Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

Análisis de señales y sistemas
Evaluación escrita (EE01)
13 de septiembre de 2018
Tiempo: 85 minutos

Nombre: Montiel Cruz Jorge de Jesús
Grupo: 2MV1
Dr. Rafael Martínez Martínez

Este examen consta de 10 páginas (incluyendo esta portada) y 6 problemas. Verifique si falta alguna página. Escriba los datos solicitados en la parte superior y escriba sus iniciales en la parte superior de cada hoja por si llegarán a separarse las hojas.

Puede utilizar formulario y calculadora no programable en este examen.

Se requiere que muestre el trabajo realizado en cada problema de este examen. Las siguientes normas se aplicarán:

- **Cada problema/ejercicio debe tener** procedimiento ordenado y completo que justifique adecuadamente la respuesta anotada.
- **Si falta el procedimiento** o este no justifica la respuesta anotada entonces el problema vale 0 puntos aunque la respuesta sea correcta.
- **No puede** utilizar ningún dispositivo electrónico al menos que se indique lo contrario
- **Un examen sucio y/o en desorden** puede provocar 10 puntos menos en la calificación del examen.
- Cualquier **intento de fraude** amerita un reporte en subdirección académica.

No escriba en la tabla de la derecha.

Problema	Puntos	Calificación
1	25	10
2	10	10
3	10	0
4	10	5
5	20	0
6	25	20
Total:	100	55

Scanned by CamScanner

1. 20

Se tiene la señal

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) 10 puntos

10

Bosqueje la gráfica de $h(t) = f(\frac{1}{\pi}t - 1) + f(-\frac{1}{\pi}t + 3)$ y exprese analíticamente a $h(t)$ por secciones

$f(\frac{1}{\pi}(t-\pi)) + f(\frac{-1}{\pi}(t-3\pi))$

$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

$m_1 = \frac{1}{\pi}$; $y_a - y_1 = m_1(t - t_1)$

$m_2 = -\frac{1}{\pi}$; $y_b - y_1 = m_2(t - t_1)$

$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}t - 1 & \pi \leq t \leq 2\pi \\ -\frac{1}{\pi}t + 3 & 2\pi < t \leq 3\pi \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

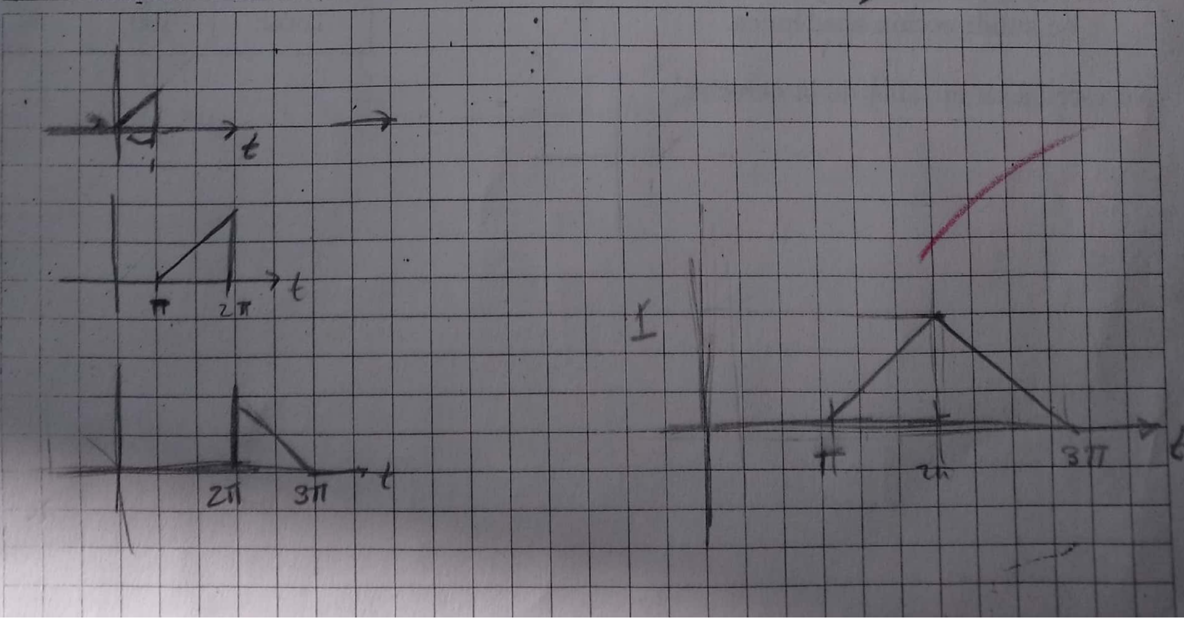
$y_a = \frac{1}{\pi}(t - 2\pi) + 1$

$y_a = \frac{t}{\pi} - 1$

$y_b = \frac{-1}{\pi}(t - 2\pi) + 1$

$= -\frac{1}{\pi}t + 3$

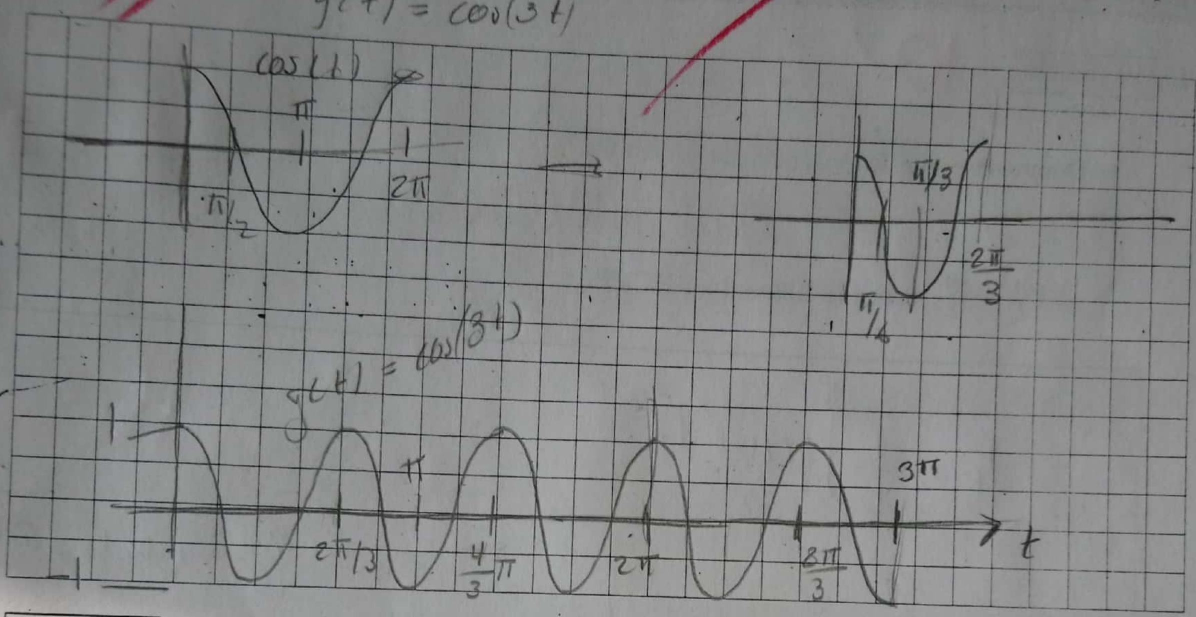
$u - 1$



(b) 5 puntos

Bosqueje la gráfica de $g(t) = cos(3t)$ entre 0 y 3π

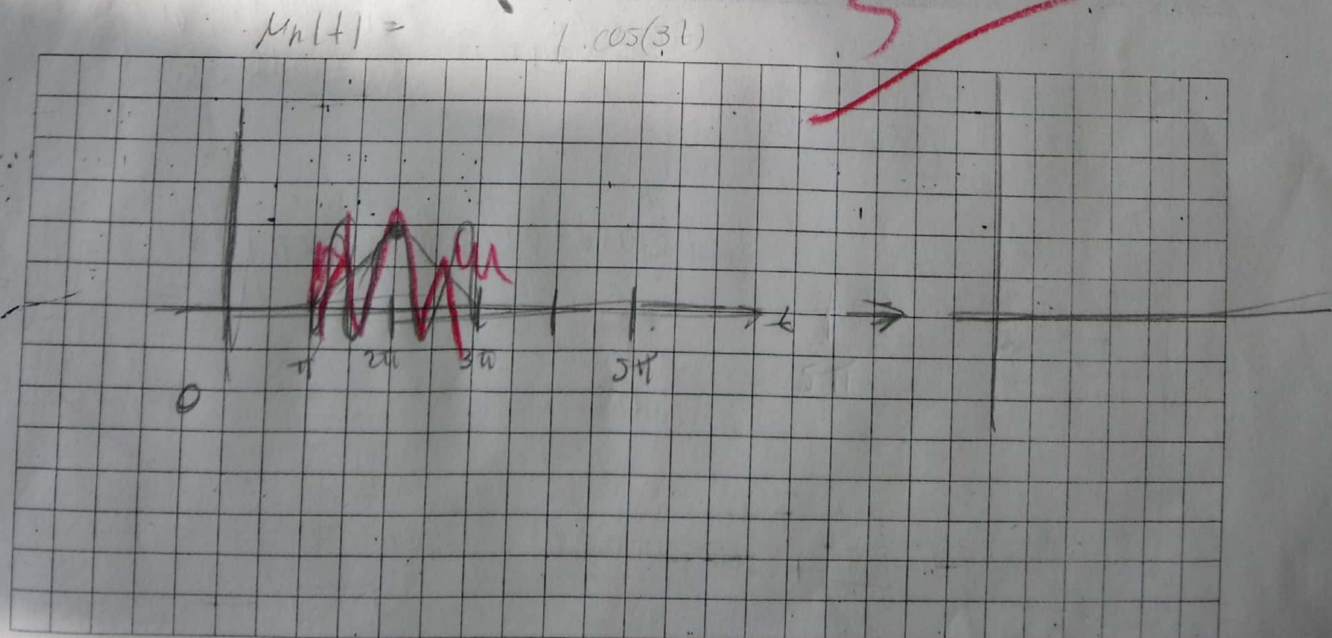
5/



(c) 10 puntos

Bosqueje la gráfica de $M_h(t) = h(t)g(t)$ entre 0 y 5π. Como ayuda para bosquejar la gráfica observe que $-1 \leq cos(3t) \leq 1$, entonces $-h(t) \leq h(t)cos(3t) \leq h(t)$, así $-h(t) \leq M_h(t) \leq h(t)$.

5



Nota: Se dice que la señal $M_h(t)$ es la señal modulada en amplitud de la señal $h(t)$ con portadora $g(t)$

2. 10 puntos 10

Demuestre que la potencia de la señal

$$f(t) = Ccos(\omega t + \phi)$$

es $P_f = \frac{C^2}{2}$, como lo hizo en su RCFB01.

$$P_f = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \|f(t)\|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int^{T_0} \| C\cos(\omega t + \phi)\|^2 dt$$ donde $T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega T_0 = 2\pi$

$$\Rightarrow P_f = \frac{1}{T_0}\int_0^{T} C^2 \cos^2(\omega t + \phi)\, dt = \frac{C^2}{T_0}\int_0^{T_0} \cos^2(\omega t + \phi)\, dt$$

$u = \omega t + \phi$ / $t = 0$ $u = \phi$

$du = \omega dt$ / $t = T_0$ $u = \omega T_0 + \phi$

$$\frac{C^2}{T_0}\frac{1}{\omega}\left(\frac{u}{2} + \frac{sen\, 2u}{4}\right)\Bigg|_{\phi}^{\omega T_0 + \phi}$$

$$\frac{C^2}{T_0}\frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega T_0 + \cancel{\phi}}{2} + \frac{sen(2(\omega T_0 + \phi))}{4} - \cancel{\frac{\phi}{2}} - \frac{sen(2\phi)}{4}\right)$$

$$\frac{C^2}{T_0 \omega}\left[\frac{\omega T_0}{2} + \frac{sen(4\pi + 2\phi)}{4} - \frac{sen(2\phi)}{4}\right]$$

$$\frac{C^2}{T_0 \omega}\left[\frac{\omega T_0}{2} + \frac{\cancel{sen(4\pi)\cos(2\phi)} + \cos(4\pi)sen(2\phi)}{4} - \frac{sen\, 2\phi}{4}\right]$$

$$\frac{C^2}{T_0 \omega}\left[\frac{\omega T_0}{2} + \cancel{\frac{sen 2\phi}{4}} - \cancel{\frac{sen 2\phi}{4}}\right] = \frac{C^2}{2}$$

3. $\boxed{\text{10 puntos}}$

0

Demuestre que la potencia de la señal

$$f(t) = C_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

es $P_f = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2}$ siempre y cuando $\omega_1 \neq \omega_2$, como lo hizo en su RCFB01.

$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \Big[C_1^2 \cos^2(\omega_1 t+\phi_1) + C_2^2\cos^2(\omega_2 t+\phi_2) + 2C_1C_2\cos(\omega_1 t+\phi_1)\cos(\omega_2 t+\phi_2)\Big]dt$$

$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\Big[\int_0^T C_1^2\cos^2(\omega_1 t+\phi_1)dt + C_2^2\int_0^T\cos^2(\omega_2 t+\phi_2)dt + 2C_1C_2\int_0^T \cos(\omega_2 t+\phi_2)\cos(\omega_1 t+\phi_1)\,dt\Big]$$

Pero $\frac{1}{T}\int_0^T C_1^2\cos^2(\omega_1 t+\phi_1)dt = \frac{C_1^2}{2}$ & $\frac{1}{T}\int_0^T C_2^2\cos^2(\omega_2 t+\phi_2)dt = \frac{C_2^2}{2}$

$$\Rightarrow P_f = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T 2C_1C_2\cos(\omega_1 t+\phi_1)\cos(\omega_2 t+\phi_2)dt$$

4. 10 puntos

5

Deduzca una expresión para la potencia de la señal

$$f(t) = C_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

si $\omega_1 = \omega_2$

$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_1^2 \cos^2(\omega t + \phi_1) + C_2^2 \cos^2(\omega t + \phi_2) + 2C_1C_2 \cos(\omega t + \phi_1) \cdot \cos(\omega t + \phi_2)\, dt$$

$$\frac{C_1^2}{2} \qquad \frac{C_2^2}{2}$$

$$P_f = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} + \lim_{T\to\infty} \int_0^T 2C_1C_2 \cos(\omega t + \phi_1)\cos(\omega t + \phi_2)\, dt$$

$$* \ \omega T_0 = 2\pi$$

$$u = \omega t + \phi_1 \quad 2\pi + \phi_1$$

$$\omega t = u - \phi_1 \rightarrow \frac{1}{\omega}\int_{\phi_1} 2C_1C_2 \cos(u)\cos(u - \phi_1 + \phi_2)\, du$$

$$dt = \frac{du}{\omega}$$

$$si \quad \phi_1 = \phi_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega} 2C_1C_2 \left(\frac{2\pi + \cancel{\phi_1}}{\cancel{2}} + \cancel{\frac{sen(2(2\pi + \phi_1))}{4}} - \cancel{\frac{\phi}{2}} - \cancel{\frac{sen(2(2\pi + \phi_1))}{4}} \right.$$

$$\Rightarrow P_f = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{\omega T_0}} \cancel{2}C_1C_2 \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2}} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} + C_1C_2$$

si $\phi_1 = \phi_2$
y $\omega_1 = \omega_2$

0

cos(no)

5. $\boxed{\text{20 puntos}}$

Supongamos que tenemos una señal

$$f(t) = A_1cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2cos(\omega_2 t + \theta_2) \tag{1}$$

con $\theta_i, A_i \in \mathbb{R}$ y $\omega_1 \neq \omega_2 \in \mathbb{R}^+$. Queremos saber si existe $T > 0$ de tal manera que

$$f(t) = f(t+T) \tag{2}$$

Para esto procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f(t+T) &= A_1cos(\omega_1(t+T) + \theta_1) + A_2cos(\omega_2(t+T) + \theta_2) \\ &= A_1cos(\omega_1 t + \theta_1 + \omega_1 T) + A_2cos(\omega_2 t + \theta_2 + \omega_2 T) \\ &= A_1cos(\omega_1 t + \theta_1)cos(\omega_1 T) - A_1sin(\omega_1 t + \theta_1)sin(\omega_1 T) \\ &+ A_2cos(\omega_2 t + \theta_2)cos(\omega_2 T) - A_2sin(\omega_2 t + \theta_2)sin(\omega_2 T) \end{aligned}$$

Para satisfacer la ecuación (1) necesariamente

$$\begin{aligned} cos(\omega_1 T) &= 1 \qquad & cos(\omega_2 T) &= 1 \\ sen(\omega_1 T) &= 0 \qquad & sen(\omega_2 T) &= 0 \end{aligned}$$

observemos que para esto basta que

$$\omega_1 T = 2\pi m_1,\ m_1 \in \mathbb{Z}^+ \qquad \omega_2 T = 2\pi m_2,\ m_2 \in \mathbb{Z}^+ \tag{3}$$

al despejar T e igualar las dos ecuaciones anteriores se tiene que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

Entonces para que la señal $f(t)$ sea periódica se necesita que ω_1/ω_2 sea un número racional, por las condiciones de m_1 y m_2. Una vez que esto se verifique se puede pensar al cociente de las frecuencias como $\omega_1/\omega_2 = p/q$, entonces si existirá el periodo buscado y sería igual a

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_1}p = \frac{2\pi}{\omega_2}q$$

Cuando esto sucede decimos que las señales están relacionadas armónicamente, cuya frecuencia fundamental es $\omega_0 = 2\pi/T_0$ es decir ω_1 y ω_2 son múltiplos de ω_0 como muestra la ecuación anterior.

i) Calcula el periodo de la siguiente señal en caso de ser posible, así como la frecuencia fundamental

Nota 1. El mismo análisis es valido si ambas funciones son senos o si alguna es seno y otra es coseno.

$$x(t) = -2sen(2\sqrt{3}t + \theta) - 2sen(\sqrt{3}t + \phi)$$

i) ¿La siguiente señal es periódica?, de ser así, ¿Cuál es su frecuencia fundamental?

Nota 2. Se puede extender el resultado a la cantidad que se desee de sumas de funciones senos y cosenos de la siguiente manera, se tiene que comprobar la condición de división racional de las frecuencias para cualquier pareja y con esto se garantiza la periodicidad. La frecuencia fundamental será el número más grande para el cual todas las frecuencias son múltiplos de esta.

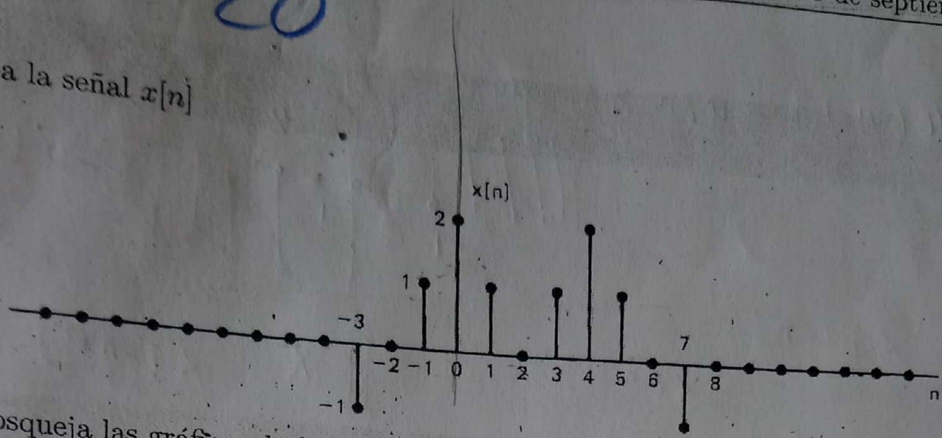
$$\begin{aligned} S_f(t) &= C_1cos(\omega_0 t + \phi_1) + C_2cos(2\omega_0 t + \phi_2) + \\ &\dots + C_kcos(k\omega_0 t + \phi_k) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_ncos(n\omega_0 t + \phi_n) \end{aligned}$$

0

6. 25 puntos

20

Sea la señal $x[n]$



Bosqueja las gráficas de las siguientes señales (indica cada paso), no es necesario escribir las expresiones analíticas:

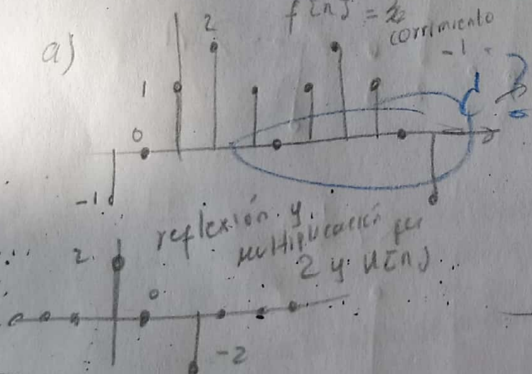
a) $f[n] = 2x[-n-1]u[n]$

b) $f[n] = x[3n+1]u[n]$

c) $g[n] = x[1-n]\,(u[-n-1] - u[n-2])$

d) $h[n] = x[\frac{1}{2}n - 2] + 1$

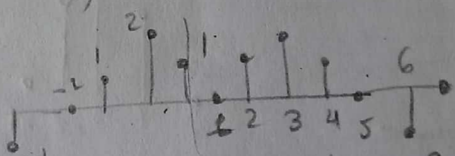
a) $f[n] = 2x[-n-1] \cdot u[n]$



corrimiento -1

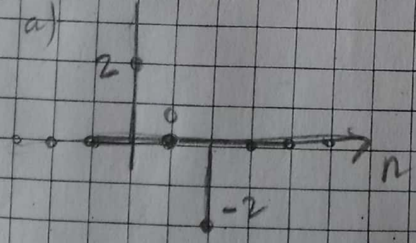
reflexión y multiplicación por 2 y u[n]

b) corrimiento +1

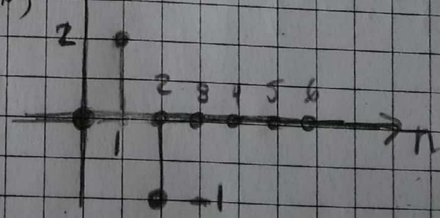


compresión en 3 y multiplicar por u(n)

a)

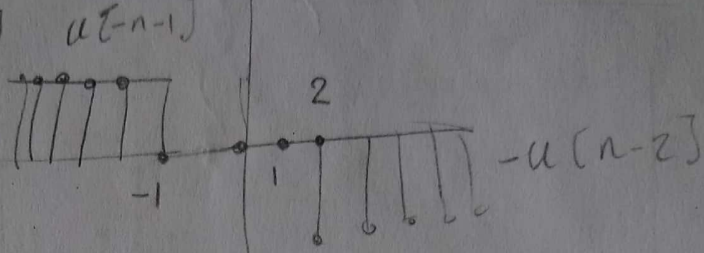


b)



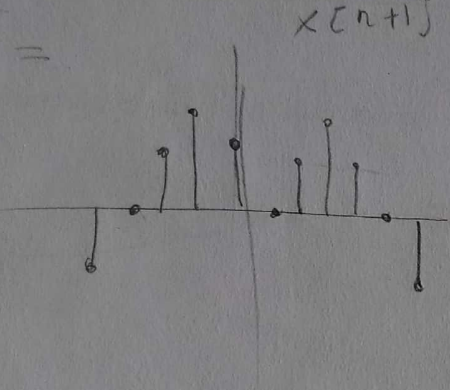
c)

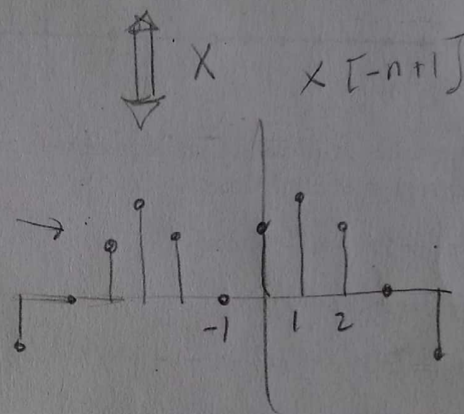
c) $u[-n-1] - u[n-2]$

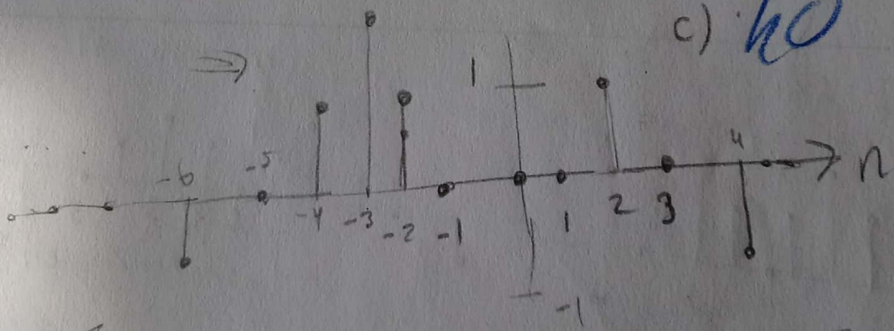


x[1-n]

=







d) $x[\frac{1}{2}n-2]+1$