Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

Análisis de Señales Y Sistemas
Examen: Transformada de Laplace

Mayo de 2011

Nombre:____Grupo:__________

Instrucciones

a) resuelva todos los problemas

b) debe justificar sus resultados (mostrar el procedimiento)

c) escribir las soluciones de manera ordenada y clara

d) se prohíbe copiar

e) estudiantes que falten al inciso b) y c), el problema respectivo será anulado, alumnos que falten al inciso d), el examen será anulado y se le reportará con las autoridades competentes

---

1. Para un sistema diferencial LTI descrito por al ecuación

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y'(t)+a_0y(t) = b_mf^{(n)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1f'(t)+b_0f(t) \quad (1)$$

La función

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{f(t)\}} \quad (2)$$

donde todas las condiciones iniciales son nulas, es la **función de transferencia** del sistema, es importante notar que la función de transferencia $H(s)$ depende solo de las constantes a_i y b_j no es afectada por la elección de $f(t)$, Si la **función de entrada** es un escalón unitario $u(t)$, entonces la ecuación (2) implica que

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = H(s)F(s) = \frac{H(s)}{s} = \mathcal{L}\{u(t)\}H(s)$$

La solución (función de salida) en este caso particular la llamaremos **admisión indicatriz** y se denota como $A(t)$. Por lo tanto, en este caso $A(t) = y(t)$ así

$$A(s) = \frac{H(s)}{s}$$

Es posible expresar la respuesta $y(t)$ del sistema (estamos hablando de la respuesta a estado cero) a una función general de entrada $f(t)$ en términos de la admisión indicatriz $A(t)$ y de $f(t)$. Para deducir estas relaciones, proceda como sigue:

a) Muestre que

$$Y(s) = sA(s)F(s) \quad (3)$$

b) Ahora aplique el teorema de convolución a (3) y muestre que

$$y(t) = \frac{d}{dt}\left[A(t) * f(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t A(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t A(\tau)f(t-\tau)\,d\tau\right] \tag{4}$$

c) Para calcular la derivada indicada en (4), se puede usar la regla de Leibniz:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{a(t)}^{b(t)} g(\tau,t)\,d\tau\right] = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d\,g(\tau,t)}{dt}\,d\tau + g\left(b(t),t\right)\frac{d\,b(t)}{dt} - g\left(a(t),t\right)\frac{d\,a(t)}{dt}$$

Aplique esta regla a la ecuación (4) para deducir las formulas (sugerencia: recuerde que $A(0) = A'(0) = 0$ pues es la respuesta a estado cero para una entrada escalón unitario)

$$y(t) = \int_0^t A'(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{5}$$

$$y(t) = \int_0^t A(\tau)f'(t-\tau)\,d\tau + A(t)f(0) \tag{6}$$

d) En las ecuaciones (5) y (6), haga el cambio de variable $w = t - \tau$,y muestre que

$$y(t) = \int_0^t A'(w)f(t-w)\,dw \tag{7}$$

$$y(t) = \int_0^t A(t-w)f'(w)\,dw + A(t)f(0) \tag{8}$$

Las ecuaciones (5)-(8) se conocen como **formulas de Duhamel**, en honor al matemático francés J. M. C. Duhamel. Estas formulas son útiles para determinar la respuesta del sistema (respuesta a estado cero) a una entrada general $f(t)$, pues la admisión indicatriz del sistema se puede determinar de manera experimental midiendo la respuesta del sistema a una función escalón unitario.

e) La función de respuesta al impulso $h(t)$ se define como $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, donde $H(s)$ es la función de transferencia. muestre que $h(t) = A'(t)$, de modo que las ecuaciones (5) y (7) se pueden escribir de la forma

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = \int_0^t h(\tau)f(t-\tau)\,d\tau = h(t) * f(t) \tag{9}$$

Observemos que la admisión indicatriz $A(t)$ es la respuesta a una función escalón unitario $u(t)$ y la función de respuesta al impulso $h(t)$ es la respuesta al impulso $\delta(t)$. Pero la delta es la derivada (en un sentido generalizado) de la función escalón unitario. Por lo tanto, el hecho de que $h(t) = A'(t)$ no es muy sorprendente.

2. Encuentre la solución de los siguientes ecuaciones y utilice el teorema de valor final (en caso de ser posible) para saber a que valor tiende la salida.

a) $y'' + 6y' + 9y = 0 \quad y(0) = -3 \quad y'(0) = 10$

b) $y'' + 2y' + 2y = t^2 + 4t \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = -1$