Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

Análisis de Señales Y Sistemas
Examen: Transformada de Laplace

Noviembre de 2011

Nombre:____Grupo:__________

Instrucciones

a) resuelva todos los problemas

b) debe justificar sus resultados (mostrar el procedimiento)

c) escribir las soluciones de manera ordenada y clara

d) se prohíbe copiar

e) estudiantes que falten al inciso b) y c), el problema respectivo será anulado, alumnos que falten al inciso d), el examen será anulado y se le reportará con las autoridades competentes

---

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = 3x - 2y$$
$$y' = 3y - 2x$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

2. Resolver al ecuación para $y(t)$

$$y'(t) - 2\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{sen}(t-\tau)d\tau = 1 \quad y(0) = -1$$

3. Un dispositivo esta modelado mediante el siguiente sistema diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = f$$

Donde y es la salida del sistema y f la entrada del sistema.

a) Encuentra la función de transferencia del sistema.

b) Encuentra la respuesta al impulso.

c) Si $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$ encuentra mediante la transformada de Laplace la salida del sistema cuando la entrada es un escalón unitario (es decir la solución será la respuesta al escalón).

d) Resuelve el inciso anterior con técnicas de tiempo y compara tu respuesta. Ayuda: $y(t) = y_{entradacero} + y_{estadocero}$ y utiliza el inciso b).

4. Definición 0.0.1 (Función Gamma) *La función gamma* $\Gamma(t)$ *se define como*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-u}u^{t-1}du, \quad t > 0.$$

Tenemos que $\Gamma(1) = 1$ (puedes verificarlo de inmediato) y de manera similar $\Gamma(2) = 1$ y $\Gamma(3) = 2$, $\Gamma(4) = 6$ es decir cuando el argumento es un numero natural, tenemos que $\Gamma(n+1) = n!$, lógicamente podemos evaluar a esta función en otros números pues su dominio son los reales positivos, es por ello que se le conoce como el factorial generalizado. Demuestre que

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \quad r > -1$$

observese que cuando $r \in \mathbb{N}$ coincide con la formula ya conocida.