RCFB08 Montiel Cruz Jorge de Jesús

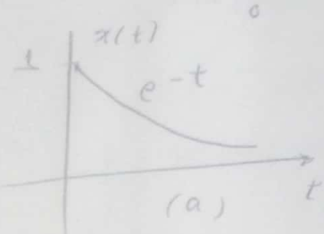
2.4-1

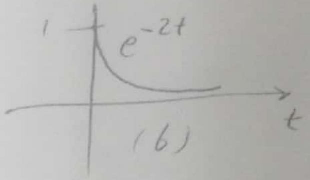
2.5

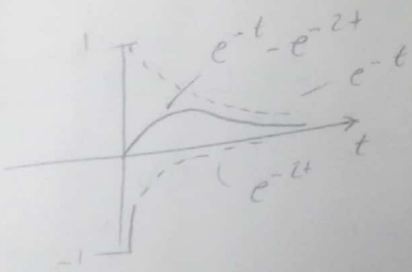
Para un sistema LTIC con una respuesta de impulso unitario $h(t) = e^{-2t}u(t)$ determine la respuesta $y(t)$ para la entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$

$x(t)$ y $h(t)$ son causales, así:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad t \geq 0$$







$\Rightarrow x(\tau) = e^{-\tau}u(\tau)$ y $h(t-\tau) = e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)$

como integramos respecto a τ la región de integración es $0 \leq \tau \leq t \rightarrow t - \tau \geq 0$

así $u(t)$ y $u(t-\tau)$ son igual a 1.

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau \quad t \geq 0$$

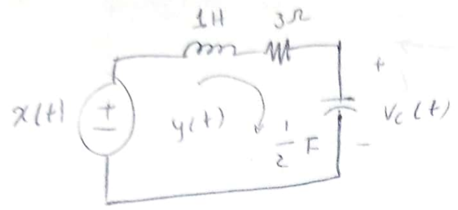
$$= e^{-2t}\int_0^t e^{-\tau} e^{2\tau} d\tau = e^{-2t}(e^{t}-1) \quad t \geq 0$$

así $y(t) = 0$ si $t < 0$

por lo tanto

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

2.6 encuentre la ecuacion de lazo $y(t)$ del circuito RLC para una entrada $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$ cuando todas las c.i son cero.



la ecuación de lazo para el circuito es.

$$(D^2+3D+2)y(t) = Dx(t)$$

la respuesta $h(t)$ para este sistema es

$$h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

la entrada:

$x(t) = 10e^{-3t}u(t)$ y la respuesta $y(t)$ es

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= 10e^{-3t}u(t) * [2e^{-2t} - e^{-t}]u(t)$$

usando propiedad distributiva de la convolución.

$$= 10e^{-3t}u(t) * 2e^{-2t}u(t) - 10e^{-3t}u(t) * e^{-t}u(t)$$

$$= 20[e^{-3t}u(t) * e^{-2t}u(t)] - 10[e^{-3t}u(t) * e^{-t}u(t)]$$

usando.

$$e^{\lambda_1 t}u(t) * e^{\lambda_2 t}u(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}u(t) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

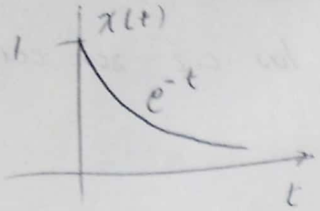
$$y(t) = \frac{20}{-3-(-2)}[e^{-3t} - e^{-2t}]u(t) - \frac{10}{-3-(-1)}[e^{-3t} - e^{-t}]u(t)$$

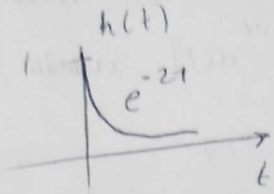
$$= -20(e^{-3t} - e^{-2t})u(t) + 5(e^{-3t} - e^{-t})u(t)$$

$$y(t) = (-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})u(t)$$

2.7 Determine gráficamente $y(t) = x(t) * h(t)$

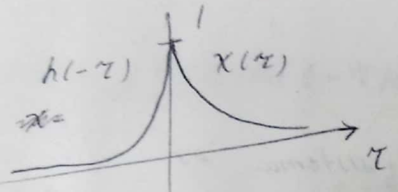
para $x(t) = e^{-t}u(t)$ y $h(t) = e^{-2t}u(t)$





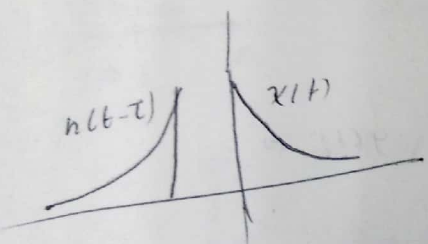
hacemos $x(\tau)$ y $h(-\tau)$

así pues:



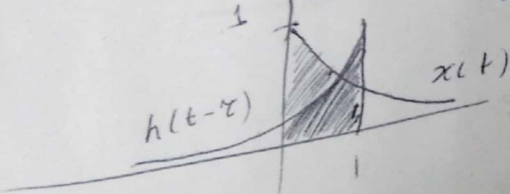
trasladamos $h(-\tau)$ t unidades.

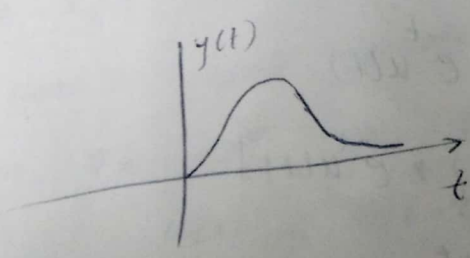
si $t \geq 0$ $h(-\tau)$ se desplaza a la derecha y si $t < 0$ se desplaza a la izquierda.



$t < 0$

$t > 0$





$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-2t}(e^{t} - 1)$$

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\, u(t)$$

2.8

encuentre.

$$c(t) = x(t) * g(t)$$

$$g(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & \text{segmento A} \\ -2e^{2t} & \text{" B} \end{cases}$$

es más fácil evaluar

$g(t) * x(t)$ que

$x(t) * g(t)$

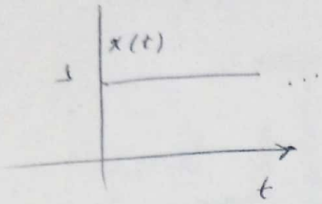


fig. 1

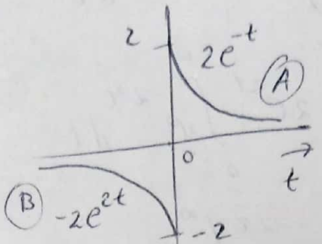


fig. 2

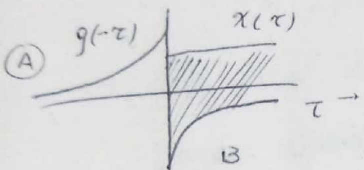
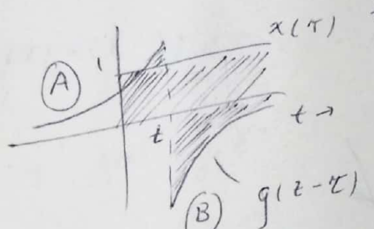


fig. (a)



fig(B)

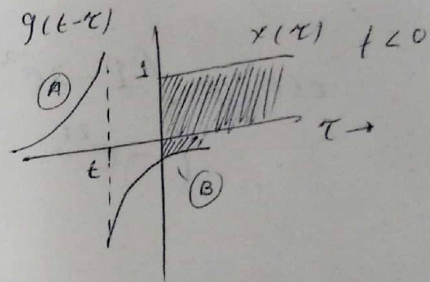


fig (c)

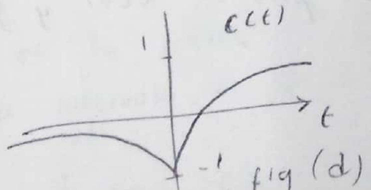


fig (d)

por lo tanto

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 2e^{-(t-\tau)} & \text{segmento A} \\ -2e^{2(t-\tau)} & \text{segmento B} \end{cases}$$

además $x(t) = 1$

así pues $x(\tau) = 1$

para obtener $c(t)$ trasladamos $g(-\tau)$ para obtener $g(t-\tau)$ es claro que $g(t-\tau)$ empalma con $x(\tau)$, el segmento A en el intervalo de 0 a t y el segmento B de t a ∞

así pues:

$$c(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^{t} 2e^{-(t-\tau)}\, d\tau + \int_t^{\infty} -2e^{2(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= 2(1-e^{-t}) - 1 = 1 - 2e^{-t}$$

para el caso en que $t \leq 0$ la figura (c) ilustra que solo el segmento B empalma con $x(\tau)$ para $\tau > 0$ así pues:

$$c(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} g(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} -2e^{2(t-\tau)} d\tau$$

$$= -2e^{2t} \int_0^{\infty} e^{-2\tau} dt$$

$$= e^{2t} \, e^{-2\tau} \Big|_0^{\infty}$$

$$= e^{2t}(0-1) = -e^{2t}$$

por lo tanto:

$$c(t) = \begin{cases} 1 - 2e^{-2t} & t \geq 0 \\ -e^{2t} & t \leq 0 \end{cases}$$

2.9 encuentre $x(t) * g(t)$ para las funciones $x(t)$ y $g(t)$ mostrados.

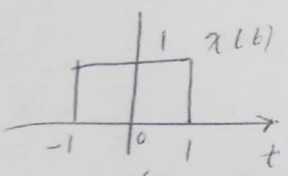


fig (a)

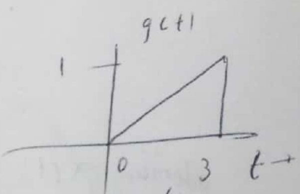


fig (b)

la expresión de $x(t)$ es más sencilla que la de $g(t)$ así, será esta función la que reflejamos y trasladamos

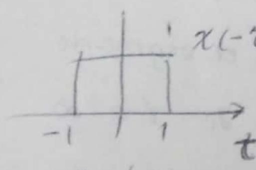


fig (c)

$\Rightarrow$

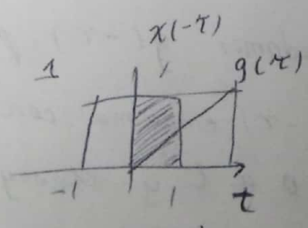


fig (d)

$\rightarrow$

$-1 \leq t \leq 1$

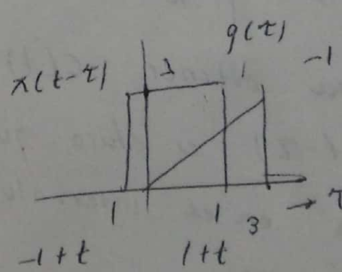


fig (e)

$1 \leq t \leq 2$

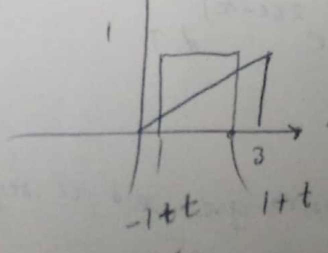


fig (f)

$\Rightarrow$

$2 \leq t \leq 4$

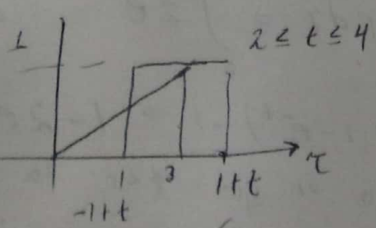


fig (g)

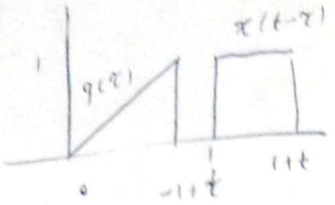


fig (h)

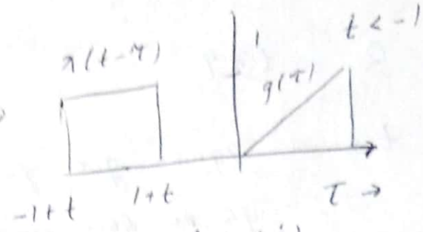


fig (i)

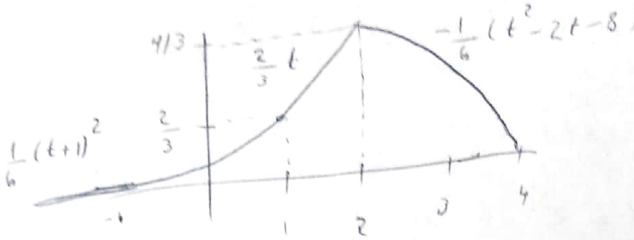


fig (j)

dado que $x(t)$ es más simple que $g(t)$

entonces haremos $g(t) * x(t) = c(t)$

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$x(t) = 1$ y $g(t) = \frac{1}{3} t$

así

$x(t-\tau) = 1$ y $g(\tau) = \frac{1}{3}\tau$

en la figura e. podemos ver que $x(t-\tau)$ empalma con $g(\tau)$ en el intervalo de 0 a $1+t$, así, en este intervalo

$$c(t) = \int_{0}^{1+t} g(\tau) x(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{1+t} \frac{1}{3}\tau\, d\tau = \frac{(1+t)^2}{6} \qquad -1 \leq t \leq 1$$

Para $t \geq 1$ pero ≤ 2 entonces $x(t-\tau)$ empalma con $g(\tau)$ en un intervalo de $-1+t$ a $1+t$ así.

$$c(t) = \int_{-1+t}^{1+t} \frac{1}{3}\tau\, dt = \frac{2}{3} t \qquad 1 \leq t \leq 2.$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 2}\left((1+t)^2 - (1+t)^2\right) = \frac{1}{6}(4t) = \frac{2}{3} t$$

Para $t \geq 2$ pero ≤ 4 $x(t-\tau)$ empalma con $g(\tau)$

de $-1+t$ a 3 así:

$$c(t) = \int_{-1+t}^{3} \frac{1}{3}\tau\, dt = \frac{1}{6}\left(9 - (-1+t)^2\right) = \frac{-t^2+2t+8}{6} \quad \text{de } 2 \leq t \leq 4.$$

Para $t \geq 4$

ya no hay empalme de ambas gráficas

así

$$c(t) = 0 \qquad t \geq 4$$

Para $t \leq -1$ igual que para $t \geq 4$

ya no hay empalme de $x(t-\tau)$ con $g(\tau)$

así

$$c(t) = 0 \qquad t \leq -1.$$

$$c(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t+1)^2 & 1 \leq t \leq 1 \\ \frac{2}{3}t & 1 < t \leq 2 \\ -\frac{1}{6}(t^2 - 2t - 8) & 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$