremos cerrar la posición (comprar la acción que vendimos), y habremos ganado, en el peor de los casos, $S_0 \cdot (u - 1 + r)$ sin haber tenido ningún riesgo(el mercado de dinero se considera seguro).

Ahora consideramos una opción call como la definida en (2.1.2) y con precio strike K de forma que $S_1(T) < K < S_1(H)$. Llamamos V_1 a su valor en tiempo 1. Si posees esa opción, en caso de que se cumpla H, ganaremos $V_1(H) = S_1(H) - K$ y si se cumple T nos quedaremos en $V_1(T) = 0$.

Ahora queremos valorar una opción suponiendo sus valores, según suceda H o T, vienen dados por $V_1(H)$ y $V_1(T)$, o sea saber el valor de V_0. Para ello queremos encontrar la cartera que replique su flujos (es decir, su valor en todo momento). En ese caso, su valor en tiempo $t = 0$ deberá ser exactamente el de la opción dada la condición de no arbitraje en dicho mercado.

El valor de una cartera en tiempo 1 cuyo valor en tiempo 0 era X_0 en este mercado donde en han comprado Δ_0 acciones de S será de la siguiente forma:
$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = (1 + r)X_0 + \Delta_0(S_1 - (1 + r)S_0)$. Es decir, el número de acciones compradas en tiempo 0 por el valor en tiempo 1 más el resto de dinero invertido en el mercado de dinero con tasa de retorno r. Y lo que queremos es que $X_1(H) = V_1(H)$ y $X_1(T) = V_1(T)$, esto significaría que, pase lo que pase, los flujos son iguales. Estas ecuaciones nos dan este sistema:

$$X_0 + \Delta_0 \cdot \left(\tfrac{1}{1+r} S_1(H) - S_0\right) = \tfrac{1}{1+r} V_1(H)$$
$$X_0 + \Delta_0 \cdot \left(\tfrac{1}{1+r} S_1(T) - S_0\right) = \tfrac{1}{1+r} V_1(T)$$

Una forma de resolver estas dos ecuaciones en dos incógnitas es multiplicar la primera por un número $\hat{p}$ y la segunda por $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y luego sumarlas para obtener:

$$X_0 + \Delta_0 \cdot \left(\tfrac{1}{1+r}(\hat{p}S_1(H) + \hat{q}S_1(T)) - S_0\right) = \tfrac{1}{1+r}(\hat{p}V_1(H) + \hat{q}V_1(T)),$$

si elegimos p de manera que:

$$S_0 = \hat{p}S_1(H) + \hat{q}S_1(T)), \quad (*)$$

la ecuación se queda:

$$X_0 = \tfrac{1}{1+r}(\hat{p}V_1(H) + \hat{q}V_1(T)),$$

y solo falta resolver $\hat{p}$. Que si resolvemos de (*) se nos queda:

$$\hat{p} = \tfrac{1+r-d}{u-d}, \hat{q} = \tfrac{u-1-r}{u-d}.$$

Y si resolvemos para Δ_0 tendremos la estrategia de trading que replicará la opción. Se nos quedaría así:

$$\Delta_0 = \tfrac{V_1(H)-V_1(T)}{S_1(H)-S_1(T)}.$$

Por tanto el valor de la opción deberá ser V_0:

$$V_0 = \tfrac{1}{1+r}(\hat{p}V_1(H) + \hat{q}V_1(T)),$$

A estas nuevas probabilidades $\hat{p}$ y $\hat{q}$ se les llama también probabilidades de riesgo neutro por una razón que veremos más adelante.

3.3 Modelo de Black-Scholes

Tomando estas ideas de no-arbitraje y valoración por replicación así como el desarrollo del cálculo estocástico podremos ser capaces de valorar una opción europea en un modelo mucho más realista que el anterior. Este trabajo lo hicieron en 1973 F. Black y M. Scholes (de ahí el nombre del modelo) con la ayuda de la idea de R. Merton de hacer una estrategia de trading en tiempo continuo y el no arbitraje.

Para esta sección nos basaremos en el libro de [Shreve, 2004b].

3.3.1 El modelo económico

Consideremos un agente que en cada momento t tiene una cartera valorada en $X(t)$. Esta cartera invierte en una cuenta de mercado de dinero que paga una tasa de interés constante r y en una acción modelada por el movimiento Browniano geométrico (un tipo particular de proceso de Itô):

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Supongamos que en cada momento t, el inversor tiene $\Delta(t)$ acciones del stock S. $\Delta(t)$ puede ser aleatorio pero debe estar adaptada a la filtración asociada con el movimiento Browniano $W(t)$, $t \geq 0$.El resto del valor de la cartera, $X(t) - \Delta(t)S(t)$, se invierte en la cuenta de mercado monetario.

Por tanto el cambio en el valor del portfolio es el siguiente:

$$dX(t) = \Delta(t)dS(t) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt$$

La reescribimos para que quede en función del browniano:

$$dX(t) = rX(t)dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dW(t)$$

Los tres términos que aparecen en esta fórmula se interpretan así:

1. Un rendimiento medio subyacente r en la cartera, lo cual se refleja en el término $rX(t)dt$,
2. Una prima de riesgo $\alpha - r$ por invertir en la acción, lo cual se refleja en el término $\Delta(t)(\theta - r)S(t)dt$, y
3. Un término de volatilidad proporcional al tamaño de la inversión en acciones, que es el término $\Delta(t)\sigma S(t)dW(t)$.

Debemos considerar los precios del subyacente S y el valor del portfolio descontados por el tipo de interés. Es decir, $e^{-rt}S(t)$ y $e^{-rt}X(t)$, respectivamente. Utilizando la fórmula de Itô calcularemos los diferenciales de los precios descontados. Llamando $f(t,x) = e^{-rt}x$, tenemos el del subyacente:

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}S(t)) &= df(t, S(t)) \\
&= f_t(t, S(t))dt + f_x(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, S(t))dS(t)dS(t) \\
&= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) \\
&= (\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \sigma e^{-rt}S(t)dW(t),
\end{aligned}$$

.

Y el del portfolio:

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}X(t)) &= df(t, X(t)) \\
&= f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))dX(t)dX(t) \\
&= -re^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}dX(t) \\
&= \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)dW(t) \\
&= \Delta(t)d(e^{-rt}S(t)).
\end{aligned}$$

3.3.2 La valoración de una opción call

Consideramos una call europea como en el caso anterior. K es una constante no-negativa sobre el subyacente S. Black, Scholes y Merton argumentaron que el valor de esta opción de compra en cualquier momento debería depender del tiempo (más precisamente, del tiempo hasta el vencimiento) y del valor del precio de la acción en ese momento, y, por supuesto, también debería depender de los parámetros del modelo r y α y del precio strike K. Solo dos de estas cantidades, el tiempo y el precio de la acción, son variables. La función c no es random, es determinista. Pero el valor de la opción es un proceso $c(t, S(t))$ aleatorio.

Ahora queremos encontrar la fórmula de c. Empezamos calculando el diferencia del proceso $c(t, S(t))$. Usando la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned} dc(t,S(t)) &= c_t(t,S(t))dt + c_x(t,S(t))dS(t) + \frac{1}{2}c_{xx}(t,S(t))dS(t)dS(t) \\ &= c_t(t,S(t))dt + c_x(t,S(t))(aS(t)dt + uS(t)dW(t)) + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}c_{xx}(t,S(t))u^2S^2(t)dt$$

$$= [c_t(t,S(t)) + \alpha S(t)c_x(t,S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t,S(t))]dt$$

$+\sigma S(t)c_x(t,S(t))dW(t)$.

Y la diferencial del precio de la opción descontado:

$$d(e^{-rt}c(t,S(t))) = e^{-rt}\left[-rc(t,S(t)) + c_t(t,S(t)) + \alpha S(t)c_x(t,S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t,S(t))\right]dt$$
$$+e^{-rt}\sigma S(t)c_x(t,S(t))dW(t)$$

Ahora queremos que los flujos sean iguales, esto es $e^{-rt}X(t) = e^{-rt}c(t,S(t))(*)$. Para ello igualamos los diferenciales $d(e^{-rt}X(t)) = d(e^{-rt}c(t,S(t)))$ y $X(0) = C(0,S(0))$.

Se nos queda una ecuación diferencial que igualando los términos de $dW(t)$ nos dan:

$$\Delta(t) = c_x(t,S(t))$$

Esto es llamada delta cobertura (delta hedging). Que nos dice el número de acciones que tenemos que tener en cada momento en cartera para replicar la opción. $c_x(t,S(t))$ is called the delta of the option.

Igualando los términos en dt nos da:

$$\begin{gathered}(\alpha - r)S(t)c_x(t,S(t)) = \\ -rc(t,S(t)) + C_t(t,S(t)) + \alpha S(t)c_x(t,S(t)) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t,S(t))\end{gathered}$$

Cancelando $\alpha S(t)c_x(t,S(t))$ en ambos lados se nos queda:

$$rc(t,S(t)) = c_t(t,S(t)) + rS(t)c_x(t,S(t)) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t,S(t))$$

Por lo que debemos encontrar la función c que cumple la ecuación en derivadas parciales conocida como **ecuación de Black-Scholes**:

$$rc(t,x) = c_t(t,x) + rxc_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2(t) c_{xx}(t,x)$$

,

y que satisface la condición:

$$c(T,x) = (x-K)^+$$

Por lo que si encontramos dicha función c y un inversor invierte $X(0) = c(0, S(0))$ en tiempo 0 y ejecuta la estrategia delta de cobertura $\Delta(t) = c_x(t, S(t))$ entonces se igualarán los flujos descontados (*) porque se igualará el diferencial, los términos en dt porque c cumple la ecuación de Black-Scholes y en $dW(t)$ porque se sigue la estrategia. Además serán iguales en tiempo 0 y ese será el precio racional de no arbitraje de la opción.

La solución a la ecuación es:

$$c(t,x) = xN\left(d_1(T-t,x)\right) - Ke^{-r(T-t)}N\left(d_2(T-t,x)\right),$$

donde $d_\pm(r,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$,

y N es la función de distribución de la distribución normal.

Y, el valor de la opción sería $c(0, s(0))$.

3.4 Modelos de subyacentes

Antes de ir al apartado más importante, el de la ecuación de **Black-Scholes** que revolucionó las finanzas, vamos a hacer una parada para ver algunos modelos de subyacentes importantes. La elección del modelo del subyacente es un paso bastante importante cuando se trata de valorar un derivado y es una rama que está en constante cambio y que entrelaza a los matemáticos y economistas. De hecho, a Bachelier cuando hizo su tesis([Bachelier, 1900]) se le achacó que contemplaba valores negativos de precios. Años después hemos visto como han existido tipos de interés negativos([bde, 2014]).
En mi opinión, cuando leemos libros sobre cálculo estocástico no solemos encontrar este apartado porque no es estrictamente necesario. Ya que, para Black-Scholes se utiliza el modelo **lognormal** y para el resto de desarrollo de teoría de martingalas y submartingalas se hace de forma más genérica que no requiere de elegir un modelo concreto. Es por ello que en los libros con enfoque matemático no se detienen en este apartado.

3.4.1 Modelo log-normal

. El movimiento browniano geométrico definido por:

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

cuya solución sería:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

por lo que tiene una distribución lognormal(si le introducimos un logaritmo se nos queda una normal). Es el modelo que usaron Black y Scholes. Mejora el de bachelier que era puramente ruido aleatorio añadiéndole un término α de **deriva** o **drift** que indica una tendencia además de un término σ de volatilidad, que si es mayor el peso de la aletoriedad es mayor y viciversa.

Este modelo se pueda generalizar para que la deriva y la volatilidad no sean constantes, lo cual es limitante. Y nos daría la siguiente ecuación diferencial estocástica(EDE):

$$dX(t) = \sigma(t)dW(t) + \left(\alpha(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\right) dt,$$

Notemos que, además de lo ya dicho, esta expresión se da en función del proceso de Itô, mientras que la otra se daba en el modelado del activo(que constituía un proceso de Itô).

3.4.2 Modelo de Heston o de volatilidad estocástica

Uno de estos modelos de activos que generalizan el movimiento browniano geométrico es el modelo de Heston. Conocido también como modelo de volatilidad estocástica porque la volatilidad sigue su propio proceso estocástico:

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sqrt{\nu_t} S_t\, dW_t^S$$

Mientras que la volatilidad cumple esta EDE:

$$d\sqrt{\nu_t} = -\theta\sqrt{\nu_t}\, dt + \delta\, dW^\nu$$

Que con la fórmula de Itô podemos escribir como:

$$d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)\, dt + \xi\sqrt{\nu_t}\, dW_t^\nu$$

Donde estos distintos movimientos brownianos son procesos de Wiener correlacionados, por lo que se influyen entre ellos, de forma que este modelo suela ser más preciso debido a que la volatilidad puede ajustarse durante el tiempo.

3.4.3 Modelo de volatilidad local

El modelo de volatilidad local añade al de volatilidad estocástica que además la volatilidad varíe en función del precio de la acción. Habrá unos precios donde haya más volatilidad y otros donde menos. La EDE que lo describe suele ser de la forma:

$$dS_t = (r_t - d_t)S_t\, dt + \sigma(S_t, t)S_t\, dW_t.$$

Estos modelos de arriba sirven para modelar precios de activos. Pero, como vemos en la anterior EDE, los tipos de interés también pueden cambiar y pueden ser modelados como procesos estocásticos. De entre los modelos que hay destacamos uno.

3.4.4 Modelo de Hull-White

El primero que sacaron, conocido como modelo de un factor, tiene la siguiente EDE:

$$dr(t) = [\theta(t) - \alpha(t)r(t)]\, dt + \sigma(t)\, dW(t)$$

Donde destacamos que hay un término de deriva negativo $\alpha(t)r(t)$ que hace que el modelo tenga una tendecia más constante que los términos de deriva de los modelos de precios de acciones. Ya que, se suele considerar que los tipos de interés suelen ser más constantes.

3.5 FTAP

Para este apartado nos basaremos en [Schachermayer, 2006]. Para las demostraciones ver dicho libro.

Para valorar con el modelo de Black-Scholes-Merton hemos usado varios ”ingredientes”:

- La suposición de no arbitraje en el mercado.
- La creación de una cartera que replique los flujos de la opción a valorar. La cual ,junto con el no-arbitraje, hemos igualado en valor a la opción.
- El modelo lognormal para el activo.
- El cálculo estocástico para integrar respecto del proceso que modela el valor del activo.

Sin embargo, queremos generalizar esto en una teoría más general que no dependa del modelo concreto del activo. Para esto se dará una nueva forma de valorar que será equivalente. La de hacerlo con una medida martingala (conocida como **medida de riesgo neutro**). Y lo que se pretende demostrar, en general, es que si un mercado cumple (NA) entonces hay una medida bajo la cual los activos son martingalas y que nos sirve para valorar los derivados cuyo subyacente son activos de ese mercado. De hecho, en el ejemplo de la sección donde explicamos la valoración por replicación nos queda como valor:

$$V_0 = \tfrac{1}{1+r}(\hat{p}V_1(H) + \hat{q}V_1(T)),$$

lo que se ve claramente que es una esperanza con unas nuevas probabilidades $\hat{p}$ y $\hat{q}$ descontado por el descuento del mercado de dinero. Por eso a estas nuevas probabilidades $\hat{p}$ y $\hat{q}$ se les llama también probabilidades de riesgo neutro. Y que cumplan $\hat{p} + \hat{q} = 1$ no es casualidad.

Este párrafo de [Schachermayer, 2006] explica bien el desarrollo cronológico: ”Fue a finales de los años setenta cuando el papel central de los argumentos de no arbitraje cristalizó en tres trabajos seminales de M. Harrison, D. Kreps y S. Pliska. Consideraron un marco general que permite un estudio sistemático de diferentes modelos de mercados financieros. El modelo de Black-Scholes es solo un ejemplo, obviamente muy importante, incorporado en el marco de una teoría general. Una idea básica de estos trabajos fue la íntima relación entre los argumentos de no arbitraje por un lado, y la teoría de martingalas por el otro. Esta relación es el tema del **Teorema Fundamental de la Valoración de Activos** (este nombre fue dado por Ph. Dybvig y S. Ross), que no es solo un teorema único, sino más bien un principio general para relacionar el no arbitraje con la teoría de martingalas.”

Y, parafraseando a Orihuela(en la lección inaugural del año 2019 de la Academia de Ciencias de la Región de Murcia): ”La hipótesis de "no arbitraje"sobre un juego es más débil que postular sobre el mismo que sea una martingala. En otras palabras: requerir que un juego no sea totalmente injusto (esto es que no permita el arbitraje) es mucho menos que pedirle que sea absolutamente justo(que sea una martingala)”.

En este apartado requeriremos de nuevas definiciones, así como de alguna redefinición pero en un contexto más amplio.

3.5.1 Definiciones iniciales

Definition 3.5.1. *Un modelo de un mercado financiero es un proceso estocástico evaluado en* $\mathbb{R}^{d+1}$ $(\hat{S}_t)_{t=0}^T = (\hat{S}_t^0, \hat{S}_t^1, ..., \hat{S}_t^d)_{t=0}^T$ *basado y adaptado a la base estocástica filtrada* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbb{P})$. *Además asumimos que la coordenada 0 cumple* $\hat{S}_t^0 > 0$ *para todo* $t = 0, ..., T$ *y* $\hat{S}_0^0 = 1$.

Lo interpretamos así. Los precios de los activos 0,..., d son medidas en una moneda fija. No son necesariamente no-negativos (puedes tomar una posición corta respecto a ellos) a excepción de la coordenada 0 que representa el numeráire. Es decir, el estándar respecto al que mides los precios, podemos pensarlo como la moneda que en la que medimos los valores de los activos. Nos permitirá comparar el valor de la moneda en tiempo 0 con el valor en tiempo t. Que irá cambiando según el tipo de interés. Asumimos que $\hat{S}_t^0$ es adaptado pero no predecible (esto sería $\forall t \geq 0$ $\hat{S}_t^0$ es $\mathcal{F}_{t-1} - medible$). Por lo que el tipo de interés puede cambiar durante el paso del tiempo sin que se sepa a priori.

Definition 3.5.2. *Una* ***estrategia de trading*** $(\hat{H}_t)_{t=1}^T = (\hat{H}_t^0, \hat{H}_t^1, ..., \hat{H}_t^d)_{t=1}^T$ *es un proceso evaluado en* $\mathbb{R}^{d+1}$ *el cual es* ***predecible****, es decir,* $\forall t \geq 0$ $\hat{H}_t$ *es* $\mathcal{F}_{t-1} - medible$.

La interpretación es que entre el tiempo $t-1$ y t, el agente mantiene una cantidad igual a $\hat{H}_t^j$ del activo j. En nuestro caso anterior solo tenemos una activo. Que sea predecible es relevante puesto que esto significa que la estrategia se puede cambiar al principio de cada intervalo.

Definition 3.5.3. *Una estrategia* $(H_t)_{t=1}^T$ *se llama autofinanciada si para cada* $t = 1, \ldots, T-1$*, tenemos*

$$\langle H_t, S_t \rangle = \langle H_{t+1}, S_t \rangle \quad (2,1)$$

o, escrito de manera más explícita,

$$\sum_{j=0}^{d} H_{j,t}S_{j,t} = \sum_{j=0}^{d} H_{j,t+1}S_{j,t}.$$

Esta defínción simplementente impone una condición a la estrategia: el dinero disponible al empezar un intervalo debe ser igual al que se tenía al final del intervalo anterior. Es decir, entre cambios en la estrategia no entra ni sale dinero del portfolio, solo cambia entre activos y dinero físico.

Por otro lado, la forma en que evoluciona el valor $(\hat{H}_t, \hat{S}_t)$ se puede describir mucho más fácilmente cuando usamos precios descontados utilizando el activo $\hat{S}_0$ como numerario. El descuento nos permite comparar el dinero en el tiempo t con el dinero en el tiempo 0. Utilizaremos la notación:

$$S_{j,t} := \frac{S_{j,t}}{S_{0,t}}, \text{ para } j = 1, \ldots, d \text{ y } t = 0, \ldots, T.$$

Definition 3.5.4. *Sea $S = (S_1, \ldots, S_d)$ un modelo de un mercado financiero en términos descontados. Una estrategia de trading es un proceso valuado en $\mathbb{R}^d$, $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, \ldots, H_t^d)_{t=1}^T$, que es predecible, es decir, cada H_t es $\mathcal{F}_{t-1}$-medible.*
Denotamos por $\mathcal{H}$ al conjunto de todas estas estrategias de trading.

Definition 3.5.5. *Llamamos al subespacio K de $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definido por*

$$K = \{(H \cdot S)_T | H \in \mathcal{H}\},$$

el conjunto de reclamos contingentes alcanzables a precio 0. Siendo $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ el espacio de todas las funciones reales $\mathcal{F}$.

Esto lo podemos ver como los bienes contingentes (es decir que no sabemos cuanto valdrán en el futuro) del mercado S que podemos replicar con inversión inicial cero (porque hay una estrategia de replicación H que no requiere inversión).

Por otro lado, debemos pensar en $(H \cdot S)_t = \sum_{u=1}^{t} (H_u, \Delta S_u)$ como el valor en dinero de la cartera H en el mercado S en el momento t, luego se definirá formalmente pero esto se puede ver que será nuestra integral estocástica.

Definition 3.5.6. *Llamamos al cono convexo C en $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definido por*

$$C = \{g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \,|\, \textit{existe } f \in K \textit{ con } f \geq g\},$$

el conjunto de reclamos contingentes super-replicables a precio 0.

Esto es una generalización de K que nos será útil en el futuro. Y que además de K incluye la opción de tirar dinero para replicar el bien contingente.

Ahora damos una nueva definición de no arbitraje (NA):

Definition 3.5.7. *Un mercado financiero S satisface la condición de no arbitraje (NA) si*

$$K \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$$

o, equivalentemente,

$$C \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$$

donde 0 *denota la función idénticamente igual a cero.*

Siendo $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ el ortante positivo de $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Otro concepto importante que ya hemos introducido pero no formalizado es este:

Definition 3.5.8. *Una medida de probabilidad Q en $(\Omega, \mathcal{F})$ se llama una medida de martingala equivalente para S si $Q \sim P$ y S es una martingala bajo Q, es decir, $\mathbb{E}_Q[S_{t+1}|\mathcal{F}_t] = S_t$ para $t = 0, \ldots, T-1$.*

Además definimos estos conjuntos que nos serán útiles:

Definition 3.5.9. *Denotamos por $\mathcal{M}^e(S)$ el conjunto de medidas martingalas equivalentes y por $\mathcal{M}^a(S)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad martingalas (no necesariamente equivalentes).*

3.5.2 FTAP para modelos finitos

El teorema demostrado por Harrison y Pliska nos dice:

Theorem 3.5.10. ***Teorema 2.2.7 (FTAP para modelos finitos).*** *Para un mercado financiero S modelado sobre una base estocástica finita $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbb{P})$, lo siguiente son equivalentes:*

(i) S satisface (NA),

(ii) $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$.

Es decir, si el modelo satisface la condición de no arbitraje entonces existe una medida martingala equivalente a $\mathbb{P}$ para el que el modelo es una martingala.

Y un corolario para bienes contingentes que se pueden obtener por un precio $a \in \mathbb{R}$:

Corollary 3.5.11. *Supongamos que S satisface (NA) y sea $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un bien contingente accesible. En otras palabras, f tiene la forma*

$$f = a + (H \cdot S)_T, \quad (*)$$

para algún $a \in \mathbb{R}$ y alguna estrategia H. Luego, la constante a y el proceso $(H \cdot S)_t$ están determinados de manera única por (*) y satisfacen, para cada $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$,

$$a = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[f], \quad y \quad a + (H \cdot S)_t = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[f|\mathcal{F}_t],$$

para $0 \leq t \leq T$.

3.5.3 Valorando por no-arbitraje

Ahora, una vez dada la existencia de dicha medida vemos que si el mercado satisface (NA) y es **completo**, es decir, la medida es única entonces el precio de cada bien contingente de ese mercado es la esperanza con la medida de probabilidad martingala. Este teorema es el que nos da la forma de valorar en un mercado financiero modelado.

Theorem 3.5.12. *Para un mercado financiero S que satisface la condición de no arbitraje (NA), lo siguiente son equivalentes:*

(i) $\mathcal{M}^e(S)$ *consiste en un único elemento* $\mathbb{Q}$.

(ii) Cada $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *puede ser representado como*

$$f = a + (H \cdot S)_T,$$

para algún $a \in \mathbb{R}$ *y* $H \in \mathcal{H}$.

En este caso, $a = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f]$, *la integral estocástica* $H \cdot S$ *es única y tenemos que*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f] + (H \cdot S)_t, \quad t = 0, \ldots, T.$$

En caso de que la medida no sea única tenemos igual capacidad para encontrar el precio libre de arbitraje.

Theorem 3.5.13. *Supongamos que S satisface (NA) y sea* $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Definimos*

$$\underline{\pi}(f) = \inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\},$$
$$\overline{\pi}(f) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\},$$

Entonces, o bien $\underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$, *en cuyo caso f es alcanzable al precio* $\pi(f) := \underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$, *es decir,* $f = \pi(f) + (H \cdot S)_T$ *para algún* $H \in \mathcal{H}$, *y por lo tanto* $\pi(f)$ *es el precio libre de arbitraje único para f. O bien* $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$, *en cuyo caso*

$$]\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f)[= \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}$$

y a es un precio libre de arbitraje para f si y solo si a está en el intervalo abierto $]\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f)[$.

Y también tenemos un teorema dual a este en el sentido de que, si en lugar buscar un precio de no-arbitraje buscamos el minimo precio de una cartera replicante (super-replicante en este caso) entonces tenemos el precio de no-arbitraje del teorema anterior.

Theorem 3.5.14. *(Superreplicación). Supongamos que S satisface (NA). Entonces, para* $f \in L^\infty$, *tenemos*

$$\begin{aligned}\overline{\pi}(f) &= \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\} \\ &= \max\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^a(S)\} \\ &= \min\{a \mid \textit{existe } k \in K, a + k \geq f\}.\end{aligned}$$

Y, parafraseando a [Schachermayer, 2006]: "una versión condicional del teorema de dualidad que nos permite utilizar inversiones iniciales que no son constantes y posiblemente utilizar la información F_0 disponible en el tiempo $t = 0$. Esto es relevante cuando la σ-álgebra inicial F_0 no es trivial":

Theorem 3.5.15. *Supongamos que S satisface (NA). Denotemos por $\mathcal{M}^e(S, F_0)$ el conjunto de medidas martingalas equivalentes $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ tales que $Q|_{F_0} = \mathbb{P}$. Entonces, para $f \in L^\infty$, tenemos*

$$\sup\{\mathbb{E}_Q[f|F_0] \,|\, Q \in \mathcal{M}^e(S, F_0)\}$$

$$= \min\{h \,|\, h \textit{ es } F_0\textit{-medible y existe } g \in K \textit{ tal que } h + g \geq f\}.$$

Finalmente, para encontrar dicho supremo tenemos este corolario:

Corollary 3.5.16. *Bajo las suposiciones del teorema anterior, tenemos*

$$\{\mathbb{E}_Q[f|F_0] \,|\, Q \in \mathcal{M}^e(S)\} = \{\mathbb{E}_Q[f|F_0] \,|\, Q \in \mathcal{M}^e(S, F_0)\}.$$

Por lo tanto, para $f \in L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tenemos $\sup_{Q \in \mathcal{M}^e(S)} \mathbb{E}_Q[f] = \|a_1\|_\infty$ donde

$$a_1 = \sup\{\mathbb{E}_Q[f|F_0] \,|\, Q \in \mathcal{M}^e(S, F_0)\}.$$

3.5.4 FTAP en modelos continuos

Ahora queremos desarrollar una forma más general de toda la teoría vista. Más general en tres sentidos:

- Más general respecto a los modelos de Black-Scholes o Bachelier, ya que la forma en la que se modelan estos limita acercarse a la realidad. Por lo que queremos una teoría que nos sirva para cualquier modelo.
- Más general respecto al FTAP para modelos discretos. Ya que queremos que sirva también para modelos continuos.
- Más general respecto a las limitaciones de la medida martingala. Es decir, que modelos que no son martingalas para los que también está desarrollado el cálculo estocástico se puedan usar también. Esto nos llevará a generalizaciones del no arbitraje.

La demostración de este caso lleva un desarrollo muy largo que queda fuera del propósito de este trabajo. De todas formas veremos las definiciones más importantes y lo enunciaremos. Aunque por el camino nos hemos dejado y dejaremos teoremas muy importantes (el de representación de martingalas, el de Kreps-Yan y el de Dalang-Morton-Willinger principalmente).

Nuevo marco para los modelos continuos .

Las definiciones dadas para modelos finitos se mantienen en cuanto interpretación. En general, lo único que cambia es que ahora $t \in [0, T]$.
Adoptamos el siguiente marco general: sea $S = (S_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico valorado en $\mathbb{R}^{d+1}$ basado en y adaptado al espacio de probabilidad filtrado

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Nuevamente, asumimos que la coordenada cero S_0, llamada el bono, está normalizada a $S_{0,t} \equiv 1$.

Sobre los índices de tiempo ahora, [Schachermayer, 2006];" Hemos elegido $\mathbb{T} = [0, \infty[$ como el conjunto de índices de tiempo para asumir plena generalidad; por supuesto, esto también cubre el caso de un intervalo compacto $\mathbb{T} = [0, T]$, que es relevante en la mayoría de las aplicaciones, cuando asumimos que S_t es constante para $t \geq T$. El uso de $\mathbb{T} = [0, \infty[$ como conjunto de índices de tiempo también cubre el caso de tiempo discreto (ya sea en su versión finita $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$, o en su versión infinita $\mathbb{T} = \mathbb{N}$). De hecho, basta con restringirse a procesos S que sean constantes en $[n-1, n[$, para cada número natural n, y solo saltar en los tiempos $n \in T$."

FTAP en modelos continuos para mercados localmente acotados .

Además, para el caso continuo el teorema es primero demostrado para al caso en el que S es localmente acotado porque es más sencillo. Y luego se demuestra quitando esa condición. Veamos lo que esto significa.

Primero nos ayudamos de esta definición:

Definition 3.5.17. *τ se llama **random time** si es una variable aleatoria no negativa, que también puede tomar el valor ∞ en $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Supongamos que se da una filtración $\mathcal{F} = \{F_t\}_{t\in[0,T]}$. τ se llama **stopping time** con respecto a esta filtración si para cada $t \in [0, T]$ el evento*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Además, para un stopping time T, definimos el proceso X^T como $(X^T)_t = X_{t\wedge T}$. Llamamos a X^T el proceso X detenido en el tiempo T.

En palabras de [Klebaner, 2012]: "Esto significa que al observar la información contenida en F_t podemos decidir si el evento $\{\tau \leq t\}$ ha ocurrido o no. Si la filtración $\mathcal{F}$ está generada por $\{S_t\}$, entonces al observar el proceso hasta el tiempo t, podemos decidir si el evento $\{\tau \leq t\}$ ha ocurrido o no."

Definition 3.5.18. *S es **localmente acotado** si existe una sucesión $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ de stopping time, casi seguramente crecientes hacia $+\infty$, tal que los procesos detenidos $S_t^{\tau_n} = S_{t\wedge\tau_n}$ están uniformemente acotados, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Las condiciones de la equivalencia del FTAP que nos gustaría tener también cambian. Ahora en lugar de martingalas tenemos **martingalas locales** para el caso de mercado localmente acotado.

Definition 3.5.19. *Un proceso $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ es una **martingala local** si existe una secuencia creciente de tiempos de parada $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ que tiende a $+\infty$*

casi seguramente, de modo que, para cada n, el proceso X^{T_n} es una martingala uniformemente integrable.

Y en lugar de no arbitraje tenemos **no free lunch with vanishing risk** (NFLVR). Esto es:

Definition 3.5.20. *Sea S una semi-martingala valorada en $\mathbb{R}^d$ y sea*

$$K = \left\{ (H \cdot S)_\infty : H \text{ admisible y } (H \cdot S)_\infty = \lim_{t \to \infty} (H \cdot S)_t \text{ existe casi seguramente} \right\},$$

que forma un cono convexo de funciones en $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y

$$C = \{ g \in L^\infty(\mathbb{P}) \,|\, g \leq f \text{ para algún } f \in K \}.$$

Decimos que S satisface la condición de no almuerzo gratis con riesgo desvaneciente (NFLVR), si

$$C \cap L^\infty_+(\mathbb{P}) = \{0\},$$

donde C ahora denota el cierre de C con respecto a la topología de la norma de $L^\infty(\mathbb{P})$.

Vemos que esta definición es una escalada en la complejidad, pero podemos entenderla como sigue (sacado de la conferencia de Schachermayer "Título: Risk and Valuation of Financial Assets: A Robust Approach." en 2010 en Murcia):

Existe un $\alpha > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ y $M > 0$:

$$(H \cdot S)_T \geq -\varepsilon \text{ casi seguramente y}$$
$$\mathbb{P}[(H \cdot S) \geq M] \geq \alpha.$$

Esto es, podemos asegurar una pérdida de dinero tan pequeña como queramos y una posibilidad positiva de ganar cuanto queramos.

También se amplía hacia la posibilidad de que el mercado sea una semi-martingala, que son los procesos hasta los que se ha llegado a ampliar el la integración estocástica. Damos una definición útil para entenderlas aunque no es la más precisa es equivalente.

Definition 3.5.21. *Las semi-martingalas S son precisamente aquellos procesos que pueden descomponerse como $S = M + A$, donde M es una martingala local y A es de variación localmente acotada.*

Finalmente tenemos el teorema:

Theorem 3.5.22. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un modelo de mercado financiero $S = (S_t)_{t \geq 0}$, una semi-martingala localmente acotada valorada en $\mathbb{R}^d$:*

(i) (EMM), es decir, existe una medida de probabilidad Q, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que S es una martingala local bajo Q.

(ii) (NFLVR), es decir, S satisface la condición de NFLVR.

FTAP en modelos continuos .

Y, finalmente, para el caso más general, sin la restricción de mercado localmente acotado, en lugar de martingalas locales usamos **sigma-martingalas**.

Definition 3.5.23. *Una semi-martingala valorada en* $\mathbb{R}^d$, $S = (S_t)_{t\geq 0}$, *se llama una sigma-martingala si existe un proceso predecible* $\phi = (\phi_t)_{t\geq 0}$, *tomando sus valores en* $]0,\infty[$, *tal que la integral estocástica valorada en* $\mathbb{R}^d$, $\phi \cdot S$, *es una martingala.*

Y, finalmente, el FTAP en su forma más general:

Theorem 3.5.24. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un modelo de mercado financiero* $S = (S_t)_{t\geq 0}$, *una semi-martingala valorada en* $\mathbb{R}^d$:

(i) (ESMM), es decir, existe una medida de probabilidad Q *equivalente a* $\mathbb{P}$ *tal que* S *es una sigma-martingala bajo* Q.

(ii) (NFLVR), es decir, S *satisface la condición de (NFLVR)*

4 Métodos numéricos en finanzas

Algo que sucede en el día a día a la hora de intentar valorar derivados es que no tienen una fórmula como las anteriores. Ya sea porque se aplica un modelo de subyacente diferente, porque el payoff es muy complicado (como es el caso de las opciones exóticas), etcétera.
Algunos de esos problemas se solventan desde la óptica del análisis matemático encontrando nuevas herramientas de cálculo estocástico que nos pueden ser útiles. Véase, el caso de las opciones con barrera inclinada con el uso del **Lema de Girsanov**. Sin embargo, muchas simplemente no tienen solución analítica, no se ha encontrado o simplemente no es práctica en un entorno de producción real.
Los métodos númericos utilizados en finanzas se pueden separar en tres grandes grupos por los que pasaremos brevemente:

- Método Montecarlo
- Métodos de árboles
- Métodos que resuelven EDP

Dentro de cada uno de estos grandes grupos hay varios algoritmos como veremos. No hay unos necesariamente mejores que otros. Dependiendo del tipo de derivado y los modelos usados unos son más eficaces que otros.
Por último, trataremos también el problema del cálculo de **las griegas** (derivadas parciales del valor del derivado) y cómo se inventó un **cálculo variacional estocástico** conocido como **cálculo de Malliavin** para tener una herramienta eficaz para solucionarlo.

4.1 Uso de la discretización para aproximar modelos continuos

Antes de ver estos métodos numéricos he considerado conveniente añadir un apartado justificando el uso de modelos continuos para modelar los activos, ya que con los métodos numéricos vamos a discretizar para poder resolver algorítmicamente.

Una pregunta que puede surgir cuando estudiamos los paseos aleatorios y su relación con el movimiento browniano es: Si puedo aproximar tanto como quiera el movimiento browniano con paseos aleatorios escalados, ¿para qué quiero utilizar el movimiento browniano?
Para responder a esto basta darse cuenta de que el movimiento browniano a diferencia de los paseos aleatorios no tiene un tiempo de paso fijo sino que los pasos los da en todos los momentos del tiempo. Es por esto que se necesita el movimiento browniano en tiempo continuo para poder modelar ecuaciones diferencias estocásticas que cambian 'infinitesimalmente', en 'todos' los momentos del tiempo.
Sin embargo, lo que sí tiene sentido de ese razonamiento es intentar aproximar computacionalmente los movimientos brownianos usando los paseos aleatorios.

De hecho, tomando un modelo binomial de n pasos con unos factores $u = 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $d = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ este modelo converge en distribución al log-normal.

Theorem 4.1.1. *Cuando $n \to \infty$ la distribución de*

$$S_n(t) = S(0)u_n^{H_{nt}}d_n^{T_{nt}}$$

y las H_i y T_i variables aleatorias binomiales con $p = q = 1/2$ converge a la distribución de

$$S(t) = S(0)exp\{\sigma W(t) - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t\}$$

siendo W(t) una variable aleatoria normal con media cero y varianza t.

Demostración. Ver [Shreve, 2004b], p. 92. □

Un código python(en el Anexo A) para ver gráficamente este teorema con 10000 muestras de binomiales de n=10000 pasos, $\sigma = 1yS(0) = 1$ nos da la figura 1.

4.2 Método de Montecarlo

Los métodos de Montecarlo son en realidad un conjunto de métodos para calcular expresiones matemáticas usando realizaciones aleatorias. Un ejemplo famoso es la aguja de Buffon.
La idea general que subyace tras los métodos de este tipo nos la explica [Glasserman, 2004]:
"La matemática de la medida formaliza la noción intuitiva de probabilidad, asociando un evento con un conjunto de resultados y definiendo la probabilidad

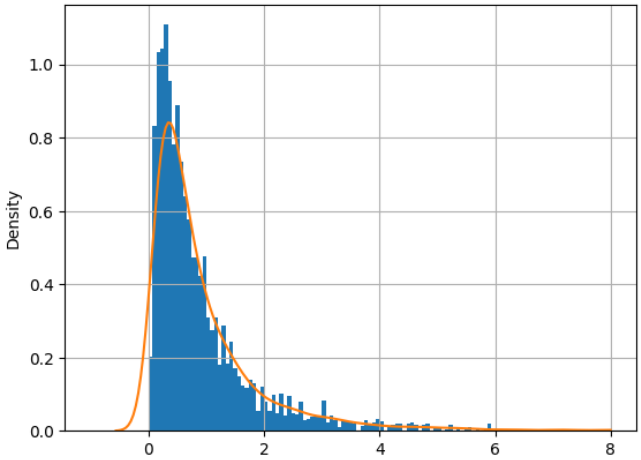

Figura 1: Aproximación por 10000 binomiales de n=10000 pasos, $\sigma = 1$ y $S(0) = 1$

del evento como su volumen o medida relativa al de un universo de posibles resultados. Monte Carlo utiliza esta identidad en sentido contrario, calculando el volumen de un conjunto al interpretar el volumen como una probabilidad. En el caso más simple, esto significa muestrear aleatoriamente de un universo de posibles resultados y tomar la fracción de selecciones aleatorias que caen en un conjunto dado como una estimación del volumen del conjunto. La ley de los grandes números garantiza que esta estimación converja al valor correcto a medida que aumenta el número de selecciones. El teorema del límite central proporciona información sobre la magnitud probable del error en la estimación después de un número finito de selecciones."

Los usos de Montecarlo en las finanzas son muy variados.
Por ejemplo,para la simulación de ecuaciones diferenciales estocásticas ([Platen, 2007]).
Pero nosotros nos centraremos en la más específica del campo: las realizaciones de caminos del subyacente.
La idea es la siguiente. Si el valor de la opción es la esperanza bajo medida de riesgo neutro del payoff del valor del subyacente entonces simularemos los caminos del subyacente y haremos la media de los valores del payoff. Por la ley de los grandes números la media de estos valores debería converger a la esperanza.

Theorem 4.2.1. *(Ley de los grandes números) Supongamos que los X_n son mutuamente independientes y tienen la misma distribución que una variable genérica X. Si $E[X]$ existe (se permiten valores infinitos), entonces $\frac{1}{n}S_n \to E[X]$ casi seguramente. Con $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$*

Demostración. Ver [Cinlar, 2010] □

Veamos un ejemplo de programa que nos serviría para valorar una opción europea.

4.2.1 Programa de python para valorar call con Black-Scholes con Montecarlo

```
    import math as m
import numpy.random as rand

M=500 #Steps in each lognormal sample
N=10000 #Number of Montecarlo samples
K=100 #Strike price
S0=100 #Price of S at time 0
sigma=0.2 #Volatility
r=0.1 #Risk-free rate of interest
dt=float(1/M)
sdt=m.sqrt(dt)
eps=1.e-50
er=m.exp(-r)

def path(x, m):
  S=x
  normal_outputs=rand.normal(size=(m))
  for i in range(m):
    S+=S*(sigma*normal_outputs[i]*sdt+r*dt)
  return S

def payoff(s):
  if s>K:
    return s-K
  else:
    return 0

value=0
for i in range(N):
  S=path(S0, M)
  value+=er*payoff(S)

print(value/N)
```

El código es bastante autoexplicativo. Simplemente se calculan N realizaciones de log-normal del subyacente S(discretizada con M pasos) con precio inicial S0. Se calcula el payoff de dichas realizaciones respecto al precio strike K. Y se devuelve una media de esos valores.

4.2.2 Convergencia del método Montecarlo

Vamos a escribir el Teorema de límite central de una forma que nos sea más útil para determinar la convergencia del método de Montecarlo.

Theorem 4.2.2. *(Teorema del límite central)Sea x una variable aleatoria con densidad de probabilidad p, esperanza $E(X)$, y varianza $Var(X)$. La aproximación*

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} p(x)x\,dx \approx \mathbb{E}_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} x_i$$

satisface, para todo $c < 0 < c'$,

$$\lim_{N\to\infty} P(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}_N[X] \in (c\sqrt{\frac{var(X)}{N}}, c'\sqrt{\frac{var(X)}{N}})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_c^{c'} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

De aquí deducimos que el método Montecarlo tendrá un error proporcional a $\sqrt{\frac{var(X)}{N}}$. Por tanto para tener el doble de precisión necesitaremos 4 veces más realizaciones.

4.2.3 Reducción de varianza

Una buena opción para mejorar la estimación del método sin pasar por aumentar el número de realizaciones, con el coste en tiempo y cálculo que ello supone, es reducir la varianza. Los técnicas de reducción de la varianza nos dan un problema a resolver con Montecarlo que tiene mejor convergencia y cuyo resultado nos sirve para calcular nuestro problema original.

La idea es la siguiente: Para calcular $\mathbb{E}[X]$ calcularemos $\mathbb{E}[X - X']$ donde X' es otra variable aleatoria. De forma que $\mathbb{E}[X - X']$ lo estimaremos mejor porque $X - X'$ tendrá menor varianza y por la linealidad de la esperanza tendremos que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X - X'] + \mathbb{E}[X']$. El problema consistiría en intentar encontrar una X' que minimice, o, al menos, reduzca, la varianza de la distribución log-normal del subyacente S.

4.2.4 Variaciones del método

El ejemplo que vimos es para una opción europea. En ese caso el uso de Montecarlo es muy sencillo puesto que el payoff solo depende del valor a vencimiento por lo que solo necesitamos simular y recopilar el valor final del subyacente. En caso de otras opciones es más complicado.
En el caso de depender de varios subyacentes tendremos que plasmar en las realizaciones de los caminos las correlaciones entre estas. Ya vimos que los movimientos brownianos pueden construirse de forma correlacionada.
En caso de otras opciones más complejas el payoff puede depender del valor de la opción en distintos momentos del tipo o de que sobrepase una barrera. Por tanto, deberemos plasmar esas limitaciones en nuestras simulaciones.

4.3 Métodos de árboles

Para los métodos de árboles vamos a volver al modelo binomial que vimos en la sección de valoración por replicación. Aunque también se podría extender a modelos trinomiales, etc. En estos modelos habría, a cada paso, tres , o más, opciones de cambio de valor del subyacente. Para esta seccion seguiremos [Yves Achdou, 2005].

La idea es desarrollar el árbol hasta la fecha de vencimiento. El nodo inicial es el valor del subyacente en tiempo 0. Usaremos las probabilidades de riesgo neutro que hacen que el valor esperado de la acción es que crezca con el tipo de interés libre de riesgo. El primer paso nos puede llevar a que el subyacente a Su o Sd. Esto nos da dos ramificaciones. Y así sucesivamente hasta tiempo de vencimiento.

Ahora procedemos a valorar de la siguiente forma: Una vez en tiempo de vencimiento tendremos 2^n nodos en el pas número n. Para cada uno de estos nodos sacamos el valor de la opción con el payoff y el valor del subyacente en cada nodo. Y procedemos a ir hacia atrás sacando el valor de la opción de un nodo la esperanza bajo medida a riesgo neutro de los nodos siguientes. Y así sucesivamente hasta llegar a tiempo 0, lo que nos dará el valor de la opción.

4.3.1 Programa de python para valorar call con modelo binomial

```
    import math as m


M=500 #Steps in each lognormal sample
K=100 #Strike price
S0=100 #Price of S at time 0
sigma=0.2 #Volatility
r=0.1 #Risk-free rate of interest
dt=float(1/M)

def payoff_call(S, K):
  if S > K:
    return S - K
  else:
    return 0

def payoff_put(S, K):
  if K > S:
    return K - S
  else:
    return 0

payoff = payoff_call

disc = m.exp(-r*dt)
u = (1+m.sqrt(m.exp(sigma*sigma*dt)-1))/disc
d = (1-m.sqrt(m.exp(sigma*sigma*dt)-1))/disc
p = 0.5

S = list()

S.append(S0)

for m in range(1,M):
  S.append(0)
  for n in range(m,0,-1):
    S[n] = (u*S[n-1])
  S[0] = d*S[0]

C = list()

for n in range(M):
```

```
  C.append(payoff(S[n], K))

for m in range(M-1, 0, -1):
  for n in range(m):
    C[n] = (p*C[n+1]+(1-p)*C[n])*disc

print(C[0])
```

Seleccionar $p = 0{,}5$ como medida de probabilidad nos lleva a dichas u y d que vemos en el código. Por lo demás, el código consta de tres bucles. El primero desarrolla los valores del subyacente, el segundo y el tercero los valores de la call en cada nodo hacia atrás. Finalmente se devuelve el valor de la call en tiempo 0. Este algoritmo es de orden $O(n^2)$.

4.4 Métodos de EDPs

Otra alternativa para valorar una opción es resolver las ecuaciones de la función V, el valor de la opción. Estas ecuaciones se presentan muchas veces en forma de EDP. El ejemplo más claro es la ecuación de Black-Scholes. En ese caso la EDP tiene solución analítica pero sabemos que el campo de las matemáticas que se dedica a resolver EDPs de forma analítica está muy abierto y es difícil hacer avances en él. Es por ello que muchas veces aún teniendo la EDP que describe la función de valor V no podemos dar una fórmula para dicha función. Una buena opción en ese caso es hacer uso de los métodos numéricos para Ecuaciones en Derivadas Parciales. Para esta sección nos basaremos en [Yves Achdou, 2005].

Para la breve presentación que haremos de los métodos numéricos para las EDPs empezaremos recordando cómo son los métodos numéricos para EDOs. Los métodos numéricos para EDOs se puede resumir en la siguiente idea: Comenzamos con un problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,t), & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Nuestra solución numérica comienza en el valor inicial del problema de Cauchy. Cogemos intervalos de tamaño $h = \frac{1}{N}$ con N el número de pasos de la solución numérica. Dado ese punto y aproximando el siguiente como la fórmula de taylor de primer orden $x_1 = x_0 + x'(0) \cdot h$. La derivada la calculamos como $x'(0) = f(x_0, 0)$. Y así, sucesivamente.

Conforme más pequeño sea h (o, equivalentemente, más grande sea N) más precisa será la solución. Este es el conocido como **método de Euler**. Los métodos más importantes para resolver EDOs son los **Runge-Kutta**. Una familia de métodos de ese estilo que en lugar de una única derivada se usa una ponderación de distintas pendientes entre x_0 (o el punto que estemos) y el siguiente. Veamos cómo se extienden estas ideas para resolver EDPs.

Si nos fijamos la clave del método de Euler es dividir el intervalo donde queremos resolver el problema de Cauchy, digamos [0,T], en pequeños trozos de tamaño

h. Y, así, ir aproximando el valor de la función punto a punto. Lo que se está haciendo es discretizar el problema. Los siguientes métodos que vemos también discretizan el problema. Ahora, el dominio a discretizar será multidimensional. En el caso de la ecuación de Black-Scholes será bidimensional (valor del subyacente y tiempo). Los métodos más importantes son el **método en diferencias finitas** y el **método de elementos finitos**. Este último no lo veremos puesto que requeriría nociones de cálculo variacional que se exceden del propósito de este trabajo.

Método en diferencias finitas .

Para hacer el problema más sencillo computacionalmente se trabaja sobre el logaritmo de los precios (ya que el modelo es una exponencial). Se hace el cambio de variable $x = log(S), t = T - t$. La ecuación de Black-Scholes queda así:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + r(t)u = 0$$

Se hacen unas asunciones de localización de los valores del suyacente en los que no entraremos. Nuestra función incógnita será φ y nuestra aproximación será $\{\varphi_j^m\}$ Y discretizamos la ecuación. Tomamos N,M enteros positivos y nuestros tamaños de intervalos sobre los que trabajaremos serán $h = \frac{2\hat{x}}{N+1}$ y $\Delta t = \frac{T}{M}$. Y definimos $x_j = -\hat{x} + jh$ y $t_m = m\Delta t$. Los puntos (x_j, t_m) son los nodos de la malla $[-\hat{x}, \hat{x}] \times [0, T]$ sobre los que se calculará la solución numérica. Dando valores iniciales a algunos puntos:

$$\varphi_0^m = \varphi_{N+1}^m = 0, m \in [1, \cdots, M)$$
$$\varphi_j^0 = \varphi_0 (x_0), j \in 0. \cdots, N+1$$

Y discretizando la ecuación ya podríamos comenzar a calcular:

$$\frac{1}{\Delta t}(\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^m) - \frac{1}{2h^2}(\sigma_j^m)^2(\varphi_{j+1}^m - 2\varphi_j^m + \varphi_{j-1}^m) - \frac{\beta_j^m}{2h}(\varphi_{j+1}^m - \varphi_{j-1}^m) + r^m\varphi_j^m = f_j^m$$

Cuanto más refinemos la malla mejor aproximación tendremos.

4.5 Métodos numéricos para las griegas

En finanzas, las "griegas"son un conjunto de medidas que cuantifican el riesgo y la sensibilidad de una opción o una cartera de opciones a varios factores, como cambios en el precio del activo subyacente, la volatilidad, el tiempo hasta el vencimiento, las tasas de interés, entre otros. Las griegas más comunes son:

- Delta (Δ): Mide la sensibilidad del precio de una opción ante cambios en el precio del activo subyacente.
- Gamma (Γ): Mide la sensibilidad de la delta ante cambios en el precio del activo subyacente.
- Theta (Θ): Mide la sensibilidad del precio de una opción ante el paso del tiempo.

- Vega (ν): Mide la sensibilidad del precio de una opción ante cambios en la volatilidad implícita del activo subyacente.
- Rho (ρ): Mide la sensibilidad del precio de una opción ante cambios en las tasas de interés.

En resumidas cuentas, son las derivadas parciales de la función de valor de la opción. Estas medidas son fundamentales para los operadores e inversores que negocian opciones, ya que proporcionan información sobre cómo se comportará el precio de una opción en diferentes condiciones de mercado.

De hecho, la Delta ya la mencionamos en la sección de Black-Scholes porque la estrategia de cobertura en dicho modelo es el **delta-hedging**. Es decir, la cantidad de acciones que tenemos del suyacente en un momento nos lo dice la Delta.

Son varios los métodos numéricos que se pueden usar para calcular las griegas. Entre ellos los basados en la derivación numérica clásica con diferencias finitas. En ellos cambiando ligeramente parámetros(con respecto al que queramos derivar) calcularíamos el nuevo precio. También los hay basados en Montecarlo.
Sin embargo, el método más efectivo y original respecto a la derivación numérica clásica es el basado en el llamado **cálculo de Malliavin**. Este tema excede el alcance de este trabajo pero era digno de mención.

5 Conclusión

Este trabajo ha proporcionado una visión detallada y comprensiva del campo de las finanzas cuantitativas y la valoración de activos, resaltando su importancia en el mundo financiero moderno. A través de una exploración de conceptos fundamentales y avanzados, hemos demostrado cómo las matemáticas, particularmente el cálculo estocástico, juegan un papel crucial en la modelación y evaluación de instrumentos financieros.

Inicialmente, abordamos la aplicación de matemáticas avanzadas en la valoración de derivados y la gestión de carteras, mostrando cómo el movimiento browniano, las martingalas y la integral de Itô forman la columna vertebral del cálculo estocástico. La intuición y comprensión detrás de estos conceptos fueron enriquecidas mediante comentarios y análisis de varios matemáticos destacados en el campo.

La discusión sobre los conceptos de arbitraje y replicación reveló su importancia paradigmática en la creación de modelos financieros. El estudio del modelo de Black-Scholes como el ejemplo más prominente de valoración de derivados permitió ilustrar la eficacia de estos modelos en la práctica. Además, se examinó la generalización de estos conceptos a través del Teorema Fundamental de Asignación de Precios (TFAP), mostrando sus diferentes versiones y su aplicación en modelos continuos.

La sección sobre métodos numéricos en finanzas subrayó la necesidad de estas técnicas para la implementación práctica de modelos teóricos. La inclusión de códigos en Python no solo demostró cómo se pueden aplicar estos métodos, sino que también proporcionó herramientas prácticas para futuros trabajos e investigaciones.

Las futuras investigaciones podrían centrarse en la valoración de otro tipo de derivados más complejos. Donde se necesiten otros resultados del cálculo estocástico así como otros modelos de activos. También necesitarán otros métodos numéricos adaptados a su caso particular.

En resumen, este trabajo ha subrayado la integración esencial de matemáticas avanzadas en las finanzas cuantitativas y la valoración de activos. Al comprender y aplicar estos conceptos, los profesionales del sector pueden desarrollar estrategias más precisas y eficaces, contribuyendo significativamente al avance y estabilidad del sistema financiero global. Este estudio no solo aporta una base sólida para futuras investigaciones en finanzas cuantitativas, sino que también ofrece una guía práctica para la aplicación de estas teorías en el mundo real.

Appendices

A Programa python: aproximación log-normal mediante binomial

```
from re import I

import random as rand
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
import seaborn as sns
import numpy as np

n_samples = 1000
tolerance = 0.1

###Parameter scaled symmetric random walk
S0 = 1
T=1
n = 10000
sigma = 1
u = 1 + sigma/m.sqrt(n)
d = 1 - sigma/m.sqrt(n)

average = 0
values=[]
for sample in range(n_samples):
  S = S0
  for i in range(n):
    if rand.random() > 0.5:
      S *= u
    else:
      S *= d

  values.append(S)

data = {'valores': values}
df = pd.DataFrame(data)

##### Parameters log-normal
standar_dev = sigma**2*T
mean = -1/2*sigma**2*T

v1 = pd.Series(list(map(lambda x: S0*m.exp(x), np.random.normal(mean, standar_dev,
    10000))))
plt.figure()
hist = df['valores'].hist(bins=list(map(lambda x: x/15, range(-15,90))), density=True)
sns.kdeplot(v1, clip=(-1.1, 8.0))
plt.show()
```

Referencias

[bde, 2014] (2014). BoletÍn mensual junio 2014. Technical report, Banco de España.

[Aristóteles, 1988] Aristóteles (1988). *Política*. Gredos.

[Bachelier, 1900] Bachelier, L. (1900). Theorie de la spéculation. *Annales scientiques de l'Ecole Normale Superieure*.

[BIS, 2013] BIS (2013). Otc derivatives statistics at end-june 2013. Technical report, Bank for International Settlements.

[BIS, 2023] BIS (2023). Otc derivatives statistics at end-june 2023. Technical report, Bank for International Settlements.

[Björk, 1988] Björk, T. (1988). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press.

[Braumann, 2007] Braumann, C. A. (2007). Itô versus stratonovich calculus in random population growth. *Mathematical Biosciences*.

[Cinlar, 2010] Cinlar, E. (2010). *Probability and Stochastics*. Springer.

[De Brouwer, 2009] De Brouwer, P. (2009). Maslowian portfolio theory: An alternative formulation of the behavioural portfolio theory. *Journal of Asset Management*.

[Escudero, 2022] Escudero, C. (2022). Itô versus stratonovich in a stochastic cosmological model. *Letters in Mathematical Physics*.

[Glasserman, 2004] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.

[Hull, 2022] Hull, J. (2022). *Options, Futures and Other Derivatives*. Pearson.

[Itô, 1944] Itô, K. (1944). Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*.

[Itô, 1946] Itô, K. (1946). On a stochastic integral equation. *Proceedings of the Japan Academy*.

[Itô, 1951] Itô, K. (1951). On a formula concerning stochastic differentials. *Nagoya Mathematical Journal*.

[Klebaner, 2012] Klebaner, F. (2012). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press.

[Meyer, 1967] Meyer, P.-A. (1967). Intégrales stochastiques i. In *Séminaire de probabilités*.

[Platen, 2007] Platen, E. (2007). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*. Springer.

[Protter, 2004] Protter, P. (2004). *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer.

[Reilly, 2002] Reilly, F. K. (2002). *Investment Analysis and Portfolio Management*. South-Western/Thomson Learning.

[Schachermayer, 2006] Schachermayer, W. (2006). *The mathematics of arbitrage*. Springer.

[Shreve, 2004a] Shreve, S. (2004a). *Stochastic Calculus for Finance I*. Springer Finance.

[Shreve, 2004b] Shreve, S. (2004b). *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer Finance.

[Yves Achdou, 2005] Yves Achdou, O. P. (2005). *Computational Methods for Option Pricing*. SIAM Frontiers on Applied Mathematics.