RCFB19 Montiel Cruz Jorge de Jesús

7.1 encuentre la transformada de Fourier de $e^{-at}u(t)$

Por definición

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-at} u(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = \frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}$$

al evaluar el límite superior debemos considerar que $a>0$ para que dicho límite no sea infinito sino cero, así pues.

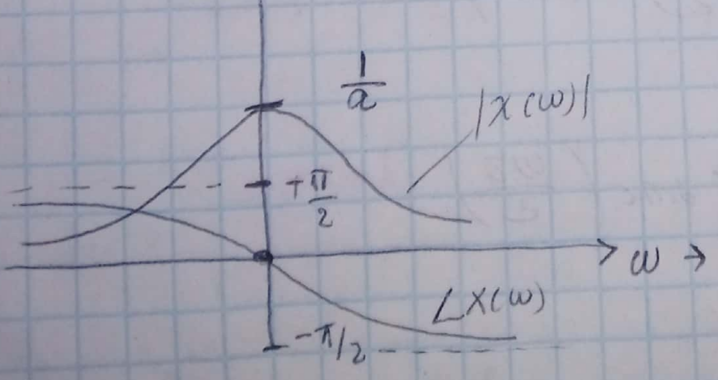
$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \quad \text{si} \quad a>0$$

Pero $a+j\omega$ en forma polar $\sqrt{a^2+\omega^2}\, e^{\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) j}$

$$\rightarrow X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} e^{-j\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

así pues

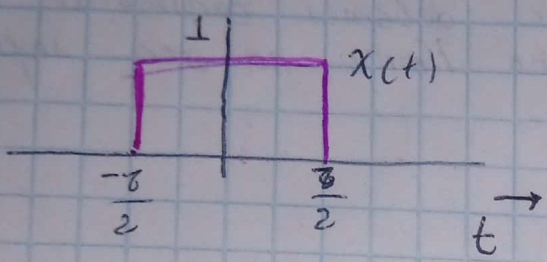
$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \quad \& \quad \angle X(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



7.2. encuentre la transformada de Fourier de

$x(t) = \text{rect}\,(t/\tau)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t}\, dt$$



Dado que $\text{sinc}\left(\frac{t}{\tau}\right) = 1$ para $|t| < \tau/2$

y 0 para $|t| > \tau/2$ podemos reducir la integral de la transformada a.

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{j\omega\frac{\tau}{2}}\right) = \frac{2}{\omega}\,\text{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

que podemos escribir como.

$$= \tau\,\frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = \tau\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$ así pues.

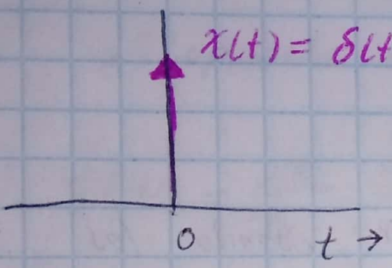
$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow \tau\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

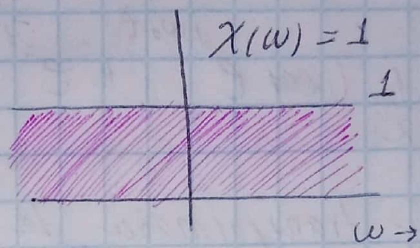
7.3. encuentre la transformada de Fourier del impulso unitario $\delta(t)$

Usando propiedades del impulso.

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} \, dt = 1.$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$$



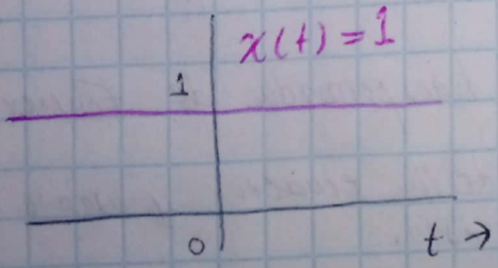


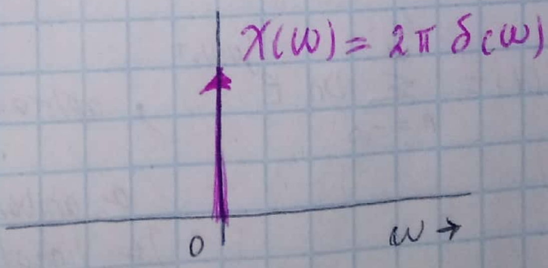
7.4 encuentre la transformada inversa de Fourier de $\delta(\omega)$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad \text{(por propiedad)}$$

así pues

$$\frac{1}{2\pi} \longleftrightarrow \delta(\omega) \quad \text{ó} \quad 1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$$





7.5. encuentre la transformada inversa de $\delta(\omega-\omega_0)$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

así que,

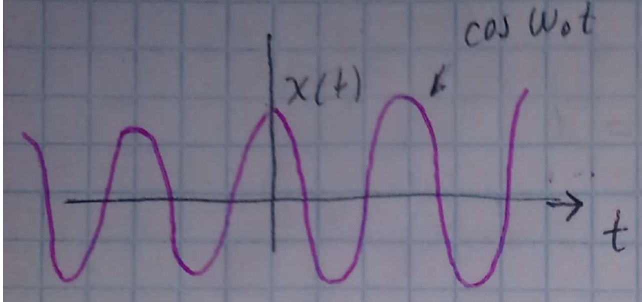
$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \Longleftrightarrow \delta(\omega-\omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t} \Longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

ó bien

$$e^{-j\omega_0 t} \Longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

7.6. encuentre la transformada de Fourier del coseno mostrado.



Por Euler, podemos reescribir el coseno como:

$$\cos w_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}\right)$$

así pues, la transformada de Fourier, usando los resultados previamente obtenidos

$$= \frac{1}{2}\, 2\pi\left(\delta(w+w_0) + \delta(w-w_0)\right) = \pi\left(\delta(w+w_0) + \delta(w-w_0)\right)$$

7.7 encuentre la transformada de Fourier de una señal periódica

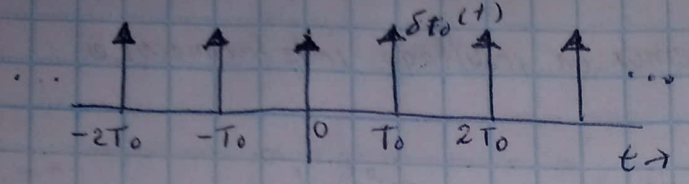
por series de Fourier tenemos que cualquier señal periódica la podemos aproximar según la siguiente suma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jnw_0 t}$$

, aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación y usando la linealidad de esta.

$$\Rightarrow X(w) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, \delta(w - nw_0)$$

7.8. encuentre la transformada de Fourier para un tren de impulsos unitarios.



el tren de impulsos unitarios, como serie de Fourier, lo podemos ver. con $D_n = 1/T_0$.

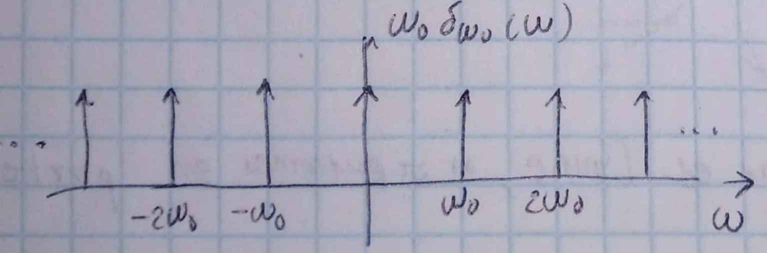
así:

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

así aplicando la transformada.

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0) \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$= \omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega)$$



Scanned by CamScanner

7.9. encuentre la transformada de Fourier de un escalón unitario $u(t)$

Por integración directa obtenemos un resultado indeterminado pues.

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{0}^{\infty}$$

el cual se indetermina para $t \to \infty$, así usaremos mejor la aproximación de $e^{-at} u(t) \cong u(t)$ $a \to 0$

así

$$u(t) = \lim_{a \to 0} e^{-at} u(t)$$

así

$$U(\omega) = \lim_{a \to 0} \mathcal{F}\{e^{-at} u(t)\} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a + j\omega} = \frac{1}{j\omega} + \lim_{a \to 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

así $U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$

Del resultado previo a evaluar el límite, si separamos en parte real y parte imaginaria.

$$\frac{1}{a + j\omega} = \frac{a + j\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

donde $\frac{a}{a^2 + \omega^2}$ tiene propiedades interesantes tales como.

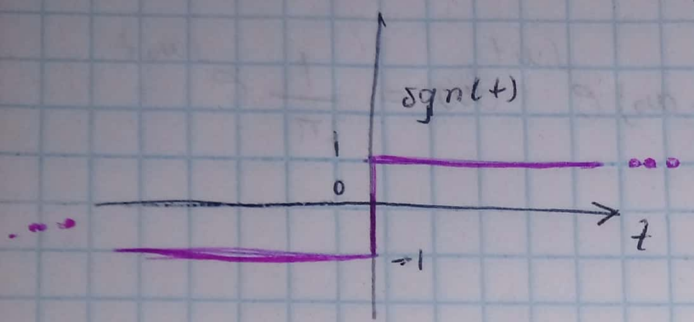
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} d\omega = \pi$$; $a \to 0$ la función se aproxima a un impulso de amplitud π

así.

$$U(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Scanned by CamScanner

7,10 encuentre la transformada de Fourier de la función sgn(t)



podemos ver que $sgn(t)+1 = 2u(t)$

así $sgn(t) = 2u(t) - 1$

de donde la transformada de $2u(t) \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega}$

y $1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

así pues.

$$sgn(t) \Longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$