RCF20 Montiel Cruz Jorge de Jesús

7.11 sabemos que.

$$\underbrace{\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)}_{x(t)} \Longleftrightarrow \underbrace{\tau \,\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}_{X(\omega)}$$

además $x(t)$ es igual que $X(\omega)$ si ω es reemplazada por t y $X(-\omega)$ es la misma que $x(t)$ con t reemplazada por $-\omega$ así, la propiedad de dualidad.

$$\underbrace{\tau \,\text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right)}_{x(t)} \Longleftrightarrow \underbrace{2\pi \,\text{rect}\left(\frac{-\omega}{\tau}\right)}_{2\pi X(-\omega)} = 2\pi \,\text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

7.12 encuentre la transformada de Fourier de $e^{at}u(-t)$ y $e^{-a|t|}$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{jw_0 t}\, dt = \frac{1}{jw+a} \quad \text{con } a>0$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{at}u(-t)e^{jw_0 t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{jw_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{jw+a} + \frac{1}{a-jw} = \frac{2a}{a^2+w^2} \quad a>0$$

7.13. encuentre la transformada de Fourier de $e^{-a|t-t_0|}$

por propiedad de traslación en el tiempo.

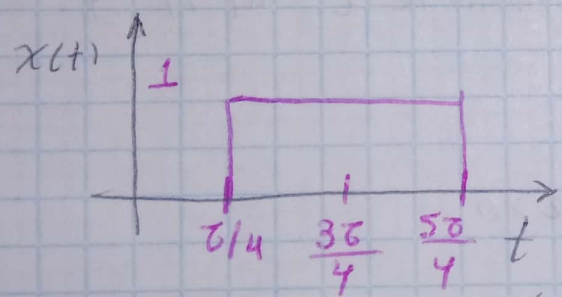
$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t-t_0) \Leftrightarrow X(\omega)\, e^{-j\omega_0 t_0}$$

así pues, usando el resultado del problema anterior.

$$e^{-a|t-t_0|} \Longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}\, e^{-j\omega_0 t_0}$$

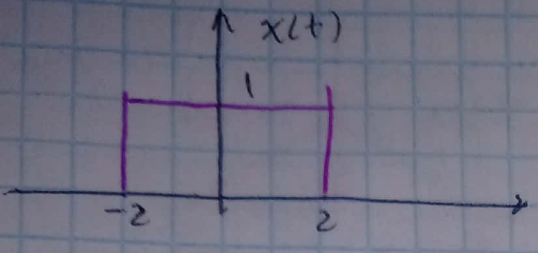
7.14. encuentre la transformada de Fourier del pulso compuerta mostrado.

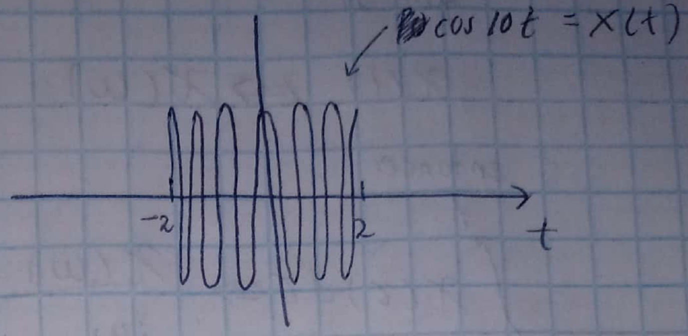


la señal anterior es la función $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ retrasada por $\frac{3\tau}{4}$ segundos así, tenemos que su transformada de Fourier.

$$X(\omega) \Longleftrightarrow \tau\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega_0\left(\frac{3\tau}{4}\right)}$$

7.15. encuentre y grafique la transformada de Fourier de la señal modulada $x(t) \times \cos 10t$ en donde $x(t)$ es el pulso compuerta $rect(t/4)$ como se ilustra a continuación





De problemas anteriores

$$rect\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau\, sinc\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right) \text{ así} \rightarrow rect\left(\frac{t}{4}\right) \Leftrightarrow 4\, sinc(2\omega)$$

usando

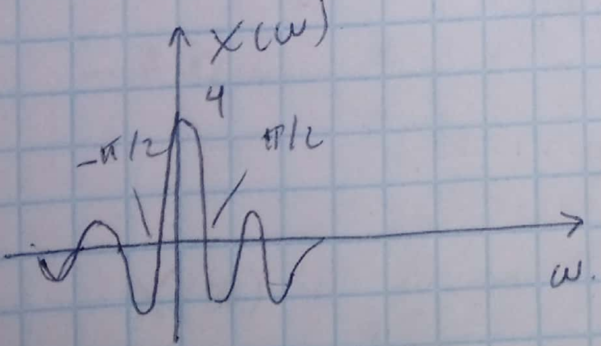
$$x(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left[x(t)e^{j\omega_0 t} + x(t)e^{-j\omega_0 t}\right]$$

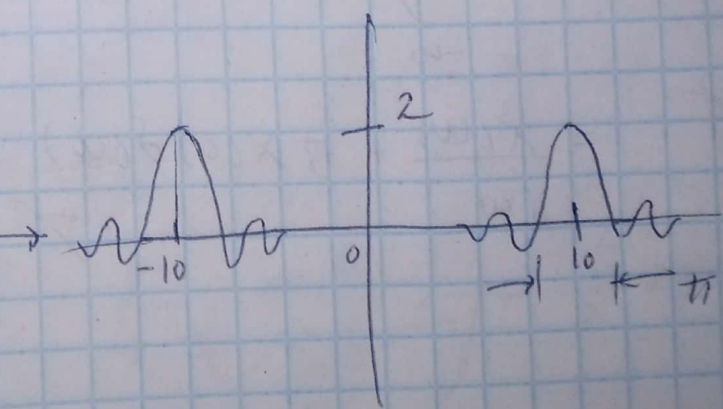
entonces

$$x(t)\cos 10t \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega+10) + X(\omega-10)\right]$$

pero $X(\omega) = 4\, sinc(2\omega)$ así

$$x(t)\cos 10t \Leftrightarrow 2\, sinc\left[2(\omega+10)\right] + 2\, sinc(2(\omega-10))$$





7.16.

Use la propiedad de convolución en el tiempo para probar que si

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

por

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \leq t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

implica que.

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

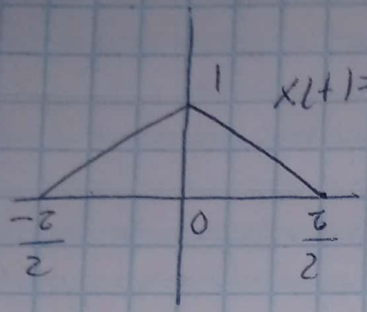
usando dicha propiedad.

$$x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$$

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow X(\omega)\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

$$= \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

7.17 Use la diferenciación en el tiempo para encontrar la transformada de Fourier del triángulo $\Delta(t/\tau)$ mostrado.



Para encontrar la transformada de Fourier derivamos continuamente (sucesivamente) $x(t)$, así $\frac{dx}{dt}$ serán constantes con discontinuidades en cierto punto

mientras que $\frac{d^2}{dt^2}x$ es una secuencia de impulsos

así:

$$\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{2}{\tau}\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \ldots (1)$$

usando la propiedad

$$\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow (j\omega)^2 X(\omega) = -\omega^2 X(\omega)$$

además, usando $\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$ (2)

tomando la transformada de Fourier a ambos lados de (1) y usando (2) obtenemos

$$-\omega^2 X(\omega) = \frac{2}{\tau}\left[e^{+j\omega\frac{\tau}{2}} - 2 + e^{-j\omega\tau/2}\right] = \frac{4}{\tau}\left(\cos\frac{\omega\tau}{2} - 1\right)$$

$$= -\frac{8}{\tau}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$X(\omega) = \frac{8}{\tau\omega^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\frac{\omega\tau}{4}}\right)^2 = \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$