PR 18

Montiel Cruz Jorge de Jesús

1. Determine la transformada unilateral derecha de Laplace de la siguiente función

$$f(t) = \cos(nt)\cos(mt) \quad m \neq n$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos(nt)\cos(mt)\, dt$$

usando $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))\, dt$$

donde $\alpha = nt$ y $\beta = mt$.

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\cos((n+m)t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\cos((n-m)t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-st}}{s^2+(n+m)^2}\left((n+m)\operatorname{sen}((n+m)t) + (-s)\cos((n+m)t)\right)\Big|_0^\infty \right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-st}}{s^2+(n-m)^2}\left((n-m)\operatorname{sen}((n-m)t) - s\cos((n-m)t)\right)\Big|_0^\infty \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+(n+m)^2} + \frac{s}{s^2+(n-m)^2} \right)$$

2. Sea $F(s)$ la transformada de Laplace unilateral derecha de $f(t)$ que existe para $Re(s) > a$ si $\alpha > 0$, muestre que $f(\alpha t)$ tiene transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right); \quad Re(s) > a\alpha$$

a) ¿Por qué es importante decir que $\alpha > 0$?

b) ¿Qué sucede si $\alpha < 0$?

c) ¿Qué sucede si $\alpha = 0$?

$$f(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = F(s) \quad ROC \ Re(s) > a$$

si $\alpha > 0$ entonces

$$f(\alpha t) \rightarrow \mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-st} dt$$

haciendo $u = \alpha t$. $\rightarrow$ $\alpha > 0$, límites de integración inalterados

$\frac{du}{\alpha} = dt$

$$= \int_0^\infty f(u) e^{-s\frac{u}{\alpha}} \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(u) e^{-\left(\frac{s}{\alpha}\right)u} du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

cuya ROC.

$Re\left(\frac{s}{\alpha}\right) > a$ ya que $\alpha > 0$.

$\Rightarrow \quad Re(s) > a\alpha$

a) es importante que $\alpha > 0$ pues de otra manera la integral de Laplace podría no converger.

b) si $\alpha < 0$ la región de convergencia se invierte.

c) si $\alpha = 0$, no hay transformada de Laplace.

3. encuentre la solución al siguiente problema de valor inicial.

$$y''-y'=g(t) \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

$$g(t)=\begin{cases}1 & 0<t<3\\ t, & t>3\end{cases}$$

$$y''-y'=1$$

$$\mathcal{L}\{y''-y'=1\}=s^2y(s)-s\cancel{y(0)}_{0}-y'(0)-(sy(s)-\cancel{y(0)}_{0})=\frac{1}{s}$$

$$=(s^2-s)y(s)-1=\frac{1}{s}$$

$$y(s)=\left(\frac{1}{s}+1\right)\frac{1}{s^2-s}=\frac{1}{s^2(s-1)}+\frac{1}{s(s-1)}$$

aplicando la inversa de Laplace.

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}+\frac{1}{s(s-1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right\}=-t-1+e^t+e^t-1$$

$$=-t+2e^t-2 \quad \text{de} \quad 0<t<3$$

para t si $t>3$

$$y''-y'=t.$$

Laplace a ambos lados de la ecuació.

$$s^2y(s)-sy(0)-y'(0)-(sy(s)-y(0))=\frac{1}{s^2}$$

$$y(s)(s^2-s)-sy(0)-y'(0)+y(0)=\frac{1}{s^2}$$

$$y(s)=\left[\frac{1}{s^2}+y(0)(-1+s)+y'(0)\right]\left[\frac{1}{s(s-1)}\right]$$

Puesto que desconocemos las condiciones iniciales haremos lo siguiente.

$$y(s) = \frac{1}{s^3(s-1)} + \frac{y(0)}{s} + \frac{y'(0)}{s(s-1)}$$

$$y(s) = -\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{y(0)}{s} + \frac{y'(0)}{s-1} - \frac{y'(0)}{s}$$

tomando la inversa de Laplace a ambos lados

$$y(t) = -\frac{t^2}{2} - t - 1 + e^t - y(0) + y'(0)e^t - y'(0)$$

así, dada en $0<t<3$ $y(t) = -t + 2e^t - 2$

entonces

$$\lim_{t\to 3^-} -t + 2e^t - 2 = \lim_{t\to 3^+} -\frac{t^2}{2} - t - 1 + e^t - y(0) + y'(0)e^t - y'(0)$$

$$2e^3 - 5 = -\frac{17}{2} + e^3 - y(0) + y'(0)(e^3 - 1)$$

si asumimos que $y(0) = 0$ entonces $y'(0) = \dfrac{e^3 + \frac{7}{2}}{e^3 - 1}$

finalmente

$$y(t) = \begin{cases} -t + 2e^t - 2 & 0<t<3 \\ -\dfrac{t^2}{2} - t + e^t\left(1 + \dfrac{e^3 + 7/2}{e^3-1}\right) - 1 - \dfrac{e^3 + 7/2}{e^3-1} & 3<t \end{cases}$$

5. Demuestre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

donde $F(s) \Longleftrightarrow f(t)$

Dem.

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(s)}{s}e^{st}\,ds.$$

donde $F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau.$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\right)e^{st}\,ds$$

cambiando el orden de integración

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)\left(\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}e^{s(-\tau+t)}\,ds\right)d\tau$$

sabiendo que $\frac{e^{-as}}{s} \Longleftrightarrow u(t-a)$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau.$$

donde $u(t-\tau) = 1$ si $t-\tau \geq 0$

$t \geq \tau$

finalmente

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$