RCFB01 Montiel Cruz Jorge de Jesús

E 1.1

Determine las medidas adecuadas para las siguientes señales.

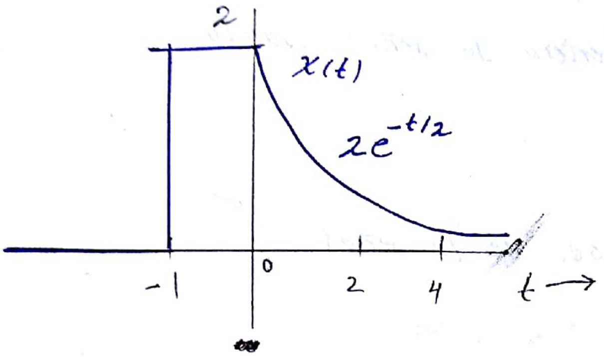


fig. (a)

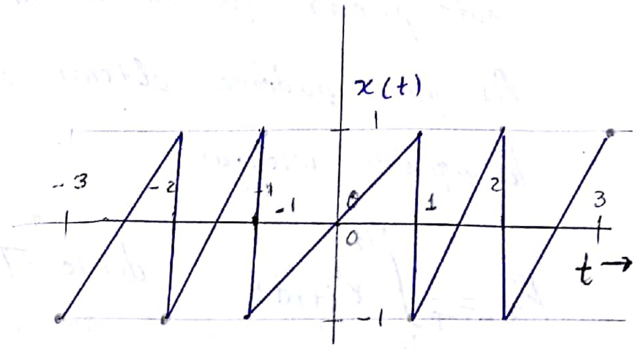


fig (b)

Para la figura (a) la amplitud de $x(t)$ tiende a cero como $t \to \infty$ por lo que la medida adecuada para esta señal es la "energía" de señal E_x, así pues, la energía de la señal la obtenemos resolviendo la siguiente integral:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt$$

definimos entonces $x(t)$ como sigue:

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } & t < -1 \\ 2 \text{ si } & -1 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/2} \text{ si } & t \geq 0 \end{cases}$$

Dado que la integral es el área bajo la curva podemos hacer lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{-1} 0^2 dt + \int_{-1}^{0} 2^2 dt + \int_{0}^{a} 2e^{-t/2} dt = 0 + 4t\Big|_{-1}^{0} - 4e^{-t/2}\Big|_{0}$$

$$= 4(0) - 4(-1) - 4\left(\lim_{a\to\infty} e^{-a/2} - e^0\right)$$

$$0 \qquad 4 + 4 = 8 \qquad 0$$

por lo que: $E_x = 8$

Scanned by CamScanner

para la figura (b) su amplitud oscila entre -1 y 1 como $|t| \to \infty$ por lo que E_x no está definida. sin embargo tiene cierta periodicidad, y dado que su periodo es de 2 segundos resulta lo mismo obtener su promedio en este periodo que en un intervalo infinitamente largo. Así pues, podemos obtener la potencia de señal usando la siguiente integral:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt$$ donde T: periodo de la señal

definimos $x(t)$ en el intervalo $-1 < t \leq 1$ como $x(t) = t$

por lo que P_x es igual a:

$$\frac{1}{2}\int_{-2/2}^{2/2} t^2\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{1}{2}\left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{3}$$

Scanned by CamScanner

1.2.

Determine la potencia y el valor RMS.

a) $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \theta)$

b) $x(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2\cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad \omega_1 \neq \omega_2$

c) $x(t) = De^{j\omega t}$

a) esta señal tiene un periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

para calcular su potencia resolvemos la siguiente integral

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} C^2\cos^2(\omega_0 t + \theta)\,dt$$

$$= C^2 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}(\cos(2\omega_0 t + 2\theta) + 1)\,dt$$

$$= \frac{C^2}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} dt + \int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\omega_0 t + 2\theta)\,dt\right]$$

la primera integral

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

; la segunda integral.

$$\frac{1}{2\omega_0}\,\text{sen}(2\omega_0 t + 2\theta)\Big|_{t=-T/2}^{T/2}$$

$$\frac{1}{2\omega_0}\left[\text{sen}(\omega_0 T + 2\theta) - \text{sen}(-\omega_0 T + 2\theta)\right]$$

y aplicando el límite

$$P_x = \frac{C^2}{2}\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}(T)}_{1} + \underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\omega_0 T}\left[\text{sen}(\omega_0 T + 2\theta) - \text{sen}(-\omega_0 T + 2\theta)\right]}_{0}$$

$$P_x = \frac{C^2}{2} \quad \& \quad RMS = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

lo cual quiere decir que la potencia de una señal sinusoidal de amplitud C tiene una potencia independiente de su frecuencia si $\omega_0 = 0$

$x(t) = C\, sen(0(t))$

$x^2(t) = C^2$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} c^2\, dt$$

$$= C^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, T = C^2$$

$P_x = C^2 \qquad rms = C$

Scanned by CamScanner

b.

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

$$\omega_1 \neq \omega_2$$

como en el ejemplo anterior, obtenemos la potencia al resolver la intergal siguiente:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt$$

$$x^2(t) = C_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) + C_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2) + 2 C_1 C_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1)\cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1)\, dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2)\, dt$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2 C_1 C_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2)\, dt$$

las primeras dos integrales son la potencia de una señal sinusoidal de amplitud C, así pues, como obtuvimos en el ejercicio anterior, sus potencias, respectivamente son.

$\frac{C_1^2}{2}$ y $\frac{C_2^2}{2}$, para la tercera integral podemos usar la siguiente identidad trigonométrica:

$$2 \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

donde $\alpha = \omega_1 t + \theta_1$ & $\beta = \omega_2 t + \theta_2$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{C_1 C_2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \cos((\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)) \right\} dt$$

integral que, análogamente a la del ejercicio a. resulta ser 0 cuando evaluamos el límite. Así pues, la potencia, P_x, es

$P_x = \frac{1}{2}(C_1^2 + C_2^2)$ & $rms = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

Scanned by CamScanner

c)

$$x(t) = De^{j\omega t}$$

Dado que es una señal compleja usamos la siguiente integral para obtener su potencia

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

así.

$$|De^{j\omega t}|^2 = |D|^2 |e^{j\omega t}|^2 \text{ por Euler}$$

$$|D|^2 |\cos(\omega\theta) + j\,\text{sen}(\omega\theta)|^2$$

$$= |D|^2 \sqrt{\cos^2(\omega\theta) + \text{sen}^2(\omega\theta)}^2 = |D|^2 \sqrt{1}^2 = |D|^2$$

así pues, la potencia.

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{|D|^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt = |D|^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{2T}{2}$$

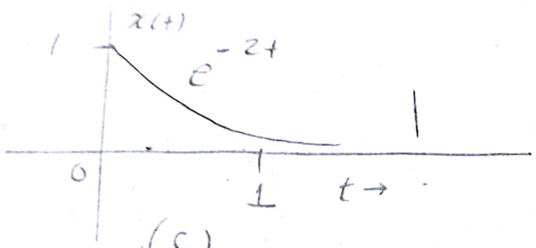
$$P_x = |D|^2$$

y $rms = |D|$

Scanned by CamScanner

1.3

la función $x(t) = e^{-2t}$ que se muestra en la figura (c) está retrasada por 1 segundo, bosqueje y describa matemáticamente la función retrasada. Repita con $x(t)$ adelantada por 1 segundo



(c)

Podemos describir a la función $x(t)$ matemáticamente como sigue

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

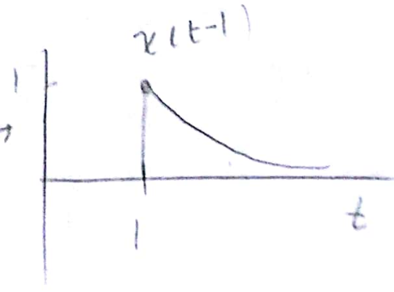
la función retrasada 1 segundo la obtenemos trasladado $x(t)$ en el eje t, en otras palabras, t será reemplazada por $t-1$, por lo que, si sustituimos en la descripción de $x(t)$, tenemos que:

$$x_{retrasada}(t) = x(t-1) = \begin{cases} e^{-2(t-1)} & t-1 \geq 0 \\ 0 & t-1 > 0 \end{cases}$$

que simplificando las desigualdades

$$x(t-1) = \begin{cases} e^{-2(t-1)} & t \geq 0 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

gráficamente →



Scanned by CamScanner

análogo a lo anterior, para que $x(t)$ esté adelantada 1 segundo sustituimos t por $t+1$ en la descripción original de $x(t)$

así pues

$$x_{adelantada}(t) = x(t+1) = \begin{cases} e^{-2(t+1)} & t+1 \geq 0 \\ 0 & t+1 < 0 \end{cases}$$

simplificando

$$x(t+1) = \begin{cases} e^{-2(t+1)} & t \geq -1 \\ 0 & t < -1 \end{cases}$$

gráficamente