RCFB24 Montiel Cruz Jorge de Jesús

4.1 Para una señal $x(t) = e^{-at} u(t)$, encuentre la transformada de Laplace $X(s)$ y su región de convergencia.

Por definición

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt$$

sabemos que $u(t) = 0$ para $t<0$

así pues. para $t > 0$ $u(t) = 1$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty}$$

debemos notar que $s \in \mathbb{C}$ y que cuando $t \to \infty$ $e^{-(s+a)t}$ no necesariamente desaparece

si $z = \alpha + j\beta$

entonces $e^{-zt} = e^{-(\alpha + j\beta)t} = e^{-\alpha t} e^{-j\beta t}$

$$|e^{-j\beta t}| = 1 \text{ sea cual sea el valor de } \beta$$

así si $t \to \infty$ $e^{-zt} \to 0$ solo si $\alpha > 0$

y si $\alpha < 0$ entonces e^{zt}

así:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-zt} = \begin{cases} 0 & Re\, z > 0 \\ \infty & Re\, z < 0 \end{cases}$$

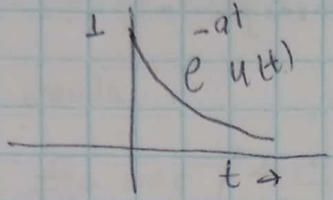
entonces

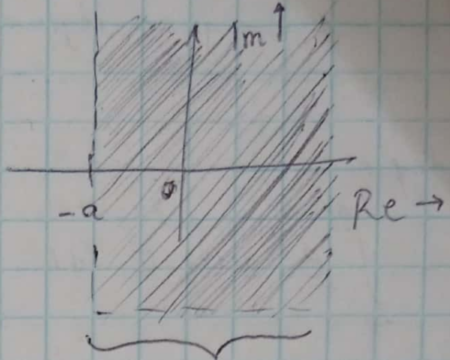
$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & Re(s+a) > 0 \\ \infty & Re(s+a) < 0 \end{cases}$$

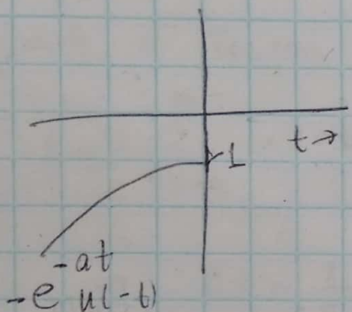
así pues.

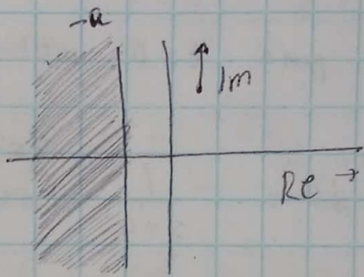
$$= \frac{1}{s+\alpha} \quad \text{si } Re(s+a) > 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-at} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad Re\, s > -a$$

la región de convergencia de $X(s)$ es $Re\ s > -a$,









Señales $e^{-at} u(t)$ y $-e^{-at} u(-t)$
tienen la misma transformada
de Laplace pero distinta
región de convergencia

4.2. Determine la transformada de Laplace de

a. $\delta(t)$
b. $u(t)$
c. $\cos wt\ u(t)$

a.
$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$
por propiedad. para cualquier s

$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ $\quad \delta(t) \Longleftrightarrow 1$. para toda s.

Scanned by CamScanner

b.

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0-}^{\infty} u(t)\, e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s} \quad Re\, s > 0$$

c.

$$\cos w_0 t\ u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}\right) u(t)$$

$$\mathcal{L}\{\cos w_0 t\ u(t)\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[e^{jw_0 t} u(t) + e^{-jw_0 t} u(t)\right]$$

de problemas anteriores.

$$\mathcal{L}\{\cos w_0 t\ u(t)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - jw_0} + \frac{1}{s + jw_0}\right]$$

$$= \frac{s}{s^2 + w_0^2} \qquad Re(s \pm j\omega) = Re\, s > 0$$

4.3 encuentre la transformada inversa de Laplace

a. $\dfrac{7s - 6}{s^2 - s - 6}$

b. $\dfrac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2}$

c. $\dfrac{6(s + 34)}{s(s^2 + 10s + 34)}$

d. $\dfrac{8s + 10}{(s+1)(s+2)^3}$

para a).

$$X(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)}$$

$$= \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s-3}$$

$$K_1 = \frac{7s+6}{\cancel{(s+2)}(s-3)}\Bigg|_{s=-2}$$

$$K_1 = \frac{-14-6}{-2-3} = 4$$

para K_2

$$K_2 = \frac{7s-6}{(s+2)\cancel{(s-3)}}\Bigg|_{s=3} = \frac{21-6}{3+2} = 3$$

$$X(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}\right) = (4e^{-2t} + 3e^{3t})u(t)$$

Para b.

$$X(s) = \frac{2s^2+5}{s^2+3s+2} = \frac{2s^2+5}{(s+1)(s+2)}$$

$X(s)$ es una fracción impropia así que,

$$X(s) = 2 + \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = \frac{2s^2+5}{\cancel{(s+1)}(s+2)}\Bigg|_{s=-1} = \frac{2+5}{-1+2} = 7$$

$$K_2 = \frac{2s^2+5}{(s+1)\cancel{(s+2)}}\Bigg|_{s=-2} = \frac{8+5}{-2+1} = -13$$

$$X(s) = 2 + \frac{7}{s+1} - \frac{13}{s+2} \longrightarrow x(t) = 2\delta(t) + (7e^{-t} - 13e^{-2t})u(t)$$

c. $X(s) = \dfrac{6(s+34)}{s(s^2+10s+34)}$

$$= \frac{6(s+34)}{s(s+5-j3)(s+5+j3)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+5-j3} + \frac{K_3}{s+5+j3}$$

De donde $K_3 = K_2^*$

Para K_1

$$= \frac{6(s+34)}{\cancel{s}(s+5-j3)(s+5+j3)}\bigg|_{s=0} = \frac{6(34)}{(5-j3)(5+j3)} = \frac{6(34)}{34} = 6$$

Para K_2

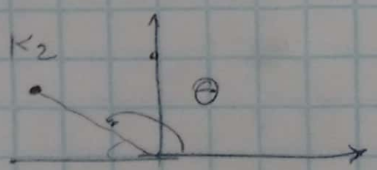
$$K_2 \to \frac{6(s+34)}{s(s^2+10s+34)}\bigg|_{s=-5+j3} = \frac{6(s+34)}{s(s+5-j3)(s+5+j3)}\bigg|_{s=-5+j3}$$

$$= \frac{6(s+34)}{6(-3-5j)} = \frac{29+j3}{-3-5j} = -3+j4 \Rightarrow K_3 = -3-j4$$

llevando lo anterior a su forma polar y usando

$$re^{-at}\cos(bt+\theta)\,u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\frac{re^{j\theta}}{s+a-jb} + \frac{1}{2}\frac{re^{-j\theta}}{s+a+jb}.$$

$$K_2 = \sqrt{25}\, e^{j\arctan(4/-3)} = 5e^{j\arctan(4/-3)}$$



$\theta = 126.86°$

$$K_2 = 5e^{j126.86°}$$
$$K_2^* = 5e^{-j126.86°}$$

$$X(s) = \frac{6}{s} + \frac{5e^{j126.86°}}{s+5-j3} + \frac{5e^{-j126.86°}}{s+5+j3}$$

así pues.

$$x(t) = \left[6 + 10e^{-5t}\cos(3t+126.86°)\right]u(t)$$

por fracciones parciales

$$X(s) = \frac{6(s+34)}{s(s^2+10s+34)} = \frac{6}{s} + \frac{As+B}{s^2+10s+34}$$

si hacemos $B=0$ y multiplicamos ambos lados por s y luego $s \to \infty$

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{6(s+34)}{s^2+10s+34} = 6 + \frac{As^2}{s^2+10s+34}\right)$$

$$\to \quad 0 = 6 + A$$

$$A = -6$$

para B.

si hacemos $s=1$

$$\frac{6(1+34)}{1+10+34} = \frac{-6+B}{1+10+34} + 6$$

$$B = -54$$

para d.

$$X(s) = \frac{8s+10}{(s+1)(s+2)^3}$$

$$= \frac{K_1}{s+1} + \frac{a_0}{(s+2)^3} + \frac{a_1}{(s+2)^2} + \frac{a_2}{s+2}$$

para K_1

$$K_1 = \frac{8s+10}{\cancel{(s+1)}(s+2)^3}\bigg|_{s=-1} = 2$$

Scanned by CamScanner

$$a_0 = \frac{8s+10}{(s+1)\cancel{(s+2)^3}}\Bigg|_{s=-2} = 6$$

$$a_1 = \frac{d}{ds}\left[\frac{8s+10}{(s+1)(s+2)^3}\right]\Bigg|_{s=-2}$$

$$= -2$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{8s+10}{(s+1)(s+2)}\right]\right\}_{s=-2} = -2$$

aui

$$X(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{6}{(s+2)^3} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\; x(t) = \left[2e^{-t} + (3t^2 - 2t - 2)e^{-2t}\right]u(t)$$