



UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA EN
INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS

USO DE \LaTeX , CONVOLUCIÓN

Análisis de Señales y Sistemas

Autores:

Cruz Montejo Jorge Luis

Montiel Cruz Jorge de Jesús

Grupo:

2MV1

Profesor:

Dr. Rafael Martínez Martínez

31 de octubre de 2018

Índice

1. Objetivos	3
2. Introducción	3
3. Desarrollo	3
4. Conclusiones	13
5. Apéndices	14
5.1. Método gráfico de convolución	14

Índice de figuras

1.	Convolución de $f(t)$ con $g(t)$ para $t < 0$	5
2.	Convolución de $f(t)$ con $g(t)$ para $t > 0$	6
3.	Convolución de $g(t)$ con $g(t)$ para $t < 0$	7
4.	Convolución de $g(t)$ con $g(t)$ para $t > 0$	8
5.	Convolución de $f(t)$ con $f(t)$ para $t < 0$	9
6.	Convolución de $f(t)$ con $f(t)$ para $t > 0$	10
7.	Convolución de $x(t)$ con $x(t)$ para $t < 0$	11
8.	Convolución de $x(t)$ con $x(t)$ para $t > 0$	12

1. Objetivos

1. Conocer los componentes principales de \LaTeX .
2. Crear un documento que será la guía para tus reportes de prácticas.
3. Perder el miedo a aprender rápido.
4. Motivarte a usar \LaTeX .
5. Verificar alguna de las propiedades de la convolución.

2. Introducción

La convolución de dos señales es una operación matemática que tiene como resultado una tercera señal, diferente a las que le dieron origen. En sistemas, la convolución de la señal de entrada con la señal de la respuesta al impulso es la respuesta a estado-cero del sistema. En ingeniería mecatrónica, esta operación puede aplicarse en filtros de sonido o de imagen así como también en circuitos eléctricos.

3. Desarrollo

La convolución cuenta con muchas propiedades que simplifican la operación al momento de efectuarla. En el mundo de las señales es muy común que estas sufran escalamientos, así pues, es de interés general, conocer qué es lo que le ocurre a la convolución de dos señales escaladas por la misma constante, llegando así a la siguiente propiedad.

Si $f(t) * x(t) = y(t)$ y $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ entonces

$$f(at) * x(at) = \frac{1}{|a|} y(at) \quad (1)$$

Vemos que, por definición de convolución, es posible probar esta propiedad, como a continuación se muestra.

Ya que a está contenida en los números reales, debemos considerar dos casos: cuando es positiva y cuando es negativa, así pues, cuando es positiva, tenemos lo siguiente

$$f(at) * x(at) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a\tau)x(a(t - \tau))d\tau \quad (2)$$

Realizando el siguiente cambio de variable

$$u = a\tau \quad (3)$$

vemos que al ser a mayor que cero, entonces los límites de la integral permanecen inalterados, obteniendo lo siguiente

$$\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)x(at - u)du = \frac{1}{a}y(at) \quad (4)$$

Ahora bien, si a es negativa, los límites de la integral se invierten, dado el cambio de variable en la ecuación 3, y por propiedades de la integral definida obtenemos lo siguiente

$$-\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)x(at - u)du = -\frac{1}{a}y(at) \quad (5)$$

Combinando las ecuaciones 4 y 5, obtenemos lo que queríamos probar.

$$f(at) * x(at) = \frac{1}{|a|}y(at) \quad (6)$$

En la literatura o en internet es común encontrar formularios de convolución de señales causales, a continuación obtendremos 4 de estas fórmulas mediante el método gráfico[†].

Sean las siguientes señales

$$f(t) = e^{-at}\cos(\omega t)u(t) \quad (7)$$

$$g(t) = e^{-at}\sen(\omega t)u(t) \quad (8)$$

$$x(t) = e^{\lambda t}u(t) \quad (9)$$

entonces

$$f(t) * g(t) = \frac{1}{2}te^{-at}\sen(\omega t)u(t) \quad (10)$$

$$g(t) * g(t) = \frac{1}{2\omega}e^{-at}\sen(\omega t)u(t) - \frac{1}{2}te^{-at}\cos(\omega t)u(t) \quad (11)$$

$$f(t) * f(t) = \frac{1}{2\omega}e^{-at}\sen(\omega t)u(t) + \frac{1}{2}te^{-at}\cos(\omega t)u(t) \quad (12)$$

$$x(t) * x(t) = te^{\lambda t}u(t) \quad (13)$$

[†]Los pasos de este método se explican en los Apéndices

Para la ecuación 10, usando el método gráfico, determinamos que cuando t es menor a cero, entonces el resultado de la convolución será cero, sólo existiendo para valores de t mayores a cero como . Así pues, la integral de convolución se simplifica como a continuación se muestra.

$$\int_0^t e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) e^{-at+a\tau} \sin(\omega t - \omega\tau) d\tau \quad (14)$$

De está manera, al separar el seno de la suma de dos ángulos, realizar los productos y simplificaciones pertinentes, llegamos a dos integrales.

$$= e^{-at} \left(\int_0^t \cos^2(\omega\tau) \sin(\omega t) d\tau - \int_0^t \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau) \cos(\omega t) d\tau \right) \quad (15)$$

Ambas integrales son directas y tienen el resultado siguiente

$$f(t) * g(t) = \frac{t}{2} e^{-at} \sin(\omega t) u(t) \quad (16)$$

Para el caso en el que $\omega = 1$ y $a = 1$ obtenemos las siguientes gráficas, que representan los resultados anteriormente expuestos.

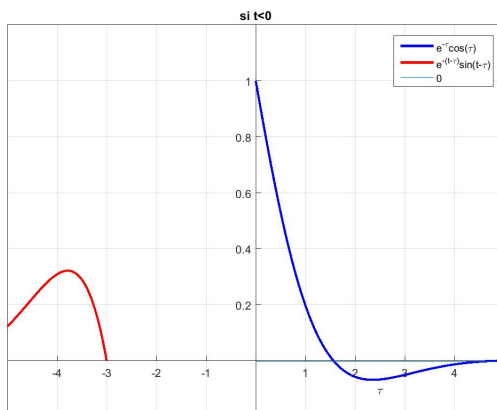


Figura 1: Convolución de $f(t)$ con $g(t)$ para $t < 0$

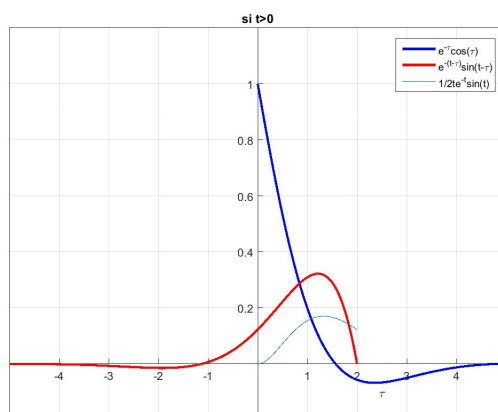


Figura 2: Convolución de $f(t)$ con $g(t)$ para $t > 0$

Para la ecuación 11, análogo al procedimiento anterior, sabemos que para valores de t menores a cero el resultado de la convolución es cero, así mismo, para valores de t mayores a cero la convolución existe y obtenemos la siguiente integral

$$\int_0^t e^{-a\tau} \sin(\omega\tau) e^{a\tau-at} \sin(\omega t - \omega\tau) d\tau \quad (17)$$

Así pues, separando el seno de la suma de dos ángulos, multiplicar por $\sin(\omega\tau)$ y simplificar, obtenemos dos integrales

$$= e^{-at} \left(\int_0^t \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau) \sin(\omega t) d\tau - \int_0^t \sin^2(\omega\tau) \cos(\omega t) d\tau \right) \quad (18)$$

El resultado de estas integrales es directo y es el siguiente

$$= e^{-at} \left(\frac{\sin(\omega t) \sin^2(\omega t)}{2\omega} + \frac{\cos(\omega t) \sin(2\omega t)}{4\omega} - \frac{t}{2} \cos(\omega t) \right) \quad (19)$$

Si separamos el seno del ángulo doble y agrupamos de manera conveniente, al simplificar obtenemos el resultado deseado.

$$g(t) * g(t) = \frac{1}{2\omega} e^{-at} \sin(\omega t) u(t) - \frac{1}{2} t e^{-at} \cos(\omega t) u(t) \quad (20)$$

Para el caso en el que $\omega = 5$ y $a = 4$ obtenemos las siguientes gráficas, que representan los resultados anteriormente expuestos.

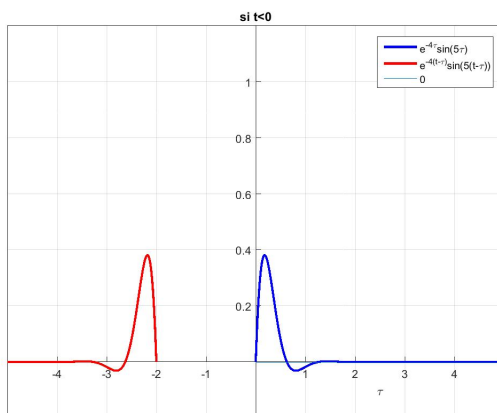


Figura 3: Convolución de $g(t)$ con $g(t)$ para $t < 0$

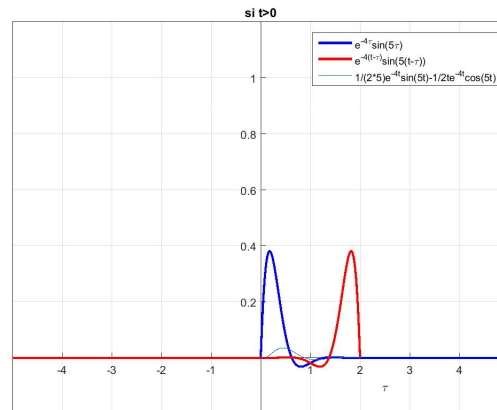


Figura 4: Convolución de $g(t)$ con $g(t)$ para $t > 0$

Para la ecuación 12, el procedimiento es muy similar a como se hizo con la ecuación 11, así pues, la integral de convolución, resulta ser la siguiente

$$\int_0^t e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) e^{-at+a\tau} \cos(\omega(t-\tau)) d\tau \quad (21)$$

Realizando los mismo pasos que se hicieron para obtener la ecuación 11, obtenemos las siguientes dos integrales

$$e^{-at} \left(\int_0^t \cos^2(\omega\tau) \cos(\omega t) d\tau - \int_0^t \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau) \sin(\omega t) d\tau \right) \quad (22)$$

Dando como resultado lo siguiente

$$f(t) * f(t) = e^{-at} \left(\cos(\omega t) \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\sin(2\omega\tau)}{4\omega} \right) \Big|_0^t - \sin(\omega t) \left(\frac{\cos^2(\omega\tau)}{2\omega} \right) \Big|_0^t \right) \quad (23)$$

Que al evaluar y simplificar da como resultado lo que queríamos probar.

$$= \frac{1}{2\omega} e^{-at} \sin(\omega t) u(t) + \frac{1}{2} e^{-at} t \cos(\omega t) u(t) \quad (24)$$

Para el caso en el que $\omega = 2$ y $a = 3$ obtenemos las siguientes gráficas, que representan los resultados anteriormente expuestos.

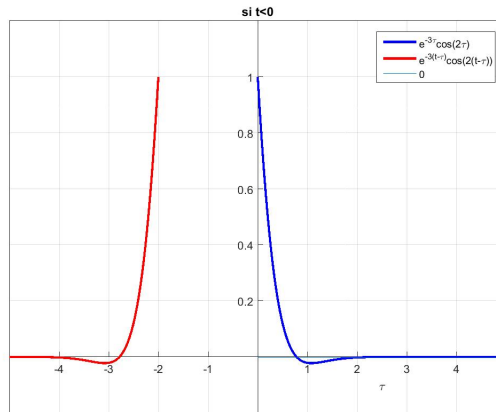


Figura 5: Convolución de $f(t)$ con $f(t)$ para $t < 0$

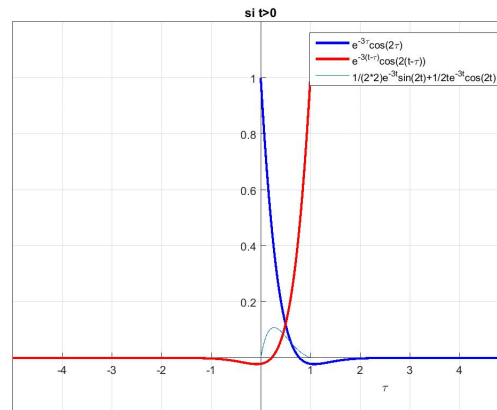


Figura 6: Convolución de $f(t)$ con $f(t)$ para $t > 0$

Para probar la ecuación 13 podemos proceder de manera directa, sin embargo, podemos también corroborar su veracidad si asumimos que $\omega \rightarrow 0$ desde la ecuación 12.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega} e^{-at} \sin(\omega t) u(t) + \frac{1}{2} e^{-at} t \cos(\omega t) u(t) \quad (25)$$

De donde el límite depende de ω , de esta manera podemos manipular el primer término adecuadamente para llevarlo a la forma de un límite ya conocido, mientras que el resultado del segundo término es directo, obteniendo lo siguiente

$$\frac{1}{2} t e^{-at} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} u(t) + \frac{1}{2} t e^{-at} u(t) \quad (26)$$

Al resolver y simplificar obtenemos el resultado de la ecuación 13 con $\lambda = -a$

$$x(t) * x(r) = t e^{-at} u(t) \quad (27)$$

Para el caso en el que $a = 1$ obtenemos las siguientes gráficas, que representan los resultados anteriormente expuestos.

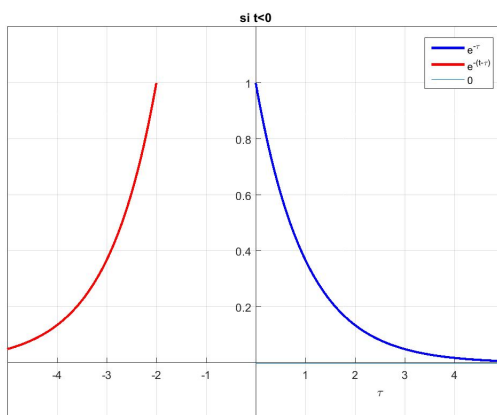


Figura 7: Convolución de $x(t)$ con $x(t)$ para $t < 0$

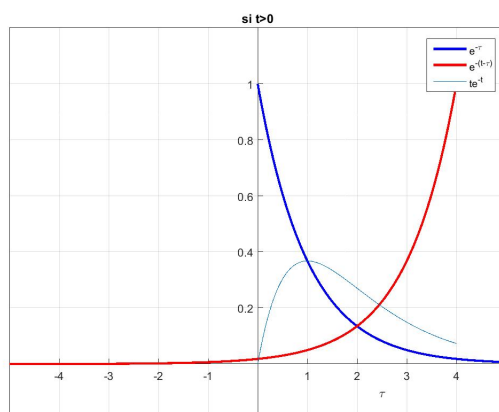


Figura 8: Convolución de $x(t)$ con $x(t)$ para $t > 0$

4. Conclusiones

\LaTeX es un editor de texto para producir documentos con alta calidad tipográfica, generalmente de carácter científico, se basa en el uso de macros de \TeX , esto último provocó que \LaTeX fuera cómodo de usar. Cabe destacar que \LaTeX es software libre.

Para editar en \LaTeX existen varias plataformas en las que se pueden editar documentos con extensión .tex, uno de ellos es Overleaf, editor en línea, TeXworks, TeXstudio, LaTeXila o Texmaker, estos últimos son programas de computadora.

La convolución de señales es una operación matemática que, al efectuarla, nos arroja una tercera señal. En ingeniería puede ser utilizada en la simulación de sonidos en salas o en micrófonos, así como también en el uso de filtros de imagen.

En esta operación existen ventajas cuando las señales son causales de longitud infinita y con una sola expresión. Que sean causales implica que en la integral de convolución se simplifican los límites de integración, en los cuales originalmente iban de menos infinito a infinito ahora irán de cero a infinito. Que sean de longitud infinita garantiza que la integral de convolución será válida en todo ese intervalo, por último, que tengan una sola expresión garantiza que la integral de convolución definida será única para obtener el resultado de la operación, es decir, no es necesario dividir en intervalos dicha integral para obtener el resultado.

5. Apéndices

5.1. Método gráfico de convolución

Para realizar convolución por el método gráfico es necesario seguir los siguientes pasos.

1. Identificar las señales a convolucionar.
2. Ya que la convolución conmuta, debemos escoger la señal fija y la señal móvil, según convenga.
3. La señal fija se deja intacta, mientras que la señal móvil se le aplica una reflexión con respecto al eje vertical.
4. Para la señal móvil si existen cambios de geometría entonces habrá que sumar t únicamente en aquellos puntos (estos serán los límites de integración).
5. En ambas señales, cambiar la variable independiente t por τ , a excepción de las del punto anterior.
6. Aplicar una traslación horizontal a la señal móvil, esto es, cambiar t por $t - \tau$.
7. Verificar todos los casos en donde exista la integral de convolución y resolver apropiadamente.

```

1  syms t tau
2  t1=2;
3  omega=1;
4  a=1;
5  x1=0:0.001:100;
6  x2=-100:0.001:t1;
7  f=exp(1).^(-a*x1).*cos(omega*x1);
8  plot(x1,f,'b','LineWidth',2);
9  hold on
10 g=exp(1).^(a*(-t1+x2)).*sin(omega*(t1-x2));
11 plot(x2,g,'r','LineWidth',2)
12 y1=exp(1)^(-a*tau)*cos(omega*tau);
13 y2=exp(1).^(a*(-t+tau)).*sin(omega*(t-tau));
14 c=y1*y2;
15 conv=int(c,tau,[0,t]);
16 y3=x1.*0;
17 xlim([-5 5])
18 ylim([-0.2 1.2])
19 ax = gca;
20 ax.XAxisLocation = 'origin';
21 ax.YAxisLocation = 'origin';
22 xlabel('\tau');
23 grid on;
24 if t1<0
25     plot(x1,y3)
26     legend('e^{-\tau}cos(\tau)','e^{-(t-\tau)}sin(t-\tau)','0','\
        interpreter','latex');
27     title('si t<0')
28     saveas(gcf,'P1_asys_1_tme0.jpg')
29 else
30     ezplot(conv,[0,t1])
31     xlim([-5 5])
32     ylim([-0.2 1.2])
33     xlabel('\tau');
34     legend('e^{-\tau}cos(\tau)','e^{-(t-\tau)}sin(t-\tau)','1/2te^{-t}\
        sin(t)','interpreter','latex');
35     title('si t>0')
36     saveas(gcf,'P1_asys_1_tma0.jpg')
37 end

```



```

1  syms t tau
2  t1=2;
3  omega=5;
4  a=4;
5  x1=0:0.001:100;
6  x2=-100:0.001:t1;
7  f=exp(1).^(-a*x1).*sin(omega*x1);
8  plot(x1,f,'b','LineWidth',2);
9  hold on
10 g=exp(1).^(a*(-t1+x2)).*sin(omega*(t1-x2));
11 plot(x2,g,'r','LineWidth',2)
12 y1=exp(1)^(-a*tau)*sin(omega*tau);
13 y2=exp(1).^(a*(-t+tau)).*sin(omega*(t-tau));
14 c=y1*y2;
15 conv=int(c,tau,[0,t]);
16 y3=x1.*0;
17 xlim([-5 5])
18 ylim([-0.2 1.2])
19 xlabel('\tau');
20 ax = gca;
21 ax.XAxisLocation = 'origin';
22 ax.YAxisLocation = 'origin';
23 grid on;
24 if t1<0
25     plot(x1,y3)
26     legend('e^{-4\tau}\sin(5\tau)','e^{-4(t-\tau)}\sin(5(t-\tau))','0','\
        interpreter','latex');
27     title('si t<0')
28     saveas(gcf,'P1_asys-2_tme0.jpg')
29 else
30     ezplot(conv,[0, t1])
31     xlim([-5 5])
32     ylim([-0.2 1.2])
33     xlabel('\tau');
34     legend('e^{-4\tau}\sin(5\tau)','e^{-4(t-\tau)}\sin(5(t-\tau))','\
        1/(2*5)e^{-4t}\sin(5t)-1/2te^{-4t}\cos(5t)','interpreter','latex')
        ;
35     title('si t>0')
36     saveas(gcf,'P1_asys-2_tma0.jpg')
37 end

```

```

1  syms t tau
2  t1=1;
3  omega=2;
4  a=3;
5  x1=0:0.001:100;
6  x2=-100:0.001:t1;
7  f=exp(1).^(-a*x1).*cos(omega*x1);
8  plot(x1,f,'b','LineWidth',2);
9  hold on
10 g=exp(1).^(a*(-t1+x2)).*cos(omega*(t1-x2));
11 plot(x2,g,'r','LineWidth',2)
12 y1=exp(1)^(-a*tau)*cos(omega*tau);
13 y2=exp(1).^(a*(-t+tau)).*cos(omega*(t-tau));
14 c=y1*y2;
15 conv=int(c,tau,[0,t]);
16 y3=x1.*0;
17 xlim([-5 5])
18 ylim([-0.2 1.2])
19 xlabel('\tau');
20 ax = gca;
21 ax.XAxisLocation = 'origin';
22 ax.YAxisLocation = 'origin';
23 grid on;
24 if t1<0
25     plot(x1,y3)
26     legend('e^{-3\tau}\cos(2\tau)','e^{-3(t-\tau)}\cos(2(t-\tau))','0','\
        interpreter','latex');
27     title('si t<0')
28     saveas(gcf,'P1_asys-3_tme0.jpg')
29 else
30     ezplot(conv,[0, t1])
31     xlim([-5 5])
32     ylim([-0.2 1.2])
33     xlabel('\tau');
34     legend('e^{-3\tau}\cos(2\tau)','e^{-3(t-\tau)}\cos(2(t-\tau))','\
        1/(2*2)e^{-3t}\sin(2t)+1/2te^{-3t}\cos(2t)','interpreter','latex')
        ;
35     title('si t>0')
36     saveas(gcf,'P1_asys-3_tma0.jpg')
37 end

```

```
1 syms t tau
2 t1=4;
3 omega=0;
4 a=1;
5 x1=0:0.001:100;
6 x2=-100:0.001:t1;
7 f=exp(1).^(-a*x1).*cos(omega*x1);
8 plot(x1,f,'b','LineWidth',2);
9 hold on
10 g=exp(1).^(a*(-t1+x2)).*cos(omega*(t1-x2));
11 plot(x2,g,'r','LineWidth',2)
12 y1=exp(1)^(-a*tau)*cos(omega*tau);
13 y2=exp(1).^(a*(-t+tau)).*cos(omega*(t-tau));
14 c=y1*y2;
15 conv=int(c,tau,[0,t]);
16 y3=x1.*0;
17 xlim([-5 5])
18 ylim([-0.2 1.2])
19 xlabel('\tau');
20 ax = gca;
21 ax.XAxisLocation = 'origin';
22 ax.YAxisLocation = 'origin';
23 grid on;
24 if t1<0
25     plot(x1,y3)
26     legend('e^{-\tau}','e^{-(t-\tau)}','0','interpreter','latex');
27     title('si t<0')
28     saveas(gcf,'P1_asys_4_tme0.jpg')
29 else
30     ezplot(conv,[0,t1])
31     xlim([-5 5])
32     ylim([-0.2 1.2])
33     xlabel('\tau');
34     legend('e^{-\tau}','e^{-(t-\tau)}','te^{-t}','interpreter','latex'
35           );
36     title('si t>0')
37     saveas(gcf,'P1_asys_4_tma0.jpg')
38 end
```

Referencias

- [1] LATHI B. P.. (2005). Linear Systems and Signals. 198 Madison Avenue, New York: Oxford University Press, Inc.
- [2] Alexánder B. & Walter F. (2016). Edición de Textos Científicos Latex. Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica: Revista digital Matemática Educación e Internet.
- [3] Lozano J.. (Desconocido). Convolución, Noise-Reduction, Transpositores, Loops. Octubre 31,2018, de Postproducción de Audio del IUA Sitio web: <http://www.dtic.upf.edu/~jlozano/audio/edicion4.html>