Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

Análisis de señales y sistemas
Evaluación (EE05)
Jueves 22/noviembre/2018
Tiempo: 80 minutos

Nombre: Montiel Cruz Jorge de Jesús
Grupo: 2MV1
Dr. Rafael Martínez Martínez

Este examen consta de 8 páginas (incluyendo esta portada) y 6 problemas. Verifique si falta alguna página. Escriba los datos solicitados en la parte superior y escriba sus iniciales en la parte superior de cada hoja por si llegarán a separarse las hojas.

Se requiere que muestre el trabajo realizado en cada problema de este examen. Las siguientes normas se aplicarán:

- **Cada problema/ejercicio debe tener** procedimiento ordenado y completo que justifique adecuadamente la respuesta anotada.
- **Si falta el procedimiento** o este no justifica la respuesta anotada entonces el problema vale 0 puntos aunque la respuesta sea correcta.
- **Un examen sucio y/o en desorden** puede provocar 10 puntos menos en la calificación del examen.
- Cualquier **intento de fraude**, por ejemplo compartir o copiar soluciones, amerita un reporte en subdirección académica y la cancelación inmediata de la evalaución.

No escriba en la tabla de la derecha.

Problema	Puntos	Calificación
1	10	10
2	10	10
3	10	10
4	40	40
5	10	3
6	20	20
Total:	100	93

1. $\boxed{\text{10 puntos}}$

10

Se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b\delta(t), \quad y(0) = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Mediante la transformada de Laplace muestra que

$$y(t) = be^{-at}u(t)$$

Nota

En términos de sistemas: Un sistema de primer orden modelado con la ecuación diferencial anterior, cuya entrada es un impulso y condición inicial cero, presenta la solución (respuesta o salida) al impulso deducida en este punto.

$\dot{y}(t) + ay(t) = b\,\delta(t)$; $y(0) = 0$

por Laplace

$\mathcal{L}\{\dot{y}(t) + ay(t) = b\,\delta(t)\}$

$= sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0} + aY(s) = b1$

$Y(s)(s+a) = b$

$Y(s) = \frac{b}{s+a} \rightarrow$ tomando la inversa de Laplace.

$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s+a}\right\} = b\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\}$

$y(t) = b e^{-at} u(t)$

JJMC

2. 10 puntos

10

Se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bx(t), \quad y(0) = y_0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Mediante la transformada de Laplace muestra que la solución para $t \geq 0$ es

$$y(t) = y_0 e^{-at}u(t) + x(t) * be^{-at}u(t) = y_0 e^{-at}u(t) + b\int_0^t x(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau$$

Nota

En términos de sistemas: Un sistema de primer orden modelado con la ecuación diferencial anterior, cuya entrada es conocida y una condición inicial dada, presenta la solución (respuesta o salida) deducida en este punto. Se puede observar que una parte de la solución es una convolución de la entrada con la respuesta al impulso del sistema deducida en el punto anterior.

$\dot{y}(t) + ay(t) = bx(t), \; y(0) = y_0$

aplicando Laplace a ambos lados de la ecuación

$sy(s) - \overset{y_0}{\cancel{y(0)}} + ay(s) = bX(s)$

$y(s)(s+a) = bX(s) + y_0$

$y(s) = \dfrac{bX(s) + y_0}{s+a}$

tomando la inversa de Laplace a ambos lados

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{y_0}{s+a} + \dfrac{bX(s)}{s+a} \right\} = y_0 e^{-at} u(t) + \ldots$

$\ldots \mathcal{L}^{-1}\left\{ bX(s) \dfrac{1}{s+a} \right\}$ usando $x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s) X_2(s)$

$= y_0 e^{-at} u(t) + x(t) * be^{-at} u(t)$

$y(t) = y_0 e^{-at} u(t) + b\int_0^t x(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau$

10

3. 10 puntos

Se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t), \quad y(0) = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}^+$.

a) Mediante transformada de Laplace encuentra $y(t)$

b) Mediante el teorema del valor final (si es posible) muestra que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{b}{a}$$

c) Muestra que

$$y\left(\tfrac{1}{a}\right) \approx 0.63\tfrac{b}{a} \quad y\left(\tfrac{2}{a}\right) \approx 0.86\tfrac{b}{a} \quad y\left(\tfrac{3}{a}\right) \approx 0.95\tfrac{b}{a}$$
$$y\left(\tfrac{4}{a}\right) \approx 0.98\tfrac{b}{a} \quad y\left(\tfrac{5}{a}\right) \approx 0.99\tfrac{b}{a}$$

d) Con la información anterior construye la gráfica de $y(t)$

Nota

En términos de sistemas: Un sistema de primer orden modelado con la ecuación diferencial anterior, cuya entrada es un escalón y condición inicial es cero, presenta la solución (respuesta o salida) al escalón que se ha deducido. La salida tiende a el valor final b/a. La constante $\tau = 1/a$ recibe el nombre de constante de tiempo del sistema, se puede observar que cuando ha transcurrido una constante de tiempo la salida alcanza el 63 % de su valor final así como también se observa que despues de 5 constantes de tiempo la salida ha alcanzado el 99 % de su valor final.

$\dot{y}(t) + ay(t) = b\,u(t); \quad y(0) = 0$

aplicando Laplace a ambos lados de la ecuación.

$sy(s) - y(0) + ay(s) = \frac{b}{s} \rightarrow y(s)(s+a) = \frac{b}{s}$

$y(s) = \frac{b}{s(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a}$

$b = A(s+a) + Bs$

$A + B = 0$

$Aa = b \rightarrow A = \frac{b}{a}; \; B = \frac{-b}{a} \quad y(s) = \frac{\frac{b}{a}}{s} - \frac{\frac{b}{a}}{s+a}$

aplicando inversa de Laplace

$y(t) = \frac{b}{a}u(t) - \frac{b}{a}e^{-at}u(t)$

$y(t) = \frac{b}{a}u(t) - \frac{b}{a}e^{-at}u(t)$

cont.

3. JJMC.

b.

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{b}{a}$$

$$¿\, x(\infty) \iff \lim_{s \to 0} s\,x(s) = \frac{b}{a}\,?$$

$$s\,y(s) = \frac{b}{a}\frac{s}{s} - \frac{b}{a}\frac{s}{s+a} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\frac{s}{s+a}$$

$$\lim_{s \to 0} s\,y(s) = \lim_{s \to 0} \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\frac{s}{s+a} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{b}{a}$$

c)

$$y\left(\tfrac{1}{a}\right) = \frac{b}{a}\,u\left(\tfrac{1}{a}\right) - \frac{b}{a}\,e^{-a\frac{1}{a}}\,u\left(\tfrac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-1} = (1-e^{-1})\frac{b}{a} \approx 0.63\,\frac{b}{a}$$

$$y\left(\tfrac{2}{a}\right) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-a\frac{2}{a}} = (1-e^{-2})\frac{b}{a} \approx 0.86\,\frac{b}{a}$$

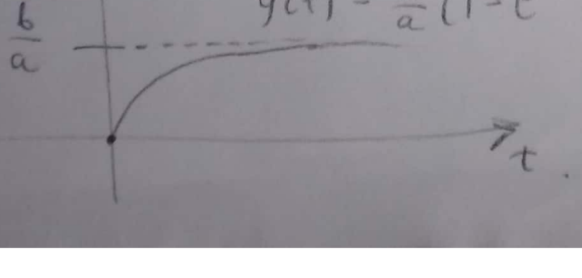
$$y\left(\tfrac{3}{a}\right) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-a\frac{3}{a}} = (1-e^{-3})\frac{b}{a} \approx 0.95\,\frac{b}{a}$$

$$y\left(\tfrac{4}{a}\right) = (1-e^{-4})\frac{b}{a} \approx 0.98\,\frac{b}{a}\ ;\ y\left(\tfrac{5}{a}\right) = (1-e^{-5})\frac{b}{a} \approx 0.99\,\frac{b}{a}$$

en general: $y\left(\frac{n}{a}\right) = (1-e^{-n})\frac{b}{a}\ ;\ n \geq 0$

d)

$$y(t) = \frac{b}{a}(1-e^{-at})\,u(t)$$



JJMC

4. 40 puntos

40

El modelo matemático del circuito para $0 \leq t$ es:

$$L_1\frac{dy_1(t)}{dt} + (R_1 + R_2)\,y_1(t) - R_2 y_2(t) + M\frac{dy_2(t)}{dt} = 10u(t)$$

$$M\frac{dy_1(t)}{dt} - R_2 y_1(t) + L_2\frac{dy_2(t)}{dt} + (R_2 + R_3)\,y_2(t) = 0$$

con condiciones iniciales $y_1(0) = 0$ y $y_2(0) = 0$. Encuentra $y_1(t)$, $y_2(t)$, si $R_1 = 2$, $R_2 = R_3 = 1$, $M = 1$, $L_1 = 2$, $L_2 = 3$, cada una de las constantes con las unidades correspondientes.

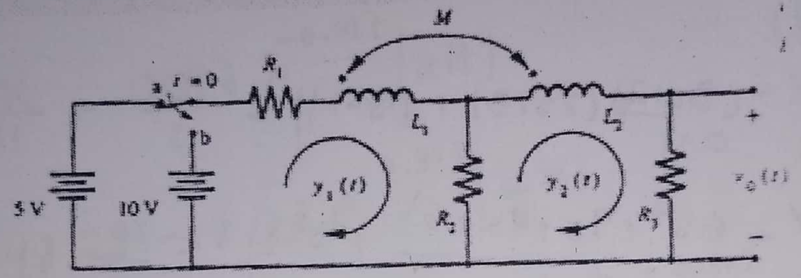


Figura 1: Circuito

Nota

En términos de sistemas: Un sistema con dos salidas y una entrada es modelado con las ecuaciones diferencial anteriores, la entrada es 10 veces un escalón y las condiciones iniciales son cero, presenta la solución (respuesta o salida) que se ha deducido.

$2\dot{y}_1 + 3y_1 - y_2 + \dot{y}_2 = 10u(t).$ $\quad y_1(0) = y_2(0) = 0$

$\dot{y}_1 - y_1 + 3\dot{y}_2 + 2y_2 = 0.$

aplicando Laplace a ambos lados de ambas ecuaciones.

$2sY_1(s) + 3Y_1(s) - Y_2(s) + sY_2(s) = \frac{10}{s} \quad \ldots (1)$

$sY_1(s) - Y_1(s) + 3sY_2(s) + 2Y_2(s) = 0 \quad \ldots (2)$

$Y_1(s)(2s+3) + Y_2(s)(s-1) = \frac{10}{s} \quad \ldots (3)$

$Y_1(s)(s-1) + Y_2(s)(3s+2) = 0 \quad \ldots (4)$

de (4)

$$Y_1(s) = \frac{-Y_2(s)(3s+2)}{(s-1)} \quad \ldots(6)$$

en (5)

$$\frac{-Y_2(s)(3s+2)}{(s-1)}(2s+3) + Y_2(s)(s-1) = \frac{10}{s}$$

$$Y_2(s)\left(-\frac{(3s+2)}{s-1}(2s+3) + (s-1)\right) = \frac{10}{s}$$

$$Y_2(s)\left(\frac{-(6s^2+9s+4s+6)}{s-1} + s-1\right) = \frac{10}{s}$$

$$Y_2(s)\left(\frac{-6s^2-13s+6}{s-1} + s-1\right) = \frac{10}{s}$$

$$Y_2(s)\left(\frac{-6s^2-13s+6+s^2-2s+1}{s-1}\right) = \frac{10}{s}$$

$$\Rightarrow Y_2(s)\left(\frac{-5s^2-15s+7}{s-1}\right) = \frac{10}{s}; \quad a = \frac{-15+\sqrt{365}}{10}$$

$$Y_2(s) = \frac{10}{s}\frac{(s-1)}{(s-a)(s+a)} = 10\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s-a} + \frac{C}{s+a}\right)$$

$s=0$

$$A = \frac{10(-1)}{(-a)(a)} = \frac{+10}{a^2}$$

$$-2a(-a)$$

$$2a^2$$

$$B \overset{s=a}{=} \frac{10(a-1)}{a(2a)} = \frac{10(a-1)}{2a^2} = 5\frac{(a-1)}{a^2} = B$$

$$C \overset{s=-a}{=} \frac{10(-a-1)}{-2a^2} = -5\frac{(a+1)}{a^2}$$

$$y_2(t) = \frac{10}{a^2}u(t) + \frac{5(a-1)}{a^2}e^{at}u(t) - \frac{5(a+1)}{a^2}e^{-at}u(t)$$

$$y_2(t) \cong 59.34\,u(t) - 17.5\,e^{at}u(t) - 41.85\,e^{-at}u(t)$$

C.2

Montiel Cruz Jorge de Jesús

c. 2

$$Y_2(s) = \frac{10}{s}\,\frac{(s-1)}{(s-a)(s+a)} \quad \text{en } (0)$$

$$Y_1(s) = \frac{10}{s}\,\frac{(s-1)}{(s-a)(s+a)}\,\frac{(3s+2)}{(s-1)} = \frac{10}{s}\left(\frac{3s+2}{s+a}\right)$$

descomponiendo en fracciones parciales.

$$Y_1(s) = \frac{2000}{41s} - \frac{18.78}{s+0.41}$$

tomando la inversa de Laplace

$$y_1(t) = \left(\frac{2000}{41} - 18.78\,e^{-0.41t}\right)u(t).$$

$$y_1(t) = \left(48.78 - 18.78\,e^{-0.41t}\right)u(t)$$

$$y_2(t) = \left(59.34 - 17.5\,e^{0.41t} - 41.85\,e^{-0.41t}\right)u(t)$$

ok.

J J.M C

5. 10 puntos

3

En varias aplicaciones en el diseño y análisis de señales, se usa la siguiente clase de señales

$$\phi_n(t) = e^{-t/2} L_n(t) u(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$$

determine la transformada de Laplace de $\phi_n(t)$

$$\phi_n(s) = \mathcal{L}\{e^{-t/2} L_n(s)\}$$

$$e^{-t/2} L_0(t) = e^t (t^0 e^{-t}) = 1\, e^{-t/2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

$$e^{-t/2} L_1(t) = \left(e^t \frac{d}{dt}(t^2 e^{-t})\right) e^{-t/2} \Rightarrow e^{t/2} \frac{d}{dt}(t^2 e^{-t}) =$$

$$e^{-t/2} L_2(t) = \left(\frac{e^t}{2!} \frac{d^2}{dt^2}(t^2 e^{-t})\right) e^{-t/2} \Rightarrow \frac{e^{t/2}}{2!} \frac{d^2}{dt^2}(t^2 e^{-t})$$

$$e^{-t/2} L_3(t) = \left(\frac{e^t}{3!} \frac{d^3}{dt^3}(t^3 e^{-t})\right) e^{-t/2} \Rightarrow \frac{e^{t/2}}{3!} \frac{d^3}{dt^3}(t^3 e^{-t})$$

$$\|$$

6. 20 puntos

20

Un filtro pasa-todo esta descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = -\frac{dx(t)}{dt} + 10x(t)$$

suponga que $y(0^-) = 0$, $x(0^-) = 0$

a) Encuentre $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

b) Encuentre $H(j\omega)$

c ~~b)~~ Encuentre $||H(j\omega)||$

d ~~c)~~ Encuentre $\angle H(j\omega)$

e ~~d)~~ Para este sistema (BIBO-estable) se sabe que cuando $x(t) = Acos(\omega t + \theta)$, la salida satisface

$$y_{ss}(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = ||H(j\omega)||Acos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega))$$

Esta parte de la solución se llama respuesta en estatado estacionario. Encuentre y_{ss} si

i) $x(t) = cos(100t)$

iii) $x(t) = cos(t)$

aplicando Laplace a la ecuación diferencial

$sy(s) + 10y(s) = -s x(s) + 10x(s)$

$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$

$y(s)(s+10) = x(s)(10-s)$

$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{10-s}{10+s} = H(s)$

b) $H(j\omega) = \frac{10-j\omega}{10+j\omega}$

c) $||H(j\omega)|| \Rightarrow$

$\frac{10-j\omega}{10+j\omega} = \frac{(10-j\omega)(10-j\omega)}{100+\omega^2}$

$= (100 - 10j\omega - 10j\omega - \omega^2) / 100+\omega^2$

$= \frac{100 - 20j\omega - \omega^2}{100+\omega^2} \Rightarrow ||H(j\omega)|| = \frac{\sqrt{(100-\omega^2)^2 + (20\omega)^2}}{100+\omega^2}$

Scanned by CamScanner

Montiel Cruz Jorge
de Jesús 2MV1

6. d)

$$\angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{Im\{H(j\omega)\}}{Re\{H(j\omega)\}}\right)$$

$$H(j\omega) = \frac{100-\omega^2}{100+\omega^2} - \frac{20\omega j}{100+\omega^2}$$

$$Im\{H(j\omega)\} = \frac{-20\omega}{100+\omega^2}$$

$$Re\{H(j\omega)\} = \frac{100-\omega^2}{100+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{\frac{-20\omega}{100+\omega^2}}{\frac{100-\omega^2}{100+\omega^2}}\right)$$

$$= \arctan\left(-\frac{20\omega}{100-\omega^2}\right)$$

$$\angle H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{20\omega}{100-\omega^2}\right)$$

e) y_{ss} si

i) $x(t) = \cos 100t$

iii) $x(t) = \cos t$

si $x(t) = A\cos(\omega t + \theta) \rightarrow$

$$y_{ss}(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \|H(j\omega)\| A\cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega))$$

$x(t) = \cos 100t$. $\theta = 0$. $\omega = 100$.
$A = 1$

$$y_{ss}(t) = \cos(100t + 11.42°)$$

ii) $x(t) = \cos t$ $\theta = 0$ $\omega = 1$.
$A = 1$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = \cos(t - 11.42°)$$