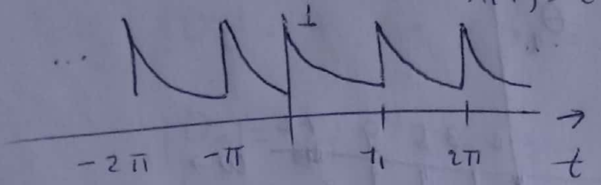
RCFB 15 Montiel Cruz Jorge de Jesús

6.5 encuentre la serie de Fourier exponencial para la siguiente señal.

$x(t) = e^{-t/2}$



$$T_0 = \pi \Rightarrow w_0 = 2$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2nt}$$

donde

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0 \rangle} x(t)\, e^{-j2nt}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2} e^{-j2nt}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{(-\frac{1}{2} - 2jn)t}\, dt = \frac{-1}{(\frac{1}{2} - 2jn)\pi} e^{-(\frac{1}{2}+2jn)t}\Big|_0^{\pi}$$

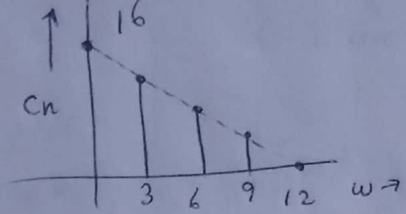
$$= \frac{-2}{(1-4jn)\pi}\left[e^{-(\frac{1}{2}+2jn)\pi} - 1\right] \quad \text{en donde} \quad e^{2jn\pi} = \underbrace{\cos(2n\pi)}_{1\ \forall n \in \mathbb{N}} + j\underbrace{\operatorname{sen} 2n\pi}_{0\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

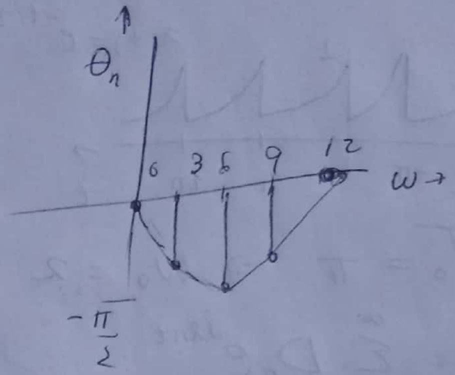
así $\dfrac{-2}{(1-4jn)\pi}\left(e^{-\pi/2} - 1\right) = \dfrac{0.504}{1-4jn}$.

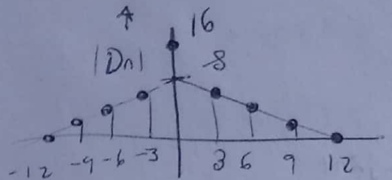
$\therefore$

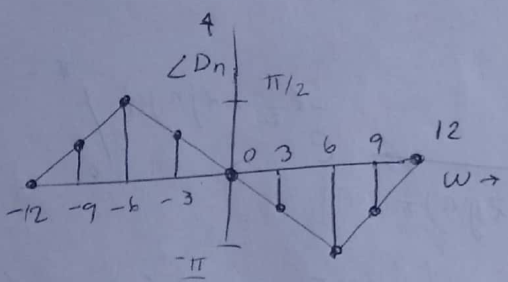
$$x(t) = 0.504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4jn} e^{j2nt}$$

6.6 el espectro de Fourier trigonométrico de cierta señal $x(t)$ se muestra a continuación. Por inspección de este espectro, bosqueje el correspondiente espectro exponencial de Fourier y verifique analíticamente sus resultados.









Para C_n, vemos que. $C_0 = 16$,

valores que caen sobre una recta $-\frac{4}{3}\omega + 16 = C$

así, para $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 6$, $\omega_3 = 9$

$C_1 = 12$; $C_2 = 8$, $C_3 = 4$

Mientras que para θ_n los valores caen en la recta

$\theta = -\frac{\pi}{12}\omega$ $0 < \omega \leq 6$ y $\frac{\pi}{12}\omega - \pi = \theta$ $6 < \omega \leq 12$

así para $\omega = 3, 6, 9$

$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$; $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_3 = -\frac{\pi}{4}$

así $x(t) = 16 + 12\cos(3t - \frac{\pi}{4}) + 8\cos(6t - \frac{\pi}{2}) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{4})$

Scanned by CamScanner

Para la parte del espectro exonencial.

realizamos un análisis similar.

$|D_0| = 16.$

$|D_3| = 6 \rightarrow \angle D_3 = -\frac{\pi}{4}$

$|D_6| = 4 \rightarrow \angle D_6 = -\frac{\pi}{2}$

$|D_9| = 2 \quad \angle D_9 = \frac{-\pi}{4}$

así, para $\omega_3 = \pm 3$, $\omega_6 = \pm 6$ $\omega_9 = \pm 9$

usaremos el conjugado. $(e^{j(\omega t + \phi)}) = e^{j\omega t} e^{j\phi}$

$$\hat{x}(t) = 16 + (6 e^{j3t} e^{-\pi/4} + 6 e^{-j3t} e^{\pi/4}) + 4(e^{j6t} e^{-\pi/2} + e^{-j6t} e^{\pi/2})$$
$$+ 2(e^{j9t} e^{-\pi/4} + e^{-j9t} e^{\pi/4})$$

De los números complejos, sabemos que: $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$

así

$$\hat{x}(t) = 16 + 12\cos(3t - \pi/4) + 8\cos(6t - \pi/2) + 4\cos(9t - \pi/4)$$

$= x(t)$

6.7. encuentre la serie de Fourier exponencial para el tren de impulsos $\delta_{T_0}(t)$ mostrado, y además bosqueje su correspondiente espectro.

Del resultado anterior encuentre la serie de Fourier trigonométrica y bosqueje el espectro trigonométrico

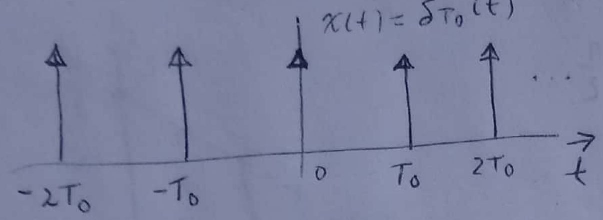


fig (a)

el tren de impulsos mostrado en (a) puede representarse como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

la serie de Fourier exponencial está dada por.

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jnw_0 t} \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Donde

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \delta_{T_0}(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

haciendo el intervalo de integración de $-T_0/2$ a $T_0/2$ y, en ese intervalo, $\delta_{T_0}(t) = \delta(t)$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jnw_0 t} dt$$ usando $$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t) dt = \phi(0)$$

$\Rightarrow D_n = \frac{1}{T_0}$ así

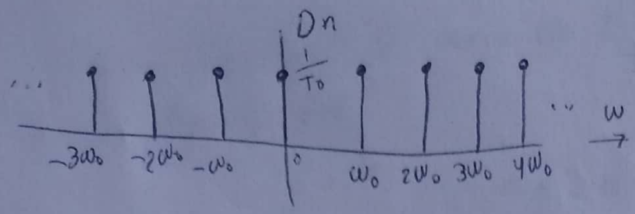
$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnw_0 t}$$

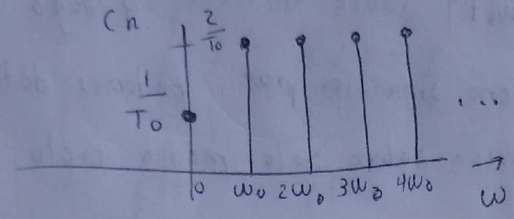
en donde vemos que el espectro de amplitud es constante y además todas las fases son cero

Para la forma trigonométrica

$C_0 = D_0 = \frac{1}{T_0}$; $C_n = 2|D_n| = \frac{2}{T_0}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

$\theta_n = 0$

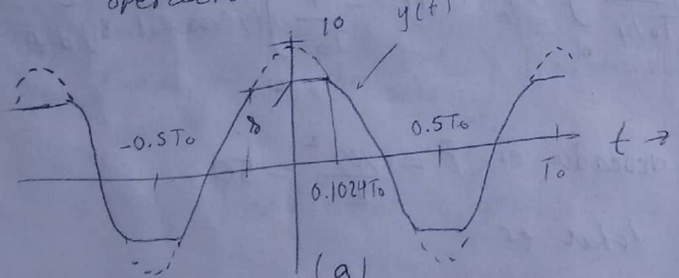


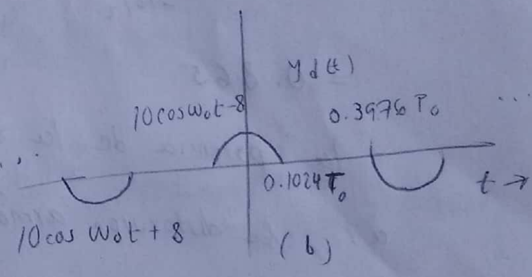


Por lo que podemos expresar.

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0}\left(1 + 2(\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t + \dots)\right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

6.8 la señal de entrada de un amplificador de audio de ganancia 100 está dada por $x(t) = 0.1 \cos \omega_0 t$ así, la salida es $10 \cos \omega_0 t$. Como sea en el amplificador, al ser no lineal a valores altos de amplitud recorta los amplitudes más allá de $\pm 8\,V$ como se muestra en la figura, debemos determinar la distorsión armónica incurrida en esta operación.





la salida $y(t)$ es la señal recortada mostrada en (a), la señal distorsionada se muestra en (b) la cual es la diferencia entre la señal ~~entrada~~ sin distorsión y la señal de salida cuyos periodos son T_0, así pues, podemos describir $y_d(t)$ como sigue.

$$y_d(t) = \begin{cases} 10\cos \omega_0 t - 8 & |t| \leq 0.1024\,T_0 \\ 10\cos \omega_0 t + 8 & \frac{T_0}{2} - 0.1024\,T_0 \leq |t| \leq \frac{T_0}{2} + 0.1024\,T_0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

se observa que $y_d(t)$ es una función par y su valor promedio es 0, así $a_0 = C_0 = 0$ y $b_n = 0$ lo que implica que $C_n = a_n$

y la serie de Fourier para $Y_d(t)$ se puede expresar como

$$y_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\omega_0 t$$

Calculando $a_n = C_n$

al integrar $y_d(t)\cos(n\omega_0 t)$ sobre un ciclo y luego dividiendo por $2/T_0$ pues $Y_d(t)$ tiene simetría par. podemos determinar a_n al integrar la expresión sobre sólo medio ciclo.

$$C_n = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} y_d(t)\cos \omega_0 n t\, dt = \frac{8}{T_0}\int_0^{0.1024T_0} (10\cos\omega_0 t - 8)\cos \omega_0 n t\, dt$$

$$= \frac{20}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(0.6435(n+1))}{n+1} + \frac{\operatorname{sen}(0.6435(n-1))}{n-1}\right] - \frac{32}{\pi}\frac{\operatorname{sen} 0.6435 n}{n}\Bigg]$$

Para la distorsión armónica

Si calculamos la potencia de $Y_d(t)$

$$P_{Yd} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} Yd^2(t)\, dt = \frac{1}{T_0/4}\int_0^{T_0/4} Yd^2(t)\, dt = \frac{4}{T_0}\int_0^{0.1024T_0} (10\cos\omega_0 t - 8)^2 dt$$

$$= 0.865$$

la potencia de la señal deseada es $P = \frac{(10)^2}{2} = 50$

así, la distorsión armónica total es

$$D_{tot} = \frac{0.865}{50} \times 100\% = 1.73\%$$

Scanned by CamScanner