Instituto Politécnico Nacional

Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

Análisis de señales y sistemas
Evaluación escrita EE03
Jueves 18/octubre/2018
Tiempo: 85 minutos

Nombre: Montiel Cruz Jorge de Jesús
Grupo: 2MV1
Dr. Rafael Martínez Martínez

Este examen consta de 8 páginas (incluyendo esta portada) y 4 problemas. Verifique si falta alguna página. Escriba los datos solicitados en la parte superior y escriba sus iniciales en la parte superior de cada hoja por si llegarán a separarse las hojas.

Puede utilizar formulario y calculadora no programable en este examen.

Se requiere que muestre el trabajo realizado en cada problema de este examen. Las siguientes normas se aplicarán:

- **Cada problema/ejercicio debe tener** procedimiento ordenado y completo que justifique adecuadamente la respuesta anotada.
- **Si falta el procedimiento** o este no justifica la respuesta anotada entonces el problema vale 0 puntos aunque la respuesta sea correcta.
- **No puede** utilizar ningún dispositivo electrónico al menos que se indique lo contrario
- **Un examen sucio y/o en desorden** puede provocar 10 puntos menos en la calificación del examen.
- Cualquier **intento de fraude** amerita un reporte en subdirección académica.

No escriba en la tabla de la derecha.

Problema	Puntos	Calificación
1	25	5
2	25	15
3	25	15
4	25	25
Total:	100	60

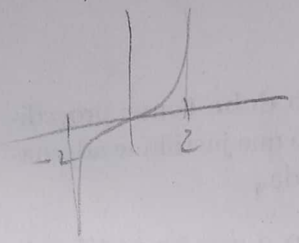
S

1. 25 puntos

Sea $f(t) = t^3$ para $-2 < t < 2$ periódica.

a) Reporte la Serie de Fourier trigonométrica
b) Reporte la Serie de Fourier trigonométrica compacta
c) Reporte la Serie de Fourier exponencial
d) Construya el espectro exponencial de $n = -4$ a $n = 4$
e) Construya el espectro trigonométrico compacto hasta $n = 4$
f) ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de Fourier en las discontinuidades?

$f(t) = t^3 \quad -2<t<2$



$T_0 = 4$

$\omega_0 = \frac{\pi}{2}$

impar

$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 0$

impar

$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t^3 \cos(\frac{\pi}{2} n t)\,dt = 0$

$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t^3 \operatorname{sen}(\frac{\pi n t}{2})\,dt = \int_0^2 t^3 \operatorname{sen}(\frac{\pi n t}{2})\,dt = \frac{-16(-1)^n}{\pi n} + \frac{96(-1)^n}{(\pi n)^3}$

a) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-16(-1)^n}{\pi n} + \frac{96(-1)^n}{(\pi n)^3}\right)\operatorname{sen}(\frac{\pi n t}{2})$

spectro

(b) 10 puntos

2. 25 puntos

Los sistemas se pueden definir como "transformadores de señales". Así un sistema toma una señal (señal de entrada del sistema) y la modifica para transformarla en una nueva señal (señal de salida del sistema)[a].

Como modelo matemático un sistema se representa con una ecuación, esta ecuación tiene implícita la modificación que el sistema realiza a la señal de entrada para convertirla en la señal de salida. Cuando la ecuación que modela al sistema es una ecuación diferencial, decimos que el sistema es un **sistema diferencial**. Por ejemplo, la siguiente ecuación modela un *sistema LTI*[b] *diferencial SISO*, donde la señal de entrada es $x(t)$ y la señal de salida es $y(t)$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \tag{1}$$

La señal de salida del sistema también se conoce como *respuesta del sistema*[c]. Entonces en términos de operaciones matemáticas, conocer la respuesta de este sistema es resolver la ecuación diferencial para una señal de entrada dada (en este caso $x(t)$) y condiciones iniciales del sistema en un tiempo determinado que normalmente se considera cero (en este caso $y(0^-)$, $\dot{y}(0^-)$).

En un curso de ecuaciones diferenciales se aprenden diferentes técnicas para resolver sistemas, estas técnicas están asociadas a la estructura que tenga la ecuación diferencial.

En particular las técnicas que se utilizarán en este curso para resolver sistemas están asociadas a transformadas integrales; en este momento se encuentra familiarizado con la transformada de Fourier. Así al aplicar transformada de Fourier al sistema (1) pensando que las condiciones iniciales son cero[d], se tiene

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \tag{2}$$

donde

$$Y(\omega) = \mathscr{F}\{y(t)\}, \quad H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}; \quad X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$$

La función $H(\omega)$ recibe el nombre de **Función de transferencia**[e] del sistema, esta función esta asociada al sistema y es independiente de la entrada, basta con observar (2) para afirmar lo anterior pues $X(\omega)$ no interfiere en el calculo de $H(\omega)$.

Ahora el problema que se quiere resolver es el siguiente: Si $x(t)$ es una señal periódica que resulta ser la entrada del sistema (1), ¿Cuál es la señal de salida del sistema?

[a] Estos tipo de sistemas reciben el nombre de **sistemas SISO** (Single-Input Single-Output)

[b] Hace referencia a Linear Time Invariant, por el momento no se describirá esta característica

[c] Por ejemplo si $x(t)$ es un escalón entonces $y(t)$ será la respuesta al escalón, si $x(t)$ es un impulso (delta de Dirac) entonces $y(t)$ es la respuesta al impulso y así según el caso

[d] Solo cuando las condiciones iniciales son cero puede utilizar la técnica de transformada de Fourier, en los vídeos de la teoría correspondiente se comenta este detalle. Por otro parte el sistema es LTI cuando esto sucede

[e] El nombre motivado porque $H(w)$ transfiere (modifica, transforma) la señal de entrada $X(\omega)$ en la señal de salida $Y(\omega)$, observe que si $H(\omega) = 1$ no hay modificación pues $Y(\omega) = X(\omega)$ y al aplicar transformada inversa $y(t) = x(t)$

Se resolverá el problema en general y su trabajo consistirá en aplicarlo al ejemplo propuesto.

Si $x(t)$ es una señal real periódica entonces

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \tag{3}$$

Al aplicar transformada de Fourier a esta señal y sustituirlo en (2) considerando que es un sistema LTI, se tiene:

$$Y(\omega) = H(\omega)\left(2\pi a_0 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi\left(\delta(\omega - n\omega_0) + \delta(\omega + n\omega_0)\right) + b_n \pi j\left(\delta(\omega + n\omega_0) - \delta(\omega - n\omega_0)\right)\right).$$

Al multiplicar por $H(\omega)$, aplicar propiedades de la delta de Dirac y utilizar la tranformada inversa se tiene.

$$y(t) = a_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}\left(H(n\omega_0)e^{n\omega_0 tj} + H(-n\omega_0)e^{-n\omega_0 tj}\right) + \frac{b_n}{2} j\left(H(-n\omega_0)e^{-n\omega_0 tj} - H(n\omega_0)e^{n\omega_0 tj}\right)$$

Al escribir $H(n\omega_0)$ en su forma polar, y aplicar álgebra de números complejos, se tiene:

$$y(t) = a_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \|H(n\omega_0)\| \cos(n\omega_0 t + \angle H(n\omega_0)) + b_n \|H(n\omega_0)\| \sin(n\omega_0 t + \angle H(n\omega_0)) \tag{4}$$

Se concluye que la respuesta de un sistema LTI diferencial $SISO$ a una entrada periódica es una señal periódica, del mismo periodo que la entrada y cuya serie de Fourier es la ecuación (4).

Ahora tome el sistema (1) con condiciones iniciales nulas, donde $x(t)$ es una señal periódica cuya descripción en un periodo es

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

(a) Encuentre la serie de Fourier trigonométrica para la señal $x(t)$

(b) Escriba la expresión de $H(n\omega_0)$, observe que es una función que solo depende de n

(c) Escriba la expresión de $\|H(n\omega_0)\|$, observe que es una función que solo depende de n

(d) Escriba la expresión de $\angle H(n\omega_0)$, observe que es una función que solo depende de n

(e) Escriba la respuesta del sistema $y(t)$ según la ecuación (4)

(f) Simule $y(t)$ en desmos y reporte un bosquejo de la gráfica de $y(t)$

NOTA: Observe que en este problema solo se pide calcular series de Fourier, simular en desmos, y encontrar la norma y ángulo de un número complejo, temas que corresponden a la sección a evaluar.

15

$T_0 = 4$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_0^2 dt = \frac{1}{2}$$

$a_0 = \frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}nt\right) dt = \frac{1}{2}\frac{2}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}t\right)\Big|_0^2 = 0$$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n t}{2}\right) dt = \frac{-1}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{-1}{\pi n}(-1)^n + \frac{1}{\pi n} = \frac{1}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right)$$

a)

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}nt\right)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

b)

$$H(n\omega_0) = H\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{-n^2\frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi n}{2}j + 2}$$

$$= \frac{1}{\left(2 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right) + j\frac{3\pi n}{2}} = \frac{\left(2 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right) - j\frac{3\pi n}{2}}{\left(2 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\pi n\right)^2}$$

$$|H(n\omega_0)| = \sqrt{\left(\frac{2 - \frac{n^2\pi^2}{4}}{\left(2 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\pi n}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{3\pi n}{2}}{\left(2 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\pi n}{2}\right)^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(2 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right)}$$

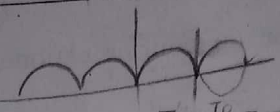
(b) 10 puntos

3. 25 puntos

15

Se tiene la señal $f(t) = |sen(\omega_0 t)|$ encuentre la serie de Fourier exponencial compleja (los coeficientes se cancelan cuando n es impar, utilice esta información para comprobar que sus D_n son correctos)

$f(t) = |sen(\omega_0 t)|$ →



$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$T_1 = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$

$$Sf(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j\omega_1 nt}$$

$T_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$

$$D_n = \frac{1}{T_1} \int_{<T_0>} f(t) e^{-j\omega_1 nt} dt$$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{\omega_0}} = 2\omega_0$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\pi/\omega_0} sen\omega_0 t \, e^{-j2\omega_0 nt} dt$$

$sen\,\omega_0 t$ + $e^{-j2\omega_0 nt}$

$\omega_0 \cos \omega_0 t$ − $-\frac{1}{2j\omega_0 n} e^{-j2\omega_0 nt}$

$-\omega_0^2 sen\,\omega_0 t$ $-\frac{1}{4\omega_0^2 n^2} e^{-j2\omega_0 nt}$

$\cos 2\omega_0 n + j\,sen\,2\omega_0 n$

$$= \left(-\frac{1}{2j\omega_0 n} sen\omega_0 t + \frac{1}{4\omega_0 n^2} \cos\omega_0 t\right) e^{-2j\omega_0 nt} \left(\frac{1}{1-4n^2}\right)$$

+

−

$$D_n = \left(\frac{1}{2\omega_0 n} e^{j\pi/2} sen\,\omega_0 t + \frac{1}{4\omega_0 n^2} \cos\omega_0 t\right) e^{-2j\omega_0 nt} \left(\frac{1}{1-4n^2}\right)$$

$$Sf(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\omega_0 n} e^{j\pi/2} sen\,\omega_0 t + \frac{1}{4\omega_0 n^2} \cos\omega_0 t\right)\left(\frac{1}{1-4n^2}\right)$$

Scanned by CamScanner

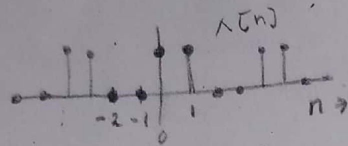
4. $\boxed{\text{25 puntos}}$

25

Se tiene una señal en tiempo discreto $x[n]$ periódica cuya descripción en un periodo es

$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{-2, -1\} \\ 1 & \text{si } n \in \{0, 1\} \end{cases}$$

encuentre la serie de Fourier exponencial compleja discreta y grafique el espectro de magnitud y fase.



$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$

$x[n] = \sum_{r=-2}^{1} D_r e^{jr\Omega_0 n}$ $\qquad N_0 = 4 \rightarrow \Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$\sum_{n=0}^{N_0 - N_0 + 1}$

donde $\rightarrow D_{-2}, D_{-1}, D_0, D_1$

$D_r = \frac{1}{4} \sum_{n=-2}^{1} x[n] e^{-jr\Omega_0 n}$

en $n=-2$ y $n=-1$ $x[n] = 0$. así.

ok

$D_r = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{-jr\Omega_0 n}$

$D_{-2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{2j\frac{\pi}{2}n} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{j\pi}\right) = 0$

$D_{-1} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{j\frac{\pi}{2}n} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{j\frac{\pi}{4}}$

$D_0 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{1} x[n] = \frac{1}{2}$

$D_1 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{-j\frac{\pi n}{2}} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{2}n}$