PR16 Montiel Cruz Jorge de Jesús

4.1.1 f)

Por integración directa encuentre la transformada de Laplace y la región de convergencia de:

$x(t) = \cosh(at)\, u(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right) u(t)$$

así

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right) e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{s-a}\right) e^{-(s-a)t} - \left(\frac{1}{s+a}\right) e^{-(s+a)t} \right] \Big|_0^{\infty}$$

donde si $Re(s+a) > 0$ $\quad Re(s-a) > 0$

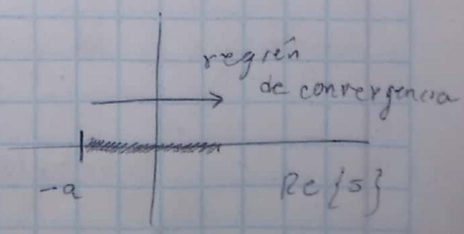
$Re\, s > -a$ y $Re\, s > a$

así $Re\, s > -a$ para que ambas integrales converjan

Retomando

cuando $t \to \infty$ ambas son cero así pues cuando $t \to 0$

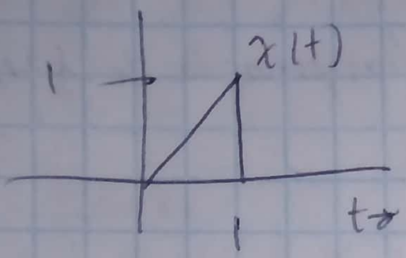
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2}\, u(t)$$



$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}\, u(t)$$

$$\cosh(at)\, u(t) \Longleftrightarrow \frac{s}{s^2 - a^2}\, u(t)$$

4.1.2 a) por integración directa encuentre $\mathcal{L}\{x(t)\}$



$$x(t) = t\,(u(t) - u(t-1))$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^1 t\cdot e^{-st}\,dt = -e^{-st}\left(\frac{t}{s}+\frac{1}{s^2}\right)\Big|_0^1$$

$$= -e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)+\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1-e^{-s}}{s}-e^{-s}\right) = \frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}-s^2e^{-s}\right)$$

4.1.3 h) encuentre la transformada inversa (unilateral) de

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2(s^2+4s+5)}$$

descomponiendo en fracciones parciales

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2(s^2+4s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{(s+2)^2} + \frac{K_4 s + K_5}{s^2+4s+5}$$

para K_1

$$K_1 = \left.\frac{s+1}{(s+2)^2(s^2+4s+5)}\right|_{s=0} = \frac{1}{20}$$

Para K_3

$$K_3 = \left.\frac{s+1}{s(s^2+4s+5)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

Podemos obtener una nueva ecuación si eliminamos K_5 y mult por s. y $s \to \infty$

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{s(s+1)}{s(s+2)^2(s^2+4s+5)} = \frac{sK_1}{s} + \frac{sK_2}{s+2} + \frac{sK_3}{(s+2)^2} + \frac{s^2K_4}{s^2+4s+5}\right.$$

$$0 = K_1 + K_2 + K_4 \rightarrow K_4 = -K_1 - K_2$$

$$K_4 = -\frac{1}{20} - K_2$$

Para determinar K_2, K_4 y K_5 procedemos de la sig. manera.

$$s+1 = K_1(s+2)^2(s^2+4s+5) + K_3(s^2+4s^2+5s) + (As+B)s(s+2)^2$$
$$+K_2(s(s+2)(s^2+4s+5))$$

que al desarrollar, agrupar y simplificar obtenemos

Scanned by CamScanner

$A = K_4 \quad B = K_5$

$s+1 = s^4\left(\frac{1}{20} + A + K_2\right) + s^3\left(\frac{9}{10} + 4A + B + 6K_2\right) + s^2\left(\frac{13}{4} + 4A + 4B + 12K_2\right)$

$+ s\left(\frac{43}{10} + 4B + 10K_2\right) + \cancel{1} = s + \cancel{1}$

$\frac{1}{20} + A + K_2 = 0 \quad (1)$

$\frac{9}{10} + 4A + B + 6K_2 = 0 \quad (2)$

$\frac{13}{4} + 4A + 4B + 12K_2 = 0 \quad (3)$

$\frac{43}{10} + 4B + 10K_2 = 1 \quad (4)$

en adición con

$A = -K_1 - K_2 \quad (5)$

que al resolver

$K_2 = -\frac{1}{4}$

$A = \frac{1}{5}$

$B = -\frac{1}{5}$

así pues.

$\frac{s+1}{s(s+2)^2(s^2+4s+5)} = \frac{1}{20}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{5}\left(\frac{s-1}{s^2+4s+5}\right)$

tomando la inversa de Laplace a ambos lados

$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{20}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{5}\frac{s-1}{s^2+4s+5}\right\}$

$= \frac{1}{20} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+4s+5}\right\}$

Scanned by CamScanner

$$\frac{s-1}{s^2+4s+5} = \frac{s-1}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{3}{(s+2)^2+1}$$

aplicando la inversa de Laplace

$$\Rightarrow e^{-2t}\cos t - 3e^{-2t}\operatorname{sen} t$$

así pues

$$x(t) = \frac{1}{20} + e^{-2t}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{5}\cos t - \frac{3}{5}\operatorname{sen} t\right)u(t)$$