2.3

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

short-hand for

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{i1}} & \phantom{a_{i2}} & & j & & \phantom{a_{in}} \end{array} \\ i & \begin{bmatrix} & & & a_{1j} & & \\ & & & a_{2j} & & \\ & & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & & \vdots & & \\ & & & a_{mj} & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} & \vert & \\ \text{———} & a_{ij} & \text{———} \\ & \vert & \end{bmatrix}_{m\times n}$$

def $A + B$ both same size $m \times n$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ $\quad B = (b_{ij})_{m\times n}$

define $A + B = (c_{ij})_{m\times n}$ where $\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$

for $1 \le i \le m$

for $1 \le j \le n$

Shorten: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

$$A+B = \begin{bmatrix} & | & \\ — & a_{ij} & — \\ & | & \end{bmatrix}_{m\times n} + \begin{bmatrix} & | & \\ — & b_{ij} & — \\ & | & \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$= \begin{bmatrix} & | & \\ — & a_{ij}+b_{ij} & — \\ & | & \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Similarly, • $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$ ✓

• $kA = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} & | & \\ — & ka_{ij} & — \\ & | & \end{pmatrix}$

<u>Example</u> $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x - 2y + 5z \\ 2x + y - 3z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x + 7y - 2z \\ x - y + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[T_1 + T_2] = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}}$$

From def:

$$(T_1+T_2)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) \quad (\text{def})$$

$$= \begin{bmatrix} 3x-2y+5z \\ 2x+y-3z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x+7y-2z \\ x-y+4z \end{bmatrix}$$

$$= \langle 3x-2y+5z,\ 2x+y-3z \rangle$$

$$+ \langle 4x+7y-2z,\ x-y+4z \rangle$$

$$= \langle 7x+5y+3z,\ 3x+0y+z \rangle$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T_1+T_2]} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Proof of $[T_1+T_2] = [T_1] + [T_2]$:

Assume $T_1, T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Let $[T_1] = A = (a_{ij})_{m\times n}$ & $[T_2] = B = (b_{ij})_{m\times n}$

<u>WTS</u> $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$: $(T_1+T_2)\vec{v} = A\vec{v} + B\vec{v}$

Let $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ write $\vec{v} = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

- $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ so $\vec{a}_j$ cols of A

- $B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ so $\vec{b}_j$ cols of B

$$(T_1 + T_2)\vec{v} = T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v}) \quad (\text{by def of } T_1 + T_2)$$

$$= A\vec{v} + B\vec{v} \quad (\text{by EQUIV of LT \& Mat Thm})$$

"row picture" $= \begin{bmatrix} & | & \\ \cdots & \vec{a}_j & \cdots \\ & | & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & | & \\ \cdots & \vec{b}_j & \cdots \\ & | & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

"col picture" $= (v_1\vec{a}_1 + \cdots + v_n\vec{a}_n) + (v_1\vec{b}_1 + \cdots + v_n\vec{b}_n) \quad (\text{in } \mathbb{R}^m)$

$$= v_1(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + \cdots + v_n(\vec{a}_n + \vec{b}_n) \quad \left(\begin{array}{c}\text{associative prop.} \\ + \\ \text{right dist prop} \\ \text{of } \mathbb{R}^m\end{array}\right)$$

"row pic" $= \begin{bmatrix} & | & \\ \cdots & \vec{a}_j + \vec{b}_j & \cdots \\ & | & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$$= (a_{ij} + b_{ij})\vec{v} = (A + B)\vec{v} \quad (\text{def } A + B)$$

so since $\vec{v}$ was arbitrary:

$$[T_1 + T_2] = A + B = [T_1] + [T_2].$$

$\square$