Instituto Politécnico Nacional

Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

Análisis de señales y sistemas

Examen de evaluación (EE01), martes 28 de febrero de 2017. **Nombre:**____ **Grupo:**______

Instrucciones:

- Cada problema/ejercicio debe tener procedimiento ordenado y completo que justifique adecuadamente la respuesta anotada.
- Si falta el procedimiento o este no justifica la respuesta anotada entonces el problema vale 0 puntos aunque la respuesta sea correcta.
- No realice procesos en estas hojas, use para ello las hojas anexas. Preferentemente use lápiz. No olvide identificar el ejercicio e inciso que está resolviendo. Anote su resultado final con tinta.
- No puede contestar el teléfono celular durante el examen
- Cualquier intento de fraude amerita un reporte en subdirección académica.
- Un examen sucio y/o en desorden puede provocar 10 puntos menos en la calificación del examen.

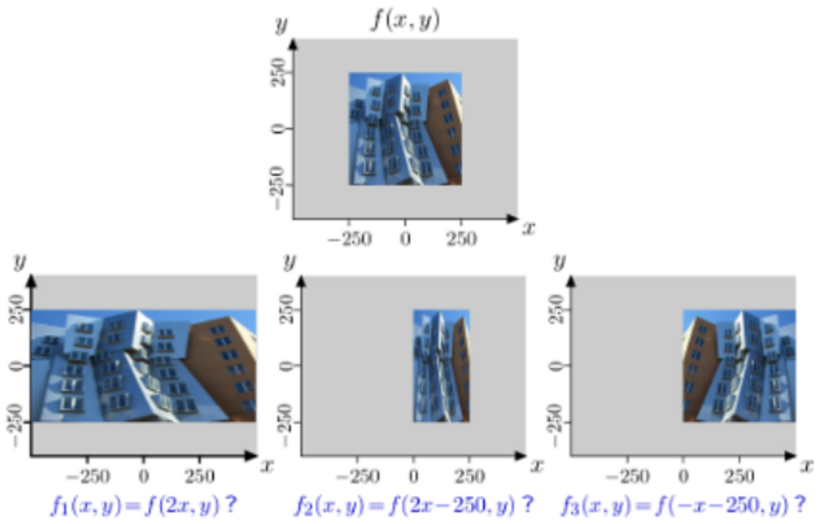


Figura 1: Transformación

1. (-5 hasta 5 puntos) Se calificaran aciertos menos errores, omisiones no cuentan. Contesta F (Falso) o V (Verdadero)

1. La delta de Dirac es una función ( )
2. Una señal tiene como modelo matemático una función ( )
3. Un conjunto discreto debe ser finito ( )
4. Una señal cuantizada corresponde a un conjunto finito en la amplitud (rango) ( )
5. La delta en tiempo discreto es una función ( )
6. La potencia de un coseno es su amplitud al cuadrado entre 2 ( )
7. Una señal de energía tiene potencia 0 ( )
8. De acuerdo a la Figura 1, la única transformación correcta es $f_1(x,y)$ ( )
9. Cuando una señal es periodica basta calcular la potencia en un periodo ( )
10. Cuando escalas una señal horizontalmente pude existir pérdida de información ( )

2. (15 puntos) Bosqueja las siguientes gráficas:

a) $f(t) = Sinc(\pi t - 5) + Sinc(\pi t + 5)$

b) $g(t) = rec(4t - 5) + rec(4t + 5)$

c) $h(t) = f(t)g(t)$

3. (10 puntos) Para una señal real $f(t)$ demuestra que su energía es la suma de la energía de su parte impar y par, es decir:

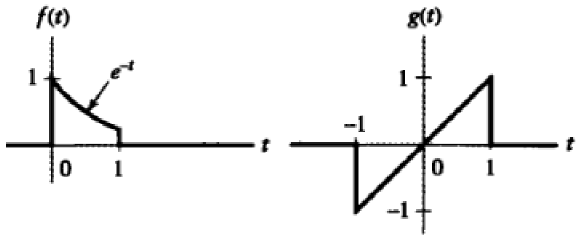
$$E_f = E_{f_i} + E_{f_p}$$

donde f_i, f_p se refieren a la parte impar y par respectivamente.

Sugerencia 1: ¡Tranquilo!

Sugerencia 2: Una señal se puede ver como la suma de sus componentes.

4. (30 puntos) Para las siguientes señales $f(t)$ y $g(t)$



a) (10 puntos) Gráfica y expresa de manera analítica por secciones

i) $g(3 - t)$

ii) $g(-4 - t)$

iii) $g(-0.5 - t)$

iv) $g(0.5 - t)$

b) (15 puntos) indica la expresión analítica por secciones.

i) $h_1(t) = f(t)g(-0.5 - t)$

ii) $h_2(t) = f(t)g(0.5 - t)$

iii) $h_3(t) = f(t)g(3 - t)$

c) (5 puntos) Gráfica $h_4(t) = g(t)\delta(t - 1/2)$

5. (5 puntos) Se tiene la siguiente señal

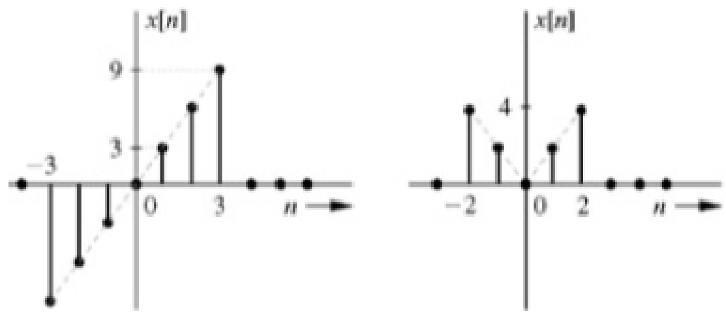
$$x(t) = t^2 + \frac{\operatorname{sen}(2t - 1)}{2t - 1}$$

se realizan las siguientes trasformaciones a esta señal, en el orden indicado

1. Se expande la señal 2 unidades horizontalmente
2. Se traslada 1 unidad hacia arriba
3. Se comprime verticalmente a un tercio
4. Se traslada horizontalmente 4 unidades a la izquierda

¿Cuál es la expresión de la señal $f(t)$ resultante al realizar las transformaciones indicadas una después de otra?

6. (5 puntos) Encuentra la energía de las siguientes señales



7. (10 puntos) Sea la señal $x[n]$ (de la derecha) del problema 6.

a) Escribe la expresión analítica de la señal $x[n]$ mostrada.

Bosqueja las gráficas de las siguientes señales (indica cada paso), no es necesario escribir las expresiones analíticas:

b) $f[n] = x[2n+1]u[n]$

c) $g[n] = x[2-n]\,(u[-n-1] - u[n-2])$

d) $h[n] = x[\frac{1}{3}n - 1] + 1$

8. (5 puntos) Resulelve los siguientes ejercicios:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} (2e^{-t})\,\delta(2t-1)\,dt =$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \big(t^2 - \cos(\pi t)\big)\,\delta(-t+1)\,dt =$

iii) Gráfica de $t^2(u(t-1) - u(t-3))$

iv) Derivada de $t^2(u(t-1) - u(t-3))$

v) Gráfica de iv)

9. (5 puntos) Buscamos $N_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$cos[\omega_0 n] = cos[\omega_0(n + N_0)]$$

de la suma de ángulos para la función coseno, se tiene

$$cos[\omega_0 n] = cos[\omega_0 n]cos[\omega_0 N_0] - sen[\omega_0 n]sen[\omega_0 N_0]$$

Entonces debe de suceder que $cos[\omega_0 N_0] = 1$ y $sen[\omega_0 N_0] = 0$ entonces $\omega_0 N_0 = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ o equivalentemente

$$\frac{N_0}{k} = \frac{2\pi}{\omega_0} \in \mathbb{Q}$$

Ahora si esto sucede, como $N_0 \in \mathbb{Z}$ y

$$N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k \in \mathbb{Q}$$

Así se elige k para tener un valor de N_0 entero.

Concluimos que:

La señal $cos[\omega_0 n]$ es periódica cuando $\frac{2\pi}{\omega_0} \in \mathbb{Q}$ y el periodo es el primer múltiplo entero de este número

Nota: Esto también es válido para la función seno

Por otro lado, pensemos que la diferencia de la frecuencia de dos cosenos es múltiplo de 2π, es decir existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\omega_0 - \omega_1 = 2\pi k$$

equivalentemente

$$\omega_0 = \omega_1 + 2\pi k$$

Entonces

$$\begin{aligned} cos[\omega_0 n] &= cos[(\omega_1 + 2\pi k)n] \\ &= cos[\omega_1 n]cos[2\pi kn] - sen[\omega_1 n]sen[2\pi kn] \\ &= cos[\omega_1 n] \end{aligned}$$

Así se concluye que:

Las señales en tiempo discreto $cos[\omega_0 n]$ y $cos[\omega_1 n]$ son iguales si la diferencia $\omega_0 - \omega_1$ es un múltiplo de 2π. Esto se anota como: $\omega_0 = \omega_1 \, mod \, 2\pi$ y se lee como: ω_0 es congruente con ω_1 módulo 2π.

Para $M \in \mathbb{Z}^+$, definimos

$$S_x[n] = cos[\frac{2\pi}{M}n] + cos[\frac{2\pi}{M}2n] + \ldots + cos[\frac{2\pi}{M}(M-1)n]$$

i) ¿Cada señal en la suma, es periódica? Argumente

ii) ¿La suma esta compuesta por señales distintas? Argumente

10. (10 puntos) Supongamos que tenemos una señal

$$f(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 cos(\omega_2 t + \theta_2) \tag{1}$$

con $\theta_i, A_i \in \mathbb{R}$ y $\omega_1 \neq \omega_2 \in \mathbb{R}^+$. Queremos saber si existe $T > 0$ de tal manera que

$$f(t) = f(t+T) \tag{2}$$

Para esto procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
f(t+T) &= A_1 cos(\omega_1(t+T) + \theta_1) + A_2 cos(\omega_2(t+T) + \theta_2) \\
&= A_1 cos(\omega_1 t + \theta_1 + \omega_1 T) + A_2 cos(\omega_2 t + \theta_2 + \omega_2 T) \\
&= A_1 cos(\omega_1 t + \theta_1) cos(\omega_1 T) - A_1 sin(\omega_1 t + \theta_1) sin(\omega_1 T) \\
&+ A_2 cos(\omega_2 t + \theta_2) cos(\omega_2 T) - A_2 sin(\omega_2 t + \theta_2) sin(\omega_2 T)
\end{aligned}$$

Para satisfacer la ecuación 2 necesariamente

$$\begin{aligned}
cos(\omega_1 T) &= 1 & \qquad cos(\omega_2 T) &= 1 \\
sen(\omega_1 T) &= 0 & \qquad sen(\omega_2 T) &= 0
\end{aligned}$$

observemos que para esto basta que

$$\omega_1 T = 2\pi m_1,\ m_1 \in \mathbb{Z}^+ \qquad \omega_2 T = 2\pi m_2,\ m_2 \in \mathbb{Z}^+ \tag{3}$$

al despejar T e igualar las dos ecucaciones anteriores se tiene que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

Entonces para que la señal $f(t)$ sea periódica se necesita que ω_1/ω_2 sea un número racional. Una vez que esto se verifique se puede pensar al cociente de las frecuencias como $\omega_1/\omega_2 = p/q$, entonces si existirá el periodo buscado y sería igual a

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_1} p = \frac{2\pi}{\omega_2} q$$

Cuando esto sucede decimos que las señales están relacionadas armónicamente, cuya frecuencia fundamental es $\omega_0 = 2\pi/T_0$ es decir ω_1 y ω_2 son multiplos de ω_0.

Nota 1. El mismo análisis es valido si ambas funciones son senos o si alguna es seno y otra es coseno.

i) (5 puntos) Calcula el periodo de la siguiente señal en caso de ser posible, así como la frecuencia fundamental

$$x(t) = 3sen(3\sqrt{2}t + \theta) + 7cos(6\sqrt{2}t + \phi)$$

i) (5 puntos) ¿La siguiente señal es periódica?, de ser así, ¿Cuál es su frecuencia fundamental?

Nota 2. Se puede extender el resultado a la cantidad que se desee de sumas de funciones senos y cosenos de la siguiente manera, se tiene que comprobar la condición de división racional de las frecuencias para cualquier pareja y con esto se garantiza la periodicidad. La frecuencia fundamental será el número más grande para el cual todas las frecuencias son múltiplos de esta.

$$\begin{aligned}
S_f(t) &= C_! cos(\omega_0 t + \phi_n) + C_2 cos(2\omega_0 t + \phi_2) + \\
&\ldots + a_i cos(i\omega_0 t) + b_i sen(i\omega_0 t) + \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)
\end{aligned}$$