RCFB21 Montiel Cruz Jorge de Jesús

Aplicación de la propiedad de convolución en t para encontrar transformadas inversas de Fourier

1. encontrar $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+j\omega)^2}\right\}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+j\omega)^2} = \frac{1}{1+j\omega}\cdot\frac{1}{1+j\omega} = F(\omega)\cdot H(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega)H(\omega)\right\} = f(t) * h(t)$$

donde $e^{-t}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{1+j\omega}$

así:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+j\omega)^2}\right\} = e^{-t}u(t) * e^{-t}u(t) = te^{-t}u(t)$$

2. encontrar $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}\right\}$

$$\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega}\cdot\frac{1}{2+j\omega} = F(\omega)\,H(\omega)$$

donde

$$e^{-t}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{1+j\omega}$$

$$e^{-2t}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{2+j\omega}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}\right\} = e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t) = (e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

3. Resuelva pero usando fracciones parciales

$$\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{1}{(1+s)(2+s)} = \frac{A}{1+s} + \frac{B}{2+s}$$

$$s = j\omega$$

$$1 = A(2+s) + B(1+s)$$

si $s = -2 \rightarrow B = -1$

si $s = -1 \rightarrow A = 1$

$$\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)+H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(F(\omega)+H(\omega))e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega + \int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} + \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$$

así.

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}\right\} = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

Resuelva la siguiente ecuación diferencial mediante transformada de Fourier

$$\ddot{x}(t) + 7\dot{x}(t) + 10x(t) = u(t)$$

aplicando transformada a ambos miembros de la igualdad.

$$\mathcal{F}\{\ddot{x}(t) + 7\dot{x}(t) + 10x(t)\} = \mathcal{F}\{u(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} + 7\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} + 10\mathcal{F}\{x(t)\} = U(\omega)$$

$$(j\omega)^2 X(\omega) + 7(j\omega)X(\omega) + 10X(\omega) = U(\omega)$$

$$X(\omega)\left((j\omega)^2 + 7(j\omega) + 10\right) = U(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega + 10}U(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 7j\omega + 10}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)$$

$$X(\omega) = \frac{\pi\delta(\omega)}{(j\omega)^2 + 7j\omega + 10} + \frac{1}{(j\omega)((j\omega)^2 + 7j\omega + 10)}$$

de propiedades de la Delta

$$f(\omega)\delta(\omega) = f(0)\delta(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{\pi}{10}\delta(\omega) + \frac{1}{(j\omega)((j\omega)^2 + 7j\omega + 10)}$$

sea $s = j\omega$

$$\frac{1}{s(s^2 + 7s + 10)} = \frac{1}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5}$$

es fácil ver que, al realizar las fracciones parciales $A = 1/10$; $B = -1/6$
$C = 1/15$

$$X(\omega) = \frac{\pi}{10}\delta(\omega) + \frac{1/10}{j\omega} + \frac{(-1/6)}{j\omega + 2} + \left(\frac{1/15}{j\omega + 5}\right)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{10}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) - \frac{1}{6}\frac{1}{2 + j\omega} + \frac{1}{15}\left(\frac{1}{5 + j\omega}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{10}u(t) - \frac{1}{6}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{15}e^{-5t}u(t)$$

Observaciones.

si las condiciones iniciales son 0.

$$x(0)=0 \; ; \; \dot{x}(0)=0$$

entonces la ED, se puede resolver con Fourier.

si son distintas entonces no se puede resolver con Fourier,

- es más fácil aplicar este método en ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

Si solucionamos el problema usando la propiedad de convolución

$$X(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2+(j\omega)+10)} U(\omega) = \left(\frac{1}{j\omega+2} \cdot \frac{1}{j\omega+5}\right) U(\omega)$$

$$x(t) = \left(e^{-2t}u(t) * e^{-5t}u(t)\right) * u(t)$$

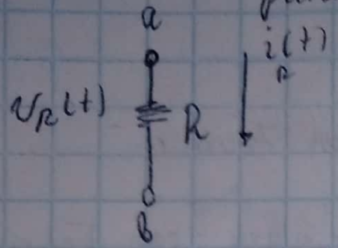
$$x(t) = \frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{3} u(t) * u(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} u(t) * u(t) - \frac{1}{3} e^{-5t} u(t) * u(t)$$

$$= \frac{e^{-2t}-1}{-6} u(t) + \frac{e^{-5t}-1}{15} u(t) = \frac{1}{10} u(t) - \frac{1}{6} e^{-2t} u(t)$$

$$+ \frac{1}{15} e^{-5t} u(t)$$

Transformada de Fourier para circuitos eléctricos

Para un resistor

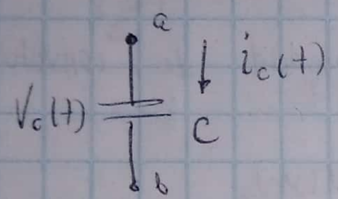


por Ohm $V_R(t) = R\, i_R(t)$

aplicando transformada de Fourier

$$V_R(\omega) = R\, I_R(\omega)$$

Para un capacitor



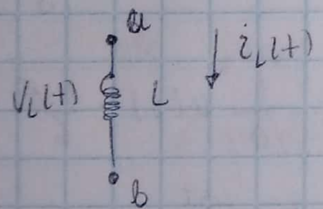
$$\frac{d}{dt} V_c(t) = \frac{1}{C}\, i_c(t)$$

aplicando T. F.

$$j\omega\, V_c(\omega) = \frac{1}{C}\, I_c(\omega)$$

$$V_c(\omega) = \frac{1}{j\omega C}\, I_c(\omega)$$ donde $\frac{1}{j\omega C}$: impedancia.

Para un inductor

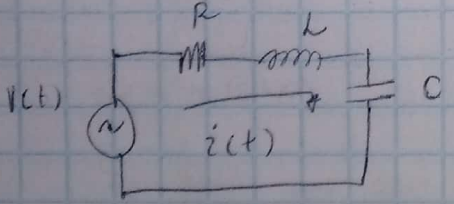


$$V_L(t) = L\, \frac{d\, i_L(t)}{dt}$$

aplicando T. F.

$$V_L(\omega) = L j\omega\, I_L(\omega)$$ donde $Lj\omega$: impedancia.

ejemplo.



$$V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V(t)$$

$$R\, i(t) + L \frac{d\, i_L(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau = V(t)$$

$\downarrow$

aplicando T. Fourier

$$R\, I(\omega) + Lj\omega\, I(\omega) + \frac{1}{Cj\omega}\, I(\omega) = V(\omega)$$

puesto que

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{I(\omega)}{Cj\omega} + \pi \frac{I(0)}{C} \delta(\omega)$$

además

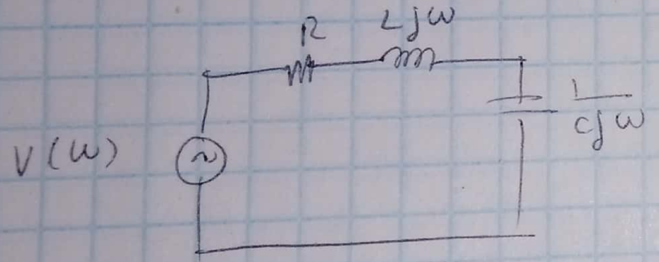
$$i(t) = c\frac{dV_c(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} cj\omega V(\omega)$$

$$I(\omega) = cj\omega V(\omega)$$

así

$$I(0) = cj(0)V(0) = 0$$

Retomando el circuito y reemplazando por su impedancia



así, por Kirchhoff

$$RI(\omega) + Lj\omega I(\omega) + \frac{1}{cj\omega}I(\omega) = V(\omega)$$

así

$$\underbrace{\left(R + Lj\omega + \frac{1}{cj\omega}\right)}_{\text{impedancia}} I(\omega) = V(\omega)$$

$$I(\omega) = \frac{V(\omega)}{R + Lj\omega + \frac{1}{cj\omega}}$$

donde $\dfrac{1}{R + Lj\omega + \frac{1}{cj\omega}}$: admitancia.

y, aplicando la propiedad de convolución en t.

$$I(\omega) = H(\omega)V(\omega)$$

$$i(t) = h(t) * v(t).$$

Scanned by CamScanner