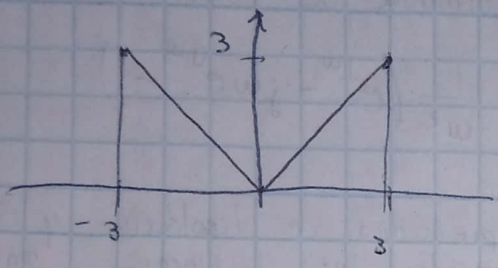
PR 15 Montiel Cruz Jorge de Jesús

1. encuentre la transformada de Fourier de la siguiente señal.



la señal $-t\,[u(t+3)-u(t)] + t\,[u(t)-u(t-3)]$

así, la transformada de Fourier.

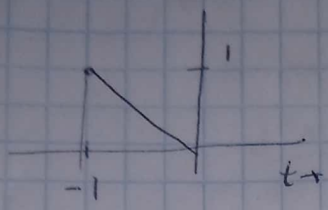
$$\int_{-3}^{0} -t\,e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{3} t\,e^{-j\omega t}\,dt = -e^{-j\omega t}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{t}{j\omega}\right)\Big|_{-3}^{0} + e^{-j\omega t}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{t}{j\omega}\right)\Big|_{0}^{3}$$

$$= -\frac{1}{\omega^2} + e^{3j\omega}\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{3}{j\omega}\right) + e^{-3j\omega}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{3}{j\omega}\right) - \frac{1}{\omega^2}$$

$$= -\frac{2}{\omega^2} + \left(e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}\right)\frac{1}{\omega^2} + \frac{3}{j\omega}\left(e^{3j\omega} - e^{-3j\omega}\right)$$

$$= -\frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^2}\cos 3\omega + \frac{6}{\omega}\,\text{sen}\, 3\omega$$

2. Sea la siguiente señal

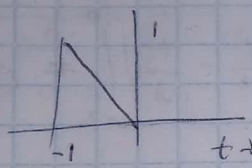


con transformada de Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2}\left(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1\right)$$

usando esta información y las propiedades de traslación y escalamiento en el tiempo encuentre la transformada del problema anterior.

la señal original



la podemos escribir de la siguiente manera.

$$-t\,[u(t+1) - u(t)] = f(t).$$

pues obtener el primer pedazo de la señal del problema anterior. tenemos que expandir en 3 y aumentar la altura en 3. de la siguiente manera.

$3f\left(\frac{t}{3}\right)$ que según las propiedades de escalamiento.

$$3f\left(\frac{t}{3}\right) \Longleftrightarrow \frac{3}{\left|\frac{1}{3}\right|} F\left(\frac{\omega}{\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = 9F(3\omega)$$

así pues

$$9\,\frac{1}{9\omega^2}\left(e^{3j\omega} - 3j\omega e^{3j\omega} - 1\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(e^{3j\omega} - 3j\omega e^{3j\omega} - 1\right)$$

el otro pedazo resulta ser una inversión de $f(t) \rightarrow f(-t)$ aplicando los mismos escalamientos

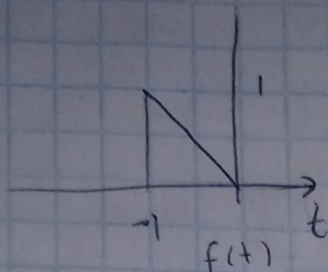
así. $$3f\left(\frac{-t}{3}\right) \Longleftrightarrow \frac{3}{\left|\frac{-1}{3}\right|} F\left(\frac{\omega}{\frac{-1}{3}}\right) = 9(-3\omega) = \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-3j\omega} + 3j\omega e^{-3j\omega} - 1\right)$$

así pues, la transformada.

$$\frac{1}{\omega^2}\left(\left(e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}\right) + 3j\omega\left(e^{3j\omega} - e^{-3j\omega}\right) - 2\right) = \frac{\left(2\cos 3\omega + 6\omega \operatorname{sen} 3j - 2\right)}{\omega^2}$$

como era de esperarse

3. Sea la siguiente señal.

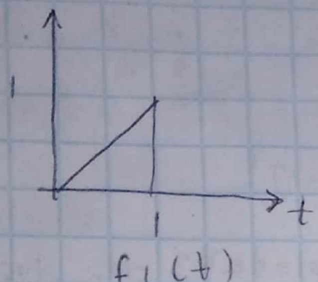


con transformada de Fourier.

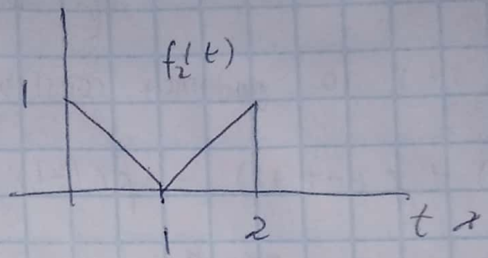
$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2}\left(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1\right)$$

usando esta información y las propiedades de traslación y escalamiento, encuentre las transformadas de Fourier de las siguientes señales.

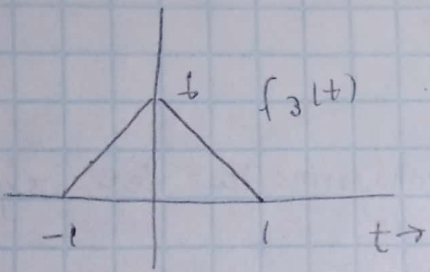
a).



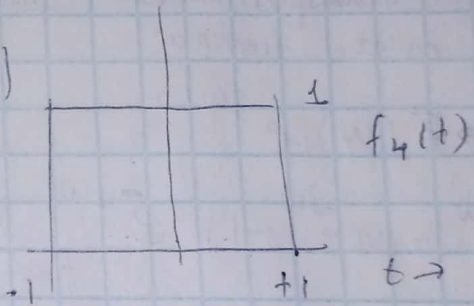
b)



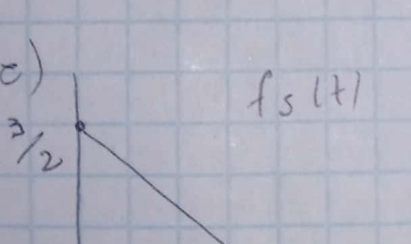
c)



d)



e)



para a)

dicha señal resulta ser $f(-t)$

así pues, su transformada

$$\frac{1}{|-1|} F\left(\frac{\omega}{-1}\right) = F(-\omega) = \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1\right)$$

para b)

si $f(t) = -t \begin{cases} \text{de } -1 \leq t \leq 0 \\ 0 \text{ otro caso} \end{cases}$

entonces, $f_2(t)$ la podemos construir así.

$$f_2(t) = f(t-1) + f(-t+1) = f(t-1) + f(-(t-1))$$

la primer transformada usando la propiedad de traslación en el tiempo.

$$f(t-t_0) \Leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1\right) e^{-j\omega}$$; la transformada del segundo término, escalando en -1 y trasladando tenemos que.

$F(-\omega)$ ya la habíamos obtenido en a).

$$F(-\omega) = \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1\right)$$

ahora usando la translación en el tiempo, donde $t_0 = 1$.

$$F(+\omega) = \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1\right) e^{-j\omega}$$

así pues

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2}\left[e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{j\omega} j\omega - 1\right) + e^{-j\omega}\left(e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1\right)\right]$$

para c).

podemos ver a $f_3(t)$ como

$f(-t-1) + f(t-1)$

donde $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(-t-1)\} + \mathcal{F}\{f(t-1)\}$

sabemos de problemas anteriores que

$$\mathcal{F}\{f(t-1)\} = \frac{1}{\omega^2}\left(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1\right)e^{-j\omega} = \frac{1}{\omega^2}\left(1 - j\omega - e^{-j\omega}\right)$$

ahora bien.

$$\mathcal{F}\{f(-t-1)\} = \mathcal{F}\{f(-(t+1))\}$$

usando

$$f(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{donde} \quad a = -1$$

$$F\left(\frac{\omega}{-1}\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1\right)$$

aplicando el desplazamiento en t.

$$f(t - t_0) \Longleftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$t_0 = -1.$$

$$f(-(t+1)) \Longleftrightarrow \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1\right)e^{+j\omega} = \frac{1}{\omega^2}\left(1 + j\omega - e^{j\omega}\right)$$

así pues

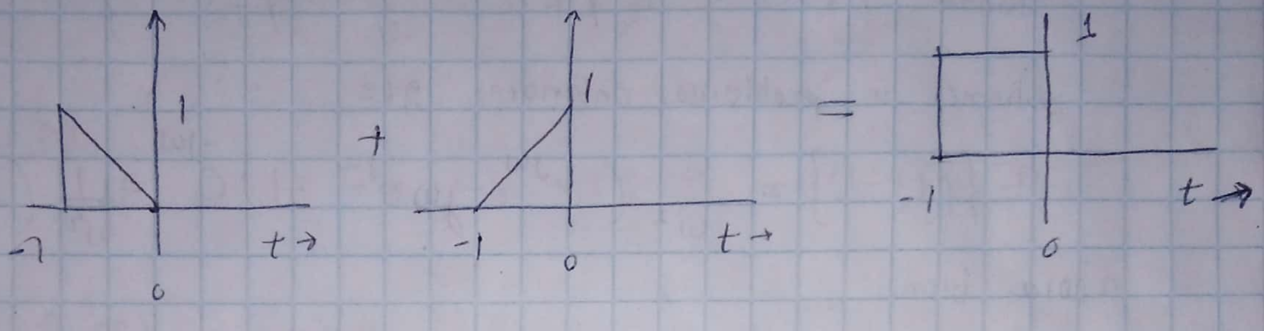
$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2}\left(1 - \cancel{j\omega} - e^{-j\omega} + 1 + \cancel{j\omega} - e^{j\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(2 - e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(2 - 2\cos\omega\right)$$

$$= \frac{2}{\omega^2}\left(1 - \cos\omega\right)$$

Scanned by CamScanner

Para d.)

De la primera parte del curso de señales vimos que dada una rampa, podemos formar una señal constante si sumamos en ese mismo intervalo una rampa invertida. de la siguiente manera.



así pues, para d) $f_4(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

$f_4(t) = f(t) + f(-t-1) + f(-t) + f(t-1)$

si $f(t) + f(-t-1) = h(t)$

entonces $f(-t) + f(t-1) = h(-t)$

así pues $f_4(t) = h(t) + h(-t)$; de lo que sabemos y de problemas anteriores

para $h(t) \rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\omega^2}(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1) + \frac{1}{\omega^2}(1 + j\omega - e^{j\omega})$

$= \frac{1}{\omega^2}(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1 + 1 - j\omega - e^{j\omega})$

$= \frac{1}{\omega^2}(j\omega - j\omega e^{j\omega})$ así pues, $h(-t)$ sera un escalamiento de la transformada anterior

$h(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\omega^2}(j\omega - j\omega e^{j\omega})$; $h(-t) \Leftrightarrow \frac{1}{\omega^2}(-j\omega + j\omega e^{-j\omega})$

$\rightarrow h(t) + h(-t) \Leftrightarrow \frac{1}{\omega^2}(j\omega - j\omega e^{j\omega} - j\omega + j\omega e^{-j\omega}) = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega$

$= 2 \operatorname{sinc} \omega$

Para e)

$$f_5(t) = \frac{3}{2} f\left(\frac{t}{2} - 1\right)$$

$$f_5(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\frac{3}{2} f\left(\frac{t}{2} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2} F(\omega)$$

haciendo primero para una traslación $t_0 = 1$.

$$f(t - t_0) = F_1(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1\right) e^{-j\omega} = \frac{1}{\omega^2}\left(1 - j\omega - e^{-j\omega}\right)$$

aplicando el escalamiento

$$f\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} F_2\left(\frac{\omega}{\frac{1}{2}}\right) = 2F(2\omega)$$

$$= \frac{2}{4\omega^2}\left(1 - 2j\omega - e^{-2j\omega}\right)$$ ahora la multiplicación por ctes.

$$\frac{3}{2} f\left(\frac{t}{2} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2} F_2(\omega) = \frac{3}{4\omega^2}\left(1 - 2j\omega - e^{-2j\omega}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{3}{4\omega_2}\left(1 - 2j\omega - e^{-2j\omega}\right)$$

Scanned by CamScanner

4. Mediante transformada de Fourier resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = u(t)$$

sol.

$$\mathcal{F}\{\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t)\} = \mathcal{F}\{u(t)\}$$

$$(j\omega)^2 Y(\omega) + 3j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = U(\omega)$$

$$s = j\omega$$

$$Y(\omega) = U(\omega)\left(\frac{1}{s^2+3s+2}\right) = U(\omega)\left(\frac{1}{(s+2)(s+1)}\right)$$

aplicando la propiedad de convolución

$$y_1(t) * y_2(t) \Leftrightarrow Y_1(\omega)Y_2(\omega)$$

así, $Y_1(\omega) = U(\omega)$

$$Y_2(\omega) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

al aplicar inversa de Fourier

$$u(t) * \left(e^{-2t}u(t) * e^{-t}u(t)\right)$$

$$y(t) = u(t) * \left(\frac{e^{-2t} - e^{-t}}{-1}u(t)\right) = u(t) * \left((e^{-t} - e^{-2t})u(t)\right)$$

$$y(t) = e^{-t}u(t) * u(t) - e^{-2t}u(t) * u(t)$$

$$= \left[\frac{e^{-t}-1}{-1} - \left(\frac{e^{-2t}-1}{-2}\right)\right]u(t) = \left(\frac{e^{-2t}}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}\right)u(t)$$

$$y(t) = \frac{e^{-2t}}{2}u(t) - e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}u(t)$$