RCFB23 Montiel Cruz Jorge de Jesús

9.7 use la propiedad de inversión tiempo - frecuencia

y $\gamma^n u[n] = \dfrac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\gamma}$ $|\gamma|<1$ para encontrar

$$\gamma^{|n|} = \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos\Omega+\gamma^2}$$

la inversión tiempo frecuencia.

$x[-n] \Leftrightarrow X(-\Omega) \ldots (1)$

$$\text{DTFT}\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{j\Omega m} = X(-\Omega)$$

usando (1)

$$\gamma^{-n}u[-n] = \frac{e^{-j\Omega}}{e^{-j\Omega}-\gamma} \quad |\gamma|<1$$

Podemos expresar a $\gamma^{|n|}$ como la suma de $\gamma^n u[n]$ y $\gamma^{-n}u[-n]$ menos la componente en $n=0$ (la cual es el doble, debido a la suma) así.

$$\gamma^{|n|} = \gamma^n u[n] + \gamma^{-n}u[-n] - \delta[n]$$

Así pues

$$\text{DTFT}\{\gamma^{|n|}\} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\gamma} + \frac{e^{-j\Omega}}{e^{-j\Omega}-\gamma} - 1 = \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos\Omega+\gamma^2} \quad |\gamma|<1$$

9.8 Use $nx[n] \Leftrightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$ y $\gamma^n u[n] \Leftrightarrow \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\gamma}$ $|\gamma|<1$

para encontrar

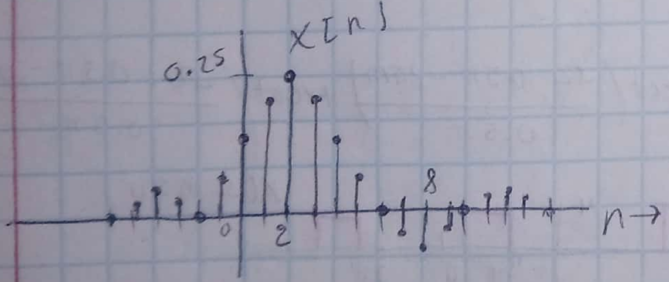
$$n\gamma^n u[n] \Leftrightarrow \frac{\gamma e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-\gamma)^2}$$

así.

$$n\gamma^n u[n] \Leftrightarrow j\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\gamma}\right) = j\left(\frac{(e^{j\Omega}-\gamma)(je^{j\Omega}) - e^{j\Omega}je^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-\gamma)^2}\right)$$

$$= \frac{\gamma e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-\gamma)^2}$$

9.9. encuentre la DTFT de $x[n] = \frac{1}{4}\,\text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2)}{4}\right)$



De problemas anteriores

$$\frac{1}{4}\,\text{sinc}\left(\frac{\pi n}{4}\right) \Leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\Omega-2\pi m}{\pi/2}\right)$$

usando la propiedad de traslación en el tiempo

$$\frac{1}{4}\,\text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2)}{4}\right) \Leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\Omega-2\pi m}{\pi/2}\right) e^{-j2\Omega}$$

9.10

Una señal $x[n] = \text{sinc}\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ modula una portadora $\cos \Omega_c n$ encuentre y bosqueje el espectro y la señal modulada $x[n]\cos \Omega_c n$ para

a. $\Omega_c = \pi/2$

b. $\Omega_c = \frac{7\pi}{8}$

a. para $x[n] = \text{sinc}\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

usando

$$\frac{\Omega_0}{\pi}\text{sinc}(\Omega_0 n) \Leftrightarrow \sum_{K=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\Omega - 2\pi K}{2\Omega_0}\right)$$

encontramos que

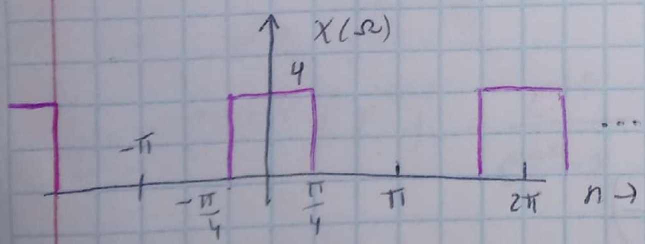
$$X(\Omega) = 4\sum_{K=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\Omega - 2\pi K}{\pi/2}\right)$$

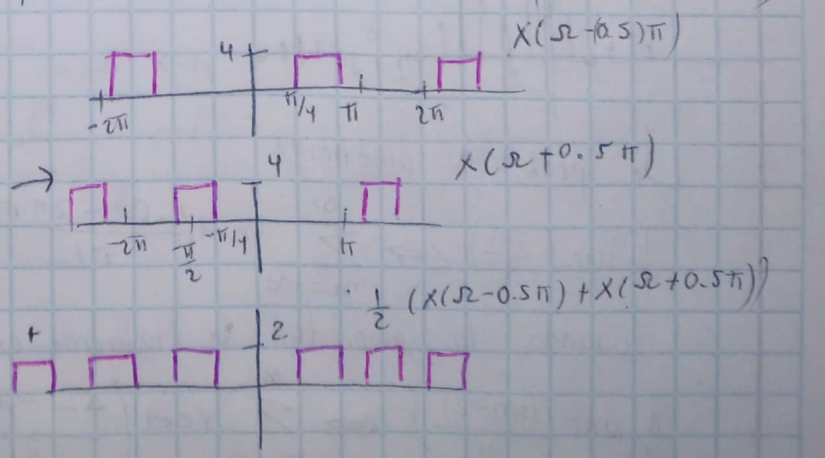
además

$$x[n]\cos(\Omega_0 n) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_c)\right]$$

así.

$$x[n]\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \Longleftrightarrow 2\sum_{K=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\Omega - 0.5\pi - 2\pi m}{0.5\pi}\right) + \text{rect}\left(\frac{\Omega + 0.5\pi - 2\pi m}{0.5\pi}\right)$$

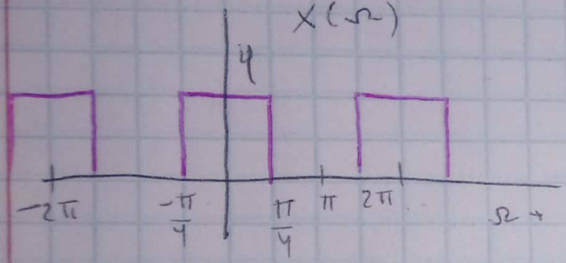


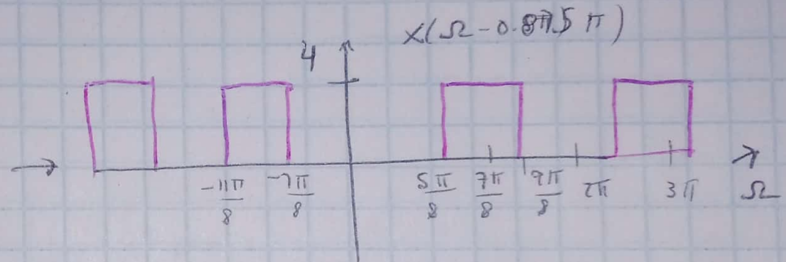


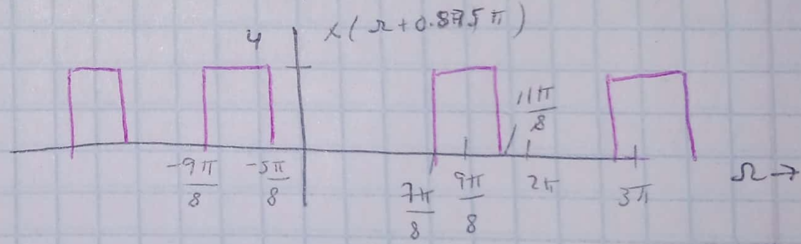
b. para $\Omega_c = \frac{7\pi}{8} = 0.875\pi$

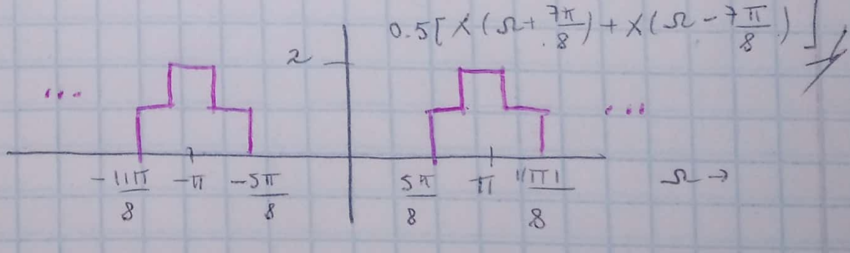
la propiedad de modulación.

$$x[n]\cos\left(\frac{7\pi}{8}n\right) \Longleftrightarrow 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\Omega-0.875\pi-2\pi k}{0.5\pi}\right)+\text{rect}\left(\frac{\Omega+0.875\pi-2\pi k}{0.5\pi}\right)$$









9.11 si $x[n] \iff X(\Omega)$ muestre que.

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \iff \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) + \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1} X(\Omega)$$

Debemos reconocer que la ecuación, en la parte izquierda es igual a $x[n] * u[n]$, pues

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

esto es así debido a que $u[n-k] = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$

usando la propiedad de convolución en el tiempo

$$x_1[n] * x_2[n] \iff X_1(\Omega) X_2(\Omega)$$ y

$$u[n] \iff \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

$$x[n] * u[n] \iff X(\Omega)\left(\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)\right)$$

además por periodicidad.

$$X(0) = X(2\pi k)$$

más aún $X(\Omega)\delta(\Omega - 2\pi k) = X(2\pi k)\delta(\Omega - 2\pi k)$

pero $X(0) = X(2\pi k)$ así.

$= X(0)\delta(\Omega - 2\pi k)$

llegando a que.

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \iff \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) + \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1} X(\Omega)$$

9.12.

Halle la energía de $x[n] = \text{sinc}(\Omega_c n)$ asumiendo que $\Omega_c < \pi$

usando

$$\frac{\Omega_c}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_c n}{2}\right) \iff \sum_{K=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\Omega - 2\pi K}{2\Omega_c}\right)$$

$$\text{sinc}(\Omega_c n) \iff \frac{\pi}{\Omega_c} \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right) \quad |\Omega| \leq \pi$$

usando el Teorema de Parseval.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

$$\Rightarrow \quad E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{\Omega_c^2} \left[\text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right)\right]^2 d\Omega$$

sabemos que $\text{rect}(\Omega/2\Omega_c) = 1$ sobre $|\Omega| \leq \Omega_c$

así pues:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{\Omega_c^2}\right)(2\Omega_c) = \frac{\pi}{\Omega_c}$$