le llama *no anticipativo*, ya que la salida del sistema no anticipa valores futuros de la entrada. En consecuencia, si dos entradas a un sistema causal son idénticas hasta algún punto en el tiempo $t_0$ o $n_0$, las salidas correspondientes deben ser también iguales hasta ese mismo tiempo. El circuito *RC* de la figura 1.1 es causal, ya que el voltaje del capacitor responde sólo a los valores presentes y pasados de la fuente de voltaje. De manera análoga, el movimiento de un automóvil es causal puesto que no anticipa acciones futuras del conductor. Los sistemas descritos por las ecuaciones (1.92)-(1.94) también son causales, pero los sistemas definidos por

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \tag{1.102}$$

y

$$y(t) = x(t-1) \tag{1.103}$$

no lo son. Todos los sistemas sin memoria son causales, ya que la salida responde sólo a valores presentes de la entrada.

Aunque los sistemas causales son de gran importancia, de ninguna manera constituyen los únicos sistemas que resultan de interés práctico. Por ejemplo, la causalidad no es de importancia fundamental en aplicaciones como el procesamiento de imágenes, en el cual la variable independiente no es el tiempo. Más aún, en el procesamiento de datos que han sido grabados previamente, como ocurre con frecuencia con señales de voz, de geofísica o señales meteorológicas, por nombrar algunas, de ninguna manera estamos obligados a procesar esos datos de forma causal. Como otro ejemplo, en muchas aplicaciones, incluyendo el análisis histórico del mercado de valores y los estudios demográficos, podemos estar interesados en determinar una tendencia de variación lenta en datos que también contengan fluctuaciones de alta frecuencia alrededor de esa tendencia. En este caso, una aproximación usada con frecuencia consiste en promediar los datos sobre un intervalo para suavizar las fluctuaciones y mantener solamente la tendencia. Un ejemplo de un sistema no causal para obtener promedios es

$$y[n] = \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]. \tag{1.104}$$

**Ejemplo 1.12**

En la verificación de causalidad de un sistema es importante observar cuidadosamente la relación entrada-salida. Para ilustrar algunos de los elementos involucrados en esto, verificaremos la causalidad de dos sistemas particulares.

El primer sistema se define como

$$y[n] = x[-n]. \tag{1.105}$$

Observe que la salida $y[n_0]$ en un tiempo positivo $n_0$ depende solamente del valor de la señal de entrada $x[-n_0]$ en el tiempo $(-n_0)$, el cual es negativo y por tanto en el pasado de $n_0$. Podemos sentirnos inclinados a concluir en este punto que el sistema dado es causal. Sin embargo, siempre debemos tener el cuidado de verificar la relación entrada-salida para *todos* los tiempos. En particular, para $n < 0$, es decir, $n = -4$, vemos que $y[-4] = x[4]$, de manera que la salida en este tiempo depende de un valor futuro de la entrada. Por consiguiente, el sistema es no causal.

También es importante distinguir cuidadosamente los efectos de la entrada de aquellos de otras funciones utilizadas en la definición del sistema. Por ejemplo, considere el sistema

$$y(t) = x(t)\cos(t+1). \tag{1.106}$$

En este sistema, la salida en cualquier tiempo $t$ es igual a la entrada en ese mismo tiempo multiplicada por un número que varía con el tiempo. Específicamente, podemos rescribir la ecuación (1.106) como

$$y(t) = x(t)g(t),$$

donde $g(t)$ es una función que varía con el tiempo, esto es, $g(t) = \cos(t + 1)$. De este modo, sólo el valor actual de la entrada $x(t)$ tiene influencia en el valor actual de la salida $y(t)$, por lo que concluimos que este sistema es causal (y por tanto sin memoria).

### 1.6.4 Estabilidad

La *estabilidad* es otra importante propiedad de los sistemas. Intuitivamente, un sistema estable es aquel en el que entradas pequeñas conducen a respuestas que no divergen. Por ejemplo, considere el péndulo en la figura 1.46(a), en el cual la entrada es la fuerza aplicada $x(t)$ y la salida es la desviación angular $y(t)$ a partir de la vertical. En este caso, la gravedad aplica una fuerza de restauración que tiende a regresar el péndulo a la posición vertical, y las pérdidas por fricción debidas al arrastre tienden a disminuir su velocidad. En consecuencia, si se aplica una pequeña fuerza $x(t)$, la desviación resultante de la vertical también es pequeña. En contraste, para el péndulo invertido de la figura 1.46(b), el efecto de la gravedad es aplicar una fuerza que tiende a *incrementar* la desviación de la vertical. Así, una pequeña fuerza aplicada conduce a una gran desviación vertical, lo cual ocasiona que el péndulo caiga, a pesar de cualquier fuerza retardante debida a la fricción.

El sistema de la figura 1.46(a) es un ejemplo de un sistema estable, mientras que el de la figura 1.46(b) es inestable. Los modelos para reacciones en cadena o para crecimiento de población con suministro de alimentación ilimitado y sin depredadores son ejemplos de sistemas inestables, ya que la respuesta de los sistemas crece sin límite en respuesta a pequeñas entradas. Otro ejemplo de un sistema inestable es el modelo para un balance de cuenta bancaria de la ecuación (1.86), pues si se hace un depósito inicial (es decir, $x[0]$ = una cantidad positiva) y no hay retiros subsecuentes, entonces ese depósito crecerá cada mes sin límite, debido al efecto de los pagos de interés.

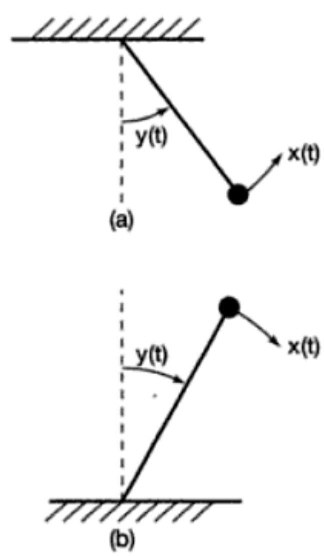


**Figura 1.46** (a) Un péndulo estable; (b) un péndulo invertido inestable.

Existen numerosos ejemplos de sistemas estables. La estabilidad de sistemas físicos por lo general resulta de la presencia de mecanismos que disipan energía. Por ejemplo, considerando valores positivos para los componentes del circuito *RC* simple del ejemplo 1.8, el resistor disipa energía y este circuito es un sistema estable. El sistema en el ejemplo 1.9 también es estable debido a la disipación de energía ocasionada por la fricción.

Los ejemplos anteriores nos proporcionan un conocimiento intuitivo del concepto de estabilidad. De manera más formal, si la entrada a un sistema estable es limitada (es decir, si su magnitud no crece en forma ilimitada), entonces la salida también debe ser limitada y por tanto, no puede divergir. Ésta es la definición de estabilidad que usaremos a lo largo de este libro. Por ejemplo, considere la aplicación de una fuerza constante $f(t) = F$ al automóvil de la figura 1.2 con el vehículo inicialmente en reposo. En este caso la velocidad del auto se incrementa, pero no sin límite, ya que la fuerza de fricción retardante también se incrementa con la velocidad. De hecho, la velocidad continuará incrementándose hasta que la fuerza de fricción esté en balance exacto con la fuerza aplicada; así, según la ecuación (1.84) vemos que este valor de velocidad terminal $V$ debe satisfacer

$$\frac{\rho}{m}V = \frac{1}{m}F, \tag{1.107}$$

es decir,

$$V = \frac{F}{\rho}. \tag{1.108}$$

Como otro ejemplo, considere el sistema discreto definido por la ecuación (1.104) y suponga que la entrada $x[n]$ está limitada en magnitud por algún número, digamos $B$, para todos los valores de $n$. Entonces la magnitud más grande posible para $y[n]$ también es $B$, ya que $y[n]$ es el promedio de un conjunto finito de valores de la entrada. Por tanto, $y[n]$ está limitada y el sistema es estable. Por otro lado, considere el acumulador descrito por la ecuación (1.92). A diferencia del sistema de la ecuación (1.104), este sistema suma *todos* los valores pasados de la entrada, en lugar de sólo un conjunto finito de valores, siendo entonces inestable, debido a que esta suma puede crecer de manera continua incluso si $x[n]$ está limitada. Por ejemplo, si la entrada al acumulador es un escalón unitario $u[n]$, la salida será

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = (n+1)u[n].$$

Esto es, $y[0] = 1$, $y[1] = 2$, $y[2] = 3$, y así sucesivamente, y $y[n]$ crece sin límite.

### Ejemplo 1.13

Si sospechamos que un sistema es inestable, entonces una estrategia útil para verificarlo es considerar una entrada limitada *específica* que conduzca a una salida ilimitada. Encontrar uno de estos ejemplos nos permite concluir que el sistema dado es inestable. Si tal ejemplo no existe o resulta difícil encontrarlo, debemos verificar la estabilidad usando un método que no haga uso de ejemplos específicos de señales de entrada. Para ilustrar esto, verifiquemos la estabilidad de dos sistemas,

$$S_1: y(t) = tx(t) \tag{1.109}$$

y

$$S_2: y(t) = e^{x(t)}. \tag{1.110}$$

Al buscar un contraejemplo específico para refutar la estabilidad, podemos considerar simples entradas limitadas, como una constante o un escalón unitario. Para el sistema $S_1$ de la ecuación (1.109), una entrada constante $x(t) = 1$ produce $y(t) = t$, que es ilimitada, ya que no importa qué constante finita apliquemos, $|y(t)|$ excederá esa constante para algún valor de $t$. Concluimos que el sistema $S_1$ es inestable.

Para el sistema $S_2$, el cual resulta ser estable, no podríamos encontrar una entrada limitada que dé como resultado una salida ilimitada. Así que procedemos a verificar que todas las entradas limitadas den como resultado salidas limitadas. Específicamente, sea $B$ un número positivo arbitrario y sea $x(t)$ una señal arbitraria limitada por $B$; esto es, no estamos haciendo conjeturas acerca de $x(t)$, excepto que

$$|x(t)| < B, \tag{1.111}$$

o

$$-B < x(t) < B, \tag{1.112}$$

para toda $t$. Usando la definición de $S_2$ de la ecuación (1.110), vemos que si $x(t)$ satisface la ecuación (1.111), entonces $y(t)$ debe satisfacer

$$e^{-B} < |y(t)| < e^{B}. \tag{1.113}$$

En conclusión, si cualquier entrada a $S_2$ está limitada por un número positivo arbitrario $B$, se garantiza que la salida correspondiente está limitada por $e^B$. Por tanto, $S_2$ es estable.

Las propiedades y conceptos de los sistemas que hemos examinado hasta el momento en esta sección son de gran importancia, por lo que examinaremos algunos de éstos con mayor detalle más adelante en el libro. Sin embargo, todavía quedan dos propiedades adicionales —invariancia en el tiempo y linealidad— que juegan un papel central en los subsecuentes capítulos de este libro, de manera que en el resto de esta sección introducimos y proporcionamos un análisis inicial de estos dos conceptos tan importantes.

### 1.6.5 Invariancia en el tiempo

De forma conceptual, un sistema es invariante en el tiempo si el comportamiento y características del mismo están fijos en el tiempo. Por ejemplo, el circuito $RC$ de la figura 1.1 es invariante en el tiempo si los valores de la resistencia y la capacitancia $R$ y $C$ son constantes a través del tiempo: si hiciéramos un experimento con este circuito el día de hoy podríamos esperar obtener los mismos resultados si lo hacemos en forma idéntica mañana. Por otro lado, si los valores de $R$ y $C$ se cambian o varían con el tiempo, entonces podríamos esperar que los resultados de nuestro experimento dependieran del tiempo en que se lleve a cabo. De manera similar, si el coeficiente de fricción $b$ y la masa $m$ del automóvil en la figura 1.2 son constantes, podríamos esperar que el vehículo respondiera de manera idéntica independientemente de cuándo lo manejemos. Por otra parte, si un día cargamos la cajuela del auto con maletas pesadas, incrementando así $m$, esperaríamos que el auto se comportase de manera diferente que en otras ocasiones cuando no tiene carga pesada.

La propiedad de invariancia en el tiempo se describe de manera muy sencilla en términos del lenguaje de las señales y de los sistemas que hemos introducido. De manera específica, un sistema es invariante en el tiempo si un corrimiento de tiempo en la señal de entrada ocasiona un corrimiento de tiempo en la señal de salida. Esto es, si $y[n]$ es la salida de un sistema discreto invariante en el tiempo cuando $x[n]$ es la entrada, entonces $y[n-n_0]$ es la salida cuando se aplica $x[n-n_0]$. En tiempo continuo con una salida $y(t)$ correspondiente a una entrada $x(t)$, un sistema invariante en el tiempo tendrá $y(t-t_0)$ como salida cuando $x(t-t_0)$ sea la entrada.

Para ver cómo se puede determinar si un sistema es o no invariante en el tiempo y obtener algún conocimiento sobre esta propiedad, consideremos los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 1.14**

Considere el sistema continuo definido por

$$y(t) = \text{sen}\left[x(t)\right]. \tag{1.114}$$

Para verificar que este sistema es invariante en el tiempo, debemos determinar si la propiedad de invariancia en el tiempo se cumple para *cualquier* entrada y *cualquier* corrimiento en el tiempo $t_0$. Entonces, sea $x_1(t)$ una entrada arbitraria a este sistema y

$$y_1(t) = \text{sen}\left[x_1(t)\right] \tag{1.115}$$

sea la salida correspondiente. Considere entonces una segunda entrada obtenida al desplazar $x_1(t)$ en el tiempo:

$$x_2(t) = x_1(t-t_0). \tag{1.116}$$

La salida correspondiente a esta entrada es

$$y_2(t) = \text{sen}\left[x_2(t)\right] = \text{sen}\left[x_1(t-t_0)\right]. \tag{1.117}$$

De manera similar, de la ecuación (1.115),

$$y_1(t-t_0) = \text{sen}\left[x_1(t-t_0)\right]. \tag{1.118}$$

Comparando las ecuaciones (1.117) y (1.118), vemos que $y_2(t) = y_1(t-t_0)$ y, por tanto, este sistema es invariante en el tiempo.

**Ejemplo 1.15**

Como un segundo ejemplo, considere el sistema discreto

$$y[n] = nx[n]. \tag{1.119}$$

Éste es un sistema variante en el tiempo, un hecho que se puede verificar usando el mismo procedimiento formal del ejemplo anterior (vea el problema 1.28). Sin embargo, cuando se sospecha que un sistema es variante en el tiempo, un procedimiento para demostrarlo, que con frecuencia es útil, consiste en buscar un contraejemplo, es decir, usar nuestra intuición para encontrar una señal de entrada para la cual la condición de invariancia en el tiempo sea violada. El sistema en este ejemplo en particular representa un sistema con una ganancia variante en el tiempo. Por ejemplo, si sabemos que el valor de entrada actual es 1, no podemos determinar el valor de salida actual sin conocer el tiempo actual.

En consecuencia, considere la señal de entrada $x_1[n] = \delta[n]$, la cual produce una salida $y_1[n]$ que es idéntica a 0 (ya que $n\delta[n] = 0$). Sin embargo, la entrada $x_2[n] = \delta[n-1]$ produce la salida $y_2[n] = n\delta[n-1] = \delta[n-1]$. Por tanto, mientras que $x_2[n]$ es una versión desplazada de $x_1[n]$, $y_2[n]$ *no* es una versión desplazada de $y_1[n]$.

Mientras que el sistema en el ejemplo anterior tiene una ganancia que varía con el tiempo y como resultado es un sistema variante en el tiempo, el sistema de la ecuación (1.97) tiene una ganancia constante y, de hecho, es invariante en el tiempo. Otros ejemplos de sistemas invariantes en el tiempo están dados por las ecuaciones (1.91)-(1.104). El siguiente ejemplo ilustra un sistema variante en el tiempo.

### Ejemplo 1.16

Considere el sistema

$$y(t) = x(2t). \tag{1.120}$$

Este sistema representa un escalamiento de tiempo. Esto es, $y(t)$ es una versión comprimida (por un factor de 2) de $x(t)$. Entonces, intuitivamente cualquier corrimiento de tiempo en la entrada también será comprimido por un factor de 2, y es por esta razón que el sistema no es invariante en el tiempo. Para determinar esto mediante su contraejemplo, considere la entrada $x_1(t)$ mostrada en la figura 1.47(a) y la salida resultante $y_1(t)$ descrita por la figura 1.47(b). Si entonces desplazamos la entrada por 2 —es decir, considere $x_2(t) = x_1(t-2)$, como se muestra en la figura 1.47(c)—, obtenemos la salida

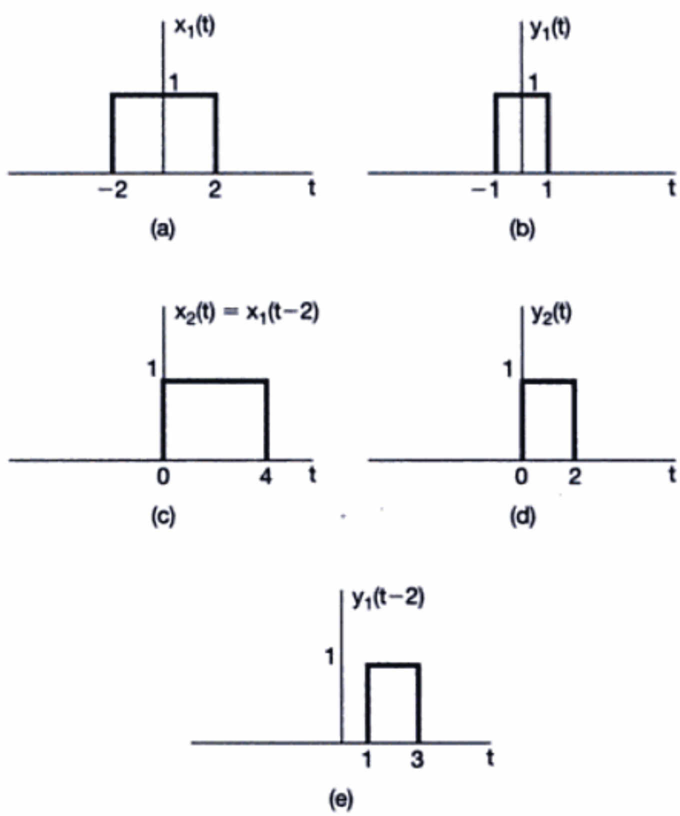


**Figura 1.47** (a) La entrada $x_1(t)$ al sistema del ejemplo 1.16; (b) la salida $y_1(t)$ correspondiente a $x_1(t)$; (c) la entrada desplazada $x_2(t) = x_1(t-2)$; (d) la salida $y_2(t)$ correspondiente a $x_2(t)$; (e) la señal desplazada $y_1(t-2)$. Observe que $y_2(t) \neq y_1(t-2)$, lo cual demuestra que el sistema no es invariante en el tiempo.

resultante $y_2(t) = x_2(2t)$ mostrada en la figura 1.47(d). Al comparar las figuras 1.47(d) y (e), vemos que $y_2(t) \neq y_1(t-2)$, de manera que el sistema no es invariante en el tiempo. (De hecho, $y_2(t) = y_1(t-1)$, así que el corrimiento de tiempo de la salida es sólo la mitad de lo que debe ser para la invariancia en el tiempo, debido a la compresión de tiempo impartida por el sistema.)

### 1.6.6 Linealidad

Un *sistema lineal*, en tiempo continuo o en tiempo discreto, es aquel que posee la importante propiedad de superposición: si una entrada consiste en la suma ponderada de varias señales, entonces la salida es simplemente la superposición (es decir, la suma ponderada) de las respuestas del sistema a cada una de estas señales. Matemáticamente, sea $y_1(t)$ la respuesta del sistema continuo a una entrada $x_1(t)$, y sea $y_2(t)$ la salida correspondiente a la entrada $x_2(t)$. Entonces el sistema es lineal si:

1. La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$.
2. La respuesta a $ax_1(t)$ es $ay_1(t)$, donde $a$ es una constante compleja cualquiera.

La primera de estas dos propiedades se conoce como la propiedad de *aditividad*; la segunda se conoce como la propiedad de *escalamiento* u *homogeneidad*. Aunque hemos escrito esta descripción usando señales continuas, la misma definición se cumple para discretas. Los sistemas especificados por las ecuaciones (1.91)-(1.100), (1.102)-(1.104) y (1.119) son lineales, mientras que los definidos por las ecuaciones (1.101) y (1.114) son no lineales. Observe que un sistema puede ser lineal sin ser invariante en el tiempo, como se muestra en la ecuación (1.119), y que puede ser invariante en el tiempo sin ser lineal, como en las ecuaciones (1.101) y (1.114).

Las dos propiedades que definen un sistema lineal pueden combinarse en un solo enunciado:

$$\text{tiempo continuo: } ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t), \tag{1.121}$$

$$\text{tiempo discreto: } ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]. \tag{1.122}$$

Aquí, $a$ y $b$ son constantes complejas cualesquiera. Más aún, se puede demostrar directamente a partir de la definición de linealidad que si $x_k[n]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, son un conjunto de entradas a un sistema lineal discreto con las correspondientes salidas $y_k[n]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, entonces la respuesta a una combinación lineal de estas entradas dada por

$$y[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \ldots \tag{1.123}$$

es

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \ldots. \tag{1.124}$$

A este hecho tan importante se le conoce como la *propiedad de superposición*, la cual se cumple para sistemas lineales tanto en continuos como discretos.

Una consecuencia directa de la propiedad de superposición es que, para sistemas lineales, una entrada que sea cero en todo tiempo da una salida cero en todo tiempo. Por ejemplo, si $x[n] \rightarrow y[n]$, entonces la propiedad de homogeneidad nos dice que

$$0 = 0 \cdot x[n] \rightarrow 0 \cdot y[n] = 0. \tag{1.125}$$

En los siguientes ejemplos mostramos cómo la linealidad de un determinado sistema se puede verificar directamente aplicando la definición de linealidad.

### Ejemplo 1.17

Considere un sistema $S$ cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ estén relacionadas mediante

$$y(t) = tx(t)$$

Para determinar si $S$ es o no lineal, consideramos dos entradas arbitrarias $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

Sea $x_3(t)$ una combinación lineal de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Esto es,

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

donde $a$ y $b$ son escalares arbitrarias. Si $x_3(t)$ es la entrada a $S$, entonces la salida correspondiente se expresa como

$$\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) \\ &= t(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Concluimos entonces que el sistema $S$ es lineal.

### Ejemplo 1.18

Apliquemos el procedimiento para verificar la linealidad utilizado en el ejemplo anterior en otro sistema $S$ cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas mediante

$$y(t) = x^2(t)$$

Definiendo $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ como en el ejemplo anterior, tenemos

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

y

$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2x_1^2(t) + b^2x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\ &= a^2y_1(t) + b^2y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

Claramente, podemos especificar que $x_1(t)$, $x_2(t)$, $a$ y $b$ tales que $y_3(t)$ no son lo mismo que $ay_1(t) + by_2(t)$. Por ejemplo, si $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 0$, $a = 2$ y $b = 0$, entonces $y_3(t) = (2x_1(t))^2 = 4$, pero $2y_1(t) = 2(x_1(t))^2 = 2$. Concluimos que el sistema $S$ es no lineal.

### Ejemplo 1.19

Al verificar la linealidad de un sistema, es importante recordar que éste debe satisfacer las dos propiedades, la de aditividad y la de homogeneidad, y que las señales, así como cualquier constante de escalamiento, pueden ser complejas. Para enfatizar la importancia de estos puntos, considere el sistema especificado por

$$y[n] = \Re e\{x[n]\}. \tag{1.126}$$

Como se muestra en el problema 1.29, este sistema es aditivo; sin embargo, no satisface la propiedad de homogeneidad, como demostraremos en seguida. Sea

$$x_1[n] = r[n] + js[n] \tag{1.127}$$

una entrada compleja arbitraria con partes real e imaginaria $r[n]$ y $s[n]$, respectivamente, de modo que la correspondiente salida sea

$$y_1[n] = r[n]. \tag{1.128}$$

Ahora, considere el escalamiento de $x_1[n]$ por un número complejo, por ejemplo, $a = j$; es decir, considere la entrada

$$\begin{aligned} x_2[n] = jx_1[n] &= j(r[n] + js[n]) \\ &= -s[n] + jr[n]. \end{aligned} \tag{1.129}$$

La salida correspondiente a $x_2[n]$ es

$$y_2[n] = \Re e\{x_2[n]\} = -s[n], \tag{1.130}$$

la cual no es igual a la versión escalada de $y_1[n]$,

$$ay_1[n] = jr[n]. \tag{1.131}$$

Concluimos que el sistema viola la propiedad de homogeneidad y entonces no es lineal.

### Ejemplo 1.20

Considere el sistema

$$y[n] = 2x[n] + 3. \tag{1.132}$$

Este sistema es no lineal, como puede verificarse de varias formas. Por ejemplo, el sistema viola la propiedad de aditividad: si $x_1[n] = 2$ y $x_2[n] = 3$, entonces

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7, \tag{1.133}$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9. \tag{1.134}$$

Sin embargo, la respuesta a $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$ es

$$y_3[n] = 2[x_1[n] + x_2[n]] + 3 = 13, \tag{1.135}$$

la cual no es igual a $y_1[n] + y_2[n] = 16$. De forma alternativa, puesto que $y[n] = 3$ si $x[n] = 0$, vemos que el sistema viola la propiedad de "cero entrada/cero salida" de los sistemas lineales mostrados en la ecuación (1.125).

Puede parecer sorprendente que el sistema en el ejemplo anterior sea no lineal, ya que la ecuación (1.132) es una ecuación lineal. Por otra parte, como se ilustra en la figura 1.48, la salida de este sistema se puede representar como la suma de las salidas de un sistema lineal y otra señal igual a la *respuesta a entrada cero* del sistema. Para el sistema de la ecuación (1.132), el sistema lineal es

$$x[n] \rightarrow 2x[n],$$

y la respuesta a entrada cero es

$$y_0[n] = 3.$$

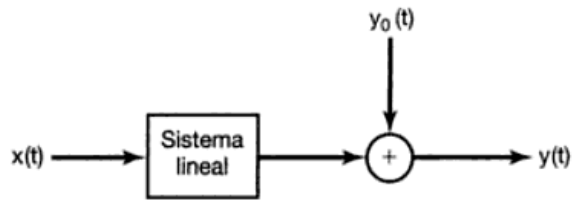


**Figura 1.48** Estructura de un sistema incrementalmente lineal. Aquí, $y_0[n]$ es la respuesta a entrada cero del sistema.

Hay, de hecho, muchas clases de sistemas tanto continuos como discretos que se pueden representar como en la figura 1.48, es decir, para los cuales la salida del sistema completo consiste en la superposición de la respuesta de un sistema lineal con una respuesta a entrada cero. Como se muestra en el problema 1.47, tales sistemas corresponden a la clase de *sistemas incrementalmente lineales*, esto es, sistemas continuos o discretos que responden en forma lineal a *cambios* en la entrada. En otras palabras, la *diferencia* entre las respuestas a cualesquiera dos entradas a un sistema incrementalmente lineal es una función lineal (es decir, aditivo y homogéneo) de la *diferencia* entre las dos entradas. Por ejemplo, si $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son dos entradas al sistema especificado por la ecuación (1.132), y si $y_1[n]$ y $y_2[n]$ son las salidas correspondientes, entonces:

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - \{2x_2[n] + 3\} = 2\{x_1[n] - x_2[n]\}. \tag{1.136}$$

## 1.7 RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado un gran número de conceptos relacionados con las señales y sistemas continuos y discretos. Hemos presentado una noción intuitiva de lo que son las señales y los sistemas mediante varios ejemplos y representación matemática para señales y sistemas que usaremos en todo el libro. En particular hemos introducido una representación gráfica y matemática de las señales y la empleamos para la realización de transformaciones de la variable independiente. También definimos y examinamos varias señales básicas, tanto continuas como discretas. Éstas incluyen señales exponenciales complejas, señales senoidales y funciones impulso y escalón unitario. Además, investigamos el concepto de periodicidad para los dos tipos de señales.

Al desarrollar algunas de las ideas elementales relacionadas con sistemas, introdujimos los diagramas de bloque para facilitar nuestro análisis concerniente a la interconexión de sistemas, y definimos algunas propiedades importantes de los sistemas, incluyendo la causalidad, la estabilidad, la invariancia en el tiempo y la linealidad.

El enfoque principal de este libro se centrará sobre los sistemas que poseen estas dos últimas propiedades, esto es, en la clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), tanto continuos como discretos. Dichos sistemas juegan un papel particularmente importante en el análisis y diseño de sistemas, en parte debido al hecho de que muchos sistemas encontrados en la naturaleza se pueden modelar exitosamente como lineales e invariantes en el tiempo. Además, como veremos en los siguientes capítulos, las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo nos permiten analizar en detalle el comportamiento de los sistemas LTI.