

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
UNIDAD ZACATENCO

**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
E INVESTIGACIÓN**

**“Modelo Matemático de los Fenómenos que Modifican
el Oleaje. Aplicado a las Obras de Protección de la
Central Núcleo Eléctrica Laguna Verde (CNLV)”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN
HIDRÁULICA

PRESENTA:
RAÚL GARNICA MIRANDA

DIRECTOR EXTERNO:
DR. HERMILIO RAMÍREZ LEÓN

DIRECTOR INTERNO:
DR. MIGUEL ÁNGEL VERGARA SÁNCHEZ



Mayo del 2008

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO



CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 05 del mes mayo del año 2008,
el (la) que suscribe Raúl Garnica Miranda alumno (a) del Programa
de MAESTRÍA EN HIDRÁULICA con número de registro A040087, adscrito
a ESIA U ZACATENCO, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente
trabajo de Tesis bajo la dirección de DR. HERMILIO RAMÍREZ LEÓN Y DR. MIGUEL
ÁNGEL VERGARA SÁNCHEZ y cede los derechos del trabajo intitulado “Modelo
Matemático de los Fenómenos que Modifican el Oleaje. Aplicado a las Obras de Protección
de la Central Núcleo Eléctrica Laguna Verde (CNLV)”, al Instituto Politécnico Nacional
para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del
trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido
escribiendo a la siguiente dirección rgarnicam0487@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el
usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



RAÚL GARNICA MIRANDA

Nombre y firma

Dedicatoria

Al creador de la vida y dueño del conocimiento, por haberme cuidado y permitido llegar hasta aquí.

A mis padres

Miguel F. Garnica Rivera y H. Estela Miranda García, por su amor y gran corazón, por su capacidad de entrega y haberme enseñado a luchar hacia delante, pero sobre todo por enseñarme a ser responsable, gracias a ustedes he llegado a esta meta.

A mis dos pilares de seguir adelante

Fabiola M. Padilla Fuentes, Mi esposa por el sacrificio, apoyo incondicional y sobre todo por el amor que me ha dado; a **mi hija Vania Paola** por llenarme de felicidad y ser el motor para lograr mis metas.

A mis familiares.

A mi hermana **Elizabet** por ser el ejemplo de una hermana mayor y de la cual aprendí aciertos y de momentos difíciles; a mi hermana menor, **Janeth** por soportarme tanto y el apoyo que difícilmente expresa; a **Karen, Ismael y Jesús** por ser mis sobrinos que siempre están al pendiente de mis logros. Esperando que humildemente este logro les sirva como inspiración, tal y como los suyos lo hacen en mí.

A mis abuelos

A mis abuelos Nestor y Tine, que donde quiera que se encuentren están al cuidado de mí, así como Juan y Esperanza por estar al pendiente de los estudios realizados.

Agradecimientos

- Durante estos años son muchas las personas e instituciones que han participado en este trabajo y a quienes quiero expresar mi gratitud por el apoyo y la confianza que me han prestado de forma desinteresada.
- En primer lugar quiero agradecer al **Instituto Politécnico Nacional** por la calida acogida y el apoyo recibido. Gracias de corazón por hacerme un pequeño sitio dentro de este gran Institución educativa que ya considero mi casa. Particularmente dentro de la **Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura** por la confianza y los medios recibidos para desarrollar mi Maestría.
- Al **Instituto Mexicano del Petróleo** por brindarme sus instalaciones para seguir día con día el desarrollo de este trabajo.
- Al **Dr. Hermilo Ramírez León** quien guió esta tesis sin importar todo el tiempo que me ha regalado, por sus sugerencias e ideas de las que tanto provecho he sacado, por su respaldo y sobre todo por su amistad.
- Al **Dr. Miguel Ángel Vergara Sánchez** director interno de esta tesis y asesor de estudios, por todo el apoyo tan valioso recibido durante toda mi formación profesional.
- Al **M. en C. Enrique Herrera Díaz** por basta experiencia en los temas centrales de esta tesis, que sin sus conocimientos y aportaciones no hubiera podido concluir esta tesis.
- Al **M. en C. Carlos Couder Castañeda** por sus sustanciales aportaciones en el desarrollo de la tesis.
- Al **M. en C Lucio Fragoso Sandoval**, Coordinador de la Maestría en hidráulica por su orientación y apoyo en todo momento.
- A los miembros de mi comisión revisora **Dr. Juan Manuel Navarro Pineda** y **Dr. Sergio Cruz León**, Por todos sus comentario y sugerencias que le dan el toque especial de la experiencia, debido a su gran preparación profesional.
- A mis compañeros **Loarry, Iván, Dwinel, Franklin y Ricardo** por haberme brindado su amistad y permitirme ser parte de un grupo de trabajo de excelencia.

- A mis **Profesores de la Maestría en Hidráulica** por compartir sus conocimientos y experiencias obtenidas durante su formación.
- Al cuñado **Paco** por facilitarme el equipo para concluir esta tesis de la mejor manera. (luego luego), así como a mis suegros, **Adela y Eleodoro** que me han apoyado en todo este tiempo.
- No puedo olvidar a mis compañeros y amigos de la Maestría con los cuales he compartido incontables horas de trabajo. Gracias por los buenos y malos momentos, por aguantarme y por escucharme.
- A todos aquellos que de alguna manera u otra forma ayudaron a la elaboración de esta tesis por muy mínimo que sea.

Resumen

En proyectos de gran relevancia en la hidráulica marítima, en nuestro país, se encuentra inmerso el oleaje que se propaga desde aguas profundas hacia aguas someras; éste incide en las estructuras para minimizar el transporte de sedimentos en la costa, así como también la protección de nuestros puertos mexicanos, para el intercambio de mercancías en otros países y nuestro territorio, siendo uno de los transportes mas económicos en la actualidad. Sin embargo, este tipo de obras llevan un estudio y análisis adecuado para su proyección y construcción, ya que si no se realiza adecuadamente pueden existir grandes problemas de agitación y transporte de sedimentos en el recinto portuario, generando grandes costos de mantenimiento para su correcta operación.

En este trabajo se presenta la modelación numérica de la ecuación de Berkhoff (1972) conocida como la ecuación de la pendiente suave (mild-slope equation), las componentes de la ecuación están deducidas para el oleaje con la teoría lineal, olas armónicas, los efectos debidos a corrientes y en una aproximación elíptica que describe la propagación de una onda en la superficie libre periódica y de amplitud finita sobre batimetrías complejas, donde su deformación al aproximarse a zonas de baja profundidad y obstáculos presenta los fenómenos de refracción, difracción y reflexión.

La solución de la ecuación de Berkhoff es trabajada y expresada en función de la razón de flujo del oleaje en sus componentes x y y , esto mediante un esquema implícito en el tiempo por medio de diferencias finitas. Se construyen matrices tridiagonales para las razones de flujo en el plano horizontal y una matriz pentadiagonal para la solución de la ecuación de la superficie libre en función de las razones de flujo antes calculadas. Se empleó una malla tipo Staggered-Cell donde los valores de las razones de flujo, celeridades y otras variables están ubicadas en las caras y el valor de la superficie libre se localiza en el centro de la celda.

La programación de la modelación numérica de los fenómenos del oleaje fue realizada con un modelo desarrollado en MATLAB de la aproximación elíptica de la misma ecuación de Berkhoff. Su aplicación fue encaminada a ver el comportamiento del oleaje sobre las obras de protección (rompeolas) de la Central Nucleoeléctrica de Laguna Verde, Veracruz México.

Otra aplicación del modelo, se presenta para determinar la pluma térmica de la descarga en la central, la influencia de los fenómenos del oleaje (regular) y la temperatura atmosférica sobre la superficie libre dentro del recinto.

En comparación con algunos ejemplos desarrollados mediante modelos matemáticos, se llega a la conclusión de que los resultados obtenidos en el modulo de oleaje son satisfactorios.

Abstract

In projects of great importance in the maritime hydraulic, in our country, is immersed the wave phenomena that propagates from deep water to shallow water; this affects in the structures to minimize the sediments transport on the coast, as well as protecting our Mexican ports, for the exchange of merchandise in other countries and our territory, being currently one of the more economical transportations. However, these type of structures need an adequate study and analysis for planning and construction, because if it is not carried out adequately, there can be important agitation and transportation problems of sediments in the port precinct, generating great maintenance costs for its correct operation.

This document presents the numerical modeling of the Berkhoff's equation (1972) in its elliptic form, known as the mild - slope equation. The components equation are deduced to the wave phenomena with the lineal theory, harmonic waves, and effects due to currents and describe the propagation of a wave in the periodic free surface and of finite amplitude over complex bathymetry, where its deformation approaching to low depth zones and obstacles presents the refraction, diffraction and reflection phenomena.

The solution of the Berkhoff 's equation is worked and expressed in function of the wave flow rate in its components x and y , this by means of a time implicit scheme through finite differences. Systems of tridiagonal matrices are built for the flow rate on the horizontal plane and a pentadiagonal matrix to solve the free surface equations in function of the flow rate calculated previously. A Staggered-Cell grid was employed, where the flow rate, velocities and other variables are located on the faces and the free surface is located on the center of the cell.

The programming of the wave phenomena numerical modeling was carried out with a model developed in MATLAB of the elliptic approximation of the Berkhoff's equation. Its application was aimed to see the wave phenomena behavior on the protection structures (breakwater) of the Laguna Verde Nuclear Power Station (Central Nucleoeléctrica de Laguna Verde), placed in Veracruz State, Mexico.

Another application of the model, the variation of the thermal plume is presented considering the wave phenomena (regular) and the influence of the atmospheric temperature over the free surface to show that these variables are an incident factor in the temperature variation inside the precinct.

In comparison with some examples developed by means of mathematical modeling, is possible to conclude that the results obtained in the wave module are satisfactory.

Glosario de Términos

Advección. Intercambio de energía, humedad o momentum como resultado de una heterogeneidad horizontal. También se refiere al transporte debido al movimiento del volumen de agua que contiene el suelo.

Aguas someras. Es la zona cercana a la costa que se ve delimitada por la relación ($h/L < 1/20$), en esta zona comienza en la zona de rompientes a la costa.

Aguas intermedias. Es la zona comprendida ($1/20 < h/L < 1/2$), empieza cuando el frente de ola sufre alteraciones debido a la profundidad.

Aguas profundas. En esta zona no sufre cambios el frente de ola producido por la profundidad y se propaga sin ningún cambio. Delimitada por la relación ($h/L > 1/2$).

Bahías. Entrada del mar en la costa, pero menor que el golfo.

Borrasca. También llamado ciclón, es una zona de baja presión atmosférica rodeada por un sistema de vientos que en el hemisferio norte se mueven en sentido opuesto a las agujas del reloj, y en sentido contrario en el hemisferio sur.

Calor. Transferencia de energía de una parte a otra de un cuerpo, o entre diferentes cuerpos, en virtud de una diferencia de temperatura. El calor es energía en tránsito; siempre fluye de una zona de mayor temperatura a una zona de menor temperatura, con lo que eleva la temperatura de la segunda y reduce la de la primera, siempre que el volumen de los cuerpos se mantenga constante

Corriente marina. Movimiento del agua del océano, horizontal y vertical que se caracteriza por una cierta regularidad, que puede tener una componente cíclica o más comúnmente formar un flujo continuo a lo largo de una trayectoria definida.

Quadtree. Es una estructura de datos en la cual cada nodo interno tiene hasta cuatro nodos, es uno de los mas usados para dividir un espacio dimencional subdividido en cuatro cuadrantes.

Cuerpo de agua somero. Cuerpo de agua en el que las dimensiones horizontales de su volumen son mucho mayores que las dimensiones verticales.

Estuario. Es un cuerpo de agua costero con una o mas bocas abiertas al mar con aporte de agua dulce en la zona de su cabeza, la cual se mezcla en la zona salina creando un ambiente con una alta variabilidad físico-química y por tanto ambiental y ecológica..

Fetch. Distancia o superficie sobre la mar en que sopla el viento con dirección y magnitud constante.

Forzamiento. Fuerza o impulso que al aplicarse a un fluido provoca alguna reacción.

Fronteras físicas. Son las fronteras que definen un cuerpo dentro del dominio de estudio.

Fronteras libres. Son las fronteras ubicadas arbitrariamente de acuerdo a la conveniencia del estudio y no definen un cuerpo físico sino que delimitan el área de dicho estudio.

Fuerza de Coriolis. Es una fuerza que actúa sobre una partícula en movimiento en un sistema que se encuentra en rotación. Esta fuerza ocasiona una desviación de la partícula, hacia la derecha de la dirección del movimiento en el Hemisferio Norte y a la izquierda en el Hemisferio Sur; la fuerza es proporcional a la velocidad de la partícula y a la latitud geográfica.

Golfo. Parte del mar que penetra en la tierra entre dos cabos.

Hidrodinámica. Parte de la mecánica que estudia los fluidos en movimiento y sus interacciones con las superficies que los limitan.

Hidrología. Ciencia natural que se encarga del estudio del agua, su ocurrencia, circulación y distribución en la superficie terrestre, sus propiedades químicas, físicas, y su relación con el medio ambiente, incluyendo a los seres vivos.

Litoral. Zona que limita el mar de la tierra.

Malla de cálculo. Es la división espacial mediante la cual se obtienen los nodos de cálculo para la resolución de las ecuaciones en espacios finitos.

Modelo. Esquema conceptual susceptible de tratamiento físico o matemático, que interpreta o predice el comportamiento de un sistema en el que se desarrolla un fenómeno determinado.

NM. Nivel medio del mar. Es el nivel del mar promedio entre los niveles de las mareas alta y baja

NR. Nivel en reposo de la onda. Corresponde al nivel del fluido en ausencia de ondas.

Oceanografía. Ciencia que se encarga del estudio de los océanos, su geografía, física, química, geología y sus interacciones biológicas.

Rides. Ondas pequeñas en el mar son caóticas es decir no van hacia ningún lado, es el inicio del oleaje.

SEA. Zona de generación de las olas y donde actúa directamente el viento.

SWEL. Zona de propagación de las olas en donde el viento ya no tiene tanta influencia.

Temperatura. Es un parámetro físico descriptivo de un sistema que caracteriza el calor, o transferencia de energía térmica, entre ese sistema y otros. Desde un punto de vista microscópico, es una medida de la energía cinética asociada al movimiento aleatorio de las partículas que componen el sistema.

Turbulencia. Es un estado del flujo de un fluido, en el cual las velocidades instantáneas presentan irregularidades aparentemente azarosas, de modo que en la práctica solamente las propiedades estadísticas pueden ser reconocidas y sujetas de análisis.

UTM. Sistema de coordenadas que se utiliza en mapas, cuyo significado es Universal Transversa Mercator.

ups. Unidad de medida de la salinidad que equivale a una unidad de partes por mil (*ppm*), y las siglas significan unidades prácticas de salinidad.

Volumen de control. Es la delimitación espacial donde se realizará la resolución de ecuaciones. Considerando como referencia el sistema cartesiano, el volumen de control tiene dimensiones Δx , Δy y Δz , las cuales en el límite expresan condiciones en un punto (x , y , z).

Nomenclatura

LETRAS LATINAS

SÍMBOLO	DEFINICIÓN	UNIDADES
a_x	Aceleración en la dirección x	$[LT^{-2}]$
a_y	Aceleración en la dirección y	$[LT^{-2}]$
A	Amplitud de la ola	$[L]$
Ac	Amplitud de la cresta	$[L]$
As	Amplitud del seno	$[L]$
b_0	Ancho entre ortogonales en el punto cero.	$[L]$
b_1	Ancho entre ortogonales en el punto uno.	$[L]$
B_l	Radio máximo de la partícula en la dirección x	$[L]$
B_h	Radio máximo de la partícula en la dirección y	$[L]$
$C(t)$	Constante de Bernoulli	
C	Celeridad de la onda	$[LT^{-1}]$
C'	Velocidad relativa de propagación de la ola.	$[LT^{-1}]$
C_g	Celeridad de grupo	$[LT^{-1}]$
C_{10}	Coeficiente de superficie de arrastre evaluado con una velocidad del viento a 10 m. de altura	$[LT^{-1}]$
Cn	Es la función elíptica del coseno	
C'_g	Velocidad de grupo relativa.	$[LT^{-1}]$
dt	Duración del viento	$[T]$
D_{er}	Disipación de energía por unidad de área por rompimiento.	
D_{ef}	Disipación de energía por unidad de área por fricción del fondo.	
E	Energía total de la ola.	$[FL^{-1}]$
Ec	Energía cinética	$[FL^{-1}]$
Ep	Energía potencial	$[FL^{-1}]$
E_u	Energía por unidad de superficie del mar	$[FL^{-1}]$
$E(m)$	Es la integral elíptica completa de segundo orden	
f	Frecuencia cíclica	$[T^{-1}]$
f_p	Frecuencia pico espectral	$[T^{-1}]$
F	Fetch o longitud de la zona de generación	$[L]$
g	Aceleración de la gravedad	$[LT^{-2}]$
h	Profundidad de la columna de agua	$[L]$
h_b	Profundidad de rompimiento	$[L]$
H	Altura de la ola en aguas intermedias	$[L]$

H_0	Altura de la ola en aguas profundas	[L]
H_h	Altura de la ola en aguas someras	[L]
H_s	Altura significante de la ola	[L]
H'	Altura de la onda estacionaria	[L]
H_m	Altura de la onda modificada	[L]
H_b	Altura de la ola rompiente	[L]
i	Unidad imaginaria	
k	Número de onda	[L^{-1}]
k_x	Componente en la dirección x del número de onda	
k_y	Componente en la dirección y del número de onda	
\vec{k}	Vector número de onda	
K_p	Factor de respuesta de la presión	
K	Representa la integral elíptica de primer especie	
K_t	Coeficiente de intensidad turbulenta	
K_r	Coeficiente de refracción	
K_s	Coeficiente de propagación en aguas someras	
K_D	Coeficiente de difracción	
K_R	Coeficiente de reflexión	
L	Longitud de la onda en aguas intermedias	[L]
L_0	Longitud de la onda en aguas profundas	[L]
L_h	Longitud de la onda en aguas someras	[L]
L_x	Longitud de la onda en la dirección x	[L]
L_y	Longitud de la onda en la dirección y	[L]
m	Representa el parámetro elíptico	
m_o	Momento de orden cero	[L^2]
M	Numero de celdas en la dirección x	
n	Factor de grupo	
n_c	Coordenada en la dirección normal al mismo	
n_p	Coeficiente	
N	Numero de celdas en la dirección y	
p	Presión hidrostática	[FL^{-2}]
p_a	Presión atmosférica	[FT^{-2}]
P	Flujo de energía o potencia	[FLT^{-1}]
Q_p	Agudeza de pico	
Re	Implica que la solución es solamente la parte real de la expresión entre paréntesis	
s	Representa la coordenada a lo largo del rayo	
S	Función de la fase	

$S(\omega)$	Densidad de energía de la ola	$[T^{-1}]$
t	Variación en el tiempo	$[T]$
T	Periodo de la ola	$[T]$
T'	Periodo de la ola relativo	$[T]$
T_p	Periodo pico de la ola	$[T]$
T_s	Periodo significante de la ola	$[T]$
u_*	Velocidad de fricción del viento	$LT^{-1}]$
\vec{u}	Vector velocidad	
U_v	Velocidad del viento	$[LT^{-1}]$
Ur	Número de Ursell	
U_{10}	Velocidad del viento medida a diez metros sobre el nivel medio del mar	$[LT^{-1}]$
$U_{19.5}$	Velocidad del viento a 19.5 metros sobre la superficie del mar	$[LT^{-1}]$
U	Es el transporte de masa para un punto localizado a una profundidad z	
\bar{U}	Velocidad promedio del flujo	$[LT^{-1}]$
\vec{U}	Es el campo de velocidades asociada a la corriente	
\vec{w}	Vorticidad	
y_v	Distancia vertical sobre el nivel medio del mar	$[L]$
z_v	Altura a la que se desea la velocidad del viento	$[L]$
(u, v, w)	Velocidades correspondientes al plano cartesiano en al dirección (x, y, z)	
(x, y, z)	Plano cartesiano de referencia	

LETRAS GRIEGAS

SIMBOLO	DEFINICION	UNIDADES
α	Parámetro que depende del fetch y del viento	
β	Es el ángulo del perfil del fondo respecto a un plano horizontal	
γ	Peso específico del agua	$[FL^{-3}]$
γ_e	Relación de esbeltez	
δ	Altura relativa de la onda	
$\delta \sim O(\mu_p^2)$	Representa orden de magnitud de la profundidad relativa	
Δz	Sobre elevación media del mar	$[L]$
ε	Peralte de la onda	
ε_E	Parámetro para describir la anchura espectral	
ς	Posición de la partícula en la dirección x .	$[L]$
ζ_b	Índice de profundidad rompiente	
η	Superficie libre del agua, medida del nivel medio de referencia	$[L]$
η_m	Variación de la superficie libre del agua debida a la marea	$[L]$
θ	Angulo de incidencia de las ondas con respecto ala línea de costa	
θ_0	Angulo de incidencia de las ondas en el punto cero	
θ_1	Angulo de incidencia de las ondas en el punto uno	
μ_p	Profundidad relativa	
ξ	Posición de la partícula en la dirección y .	$[L]$
ξ_0	Parámetro de similitud de rompimiento en la zona de aguas profundas	
ξ_b	Parámetro de similitud de rompimiento en la zona de aguas poco profundas	
π	Relación del perímetro de una circunferencia con la amplitud de su diámetro. 3.141592653589793	
ω	Frecuencia angular	$[T^{-1}]$
ω'	Frecuencia relativa angular de la ola.	$[T^{-1}]$
ρ	Densidad del agua	$[FT^2 L^{-4}]$
ρ_a	Densidad del aire	$[FT^2 L^{-4}]$
τ_0	Fricción tangencial del viento	$[FL^{-2}]$
ϕ_1	Función que depende de (x, y, t)	
ϕ	Angulo entre la dirección de propagación de la ola y la dirección de la corriente.	
Φ	Potencial de velocidad	
φ	Factor de ponderación comprendida entre cero y uno	
Ψ	Función de corriente	
Ω_b	Índice de altura rompiente	

Índice general

Dedicatoria	i
Agradecimientos	iii
Resumen	v
Abstract	vi
Glosario de terminos	vii
Nomenclatura	x
Indice	xiv
Lista de figuras	xix
Lista de tablas	xx
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	
1.1. Antecedentes	1
1.2. Justificación	2
1.3. Objetivos	4
1.3.1. Objetivo General	4
1.3.2. Objetivos Específicos	4
1.4. Descripción del trabajo	4
CAPÍTULO 2 GENERALIDADES	
2.1. Introducción	7
2.2. Oleaje	7
2.2.1. Clasificación del oleaje	8
2.2.2. Magnitudes características del oleaje	11
2.2.3. Definición de parámetros adimensionales	17
2.3. Espectro de oleaje	18
2.3.1. Parámetros espetrales	19
2.3.2. Modelos espetrales de un estado del mar	22

CAPÍTULO 3	TEORÍAS DE OLEAJE Y CLASIFICACIÓN DE MODELOS EXISTENTES	
3.1.	Introducción	29
3.2.	Ecuaciones de gobierno de los modelos de circulación y propagación de oleaje	30
	3.2.1. Potencial de velocidades. Ecuación de Laplace	31
	3.2.2. Función de corriente	33
	3.2.3. Condiciones de contorno	33
	3.2.4. Condición cinemática	34
	3.2.5. Condiciones dinámicas	35
	3.2.6. Condiciones laterales	35
	3.2.7. Condiciones temporales	36
	3.2.8. Límite de validez de las teorías de oleaje	37
3.3.	Teoría de la ola de amplitud pequeña	39
	3.3.1. Onda progresiva	41
	3.3.2. Ondas estacionarias y cuasi – estacionarias	51
3.4.	Teoría de las olas de amplitud finita	57
	3.4.1. Solución de Stokes	57
	3.4.2. Teoría Cnoidal	64
	3.4.3. Teoría de la ola solitaria	65
3.5.	Clasificación de los modelos de propagación de oleaje	68
	3.5.1. Introducción	68
	3.5.2. Primera generación	69
	3.5.3. Segunda generación	70
	3.5.4. Tercera generación	71
CAPÍTULO 4	FENÓMENOS QUE MODIFICAN EL OLEAJE	
4.1.	Introducción	73
	4.1.1. Conservación de las ondas (Teoría del Rayo)	74
	4.1.2. Conservación de energía (Acción de la onda)	75
4.2.	Refracción	76

4.2. 4.2.1. Definición 4.2.2. Refracción por efecto de fondo 4.2.3. Soluciones 4.3. Difracción 4.3.1. Definición 4.3.2. Soluciones 4.4. Refracción y Difracción 4.4.1. Solución 4.4.2. Versión de la ecuación de la pendiente suave que incluye al la variable tiempo 4.5. Reflexión 4.5.1. Definición 4.5.2. Soluciones 4.6. Rompiente 4.6.1. Definición 4.6.2. Clasificación 4.6.3. Soluciones CAPÍTULO 5 MODELO NUMÉRICO DE OLEAJE	76 76 78 83 83 85 89 89 92 95 95 96 100 100 102 103
5.1. Antecedentes 5.2. Modelo de Oleaje refracción y difracción 5.2.1. Submódulo de refracción y difracción 5.2.2. Método para calcular la refracción y difracción 5.2.3. Cálculo de la altura de ola 5.2.4. Revisión del valor del gradiente de la función 5.2.5. Condiciones de frontera 5.2.6. Secuencia de cálculo 5.2.7. Cálculo de la superficie libre 5.2.8. Cálculo de velocidades Ejemplos y Validación 5.3. Modelo de Oleaje refracción, difracción y reflexión 5.3.1 Ecuaciones de diferencias finitas del modelo refracción-difracción-reflexión.	109 110 111 113 115 115 116 117 118 118 119 124 125

5.3.1	Condiciones de frontera	128
	Ejemplos y Validación	130
CAPÍTULO 6		
ÁREA DE ESTUDIO, CENTRAL NÚCLEO ELÉCTRICA		
LAGUNA VERDE		
6.1.	Antecedentes	137
6.2.	Información necesaria	138
6.2.1.	Aspectos Geográficos	139
6.2.2.	Aspectos meteorológicos	141
6.2.3.	Oceanografía	145
6.2.4.	Hidrología.	151
6.3.	Comportamiento de la temperatura dentro de la zona protegida, sin considerar oleaje	155
6.3.1.	Condiciones para el escenario de simulación	155
6.4.	Comportamiento de la temperatura dentro de la zona protegida, considerando oleaje	158
6.4.1.	Generación de la malla	159
6.4.2	Diseño de escenarios del modelación	160
6.4.3	Dirección de oleaje más frecuente.	161
6.4.4	Dirección de oleaje crítico.	165
6.5.	La variación de la temperatura en el recinto	169
6.5.1	Flujo neto de calor	169
6.5.2	Flujo neto de calor para volumen finito	170
CONCLUSIONES, PERSPECTIVAS Y		
RECOMENDACIONES		
	Conclusiones	171
	Perspectivas	173
	Recomendaciones	173
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		175

ANEXOS

1.	El Modelo Numérico YAXUM/3D	179
2.	Diagramas del modelo	191
3.	Artículos	197

Índice de Figuras

CAPITULO 2

Figura 2.1	Distribución energética de las ondas de superficie	9
Figura 2.2	Definición de parámetros asociados a la onda	12
Figura 2.3	Ejemplo de un registro de oleaje	13
Figura 2.4	Ondas de crestas largas	14
Figura 2.5	Definición de ejes y parámetros. Incidencia oblicua	15
Figura 2.6	Espectro del registro de oleaje	19
Figura 2.7	Envolvimiento de un perfil de onda irregular	20

CAPITULO 3

Figura 3.1	Condiciones de contorno	34
Figura 3.2	Regiones de validez de las teorías de las olas	38
Figura 3.3	Perfiles de la onda de acuerdo a las diferentes teorías	39
Figura 3.4	Propagación del perfil de la onda	42
Figura 3.5	Referencia para la trayectoria de las partículas	47
Figura 3.6	Trayectoria de las partículas en una onda progresiva para las diferentes profundidades	48
Figura 3.7	Distribución de presiones hidrostática y dinámicas de la ola	50
Figura 3.8	Representación de una onda estacionaria	53
Figura 3.9	Campo de velocidades de las partículas para una onda estacionaria	54
Figura 3.10	Involución de la superficie de una onda quasi-estacionaria para diferentes valores de ωt y su envolvente	55
Figura 3.11	Características de un grupo de ondas	55
Figura 3.12	Perfil de la superficie libre utilizando la segunda y primera aproximación	59
Figura 3.13	Dirección del transporte de masa	60
Figura 3.14	Esquema de una ola solitaria	65
Figura 3.15	Valores de M y N en función de H/h . Según Punk (1949)	67

CAPITULO 4

Figura 4.1	Fenómenos que modifican el oleaje	73
Figura 4.2	Diagrama de Refracción de oleaje	77
Figura 4.3	Rayos producidos por la reflexión del oleaje	79
Figura 4.4	Construcción del diagrama de refracción por el método del rayo	81

Figura 4.5	Diagramas de los rayos de ola	83
Figura 4.6	Diagramas de difracción	84
Figura 4.7	Difracción del oleaje en el extremo de un rompeolas	85
Figura 4.8	Determinación de signos de β, β'	88
Figura 4.9	Sistema de coordenadas utilizado para la difracción	89
Figura 4.10	Reflexión perfecta	96
Figura 4.11	Reflexión con un ángulo de incidencia	97
Figura 4.12	Angulo máximo de la cresta	100
Figura 4.13	Tipo de perfiles de rompiente de olas sobre playas(modificado) de Dean and Dalrymple (1994)	103
Figura 4.14	Coeficiente de rompimiento. Wijnberg-van Rijn (1995)	107

CAPITULO 5

Figura 5.1	Coordenadas de referencia y notación usada en el modelo de refracción y difracción	112
Figura 5.2	Batimetría de la zona de estudio	120
Figura 5.3	Propagación de frentes de ola, con ángulo de incidencia de 30°	120
Figura 5.4	Alturas de ola conforme se acerca a la línea de costa.	121
Figura 5.5	Batimetría de la zona de estudio.	121
Figura 5.6	Propagación de frentes de ola, con ángulo de incidencia de 90°.	122
Figura 5.7	Propagación de frentes de ola, con ángulo de incidencia de 90° (Martínez, 2004).	122
Figura 5.8	Alturas de ola conforme se acerca a la línea de costa.	123
Figura 5.9	Alturas de ola conforme se acerca a la línea de costa (Martínez, 2004).	123
Figura 5.10	Dominio idealizado.	130
Figura 5.11	Propagación del frente de ola. t = 49 seg.	131
Figura 5.12	Propagación del frente de ola. t = 88 seg.	132
Figura 5.13	Traslape del modelo con lo expuesto en la teoría.	132
Figura 5.14	Propagación de la onda entre dos obstáculos.	133
Figura 5.15	Propagación de la onda en un obstáculo paralelo a la costa.	134

CAPITULO 6

Figura 6.1	Variación de la temperatura en la obra de toma, para época de lluvias.	138
Figura 6.2	Esquema de una Central Nucleoeléctrica	138
Figura 6.3	Localización geográfica de la CNLV	140
Figura 6.4	Obra de toma superficial, de la CNLV	140
Figura 6.5	Vientos presentados en Veracruz	141
Figura 6.6	Datos de viento de enero a diciembre del 2004, en la CNLV	142
Figura 6.7	Temperatura ambiente media mensual (°C) para el 2004, estación meteorológica de la CNLV	143

Figura 6.8	Precipitación media mensual (mm) para el periodo (1973-2004), estación meteorológica de la CNLV	144
Figura 6.9	Evaporación media mensual (mm) para el periodo 1977-1984, estación meteorológica de la CNLV	144
Figura 6.10	Batimetría de la zona de estudio en el plano (x , y)	146
Figura 6.11	Batimetría de la zona de estudio en el plano (x , y , z)	146
Figura 6.12	Zonificación de acuerdo a condiciones físicas	147
Figura 6.13	Régimen anual de oleaje	147
Figura 6.14	Rosas de dirección de oleaje, ciclos 1 al 10	148
Figura 6.15	Rosa de dirección de oleaje	148
Figura 6.16	Régimen anual de corrientes	149
Figura 6.17	Rosa de dirección de corrientes	150
Figura 6.18	Variación del nivel medio del mar en el puerto de Veracruz en el año 2005	151
Figura 6.19	Marea medida en el muelle dentro de la obra de toma	152
Figura 6.20	Ubicación del río El Viejón	153
Figura 6.21	Hidrograma del río El Viejón	154
Figura 6.22	Dispersión de la pluma térmica del sistema de enfriamiento de la CNLV, para época de lluvias. a) 1 día de simulación, b) 3 días de simulación, c) 9 días de simulación, d) 45 días de simulación, e) 90 días de simulación, f) 120 días de simulación.....	156
Figura 6.23	Vectores velocidad para la simulación de la pluma térmica de la CNLV, para época de lluvias. a)1 día de simulación, b) 8 días de simulación, c) 46 días de simulación, d) 54 días de simulación, e) 90 días de simulación, f) 120 días de simulación.....	157
Figura 6.24	Evolución de la pluma térmica, en la CNLV. Para época de lluvias.	158
Figura 6.25	Malla del dominio en estudio.	159
Figura 6.26	Submalla en las obras de protección.	160
Figura 6.27	Simulación del oleaje en dirección Sur-Este.	162
Figura 6.28	Simulación del oleaje en dirección Sur-Este en el plano (x , y , z)	162
Figura 6.29	Simulación del oleaje en dirección Sur-Este: a) 50^s de simulación, b) 100^s de simulación, c) 150^s de simulación, d) 200^s de simulación, e) 250^s de simulación y f) 300^s de simulación.	163
Figura 6.30	Perfiles de la superficie libre del agua: a) 50^s de simulación, b) 100^s de simulación, c) 150^s de simulación, d) 200^s de simulación, e) 250^s de simulación y f) 300^s de simulación.	164
Figura 6.31	Simulación del oleaje en dirección crítica Sur-Oeste.	165
Figura 6.32	Simulación del oleaje en dirección Sur-Oeste en el plano (x , y , z)	166
Figura 6.33	Simulación del oleaje en dirección Sur-Este: a) 50^s de simulación, b) 100^s de simulación, c) 150^s de simulación, d) 200^s de simulación, e) 250^s de simulación y f) 300^s de simulación.	167
Figura 6.34	Perfiles de la superficie libre del agua: a) 50^s de simulación, b) 100^s de simulación, c) 150^s de simulación, d) 200^s de simulación, e)	

250 s de simulación y f) 300 s de simulación.	168
Figura 6.36 Variación de la temperatura en un punto dentro de la zona protegida por las escolleras	170

CONCLUSIONES, PERSPECTIVAS Y RECOMENDACIONES

Figura 1 Comparación de los modelos de oleaje.....	172
Figura 2 Zona donde se encuadran las estructuras	173

Índice de Tablas

CAPITULO 2

Tabla 2.1	Clasificación de las ondas conforme a la profundidad relativa	10
Tabla 2.2	Tipos de onda con sus mecanismos generadores, periodos y longitudes características así como fuerzas de control	11
Tabla 2.3	Clasificación de las ondas con el parámetro numero de onda	18

CAPITULO 3

Tabla 3.1	Simplificación de las ecuaciones hiperbólicas	44
Tabla 3.2	Características de la onda progresiva	56
Tabla 3.3	Características de la onda estacionaria	57
Tabla 3.4	Tipos de Regímenes de Onda	68
Tabla 3.5	Clasificación de ondas largas	69

CAPITULO 4

Tabla 4.1	Tipos de rompientes de las olas con relación ξ_o	104
-----------	--	-----

CAPITULO 5

Tabla 5.1	Parámetros obtenidos mediante series de Taylor	127
-----------	--	-----

CAPITULO 6

Tabla 6.1	Frecuencia de vientos, Observatorio de Veracruz, Ver.1987-1997	142
Tabla 6.2	Frecuencia de vientos en la CNLV, por rangos de intensidad del período enero a diciembre del 2004	143
Tabla 6.3	Síntesis de Altura de Oleaje	147
Tabla 6.4	Síntesis de Período de Oleaje	149
Tabla 6.5	Intensidad de corrientes superficiales en el frente costero de la CNLV Período de mediciones: 1982 a 1984	150
Tabla 6.6	Gastos máximos probables, en el río El Viejón	154

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

El oleaje puede ser definido como una sucesión de ondas que viajan sobre una superficie de agua, las cuales se propagan desde mar adentro hacia la costa, presentando forma, dirección, altura y periodo irregular. Siendo el viento, el principal generador del oleaje se desplaza sobre la superficie del agua provocando en ocasiones modificaciones a la línea costera; por esta razón, el oleaje, no es un movimiento periódico de las aguas, o constante, sino un movimiento irregular. Cuando el viento sopla con suavidad las olas tienen escasa altura, pero si se desata el huracán alcanzan magnitudes considerables, de hasta 20 metros de altura, estrellándose con enorme fuerza contra la costa.

Al momento de propagarse el oleaje desde mar adentro hacia la costa, éste sufre una serie de modificaciones, debido principalmente al fondo marino que va disminuyendo la profundidad, el tipo de material que se encuentre en el fondo y la configuración de la costa, generan una serie de fenómenos que modifican el frente de la ola. Estos fenómenos que modifican al oleaje son: refracción, difracción, reflexión y rompiente. La refracción es cuando hay un cambio de dirección del frente del oleaje haciéndose paralelo a la batimetría conforme se va acercando a la línea de costa, así como algunos otros cambios que más adelante se detallaran; la difracción es el cambio de dirección del frente de la ola producido por un obstáculo natural o artificial; la reflexión es cuando llega el frente de la ola a un obstáculo natural o artificial choque y su energía no se disipa totalmente en el obstáculo, el frente regresa con menor energía y la rompiente es cuando la celeridad es mayor en la cresta que en el valle de la ola produciendo un colapso de la cresta.

Una de las razones que ha provocado el interés del fenómeno de la interacción ola-lecho marino-estructura, es porque algunas instalaciones costa fuera (tuberías, plataformas, etc) han sido dañadas, como consecuencia de la respuesta del lecho marino inducida por oleaje en la vecindad de la estructura (Clukey *et al.*, 1989; Lundgren *et al.*, 1989), sin considerar las causas de construcción.

En aguas someras o en oleaje extremo, la variación de la presión del oleaje puede inducir esfuerzos y deformaciones considerables en el lecho marino, causando falla del suelo provocando ruptura de las estructuras por ejemplo los rompeolas que crean zonas protegidas, por la constante incidencia del oleaje. Bajo oleaje extremo, se debe analizar la fatiga de la estructura y la estabilidad dinámica del suelo.

Hasta la fecha ha existido una tendencia a modelar por separado los procesos asociados al oleaje, debido que las ecuaciones que se generan tienen un alto grado de complejidad y esto es por que los modelos matemáticos presentan varias limitaciones inherentes principalmente por los términos altamente no lineales, y condicionan el rango de profundidades relativas.

Por otro lado, los modelos existentes no permiten cambiar el código fuente, impidiendo tomar otros criterios para problemas específicos, por lo que se realizó un modelo matemático, que permita simular los fenómenos que modifican al oleaje conjuntamente con el modelo hidrodinámico YAXUM/3D, en donde se pueda manipular el código fuente para acoplarlo fácilmente al área de interés, por lo que, en este trabajo se aplica a las obras de protección de la Central Nucleoeléctrica Laguna Verde (CNLV), para determinar el efecto del oleaje incidente sobre las estructuras y la recirculación de la pluma térmica, para un mejor diseño de las mismas.

También por que en estudios anteriores realizados por Campos, en su trabajo titulado Modelación Matemática de Descargas Térmicas en Medios Marinos. Aplicación a la descarga de la Central Nucleoeléctrica Laguna Verde, se realizó una comparación de la medición puntual de la temperatura en la obra de toma con los resultados del modelo mediante una gráfica de la temperatura con respecto al tiempo, en la cual se obtienen datos que tenían una variación importante en la temperatura conforme el incremento de tiempo y en el modelo se dibujó una línea recta, suponiendo que esta variación en el campo se debe principalmente al oleaje. (Campos 2006)

1.2. Justificación.

La investigación que se utiliza en las ciencias del mar, sea cual fuere la índole de su especialidad, basada en la observación de fenómenos colectivos o en numerosas observaciones respecto a uno en particular, debe siempre representarse numéricamente para lograr una comprobación experimental. Esto da, en gran medida, mayor rigor y validez a la mirada de conjunto y a la proposición de las conclusiones. Permite, asimismo, hacer predicciones, sobre todo de aquellos fenómenos cuya variación es tan grande que difícilmente se pueden expresar con rígidas fórmulas matemáticas. En los últimos tiempos, se ha manifestado una fuerte tendencia en las ciencias hacia la formulación de modelos matemáticos que consisten en la representación numérica de los elementos que forman un sistema en la naturaleza, los que permiten conocer sus interrelaciones y predecir su comportamiento, ya que constituyen la única forma de manejar situaciones muy complicadas y de probar hipótesis científicas básicas. Sin embargo todavía no se cuenta con modelos matemáticos enteramente satisfactorios en relación con los fenómenos que se presentan en el océano.

Todo lo anterior llevó a realizar un modelo numérico de los fenómenos que modifican el oleaje, el cual permite acoplárselo a cualquier zona de estudio; además, el modelo resuelve un conjunto de ecuaciones que determina los fenómenos que modifican al oleaje con una mayor rapidez en comparación con los demás modelos que existen en el mercado. Este modelo de oleaje incluye más fenómenos que se presentan en la naturaleza, esto es con la ayuda del modelo hidrodinámico YAXUM/3D que cuenta con varios módulos desarrollados, como el de transporte de sedimentos, flujo de calor en la superficie, calidad del agua.

El acoplamiento de varios modelos se debe a que en la naturaleza los fenómenos no son independientes unos entre si, ya que estos están ligados por un conjunto de variables entre sí, por lo que, si se tienen un mayor número de fenómenos que intervienen en el proceso, es decir que están ligados unos con otros, se tendrá un mayor acercamiento con lo que sucede en la realidad, dando por lo tanto mejores resultados para el diseño de las obras de Ingeniería Civil.

Además con el paso de los huracanes el embate de las olas se ha incrementado de una manera que ha provocado serios daños en la estructura de las obras de protección. En algunos puertos en México la mala ubicación de las obras, genera problemas de difracción y refracción, provocando serios fenómenos de agitación que hacen que el puerto sea inoperable dentro de la zona de calmas.

La colocación y dirección de las obras de protección se diseñan mediante planos de refracción sin la ayuda de las computadoras, éstos en el pasado y sin dejar de utilizarse actualmente, son muy tediosos para su elaboración, además tendríamos que hacer uno para cada frente de ola lo que genera mucho más tiempo de realización.

En esa búsqueda y con el progreso de las computadoras, se desarrollaron los modelos matemáticos, permitiendo modelar los fenómenos físicos por medio de ecuaciones matemáticas, por lo que este método es más económico, sin mucho personal, ni la construcción a escala del modelo. Lo único que necesita la persona es una computadora.

A causa de la carencia que se tenía diferentes investigadores han realizado modelos matemáticos que venden al público, pero estos son muy costosos y no se sabe la forma en que estén operando dichos programas, además como es un negocio muy demandado, los fabricantes hacen que el comprador les siga pagando por las actualizaciones de los programas.

Otro punto muy importante, es que en México el diseño se sigue realizando con ecuaciones obsoletas, que se ve reflejado en las obras construidas en el litoral mexicano; esto genera una serie de problemas en su estructura provocando erosión o generan grandes costos de mantenimiento.

Por ello en este trabajo se desarrolla y valida un modelo matemático de los fenómenos que modifican el oleaje, el cual es acoplado con el modelo hidrodinámico YAXUM/3D. Se da una aplicación a las obras de protección de la Central Nucleoeléctrica Laguna Verde (CNLV)

1.3. Objetivos.

1.3.1. Objetivo General.

- El Objetivo principal de este trabajo es realizar un modelo matemático y numérico que simule los fenómenos que modifican el oleaje, acoplado con un modelo hidrodinámico de corrientes.

1.3.2. Objetivos Específicos.

- Describir las variables que intervienen en la propagación del oleaje costero.
- Desarrollar módulos para cada fenómeno que modifica el oleaje y validar las ecuaciones que intervienen en dichos fenómenos.
- Determinar que tipo de teoría se va a utilizar para el modelo matemático.
- Analizar las ecuaciones que describen el comportamiento de los fenómenos que modifican al oleaje.
- Acoplar el modelo hidrodinámico YAXUM/3D al modulo del oleaje.
- Comparar la disipación de la pluma térmica sin oleaje y con oleaje.
- Determinar la influencia de las obras de protección de la Central Nucleoeléctrica Laguna Verde en la propagación de las olas hacia el interior del recinto.
- Procesar la información topográfica, batimétrica, hidrológica, oceanográfica y meteorológica, para determinar los escenarios de modelación.
- Aplicar el módulo de oleaje a las obras de protección de la Central Nucleoeléctrica Laguna Verde, en la cual sea posible observar el desarrollo de los fenómenos que modifican el oleaje, mismos que serían comparados con datos de campo.

1.4. Descripción del trabajo.

Este trabajo esta basado al estudio del estado del arte de los modelos de oleaje existentes, para desarrollar un modelo que simule un conjunto de fenómenos que intervienen para el diseño de las obras que se construyen en la costa, el cual pretende contribuir al conocimiento del comportamiento de los fenómenos que modifican al oleaje, bajo el estudio de la refracción, difracción y reflexión del oleaje, analizado mediante la utilización de un modelo numérico bidimensional adaptado a flujos a superficie libre.

En el segundo capítulo se describen los aspectos físicos del oleaje, las fuerzas que lo generan, como se clasifica las principales variables que intervienen, así como las magnitudes de cada una de ellas; También para facilitar el manejo del modelo matemático se emplean parámetros adimensionales y por último se describe el espectro de oleaje.

Para el tercer capítulo se necesita saber las diferentes teorías del oleaje desde la mas sencilla que es la teoría de Airy hasta las más complicadas en cuanto a la resolución de las ecuaciones, llegando a las más complicadas de Stokes, esto para delimitar el problema. Una de las partes importantes antes de describir las teorías es destacar que existen ecuaciones que describen el movimiento del fluido, así como también algunas condiciones de frontera. Por otro lado en la actualidad existen una gran variedad de modelos que dependen de diferentes factores o condiciones de contorno, pero estos se pueden dividir en tres grandes grupos: los que resuelven ecuaciones muy simples como lo es la teoría del rayo, (primera generación), los basados en la ecuación de la pendiente suave (segunda generación), por ultimo los basados en ecuaciones de Navier-Stokes y la de Bussinesq (tercera generación).

En el cuarto capítulo, podemos ver los diferentes modelos que modifican al oleaje desde aguas profundas, hasta llegar a la costa, así como también sus ecuaciones que describen cada fenómeno que modifica al oleaje, refracción, difracción, reflexión y rompiente.

En el quinto capítulo se describe el módulo de oleaje, las ecuaciones utilizadas, condiciones de frontera, ejemplos y la validación del modelo. Como se comentó al principio las ecuaciones no son fáciles de resolver por lo que en este capítulo se hace una primera aproximación de la propagación del oleaje.

En el sexto capítulo se describe la información con la que se cuenta para analizar los fenómenos que intervienen en la zona de estudio, como son los parámetros oceanográficos, hidrológicos, geológicos y climatológicos. Para simular la propagación del oleaje a la costa con la dispersión de la pluma térmica; se discuten los resultados obtenidos de acuerdo a los objetivos planteados en un principio.

En el último capítulo se describen las conclusiones a las que se llegó con todo el trabajo que se desarrollo para realizar el modelo aplicado a la Central Nucleoeléctrica Laguna Verde (CNLV) y recomendaciones para la solución al problema, así como también algunas posibles líneas de investigación que se deriven del presente trabajo.

CAPÍTULO 2

GENERALIDADES

2.1. Introducción

El oleaje es un fenómeno complicado de estudiar por lo que el diseñador de cualquier obra de Ingeniería Civil en la costa debe conocer adecuadamente este fenómeno y los procesos asociados con la refracción, difracción, reflexión y rompiente para hacer estructuras bien diseñadas, por lo que en este capítulo abordaremos los aspectos físicos y la forma en que se puede clasificar el oleaje. Una forma de representar el oleaje es mediante el espectro de oleaje, de donde existen varios autores que los presentan con características similares que pueden ser relacionadas mediante el empleo de parámetros físicos: velocidad, duración del viento y profundidad en la cual se propaga el oleaje.

2.2. Oleaje.

De la radiación solar que incide sobre la superficie de la tierra, una fracción se invierte en un calentamiento desigual de la misma, lo que provoca en la atmósfera zonas de altas y bajas presiones, generando desplazamientos del aire (viento) de mayor o menor intensidad, viento que al rozar sobre la superficie del mar trae como consecuencia el oleaje, el cual actúa como un acumulador de energía que se almacena y se transporta de un lugar a otro; la intensidad del oleaje depende de la intensidad del viento, de su duración y de la longitud sobre la cual éste transmite energía a la ola. El oleaje puede ser definido como una sucesión de ondas que viajan sobre una superficie de agua, las cuales se propagan desde mar adentro hacia la costa, presentando forma, dirección, altura y periodo irregular (Rosales, 2005).

Para que las olas se generen, debe existir una fuente de energía capaz de transmitir una determinada cantidad de la misma al agua en reposo, la cual produzca un movimiento oscilatorio de las partículas del líquido sin que haya un transporte importante de masa, por lo que la propagación de la energía dentro de la masa de agua está relacionada estrechamente con la propagación de las olas que se generan con esa energía por lo que el oleaje puede ser producido de acuerdo a la causa o causas que lo originan, ya sea por agentes naturales o por agentes artificiales (causados por el mismo hombre), (Rosales, 2005).

Siendo el viento, el principal generador del oleaje que se desplaza sobre la superficie del agua provocando en ocasiones modificaciones a la línea costera, por esta razón, el oleaje no es un movimiento periódico de las aguas como las mareas, o constante, como las corrientes, sino un movimiento irregular. Cuando el viento sopla con suavidad las olas tienen escasa altura, pero si se desata el vendaval alcanzan magnitudes considerables, de hasta 20 m de altura, las cuales se chocan con enorme fuerza contra la costa o con obstáculos naturales o artificiales (Rosales, 2005).

Para que se genere el oleaje se necesitan tres parámetros:

- Velocidad del viento (U_v)
- Duración del viento (dt)
- Fetch o longitud de la zona de generación en la dirección del viento (F)

2.2.1. Clasificación del oleaje.

En el océano podemos encontrar una gran variedad de tipos de onda que ponen de manifiesto la propagación de la energía mecánica a lo largo de la interfase agua-atmósfera que constituye la superficie del mar. Los mecanismos que aportan esta energía son de diferente naturaleza como: viento, perturbaciones meteorológicas, terremotos, atracción de los astros, entre otras. Como consecuencia de la variabilidad en las características de los distintos forzamientos mencionados, las características de las ondas-respuesta difieren tanto en su periodo y longitud como en sus mecanismos de control. La figura (2.1) muestra de forma esquemática, la energía de las ondas de superficie asociada a cada frecuencia. Como puede observarse en dicha figura, el tipo de ondas superficiales abarca desde ondas capilares con periodos inferiores a 1s hasta oscilaciones inducidas por la marea con periodos del orden de horas e incluso días (U. Cantabria, 2006).

i. Conforme al período

- i.1. Ondas Capilares. Se presentan en forma de pequeñas ondulaciones sobre la superficie del mar, producidas por viento cuya velocidad este comprendida entre 0.25 y 1.0 m/s. Su desarrollo está controlado por la tensión superficial y la gravedad. Su periodo es menor de 0.1 s y su longitud no excede 1.73 cm por lo que el límite superior de su celeridad es 17.3 cm/s (CFE, 1983).
- i.2. Ondas de gravedad. Son ondas controladas por las fuerzas gravitacionales y su longitud de onda es mayor de 1.73 cm. Esta se divide a su vez en *Ondas de ultragravedad*, que son generadas por viento cuya velocidad varia entre 1.0 y 5.0 m/s (se puede ver con frecuencia en pequeños lagos); *Ondas de gravedad propiamente dichas*. Son generadas por vientos con velocidades mayores de 6.5 a 7 m/s las de mayor interés en Hidráulica Marítima. Su periodo oscila entre 1.0 y 30 s y son las ondas generalmente observadas en la superficie del mar; *Ondas de infragravedad*. Son ondas de gravedad, con periodos entre 30 s y 5.0 min., que causan oscilaciones notorias en la superficie del mar y se producen en grandes tormentas y huracanes (CFE, 1983).
- i.3. Ondas de periodo largo. Son aquellas en las cuales su longitud en mucho mayor que la profundidad ($h/L \ll 1$). En la naturaleza se pueden distinguir dos tipos: generada por el desplazamiento de tierra submarinos, debido a movimientos

terrestres (*tsunamis*); las segundas son generadas por la atracción del sol y la luna conocidas como *mareas* con periodos aproximados de 12 y 24 hr (CFE, 1983).

- i.4. Ondas de transmarea. También las genera la atracción del sol y la luna sobre la masa de agua de los océanos y sus periodos son mayores de 24 hr. Por su comportamiento son también ondas de periodo largo (CFE, 1983).

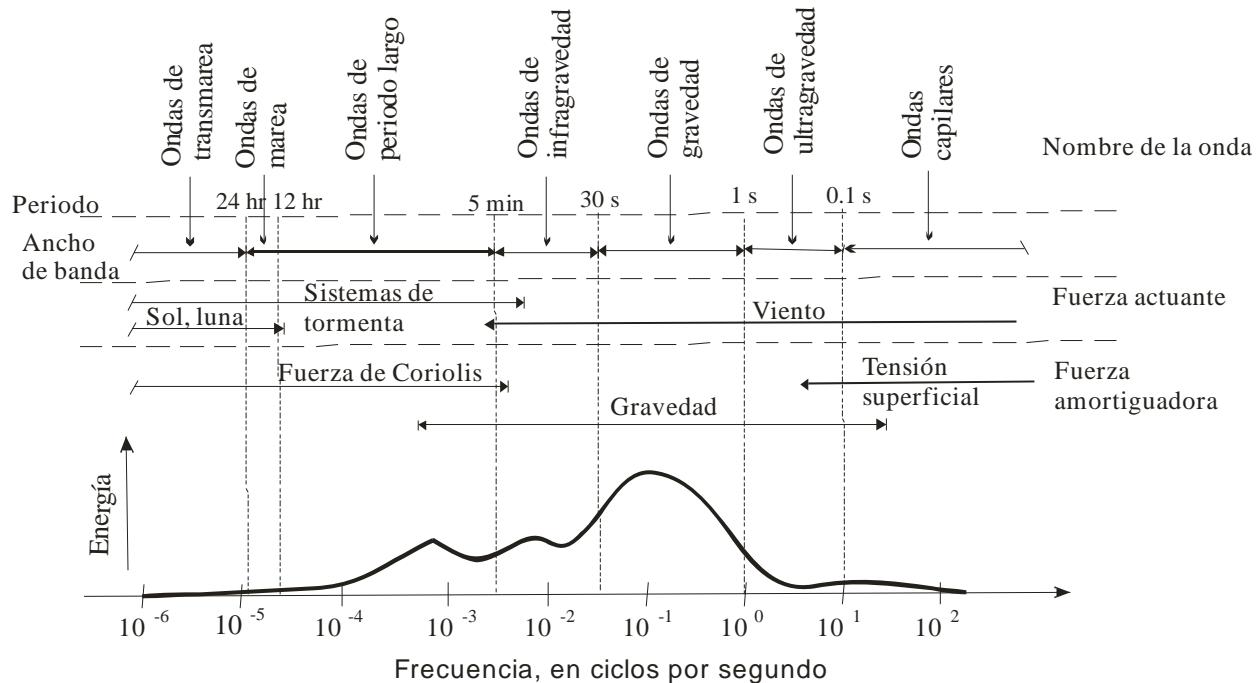


Figura 2.1 Distribución energética de las ondas de superficie.

ii. Conforme a la altura de onda.

Según su altura, las ondas se dividen en:

- ii.1. *Ondas de amplitud pequeña*, se caracterizan por que su altura es pequeña en comparación con su longitud (Teoría de Airy), en donde se consideran despreciables los desplazamientos que sufre la superficie.

- ii.2. *Ondas de amplitud finita* no desprecia dichos desplazamientos.

iii. Conforme al desplazamiento de la cresta

- iii.1. *Crestas progresivas*, son aquellas en donde la cresta se desplaza horizontalmente.
 iii.2. *Crestas estacionarias*, tiene un movimiento horizontal casi nulo y un desplazamiento vertical considerable.

iv. *Conforme a la profundidad relativa (delimitadas por h/L)*

Esta clasificación es una de las más importantes tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Según la relación que hay entre la profundidad (h) y la longitud de la onda (L), las ondas se pueden dividir en ondas en aguas profundas, intermedias y someras.

Desde el punto de vista teórico e ingenieril para clasificar a las ondas con este criterio se pueden aceptar los siguientes valores. (U. Cantabria, 2000)

Tabla 2.1 Clasificación de las ondas conforme a la profundidad relativa.

Tipos de aguas	h/L Teórico	h/L Práctico
Aguas Profundas	$h/L > 1/2$	$h/L > 0.5$
Aguas Intermedias	$1/2 < h/L < 1/20$	$0.05 < h/L < 0.05$
Aguas Someras o Poco Profundas	$h/L < 1/20$	$h/L < 0.05$

v. *Conforme al desplazamiento*

- v.1. *Ondas de traslación*, son aquellas en las que el desplazamiento de las partículas, en cualquier instante se producen en la dirección del movimiento de la onda.
- v.2. *Onda de oscilación*, los desplazamientos de las partículas siguen trayectorias cerradas ó casi cerradas, de tal forma que durante un tiempo su componente horizontal sigue la dirección del movimiento de la onda y en otro tiempo igual tiene sentido contrario.

vi. *Conforme al tiempo de aplicación instantánea de una fuerza ó acción perturbadora*

El oleaje donde la fuerza restauradora es la gravedad, se origina por la transferencia de energía del viento sobre la superficie del agua y se clasifica en dos tipos:

- vi.1. *Oleaje Local* (ondas forzadas: SEA), el cual se genera en el área denominada como “fetch”, ver pagina anterior, por lo general el oleaje es caótico, presenta periodos y longitudes cortas, superficie irregular cambiante, además de viajar en todas direcciones.
- vi.2. *Oleaje Distante* (ondas libres: SWELL), se presenta cuando sale de la zona de generación y el viento ya no tiene tanta influencia, en ésta se presentan longitudes de ola que llegan a alcanzar hasta cientos de metros con periodos y alturas irregulares, pero con dirección mas definida.

En la siguiente tabla se muestran los diferentes tipos de onda con sus mecanismos generadores, periodos y longitudes características así como fuerzas de control.

Tabla 2.2 Tipos de onda con sus mecanismos generadores, periodos y longitudes características así como fuerzas de control (U. Cantabria, 2000).

Movimiento	Periodo o longitud	Fuerza generadora	Fuerza de control	Ejemplos
Corrientes oceánicas	$10^6 m$	Gradiente de densidad y viento	Fricción, coriolis, gravedad	Corriente de golfo
Corrientes costeras	$10^5 m$	Viento y corrientes oceánicas	Fricción, coriolis, gravedad	Afloramientos
Corrientes de rotura	$10^2 m$	Ondas gravitatorias	Fricción, gravedad	Corrientes de retorno
Corrientes de marea	$10^3 m$	Marea astronómica	Fricción, gravedad	Bahías y estuarios
Ondas capilares	$0.1s / 10^{-2} m$	Viento	Tensión superficial, gravedad	Rizado del viento
Ondas ultragravitatorias	$0.1 - 1 s / 100m$	Viento	Gravedad	Ondas de viento en un charco
Ondas gravitatorias	$0.1 - 30 s / 1 - 10^3 m$	Viento y oleaje de viento	Fricción, gravedad	Sea y Swell
Ondas infragravitatorias	$30s - 5 \text{ min} / 10^3 - 10^5 m$	Viento y ondas gravitatorias	Fricción, coriolis, gravedad	Ondas de borde
Ondas largas	$5 \text{ min} / 10^5 - 10^6 m$	Borrascas y terremotos	Fricción, coriolis, gravedad	Tsunamis
Ondas de marea astronómica	$12 - 24hr / 10^7 m$	Atracción de la tierra/ atracción luna sol.	Fricción, coriolis, gravedad	Marea astronómica
Ondas transmareales	$24hr / 10^7 m$	Orbita solar/gravitacional.	Fricción, coriolis, gravedad	Marea meteorológica
Ondas internas	$4 \text{ min} - 25hr / 10 - 10^5 \text{ min}$	Borrascas ondas de gravedad	Fricción, coriolis, gravedad	Ondas de densidad

Para nuestro problema de interés en ingeniería litoral, las ondas más importantes son fundamentalmente las ondas de viento con periodos entre 3.0 y 30 s., Por lo que de ahora en adelante nos referiremos especialmente a ellas.

2.2.2. Magnitudes características del oleaje.

Las ondas periódicas que se propagan en dirección del flujo tienen diferentes características que sirven para estudiarlas y referenciarlas.

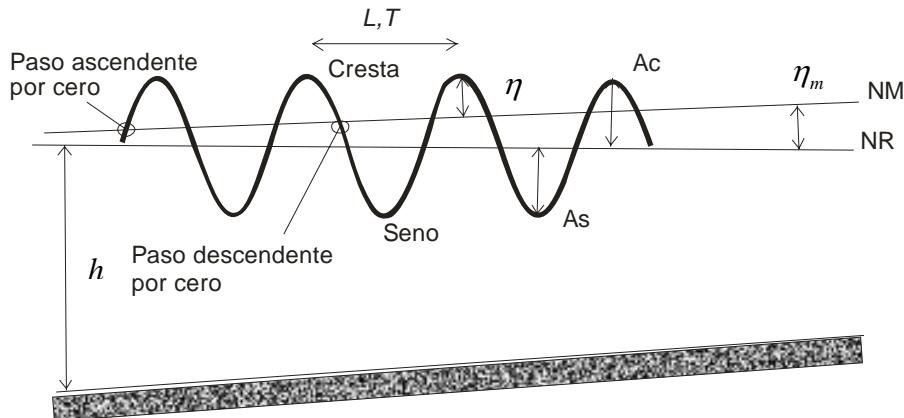


Figura 2.2 Definición de parámetros asociados a la onda

La descripción matemática de las ondas considera, en general, que las ondas son oscilatorias uniformes y periódicas de la superficie del agua. Es decir, se asume que estas ondas se repiten una y otra vez como se representa en la figura (2.2), distinguiendo entre dos tipos de oscilaciones: las ondas progresivas y las ondas estacionarias. Las ondas progresivas se propagan en una profundidad constante manteniendo su forma, mientras que las ondas que no se propagan se denominan estacionarias. Al desplazamiento vertical de la superficie del fluido con respecto a un nivel medio de referencia, se le denomina desplazamiento de la superficie libre (η), (U. Cantabria, 2000).

Altura de la ola (H), es la vertical que va de la cresta al valle y presenta la ventaja de ser una distancia sin necesidad de un nivel de referencia. Longitud de la ola (L), este es de cresta a cresta o de valle a valle. Periodo de la ola (T), el periodo de la ola no varía al trasladarse esta a otras profundidades. Cresta de la onda, punto donde el perfil de la onda tiene la mayor altura. Valle de la onda, punto donde el perfil de la onda tiene el nivel más bajo. Amplitud de la onda (A) se toma como la distancia vertical medida entre la cresta o valle y el nivel medio de la onda. Amplitud de la cresta (Ac), es la distancia vertical máxima entre el nivel en reposo y la cresta. Amplitud del seno (As), es la distancia vertical máxima entre el nivel en reposo y el valle (CFE, 1983).

La amplitud total de la onda se puede obtener análogamente mediante la ec. (2.1)

$$H = Ac + As \quad (2.1)$$

donde:

H	Altura de la ola	[L]
Ac	Amplitud de la cresta	[L]
As	Amplitud del seno	[L]

Dada la periodicidad temporal y espacial de las ondas, el movimiento oscilatorio es en general simétrico respecto a un eje vertical. Sin embargo, el movimiento oscilatorio no suele ser simétrico respecto al nivel en reposo, y entonces, $Ac \neq As$. Solo para la teoría lineal que mas

adelante se explica detalladamente existe un eje horizontal de simetría que es el nivel en reposo. Por lo tanto, $Ac = As = A$ y se cumple que $H = 2A$

Destacando que η, Ac, As, A se definen siempre respecto a un cierto nivel de referencia. El nivel en reposo (NR) corresponde al nivel del fluido en ausencia de ondas. A la distancia entre el fondo y el NR se le llama profundidad o calado (h). Por otro lado, en presencia de ondas o una corriente la referencia es el nivel medio (NM) que generalmente no coincide con el nivel en reposo (U. Cantabria, 2000).

En la naturaleza, la forma del oleaje es muy diferente entre las ondas, además se propaga en diferentes direcciones. Un ejemplo claro de un registro del oleaje se muestra a continuación en la figura (2.3) que se puede definir como un conjunto de ondas sinusoidales viajando en diferentes direcciones.

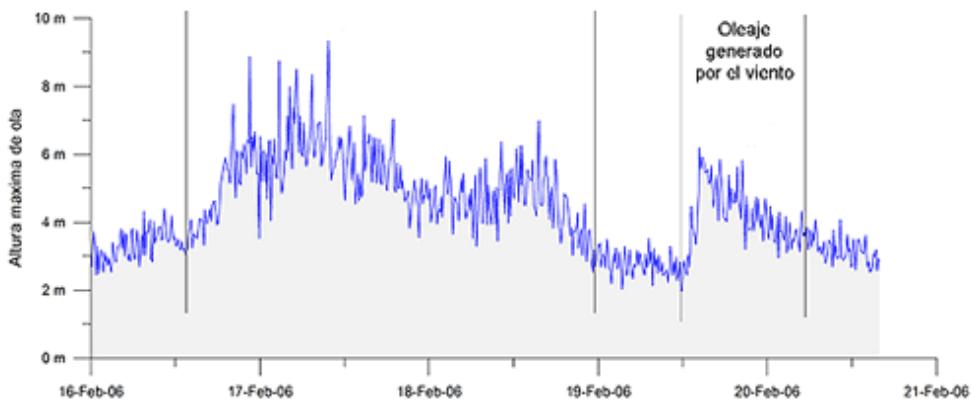


Figura 2.3 Ejemplo de un registro de oleaje, (www.azti.es).

Debido a esta variación en la superficie libre tan aleatoria y por ser tan precisa la teoría lineal se ha mantenido hasta hoy una teoría amigable. Las ventajas que presenta esta teoría son: la facilidad de su uso, el nivel en reposo coincide con el nivel medio del mar, es la pauta para conocer otras teorías mas complicadas por medio de la superposición de términos.

En algunas ocasiones y para facilitar los cálculos, es necesario introducir algunas otras definiciones como el número de onda, (k) que mas adelante se van a utilizar (U. Granada, 2004).

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.2)$$

donde:

- | | | |
|-------|---|------------|
| k | Número de onda | $[L^{-1}]$ |
| L | Longitud de la onda | $[L]$ |
| π | Relación del perímetro de una circunferencia con la amplitud de su diámetro(3.14159). | |

La frecuencia angular (ω), (U. Granada, 2004).

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.3)$$

donde:

ω Frecuencia angular $[T^{-1}]$

T Periodo de la ola $[T]$

Y en algunas ocasiones, especialmente en la descripción espectral del oleaje es necesario utilizar la frecuencia cíclica, (f), expresada por la ec (2.4);

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{Ciclos por segundo, Hertz } Hz) \quad (2.4)$$

donde:

f Frecuencia cíclica $[T^{-1}]$

En general, se suele hacer uso de un sistema de referencia cartesiano (x, y, z) tal que el eje x define la dirección de propagación, el eje y es ortogonal a los ejes x y z .

Como se puede ver en la figura (2.4) la onda progresiva en el sentido positivo del eje x y por tanto, la cresta, se extiende en la dirección del eje y sin variación hasta el infinito. Llamada onda de cresta larga.

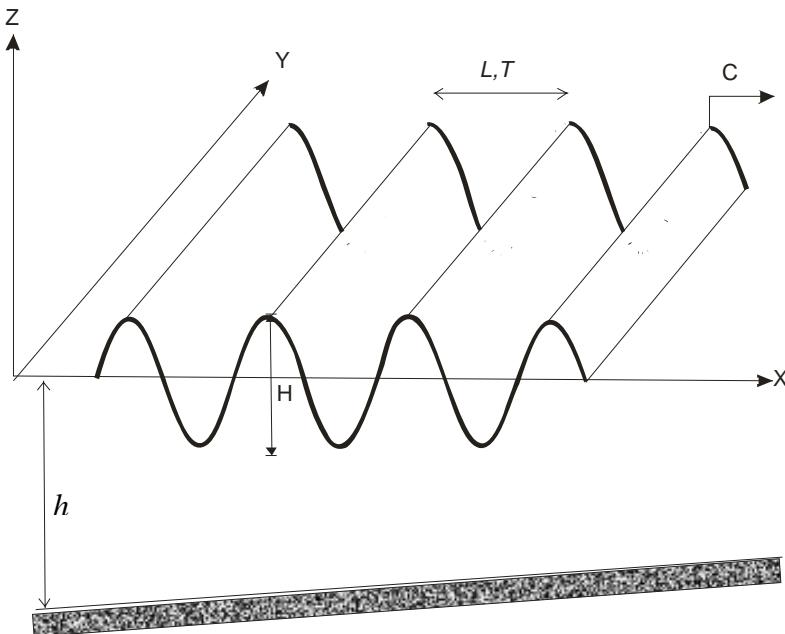


Figura 2.4 Ondas de crestas largas

Si se cuenta con la longitud y el periodo de la onda, la velocidad a la que se propagan las ondas en el fluido es fácil de establecer. Esta velocidad de propagación se le llama celeridad de la onda (C) y se puede obtener de la siguiente forma (Ippen, 1966).

$$C = \frac{L}{T} \quad (2.5)$$

donde:

$$C \quad \text{Celeridad de la onda.} \quad [LT^{-1}]$$

O teniendo en cuenta las definiciones en las ecs (2.2) y (2.3), como

$$C = \frac{\omega}{k} \quad (2.6)$$

Uno de los primeros objetivos de cualquiera de las teorías de ondas que se van a presentar, necesarias para realizar el modelo matemático de la onda, es determinar la C cuando las magnitudes H , L y h son conocidas. Una vez conocida la celeridad, la descripción de la cinemática de las partículas (velocidades, aceleraciones y desplazamientos) así como el campo de presiones bajo el paso de las ondas, es el siguiente objetivo.

Si las ondas se propagan formando un ángulo (θ) respecto al eje x , será necesario introducir algunas modificaciones que tengan en cuenta la oblicuidad en la incidencia de las ondas. Dado que la longitud de la onda (L), se había definido como la distancia más corta entre dos crestas sucesivas, las proyecciones de dicha distancia sobre los ejes coordinados será como se muestra en la figura (2.5)

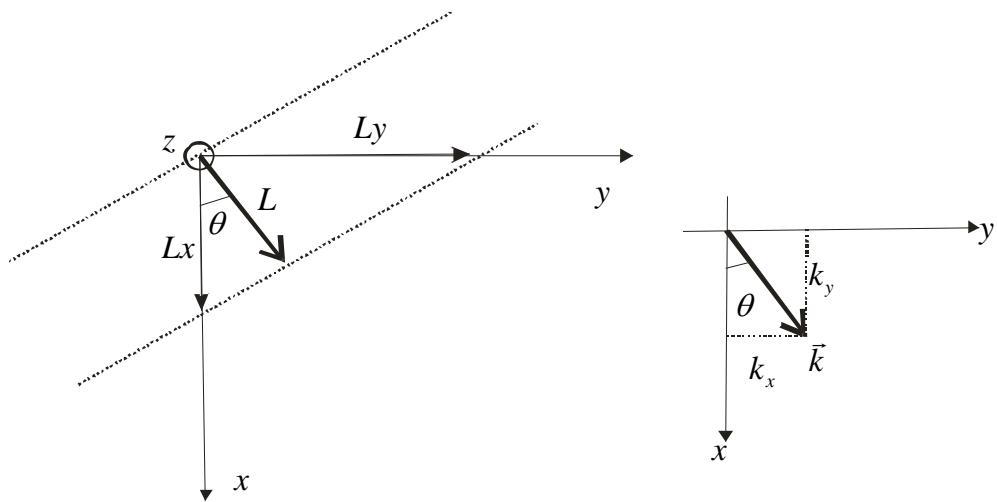


Figura 2.5 Definición de ejes y parámetros. Incidencia oblicua.

$$L_x = \frac{L}{\cos \theta} \quad L_y = \frac{L}{\sin \theta} \quad (2.7)$$

donde:

L_x	Componente de la longitud de la ola en la dirección x	[L]
L_y	Componente de la longitud de la ola en la dirección y	[L]
θ	Ángulo de incidencia de las ondas	[L]

Definiéndose asimismo

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} \quad (2.8)$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} \quad (2.9)$$

donde

$$k_x = k \cos \theta \quad (2.10)$$

$$k_y = k \sin \theta \quad (2.11)$$

Por lo tanto se puede definir un vector número de onda, (\vec{k}) cuya dirección coincide con la dirección de propagación de las ondas, con componentes (k_x) y (k_y) tal que

$$\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} \quad (2.12)$$

$$|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (2.13)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{k_y}{k_x} \right) \quad (2.14)$$

A partir de estos parámetros se puede definir dos tipos de ondas características. Las ondas estacionarias cuya superficie libre se expresa como.

$$\eta(x, t) = A \cos k_x \cos \omega t \quad (2.15)$$

Y que se caracterizan por tener su evolución en el espacio y en el tiempo por separado; además, este tipo de ondas no progresan en el espacio, oscilando verticalmente entre puntos fijos llamados nodos.

El otro tipo de ondas son las llamadas ondas progresivas las cuales tienen su movimiento espacial y temporal en conjunto, siendo su superficie libre (Baquerizo, 2004).

$$\eta(x, y, t) = A \cos(k_x \cos \theta + k_y \sin \theta - \omega t) \quad (2.16)$$

Y se propaga a una velocidad C de propagación en la dirección positiva del eje x. (U. Cantabria, 2000 y Le Méhauté, 1976)

2.2.3. Definición de parámetros adimensionales

Como se mencionó anteriormente cuando se conoce la altura (H), longitud (L) y profundidad de la ola (h) ó la altura (H), periodo (T) y profundidad de la ola (h) se puede obtener la celeridad de la onda, que es uno de los objetivos fundamentales de cualquier teoría de onda. Por lo que cualquier teoría puede ser caracterizada por unos parámetros adimensionales obtenidos como los cocientes de estas magnitudes representativas de las ondas.

$$\varepsilon = kA = H / L = kh \quad (2.17a)$$

$$\delta = A/h = H/h \quad (2.17b)$$

$$\mu_p = kh = h/L \quad (2.17c)$$

El primer parámetro, ε es el peralte de la onda y de la variación del movimiento vertical de la onda en una longitud de onda. El parámetro (δ) es la altura relativa de la onda, y da una indicación de la importancia de la oscilación vertical de la onda respecto a la profundidad. El parámetro, μ_p es conocido como la profundidad relativa y muestra la penetración del movimiento de la onda con la profundidad. Así mismo este parámetro sirve como medida de la dispersividad de las ondas.

Obsérvese que sólo dos de estos parámetros son independientes y que, por tanto, cualquiera de ellos puede ser expresado en función de los otros dos. Por ello, suelen emplearse también los parámetros.

$$\frac{H}{gT^2} \text{ y } \frac{h}{gT^2} \quad (2.18)$$

Estos parámetros son para caracterizar el movimiento de las ondas. Además, y como se verá más adelante, para algunos de los valores de estos parámetros las ecuaciones del movimiento se pueden simplificar notablemente hasta llegar a obtener ecuaciones que pueden ser resueltas analíticamente, lo cual facilita un mejor entendimiento de los fenómenos asociados a las ondas.

Si la altura de la onda (H) es pequeña con respecto a L o h , es decir $H/L \ll 1$ o $H/h \ll 1$, al movimiento resultante se le denomina de pequeña amplitud, de amplitud infinitesimal o lineal. Cuando el valor de estos parámetros es grande las ondas se denominan de amplitud finita o no lineal. Como se muestra en la tabla (2.1)

Dado que la profundidad relativa puede ser expresada igualmente en función del parámetro número de onda, (k) esta clasificación puede hacerse también basándose en kh , ver tabla (2.3).

Esta clasificación es importante pues se verá que en funciones de la misma pueden encontrarse expresiones asintóticas de las magnitudes asociadas a las ondas que simplifican notablemente el cálculo.

Tabla 2.3 Clasificación de las ondas con el parámetro número de onda

Tipos de aguas	h/L	(2.19)
Aguas Profundas	$kh > \pi$	

$$\text{Aguas Intermedias} \quad \frac{\pi}{10} < kh < \pi \quad (2.20)$$

$$\text{Aguas Someras o Poco Profundas} \quad kh < \frac{\pi}{10} \quad (2.21)$$

Otro parámetro muy importante en el que se pueden agrupar las variables que intervienen en el movimiento de las ondas que son H , L , y h . Que es el número de Ursell, (Ur) y se define como.

$$Ur = \frac{H}{2} \frac{L^2}{h^3} = \frac{\delta}{\mu_p^2} = \frac{Ac}{L} \left(\frac{L}{h} \right)^3 \quad (2.22)$$

Este parámetro nos sirve para definir el régimen al que corresponden las ondas y, por tanto, ayuda a seleccionar la teoría mas adecuada en cada caso. (U. Cantabria, 2000 y Le Méhauté, 1976)

Si el parámetro de Ur es menor a 1, se puede aplicar la teoría lineal.

2.3. Espectro de oleaje.

Es un método para analizar las características del oleaje irregular, en este método el tren de olas irregulares se separa en varios regulares, a los cuales se les da el nombre de componentes, los cuales tienen sus propios periodos y direcciones dándonos la energía de cada uno. Al agrupar estos datos en una sola gráfica, se obtiene la distribución de energía a la que se le denomina espectro direccional cuando se han agrupado por direcciones, y se le llama espectro frecuencial cuando el periodo es el dato que lo conforma. Cuando se incluyen ambos espectros el resultado es uno llamado bidireccional.

En la actualidad, el termino espectro se aplica frecuentemente en un sentido más amplio a cualquier distribución ordenada producida por el análisis de un fenómeno complejo. Un sonido complejo, como por ejemplo un ruido, puede analizarse como un espectro acústico formado por tonos de diferentes frecuencias. De igual forma, el oleaje, que es una señal compleja, puede analizarse como un espectro de energía de diferentes frecuencias y así, estimar sus características (Rosales, 2005).

Los métodos para analizar el oleaje se derivan en el método estadístico temporal y el método espectral; el análisis estadístico temporal utiliza el método de cruces por cero para separar cada ola del tren (muestra) que se ha medido. Este tren, de longitud finita, es un conjunto de olas medidas en un lapso determinado de tiempo y representa un estado de mar. Con este análisis se

puede identificar las distribuciones de probabilidad de las características predominantes del oleaje como la altura de ola y el periodo. Por otro lado, el análisis espectral nos permite conocer las características del oleaje por medio de un análisis en el dominio de la frecuencia.

En el caso de poder registrar el oleaje extrayendo la energía correspondiente de cada ola que compone un tren de olas, con su dirección (θ) y su frecuencia (ω), la representación gráfica del registro del total de las ondas sería una campana orientada en la dirección principal del viento, con máximo para esta dirección correspondiendo con la frecuencia del grueso del temporal (Goda, 2000).

A esto se le da el nombre de espectro de energía del oleaje, el cual debe entenderse como la suma de las ondas senoidales con diferentes frecuencias y como función de la frecuencia (ω) y la dirección (θ), donde la expresión espectral del oleaje es $S(\theta, \omega)$, que recibe el nombre de espectro completo como se muestra en la figura (2.6), donde m_0 es llamado momento de orden cero del espectro e igual al área bajo la curva; por el contrario, si se desean saber únicamente los niveles sin tomar en cuenta las direcciones se obtendrá una gráfica; así mismo se denomina periodo óptimo (*Top*) a la frecuencia máxima de transmisión de energía, es decir, al máximo del espectro llamado densidad de energía de la ola $S(\omega)$ ó $S(f)$ (Rosales, 2005).

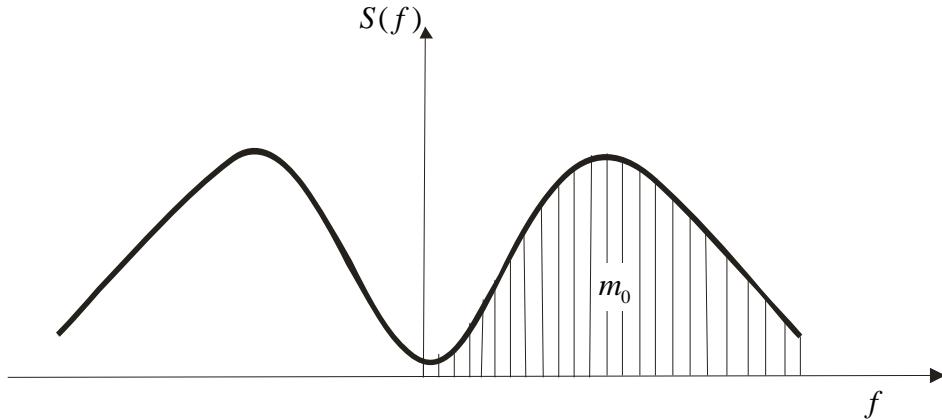


Figura 2.6 Espectro del registro de oleaje (CFE, 1983)

2.3.1. Parámetros espectrales

Para describir estadísticamente un perfil de oleaje irregular, se necesitan varios parámetros que a continuación se describen:

El primero de ellos se define como amplitud o altura de onda. Básicamente la teoría de la estadística de amplitud de onda fue presentada por Rice (1945), el cual consideró que la energía del espectro de onda se concentra dentro de un rango corto de frecuencia, donde tal espectro puede ser llamado de banda angosta (Figura 2.7); la referencia (f) puede ser cualquier

frecuencia representativa en el rango espectral, definiéndose como los momentos espectrales de orden 1 y 0. (Goda, 2000)

$$f = \frac{m_1}{m_0} \quad (2.23)$$

Por lo tanto todos los parámetros espectrales se calculan a partir de sus diferentes momentos. El momento de orden n respecto al origen se define mediante la siguiente expresión:

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n S(f) df \quad (2.24)$$

donde:

- $S(f)$ Es la función densidad espectral
 f Es la frecuencia angular $[T^{-1}]$

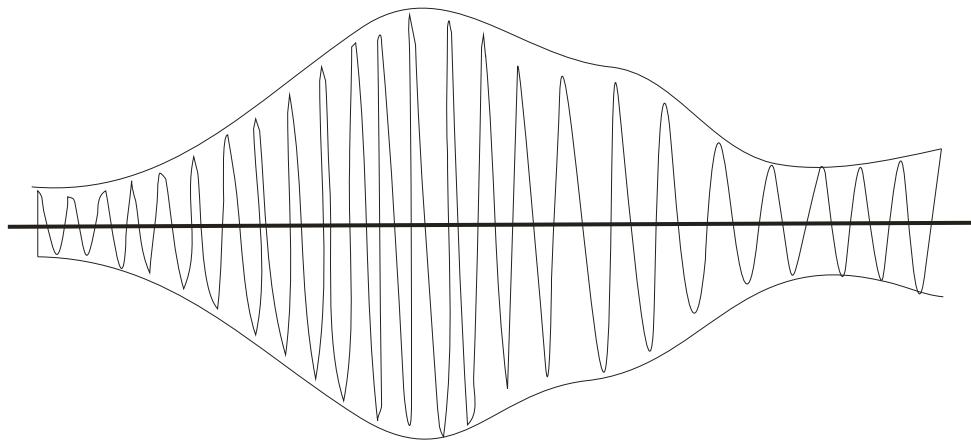


Figura 2.7 Envolvente de un perfil de onda irregular. (Goda, 2000)

Cartwright y Longuet-Higgins (1956) proponen un parámetro para describir la anchura espectral (ε_E).

$$\varepsilon_E = \left[1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \right] \quad (2.25)$$

Si el espectro es de banda angosta $\varepsilon_E \rightarrow 0$; por el contrario, si el espectro es de banda ancha $\varepsilon_E \rightarrow 1$.

Debido a que la estimación del momento de cuarto orden es muy sensible a los valores que se tienen en las alturas de frecuencia, para espectros que definen un estado de mar, éste parámetro no es representativo ya que puede inducir a fuertes errores. Para hacer más claro este problema, Longuet-Higgins en 1983 propuso otro parámetro de anchura espectral, el cual depende de los momentos de orden inferior.

$$\nu = \left[\frac{m_0 m_2}{m_1} - 1 \right]^{1/2} \quad (2.26)$$

Otro parámetro que define la forma del espectro es de agudeza de pico (Q_p). (Goda, 1973)

$$Q_p = \frac{2}{m_0^2} \int_0^{\infty} f(S(f))^2 df \quad (2.27)$$

Señalando que Q_p es cercano a 2 para olas generadas por viento.

Para la estimación del periodo medio de las olas (\bar{T}) a partir del espectro hay dos ecuaciones:

$$\bar{T} = T_{01} = \frac{m_0}{m_1} \quad (2.28)$$

$$\bar{T} = T_{02} = \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \quad (2.29)$$

En cuanto a la superficie libre, se tiene la siguiente relación.

Variación de la ola cuadrática media.

$$\eta_{rms} = \sqrt{m_0} \quad (2.30)$$

Una aproximación de altura de ola significante se puede estimar a partir de los momentos espectrales, cuando las alturas de ola siguen la distribución propuesta por Reyleigh, con la siguiente expresión (Goda, 2000).

$$H_{\sqrt[3]{3}} = 4.004(m_0)^{\sqrt[3]{2}} \quad (2.31)$$

Altura de ola cuadrática media.

$$H_{rms} = \sqrt{8m_0} \quad (2.32)$$

2.3.2. Modelos espetrales de un estado del mar

A través del análisis de una gran cantidad de espectros de oleaje se ha encontrado que éstos presentan características similares que pueden ser relacionadas mediante el empleo de parámetros físicos: velocidad y duración del viento, fetch y profundidad por la cual se propaga el oleaje.

Las formas de un espectro de un estado de mar varian considerablemente dependiendo, de muchos factores; sin embargo, la forma del mismo no es arbitraria ya que existen muchas propiedades físicas del oleaje que están representadas en él. Un espectro de oleaje puede ser generado sintéticamente por medio de los parámetros que caracterizan su desarrollo. Los modelos espetrales están basados generalmente en uno o más parámetros. A continuación se describen los modelos más comunes.

Modelo de Phillips

Philips (1958), al estudiar la variación de la energía del oleaje en función de la velocidad del viento, observó dicho estado de saturación y determinó que el espectro puede ser definido a partir de los siguientes parámetros: la frecuencia, la gravedad, la velocidad del viento y el fetch. Sin embargo, para tomar en consideración el efecto de saturación en el espectro de energía hizo depender su modelo de dos parámetros:

- La velocidad al cortante del viento.
- El fetch

Este es expresado por:

$$S(f) = \alpha g^2 f^{-5} (2\pi)^{-4} \quad (2.33)$$

donde:

g	Es la aceleración de la gravedad	$[LT^{-2}]$
α	Parámetro que depende del fetch y del viento	

Es importante remarcar que este modelo ha sido la piedra angular para desarrollos posteriores en la inducción de oleaje a través de información meteorológica.

Espectro de Neumann

Neumann desarrolló un modelo espectral analítico, en 1953, que fue el primero en ser usado para el diseño ingenieril; éste está en función de la velocidad del viento medida a diez metros sobre el nivel medio del mar, (U_{10}), y queda expresado como:

$$S(f) = 1.466 H_{m_0}^2 \frac{f_p^5}{f^6} \exp \left[-3 \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-2} \right] \quad (2.34)$$

donde:

H_{m_0} Es la altura de la ola del momento de orden cero, la cual es [L] aproximadamente igual a la altura de ola significante,
 $H_s \approx H_{m_0} = 4\sqrt{m_0}$

f_p Frecuencia de pico espectral que puede ser obtenida a través de la $[T^{-1}]$ siguiente expresión

$$f_p = \sqrt{\frac{1}{6} \frac{g}{\pi U_{10}}} \quad (2.35)$$

donde:

U_{10} Velocidad del viento medida a diez metros sobre el nivel medio del mar $[LT^{-1}]$
 g Es la aceleración de la gravedad $[LT^{-2}]$

Espectro de Pierson – Moskowitz

En 1964, Pierson y Moskowitz estudiaron los espectros de oleaje del Atlántico Norte y crearon una expresión que representa estados de mar completamente desarrollados generados por viento. Es decir, su modelo no depende del fetch, si no únicamente de la velocidad del viento.

La expresión propuesta para generar el espectro es la siguiente:

$$S(f) = 8.1 \times 10^{-3} (2\pi)^{-4} g^2 f^{-5} e^{-0.24(2\pi U_{19.5} f / g)^{-4}} \quad (2.36)$$

donde:

$U_{19.5}$ Velocidad del viento a 19.5 metros sobre la superficie del mar $[LT^{-1}]$

Si se emplea la frecuencia de pico espectral, puede ser representado por

$$S(f) = 8.1 \times 10^{-3} (2\pi)^{-4} g^2 f^{-5} e^{-\frac{5}{4} \left(\frac{f_p}{f}\right)^4} \quad (2.37)$$

En este caso la frecuencia pico espectral (f_p), está dada por

$$f_p = \frac{0.0805g}{\pi H_s}$$

Dado que normalmente la velocidad del viento se reporta sobre una altura de 10 m sobre el nivel del mar, la siguiente relación puede ser de mucha utilidad:

$$U_w = U_{10} (y_v / 10)^{1/7} \quad (2.38)$$

donde:

y_v	Distancia vertical sobre el nivel medio del mar (snmm)	[L]
U_{10}	Velocidad a una altura de 10 m. snmm	[LT^{-1}]
H_s	Altura significante de la ola	[L]

Espectro de Bretschneider

Bretschneider (1959), asumió que un espectro es de banda estrecha y que las alturas y periodos de olas individuales siguen una distribución tipo Reyleigh, obtuvo la siguiente expresión para su modelo espectral.

$$S(f) = 0.1687 H_{s_0}^2 \frac{f_s^4}{f^5} \exp\left[-0.675\left(\frac{f_s}{f}\right)^4\right] \quad (2.39)$$

donde:

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

De dicho modelo es posible deducir que

$$T_s = 0.946 T_p \quad (2.40)$$

donde:

T_p	Periodo pico espectral. Esta expresión iguala el modelo al propuesto por Pierson y Moskowitz. (1964)	[T]
T_s	Periodo significante de la ola	[T]

Este modelo ha sido derivado para un estado de mar totalmente desarrollado. Sin embargo, parece razonable que también pueda ser utilizado para estados de mar parcialmente desarrollados. Las relaciones entre la altura de ola, periodo de ola y velocidad del viento fueron presentadas por Bretschneider (1959) empíricamente. Para un estado del mar desarrollado,

$$\frac{gH_s}{U_w^2} = 0.282 \quad (2.41)$$

$$\frac{gT_s}{U_w} = 6.776 \quad (2.41)$$

Mientras que para un estado de mar totalmente desarrollado en condiciones estables,

$$\frac{gH_s}{U_w^2} = 0.254(90\%) \quad \frac{gH_s}{U_w^2} = 0.226(80\%) \quad (2.42)$$

$$\frac{gT_s}{U_w} = 4.764 \quad (2.43)$$

Espectro de Kitaigorodskii-Toba

En 1961, Kitagorodskii presentó un modelo espectral, que depende de la frecuencia y el fetch, dado por:

$$S(f) = \left(\frac{g^2}{f^5} \right) F(\bar{f}, \bar{x}) \quad (2.44)$$

donde:

$$\bar{f} = \frac{fu_*}{g}$$

$$\bar{x} = \frac{gx}{u_*^2}$$

x = Fetch.

Toba 1973, con base en el trabajo de Kitaigorodskii (1961), encontró de forma empírica que la mejor aproximación a los datos de su túnel de viento eran proporcionados por la función espectral dada por.

$$S(f) = \beta u_* g f^{-4} \quad (2.45)$$

$$u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho_a}$$

donde:

$$\rho_a \quad \text{Densidad del aire} \quad [FT^2 L^{-4}]$$

$$\tau_0 \quad \text{Fricción tangencial del viento} \quad [FL^{-2}]$$

$$u_* \quad \text{Velocidad de fricción del viento} \quad [LT^{-1}]$$

$$\beta = 0.02 \quad \text{A partir de datos de laboratorio}$$

Por otra parte, Wu (1969, 1980 y 1982) realizó una serie de ensayos para modelar las características sobre una superficie del mar y obtuvo la velocidad del cortante como una función de la velocidad media a 10 m de altura:

$$u_* = \sqrt{C_{10} \bar{U}_{10}} \quad (2.46)$$

donde:

$$C_{10} \quad \text{Coeficiente de superficie de arrastre evaluado con una velocidad del viento a 10 m. de altura} \quad [LT^{-1}]$$

$$C_{10} = (0.8 + 0.065\bar{U}_{10}) \times 10^{-3} \quad (2.47)$$

La evaluación del viento a cualquier altura puede hacerse a través de la siguiente ecuación:

$$\bar{U}_z = \bar{U}_{10} + u_* \ln \left(\frac{z_v}{10} \right) \quad (2.48)$$

donde:

z_v Altura a la que se desea la velocidad del viento. [L]

\bar{U}_{10} velocidad a una altura de 10 msnm. [LT^{-1}]

Espectro ISSC

En el International Ship Structures, Congreso de 1964, realizaron una ligera modificación a la forma del espectro proporcionado por Bretschneider.

$$S(f) = 0.1107 H_{s_0}^2 \frac{f_s^{-4}}{f^5} \exp \left[-0.4427 \left(\frac{f_s}{f} \right)^4 \right] \quad (2.49)$$

La relación de la frecuencia pico, (f_p) y la frecuencia media (\bar{f}) para el espectro ISSC es:

$$\bar{f} = 1.296 f_p$$

Espectro de Krylov

En 1966, Krylov propuso un modelo espectral que tiene como base la frecuencia media. Este modelo está definido por la siguiente expresión:

$$S(f) = \frac{\pi m_0}{\bar{f}_0} \left(\frac{f}{\bar{f}_0} \right)^{-7} e^{\left(-\frac{\pi}{4} \left(\frac{f}{\bar{f}_0} \right)^4 \right)} \quad (2.50)$$

donde:

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{T_{02}} = \frac{1}{\sqrt{m_0/m_2}}$$

T_{02} Es el periodo medio de la ola ec (2.29)

Espectro ITTC

En el Congreso Internacional Towing Tank Conference (1966, 1969, y 1972) se propusieron cambios al espectro de Pierson y Moskowitz en términos de la altura de ola significante y de la frecuencia media ($f_z = 1/T_{02}$).

donde:

T_{02} Es el periodo medio de la ola ec (2.29)

$$S(f) = 1.272m_0 f_z^4 f^{-5} \exp\left[-0.318\left(\frac{f_z}{f}\right)^4\right] \quad (2.51)$$

Espectro JONSWAP

Hasselman *et al* (1973), propusieron el espectro de JONSWAP, el cual fue generado con datos tomados a finales de la década de los sesenta por un proyecto de medición de oleaje conocido como JONSWAP, por sus siglas en inglés (Joint North Sea Wave Project).

Este espectro fue generado para estados de mar formados por viento, con fetch limitado y para una profundidad de aguas indefinida. La expresión que representa este espectro es.

$$S(f) = S_p(f) \phi_{PM}\left(\frac{f_z}{f}\right) \phi_J(f, f_p, \gamma, \sigma) \quad (2.52)$$

donde:

$S_p(f)$ Es la ecuación de Phillips dada por la ec (2.33)

$\phi_{PM}(f/f_p)$ Es la función de forma de Pierson–Moskowitz

$$\phi_{PM}\left(\frac{f}{f_p}\right) = e^{-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^4} \quad (2.53)$$

ϕ_J Es el factor de forma del espectro JONSWAP

$$\phi_J = \gamma^{e^{\left[\frac{-(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right]}} \quad (2.54)$$

donde:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_A & f_p \leq f \\ \sigma_B & f_p > f \end{cases}$$

Espectro TMA

Para aguas poco profundas, Boas *et al* (1958), asumieron la validez del espectro tipo Jonswap, expresado en función del número de onda k , e incluyeron el factor de transformación, $\phi_k(\omega_H)$, dado explícitamente por:

$$\phi(\omega_H) = \tanh^2(kh) \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh} \right) \quad (2.55)$$

donde:

$$\begin{aligned} h &\quad \text{Profundidad del agua.} & [L] \\ kh &\quad \text{Puede obtenerse cada } \omega_H \end{aligned}$$

$$\omega_H = 2\pi f \left(\frac{h}{g} \right)^{1/2} \quad (2.56)$$

donde:

$$\begin{aligned} k &\quad \text{Número de onda.} & [L^{-1}] \\ f &\quad \text{Frecuencia cíclica.} & [T^{-1}] \end{aligned}$$

k y f Se relacionan a partir de la relación de dispersión,

$$(2\pi f)^2 = gk \tanh kh \quad (2.57)$$

CAPÍTULO 3

TEORÍAS DE OLEAJE Y CLASIFICACIÓN DE MODELOS EXISTENTES

3.1. Introducción

Todo problema físico puede llevar a un modelo matemático utilizando, una serie de ecuaciones de gobierno y sus respectivas condiciones de contorno. Las ecuaciones que gobiernan el problema de un fluido como medio continuo son los principios de conservación. Generalmente se trabaja con las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento (Navier-Stokes) y energía. La resolución de estas ecuaciones en forma completa suele ser difícil, dado que se requiere una detallada descripción geométrica del dominio y la utilización de métodos numéricos. Sin embargo, la realización de varias hipótesis simplificativas, reducen la complejidad del problema obteniendo soluciones analíticas relativamente sencillas de utilizar.

Al desarrollar las diferentes teorías de onda, el movimiento del fluido se va a estudiar desde el punto de vista euleriano, especificando la velocidad y la presión en cada punto del dominio del fluido.

El sistema propuesto, para nuestro caso es el sistema de referencia cartesiano (x, y, z) ; en el cual hay un campo de velocidades definido en función del vector velocidad (\bar{u}) de componentes (u, v, w) . Cabe destacar que tanto la presión (p) como las velocidades (u, v, w) son función de las variables independientes (x, y, z, t) .

3.2. Ecuaciones de gobierno de los modelos de circulación y propagación de oleaje

Considerando que el fluido es un medio continuo y homogéneo, las ecuaciones que gobiernan el movimiento son la *ecuación de conservación de la masa* y la *segunda ley de Newton* o *conservación de la cantidad de movimiento*. Por otro lado, se asumirá que la única fuerza de volumen externa actuante es la *gravedad*, dado que es el mecanismo que controla este tipo de ondas. También se toma en consideración que el fluido es incompresible y que los períodos de las ondas son despreciables, comparados con el periodo de rotación terrestre (se desprecian los efectos de Coriolis). La incompresibilidad del flujo permite sustituir la ecuación de conservación de la masa por la ecuación de continuidad tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

Para los problemas de onda que nos interesan corresponden al numero de Reynolds, $R \gg 1$. En este tipo de problemas los efectos viscosos son importantes cerca de los contornos establecidos por superficies sólidas o por fluidos con otras características. Precisamente a esta zona de confinamiento de los efectos viscosos se le conoce como capa límite. Para una primera aproximación se considera el fluido como no viscoso y que los efectos de la tensión superficial son despreciados, por lo que, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se convierte en la ecuación de Euler.

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde $\frac{D}{Dt}$ es la derivada total que puede ser expresada en función del operador diferencial.

$$\nabla \cdot () = \frac{\partial}{\partial x} () \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} () \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} () \vec{k} \quad (3.3)$$

Como:

$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + u \frac{\partial()}{\partial x} + v \frac{\partial()}{\partial y} + w \frac{\partial()}{\partial z} = \frac{\partial()}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla() \quad (3.4)$$

Por lo tanto las ecuaciones (3.2), conocidas como las ecuaciones de Euler, al no considerarse los efectos viscosos no existen esfuerzos tangenciales, sino exclusivamente fuerzas normales, presiones y fuerzas de volumen inducidas por la aceleración de la gravedad. Teniendo como

incógnitas a (u, v, w) y (p) , es decir 4 incógnitas y por lo tanto las ecuaciones de Euler conjuntamente con la ecuación de la continuidad (ecs. 3.1) y las condiciones de contorno correspondientes definirán por completo el flujo para un fluido no viscoso.

Para la solución de estas incógnitas, tendremos que agruparlas en una función escalar (Φ) llamada potencial de velocidades o de una función de corriente (Ψ). En este caso, el problema se puede reducir a una ecuación de gobierno única derivada a partir de la ecuación de continuidad y sus correspondientes condiciones de contorno.

3.2.1. Potencial de velocidades.

Se define la vorticidad (\vec{w}), como el rotacional del vector velocidad (\vec{u}), es decir mediante el producto vectorial.

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{u} \quad (3.5)$$

Cuyas componentes son

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad w_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad w_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.6)$$

Se dice que un flujo es *rotacional* cuando las partículas del flujo además de experimentar translación y deformación rotan. En un fluido en el que no se producen esfuerzos tangenciales no es posible inducir la rotación de las partículas, por ello para un flujo no viscoso, las partículas que no rotan se mantienen sin rotación, y el flujo se llama *irrotacional*. Además, para los flujos en los que la densidad (ρ) es constante, tal es el caso de estudio, o que $\rho = \rho(p)$, se puede demostrar que si inicialmente $\vec{w} = \vec{0}$, la velocidad se mantiene nula en todo instante. Por tanto, todo flujo irrotacional en un fluido no viscoso se mantiene irrotacional.

Cerca de los contornos es importante destacar que los efectos viscosos son importantes y el flujo es rotacional. Pero en todo la columna de agua fuera de la capa límite, el flujo puede considerarse irrotacional.

Dada la consideración de que el flujo es irrotacional, se puede definir una función escalar, $\Phi(x, y, z, t)$ llamada potencial de velocidades tal que.

$$\vec{u} = -\nabla \cdot \Phi \quad (3.7)$$

es decir

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.9)$$

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.10)$$

Sustituyendo la ecuación (3.7) en la ecuación (3.1), se llega a la ecuación de Laplace válida en todo el dominio fluido.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.11)$$

También es conocida como la teoría potencial. La ec (3.11) se utiliza como ecuación de gobierno para las ondas dado que presenta 2 ventajas: Es lineal en la variable dependiente (Φ) y las ecuaciones de contorno pueden definirse en función de este potencial de velocidades dado que las variables (u, v, w) pueden expresarse en función del mismo. Por lo que, el problema se reduce a dos incógnitas (Φ) y (p).

Por lo tanto es necesario obtener otra ecuación que relacione (Φ) y (p), la cual se obtiene de la ecuación de Euler. A partir de la ec (3.2) que puede integrarse, y utilizando las expresiones del campo de velocidades ec. (3.7), operando e integrando se llega a la siguiente ecuación.

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (3.12)$$

Llamada ecuación de Bernoulli para un flujo no estacionario e irrotacional y es válida en todo el fluido. Esta ecuación relaciona la presión, la elevación de las partículas y el potencial de velocidades.

Donde $C(t)$, es la constante de Bernoulli dependiente del tiempo y se debe obtener de las condiciones de contorno. Al ser independiente del espacio, su valor es el mismo en todo el dominio fluido, por lo que, conocido el potencial de velocidades y elevaciones en dos puntos, se puede conocer la diferencia de presiones entre ambas posiciones, simplemente igualando las ecuaciones de Bernoulli correspondientes a cada posición.

Resolviendo la ecuación de Laplace (3.11) para obtener Φ y obtener el campo de velocidades con dicha función. Sustituyendo el potencial en la ecuación de Bernoulli (3.12), se llega a la expresión del campo de presiones con lo que el problema se simplifica a una incógnita Φ con una desventaja fundamental, que es una aproximación al problema únicamente válida para fluidos no viscosos.

3.2.2. Función de corriente

Para todo fluido incompresible existe una función de corriente (Ψ) siempre y cuando el flujo sea bidimensional. Para flujos tridimensionales, la función de corriente existe solo si el flujo es axialsimétrico.

La existencia de la función de corriente (Ψ) que es una función escalar, depende de las variables (x, z, t) posibilita expresar el campo de velocidades como.

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ w &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Conocida Ψ se puede calcular el campo de velocidades en cualquier punto del fluido. Ahora bien, utilizando las expresiones de la ec (3.13) y asumiendo flujo irrotacional se puede demostrar que:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (3.14)$$

Siendo la ecuación de Laplace expresada mediante la función de corriente para un problema bidimensional.

3.2.3. Condiciones de contorno

Dado que la ecuación de Laplace es de segundo orden será necesario formular dos condiciones de contorno para cada variable. En dichos contornos, ya sean fijos o móviles, las velocidades del fluido deben seguir el movimiento del contorno. Estas condiciones referidas a la cinemática de las partículas son conocidas como *condiciones cinemáticas* de contorno. Sin embargo, aquellos contornos que estén formados por superficies libres son deformables frente a la acción de esfuerzos. Por ello, será necesario formular condiciones de contorno capaces de describir la distribución de presiones sobre dicho contorno. Estas condiciones se denominan *condiciones dinámicas* de contorno.

Asumiendo, por ejemplo, el problema de la propagación de la onda en dos dimensiones sobre un fondo horizontal impermeable definido por $z = -h$, donde h es la profundidad respecto al nivel en reposo y η es el desplazamiento de la superficie libre, será necesario definir cuatro condiciones de contorno: dos en dos valores distintos de x (por ejemplo, $x = 0$ y $x = L$) una el fondo $z = -h$ y otra en la superficie libre $z = \eta$, figura (3.1.) Es decir, será preciso definir 4 condiciones cinemáticas de contorno. Sin embargo, este problema presenta una particularidad importante que radica en el hecho de que el contorno $z = \eta$ es una superficie libre y que su posición no es conocida. Por ello, será necesaria una condición de contorno adicional que deberá ser una condición dinámica que indique la distribución de la presión en la superficie del agua.

3.2.4. Condición cinemática

En general, el problema de las ondas se plantea en un dominio limitado por la superficie libre definida como $F(x, y, z, t) = z - h(x, y, t) = 0$, figura (3.1), por tanto, a partir de esta ecuación se puede obtener la condición cinemática de contorno para un fondo variable e impermeable.

$$w = -\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \text{ en } z = h(x, y, t) \quad (3.15)$$

Si queremos que el fondo sea horizontal, entonces no existe variación del fondo con respecto a x y y . Entonces tenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ y } \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad w = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (3.16)$$

La condición (3.16) implica que la velocidad perpendicular al contorno es nula, o lo que es lo mismo, que la velocidad en el contorno es tangente al mismo.

Es necesario comentar que cuando el fluido es viscoso la condición de contorno en el fondo es de no deslizamiento, por lo que, la condición (3.16) debe sustituirse por:

$$u = v = w = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (3.17)$$

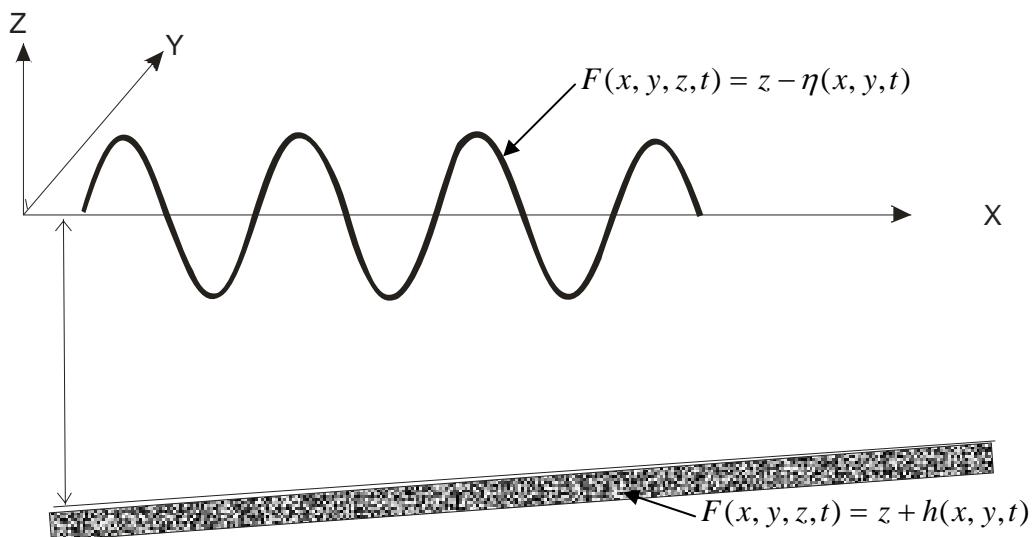


Figura 3.1 Condiciones de contorno

3.2.5. Condiciones dinámicas

La condición dinámica se formula en función de los esfuerzos actuantes o del campo de velocidades y expresa el balance dinámico en la interfase de dos fluidos (agua-aire). Ahora bien, si despreciamos la tensión superficial y para un fluido no viscoso, la condición dinámica de superficie libre se expresa como:

$$p = p_a \quad \text{en} \quad z = \eta \quad (3.18)$$

donde

$$\begin{aligned} p &\quad \text{Presión en el fluido.} & [FT^{-2}] \\ p_a &\quad \text{Presión atmosférica.} & [FT^{-2}] \end{aligned}$$

Para el caso del flujo irrotacional, se puede hacer uso de la ecuación de Bernoulli ec. (3.12) tal que la condición dinámica en la superficie libre expresa como.

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p_a}{\rho} + gz = C(t) \quad \text{en } z = \eta \quad (3.19)$$

3.2.6. Condiciones laterales

Las condiciones descritas hasta el momento son en la superficie y en el fondo; ahora bien, para las condiciones laterales es muy variado dependiendo del problema que se tenga.

- El dominio fluido es infinito, $x \rightarrow \pm\infty$. Por lo que, será necesario especificar que el movimiento de interés es periódico en el espacio (en la dirección del eje x) y de longitud de onda (L). Por lo tanto, se tiene la siguiente condición, que implica a si mismo la periodicidad del campo de velocidades (\bar{u}) y el campo de presiones (p).

$$\Phi(x+L, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t) \quad (3.20)$$

- El dominio es semiinfinito, $x \geq 0$, con un contorno dado, por ejemplo una pared vertical impermeable en $x = 0$. En este caso, se deberá especificar una condición cinemática de contorno en $x = 0$ indicando que no hay flujo a través de la pared tal que.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (3.21)$$

mientras que el otro lado, se especificará una condición de periodicidad espacial.

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x+L, y, z, t) \quad (3.22)$$

- Si el dominio es finito en la dirección x , es necesario expresar una condición cinemática en cada uno de los contornos laterales.
- En algunas situaciones es necesario imponer condiciones que acoten la solución; por ejemplo, que las ondas sean finitas en todo el dominio o que las ondas se comporten como tales en todo el dominio. Este último es la condición de radiación y se presentará con más detalle en la parte de la difracción.

3.2.7. Condiciones temporales

A pesar de que la ecuación de Laplace no presenta derivadas respecto al tiempo, la función (Φ) si es función de (t) y, por lo tanto, será necesario imponer una condición temporal. Dado que se requieren soluciones periódicas con un periodo (T) la condición se expresa como.

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t + T) \quad (3.23)$$

Una vez descrito las hipótesis de partida, las ecuaciones de gobierno y las condiciones de contorno, se puede formular el problema general de las ondas en tres dimensiones.

- Se considera el fluido un medio continuo, homogéneo, incompresible y no viscoso.
- Se desprecia los efectos de Coriolis.
- Se considera la presión en la superficie uniforme y constante.
- Se considera flujo irrotacional.
- Inicialmente se considera el fondo variable e impermeable.

Con base a dichas hipótesis el problema general de las ondas se plantea como:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq L \\ -\infty < y < \infty \\ -h(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t) \end{array} \right.} \quad (3.24)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{en } z = h(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t) \quad (3.25)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (3.26)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + gz = C(t) \quad z = \eta(x, y, t) \quad (3.27)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t + T) \quad (3.28)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x + L, y, z, t) \quad (3.29)$$

Donde las condiciones de contorno se han expresado en función del potencial de velocidades y se ha considerado $p_a = 0$ en la ec. (3.19). Las condiciones laterales dependerán del caso que se considere. En general, se asumirá periodicidad espacial.

Como puede verse la resolución de estas ecuaciones presenta dos problemas fundamentales: el primero es que las condiciones de contorno están planteadas en la superficie libre (η) que es una de las incógnitas del problema; la segunda es que estas ecuaciones de contorno son no lineales.

Por lo tanto, la solución demanda la búsqueda de soluciones aproximadas que lleven a ecuaciones más simples que tengan incluso soluciones analíticas o el uso de métodos numéricos.

3.2.8. Límite de validez de las teorías de oleaje

El oleaje es un fenómeno complejo y difícil de describir matemáticamente dada su no linealidad, características tridimensionales y aparente aleatoriedad. Como ya se mencionó en los capítulos anteriores, una de las teorías clásica es la desarrollada por Airy (1845), que describe las ondas mas simples. Describe las características del oleaje donde la profundidad relativa a la longitud de onda no es muy pequeña. La primera aproximación de Stokes (1880) es muy parecida a la teoría desarrollada por Airy.

Para profundidades relativamente pequeñas la teoría cnoidal a menudo da una aproximación aceptable de las ondas. Para profundidades muy someras, cercanas a la zona de rompiente, la teoría de la onda solitaria predice satisfactoriamente ciertas propiedades de estas ondas. Siendo estas dos teorías derivadas de las ecuaciones de Boussinesq o de Korteweg de Vries (KdV) (UNAM, 2003). Que es una de las teorías de amplitud finita, es decir, teorías no lineales que su descripción matemática es mucho más compleja dependiendo de su no linealidad. Otras teorías desarrolladas por Stokes y partiendo de la teoría lineal, que va aumentando el orden de solución.

Por su parte, Le Méhauté muestra una figura (3.2) para ilustrar aproximadamente los límites de validez de las diferentes teorías (Le Méhauté, 1976).

La clasificación de las ondas también se pueden distinguir por la consideración de la onda, como se puede ver en la figura (3.3) donde se presenta la superficie libre correspondiente a las ondas más comúnmente empleadas con el fin de mostrar las diferencias.

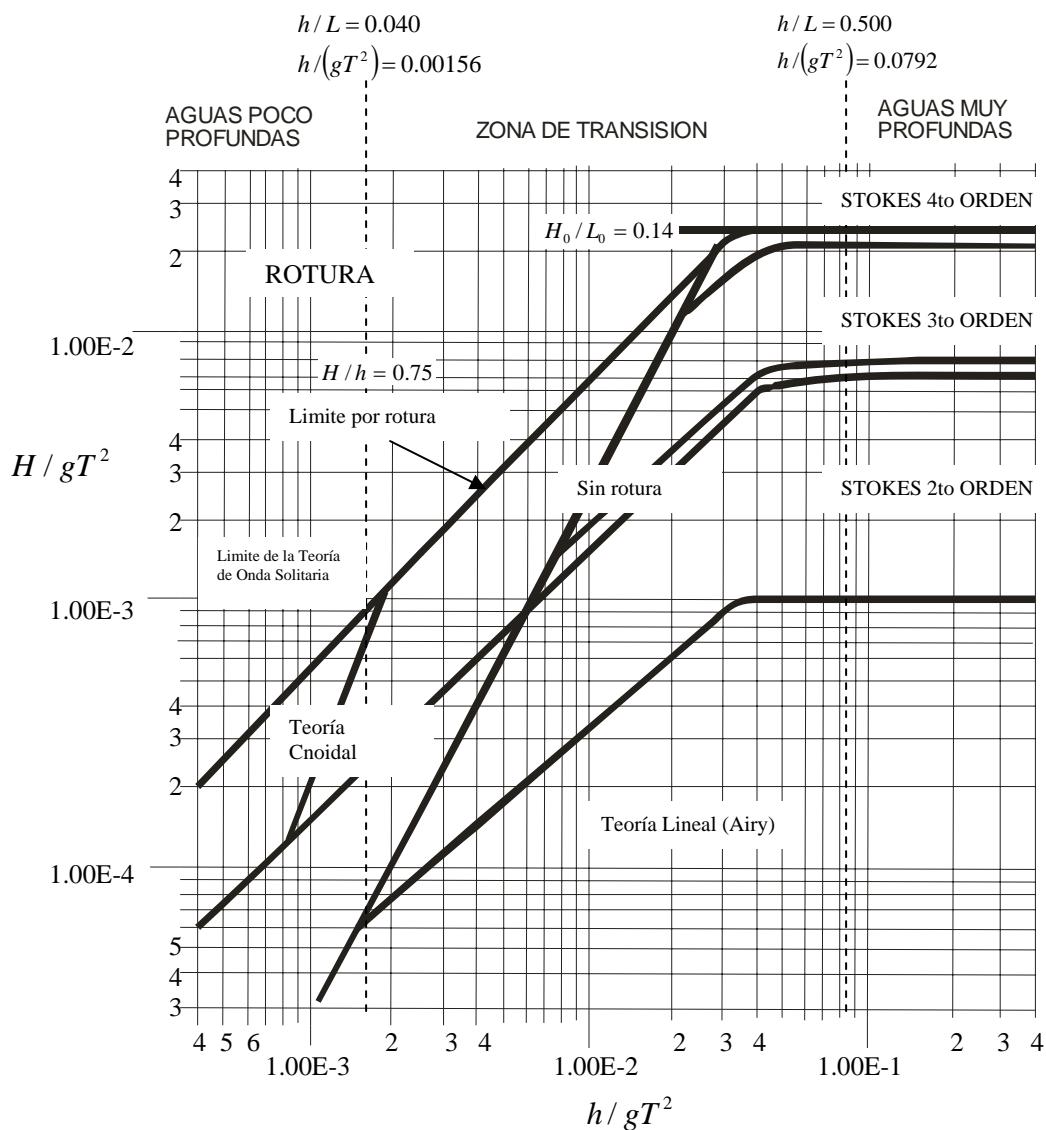


Figura 3.2. Regiones de validez de las teorías de las olas. (Le Méhauté, 1976).

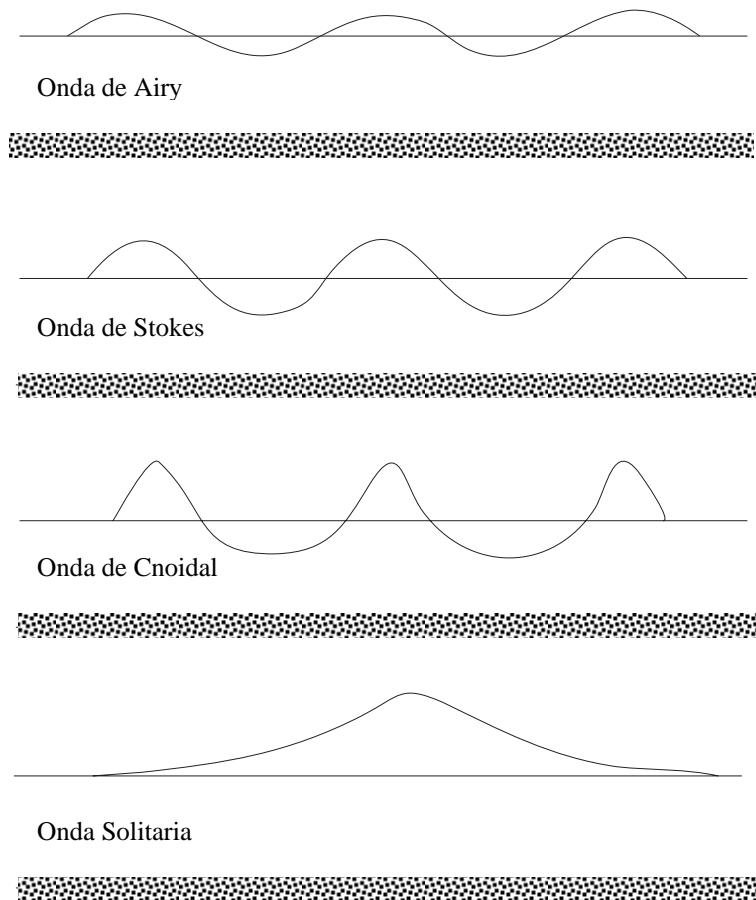


Figura 3.3 Perfiles de la onda de acuerdo a las diferentes teorías. (U. Cantabria, 2000)

3.3. Teoría de la ola de amplitud pequeña

La teoría lineal es una de las teorías que está vigente en nuestros días ya que se sigue aplicando para el diseño de las obras en la zona costera y ya que presenta múltiples ventajas: es la más simple de las teorías posibles, el nivel de reposo coincide con el nivel medio, su carácter lineal posibilita la eliminación de los términos no lineales facilitando la obtención de soluciones analíticas sencillas y la solución es lineal.

Es también llamada teoría de pequeña amplitud, por que las ecuaciones son teóricamente exactas cuando el movimiento tiende a cero. Fue desarrollada por Airy en (1845). El caso más simple de esta teoría establece que las relaciones H/L , H/h y L/h , son pequeñas y los términos inerciales convectivos son despreciables. Los valores de la longitud de onda (L) y altura de la onda (H) son valores mucho menores que la profundidad del agua (h).

El parámetro H/L , llamado relación de esbeltez, es más significativo en aguas profundas, mientras que el parámetro H/h , denominado altura relativa, lo es en aguas poco profundas; en la zona de profundidades intermedias, así como en las otras dos zonas, lo es el parámetro $(H/L)(H/h)^3$.

Además de lo que se ha dicho se considerará el problema bidimensional (x, z) de una onda propagándose sin modificar su forma, sobre un fondo horizontal e impermeable. Considerando $\eta \ll 1$ o $u\eta \ll \eta$.

En base a dichas hipótesis el problema general de las ondas se plantea de la siguiente manera.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \begin{aligned} 0 &\leq x \leq L \\ -h &< z < 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (3.31)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{en } z = 0 \quad (3.32)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = C(t) \quad z = 0 \quad (3.33)$$

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x, z, t + T) \quad (3.34)$$

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x \div L, z, t) \quad (3.35)$$

- La superficie libre del agua tiene una forma que está dada por la ecuación $z = \eta(x, y, t)$, donde la presión relativa es cero, obtenida de la ec. (3.33)

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad \text{Para } z = 0 \quad (3.36)$$

En algunos de los casos para obtener la condición combinada en la superficie libre se despeja η en las ecs. (3.32) y (3.33), y se igualan.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (3.37)$$

3.3.1. Onda progresiva

Para encontrar la función (Φ) que resuelve la ecuación diferencial y todas las condiciones de contorno impuestas. El método más conveniente para resolver este problema de contorno es el método de separación de variables, una vez resuelto para las ecs. de la (3.30) a la (3.35), se obtiene una posible solución del potencial (Φ) que corresponde a una onda propagándose en el sentido positivo del eje x, llamada ecuación de *Cauchy–Poisson* en la superficie libre del agua, que se expresa en la ec (3.38) (U. Cantabria, 2000).

$$\Phi(x, z, t) = \frac{A \cdot g \cosh k(h+z)}{\omega \cosh \cdot kh} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (3.38)$$

donde:

A	Amplitud de la ola.	[L]
g	Aceleración de la gravedad.	[LT^{-2}]
k	Número de onda.	[L^{-1}]
ω	Frecuencia angular de la ola.	[T^{-1}]
h	Profundidad.	[L]
t	Tiempo.	[T]
(x, z)	Coordenadas del sistema de referencia mostrado en la figura (2.4).	

Esta función Φ , satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$, en un flujo potencial ó irrotacional, de ahí que la teoría de solución de esta ecuación es llamada teoría potencial, Kreyszig (1964). Las funciones que tienen derivadas continuas de segundo orden y satisfacen la ecuación de Laplace, son llamadas *funciones armónicas*; por tanto Φ , ec. (3.38), es una solución armónica y es la función potencial de velocidades de una ola progresiva (periódica) en x y t . (Vergara, 2005)

La solución correspondiente a las ondas suele expresarse también haciendo uso de la variable compleja, dado que ésta facilita el álgebra considerablemente. La expresión correspondiente a la ec. (3.38) en variables complejas es.

$$\Phi(x, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{ig}{\omega} A \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh \cdot kh} e^{-i(kx-\omega t)} \right\} \quad (3.39)$$

 Modulo o magnitud del potencial Función profundidad Función que relaciona x con t

donde:

Re Implica que la solución es solamente la parte real de la expresión entre paréntesis.

i Es la unidad imaginaria.

Después de conocer Φ y de sustituirla en la ec. (3.36), se obtiene la ecuación de la superficie libre dada por:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = A \cos(kx - \omega t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \quad (3.40)$$

$$\eta(x, t) = \text{Re} \left\{ A e^{-i(kx - \omega t)} \right\} \quad (3.41)$$

Asumiendo que la ola se desplaza como en la figura (3.4) se pudo determinar la celeridad de la onda.

$$C = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (3.42)$$

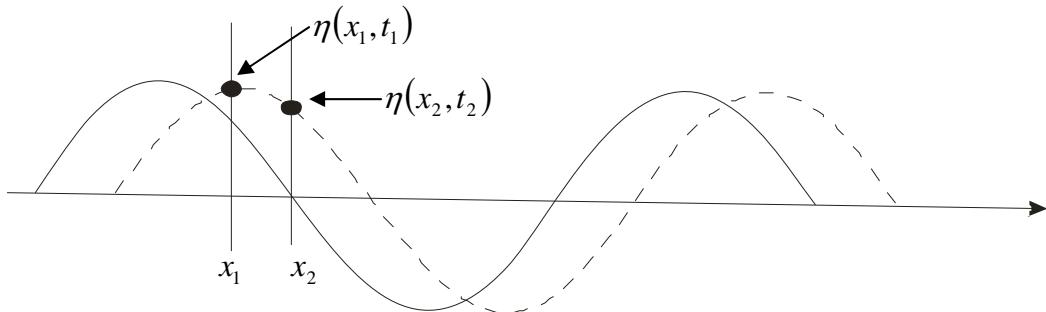


Figura 3.4 Propagación del perfil de la onda.

De acuerdo a la forma constante de la ola progresiva antes establecida, $(kx - \omega t)$ es constante, derivándose de aquí la velocidad de desplazamiento de la ola y del observador llamada celeridad de la ola e igual a:

$$C = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T} \quad (3.43)$$

Para el caso contrario de que la onda se propague en sentido negativo las ecuaciones son las siguientes:

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \cos(kx + \omega t) \quad (3.44)$$

$$\eta(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{-i((-kx)-\omega t)} \right\} \quad (3.45)$$

Para el caso en que la onda se propague con cierta oblicuidad, se considera el caso de una onda que se propaga formando un ángulo (θ) respecto al eje x , en donde el número de onda vendrá definido por un vector (\vec{k}), ec (2.12) y tal que la fase de la onda es:

$$S = k_x x + k_y y - \omega t \quad (3.46)$$

La superficie libre se expresa en el plano (x, y) entonces como:

$$\eta = A \cos(k_x x + k_y y - \omega t) \quad (3.47)$$

donde:

$$\begin{aligned} k_x &= k \cos \theta && \text{Número de onda en la dirección } x && [L^{-1}] \\ k_y &= k \sin \theta && \text{Número de onda en la dirección } y && [L^{-1}] \end{aligned}$$

Partiendo de la ecuación de dispersión (3.48a) por que describe como las ondas de distintas frecuencias se dispersan debido a sus diferentes celeridades.

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (3.48a)$$

donde:

$$\begin{aligned} \omega &\quad \text{Frecuencia angular de la ola.} && [T^{-1}] \\ g &\quad \text{Aceleración de la gravedad.} && [LT^{-2}] \\ k &\quad \text{Número de onda.} && [L^{-1}] \\ h &\quad \text{Profundidad.} && [L] \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las ecs (2.2), (2.6) y sustituyéndolas en la ec (3.48)

$$C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \quad (3.48b)$$

Al elevar al cuadrado.

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad (3.48c)$$

Sustituyendo $L = CT$ y reduciendo

$$C = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{Tanh}\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (3.49)$$

donde:

C Celeridad de la onda. $[LT^{-1}]$

Al escribir la longitud de la ola en función de la celeridad se llega a:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{Tanh}\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (3.50)$$

donde:

L Longitud de la ola. $[L]$

T Periodo de la ola. $[T]$

π 3.14159

La ec. (3.50) puede tener varias aproximaciones que expresan esta ecuación de forma explícita, de las cuales cabe destacar la de Fenton y McKee (1990) (U. Cantabria, 2000).

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \left[\operatorname{Tanh}\left(2\pi \frac{\sqrt{(h/g)}}{T}\right)^{3/2}\right]^{3/2} \quad (3.51)$$

Esta ecuación es utilizada para efectos ingenieriles ya que su exactitud en profundidades reducidas e indefinidas es muy buena y en profundidades intermedias existe un error menor al 1.7%.

Una vez visto las ecuaciones que describen la onda, es necesario estudiar el comportamiento de las funciones hiperbólicas en los límites establecidos en profundidades e indefinidas con el fin de buscar posibles simplificaciones.

Las funciones hiperbólicas senh , cosh y tanh , son funciones que dependen de kh , además pueden expresarse mediante la función exponencial; partiendo de esto podemos hacer simplificaciones, tal que sus formas asintóticas sean como en la tabla (3.1) (U. Cantabria, 2000).

Tabla 3.1 Simplificación de las ecuaciones hiperbólicas

Función	$kh \rightarrow \infty$	$kh \rightarrow 0$
$\operatorname{senh} kh$	$e^{kh}/2$	1
$\operatorname{cosh} kh$	$e^{kh}/2$	kh
$\operatorname{tanh} kh$	1	kh

Con estas simplificaciones, la ec. (3.48a) queda para aguas indefinidas.

$$\omega^2 = gk \tanh kh \approx gk \quad (3.52)$$

Ahora bien, para determinar la longitud de onda en *aguas indefinidas o profundas* ver tabla (2.1) se tiene.

$$L = L_0 = \frac{g}{2\pi} T^2 = 1.56T^2 \quad (3.53)$$

$$C = C_0 = \frac{g}{2\pi} T = 1.56T \quad (3.54)$$

donde:

$$\begin{aligned} L_0 & \text{ Longitud de la ola en aguas profundas. } & [L] \\ C_0 & \text{ Celeridad de la ola en aguas profundas. } & [LT^{-1}] \end{aligned}$$

Para la región de *aguas poco profundas o reducidas*:

$$\omega^2 = gk \tanh kh \approx gk^2 h \quad (3.55)$$

$$C = (gh)^{1/2} \quad (3.56)$$

$$L = T(gh)^{1/2} \quad (3.57)$$

La región comprendida entre las dos anteriores, es denominada *zona de aguas intermedias* y los valores de la celeridad (C) y longitud de la onda (L), se obtienen con las ecs. (3.49) y (3.50).

Campo de velocidades.

Las componentes de la velocidad total de una partícula del fluido no viscoso (flujo potencial) en una ola progresiva de amplitud pequeña (el perfil de la ola se desplaza), se pueden obtener a partir de la expresión del potencial de velocidades Φ mediante la siguiente expresión.

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.58)$$

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.59)$$

donde:

$$\begin{aligned} u & \text{ Componente de la velocidad en dirección } x. \\ w & \text{ Componente de la velocidad en la dirección } z. \end{aligned}$$

Las aceleraciones en la dirección x (a_x) y en la dirección y (a_y) son:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.60)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.61)$$

Conocida el potencial (Φ), se puede obtener el campo de velocidades y aceleraciones asociadas a la onda. A continuación, se aplica a una onda progresiva para mostrar características fundamentales del campo de velocidades y aceleraciones.

También utilizando el potencial, ec (3.38) las velocidades y aceleraciones para un tren de ondas progresivo son:

$$u = \frac{H}{2} \omega \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \cos(kx - \omega t) = \frac{Hgk}{2\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) \quad (3.62)$$

$$w = \frac{H}{2} \omega \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \operatorname{sen}(kx - \omega t) = \frac{Hgk}{2\omega} \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\cosh kh} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (3.63)$$

donde:

H Altura de la ola. [L]

La segunda igualación se obtuvo de la ec (3.48a)

Para las aceleraciones tenemos.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{H}{2} \omega^2 \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \operatorname{sen}(kx - \omega t) = \frac{Hgk}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{H}{2} \omega^2 \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \cos(kx - \omega t) = \frac{Hgk}{2} \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) \quad (3.65)$$

Trayectorias de las partículas.

Para calcular el desplazamiento de las partículas, es necesario tener en cuenta que el desplazamiento vertical de la partícula del fluido no puede superar el valor de la amplitud A .

Las expresiones para la trayectoria de una partícula con coordenadas (ζ, ξ) para una onda progresiva se tiene.

$$\zeta = -\frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senhkh}} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (3.66)$$

$$\xi = \frac{H}{2} \frac{\operatorname{senhk}(h+z)}{\operatorname{senhkh}} \cos(kx - \omega t) \quad (3.67)$$

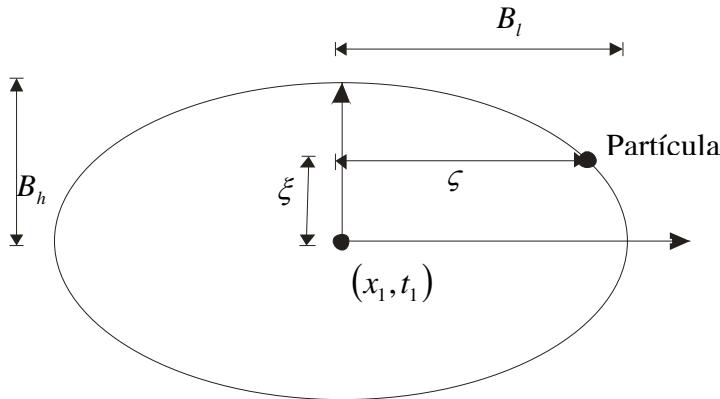


Figura 3.5 Referencia para la trayectoria de las partículas.

La figura (3.5) describe el movimiento de una partícula en esta teoría; la forma que dibujan es de forma elíptica y para las diferentes profundidades se puede ver claramente en la figura (3.6)

donde:

- | | | |
|---------|--|-----|
| B_l | Radio máximo de la partícula en la dirección x . | [L] |
| B_h | Radio máximo de la partícula en la dirección y . | [L] |
| ζ | Posición de la partícula en la dirección x . | [L] |
| ξ | Posición de la partícula en la dirección y . | [L] |

Estas ecuaciones pueden combinarse para dar la siguiente ecuación.

$$\frac{\zeta^2}{B_l^2} + \frac{\xi^2}{B_h^2} = 1 \quad (3.68)$$

donde:

Para profundidades intermedias.

$$B_l = \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senhkh}} \quad (3.69)$$

$$B_h = \frac{H}{2} \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \quad (3.70)$$

Para profundidades reducidas.

$$B_l = \frac{H}{2} \frac{1}{kh} = \frac{HT}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (3.71)$$

$$B_h = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \quad (3.72)$$

Para aguas profundas tenemos.

$$B_l = \frac{H}{2} e^{kz} \quad (3.73)$$

$$B_h = \frac{H}{2} e^{kz} = \alpha \quad (3.74)$$

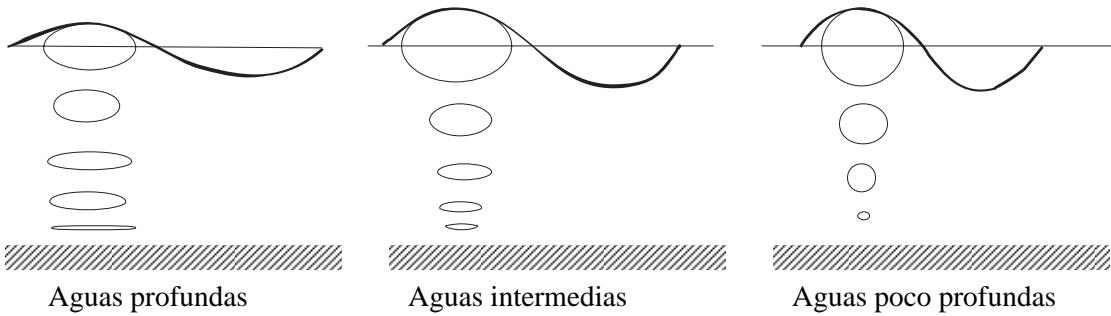


Figura 3.6 Trayectoria de las partículas en una onda progresiva para las diferentes profundidades.

Distribución de presiones.

El campo de presiones asociada a una onda progresiva se determina resolviendo la ecuación de Bernoulli, tal que.

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3.75)$$

El primer término denota la presión hidrostática, el segundo la presión dinámica ver figura (3.7). Sustituyendo el valor del potencial Φ .

$$p = -\rho g z + \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) \quad (3.76)$$

ó bien, usando el factor de respuesta de la presión (K_p) se tiene:

$$p = \rho g [\eta K_p - z] \quad (3.77)$$

$$K_p = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (3.78)$$

donde:

h	Profundidad.	[L]
g	Aceleración de la gravedad.	[LT^{-2}]
k	Número de onda.	[L^{-1}]
ρ	Densidad del fluido.	[$FT^2 L^{-4}$]
z	Altura a la que se desea la velocidad del viento.	[L]
η	Superficie libre del agua, medida del nivel medio de referencia.	[L]

Para los casos de aguas profundas y aguas poco profundas, con las simplificaciones hechas anteriormente, se llega respectivamente a:

Aguas profundas:

$$p = \rho g \eta e^{kz} - \rho g z \quad (3.79)$$

Aguas poco profundas:

$$p = \rho g \eta - \rho g z \quad (3.80)$$

Para obtener la presión hidrostática se tiene que.

$$p = \rho g(\eta - z) \quad 0 < z < \eta \quad (3.81)$$

Energía de la ola.

La energía total (E) de una ola progresiva es igual a la suma de las energías potencial (E_p) y cinética (E_c). La energía potencial de una onda se debe a las diferentes posiciones de las partículas cercanas a la superficie con respecto al nivel medio del mar y no depende del movimiento del líquido. Se puede considerar como el trabajo necesario para deformar una superficie horizontal en una senoidal, expresada como:

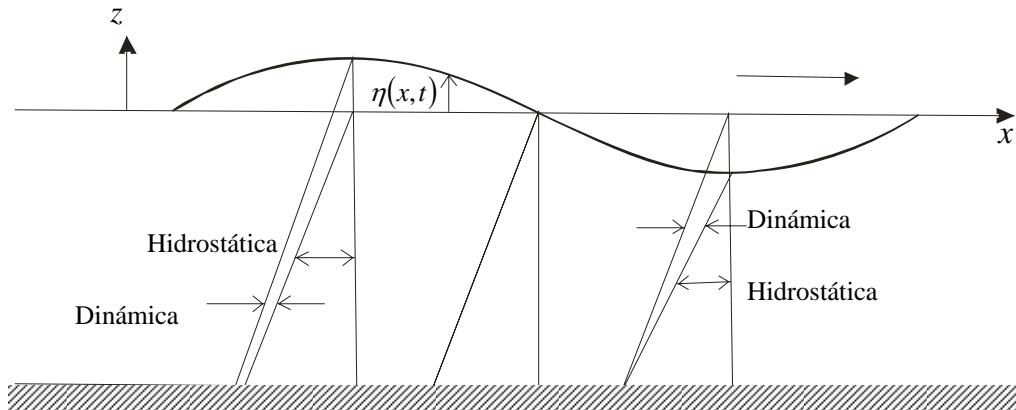


Figura 3.7 Distribución de presiones hidrostática y dinámicas de la ola.

$$Ep = \frac{\rho g H^2 L}{16} \quad (3.82)$$

La energía cinética (E_c) se debe a la velocidad que tienen los diferentes líquidos. Para un ancho unitario y en toda la longitud de la onda, la energía cinética es:

$$Ec = \frac{\rho g H^2 L}{16} \quad (3.83)$$

La energía total o densidad de energía por unidad de superficie de tren de ondas, es la suma de la energía potencial y cinética.

$$E = Ep + Ec = \frac{\rho g A^2 L}{2} = \rho g \frac{H^2}{8} L = \bar{E} L \quad (3.84a)$$

donde:

\bar{E} Es la densidad de energía

Y por unidad de superficie del mar (E_u) es

$$E_u = \rho g \frac{H^2}{8} \quad (3.84b)$$

Flujo de energía

El flujo de energía o potencia (P), es la rapidez de cambio del trabajo hecho por la ola para pasar de una sección a otra, separadas una distancia (L); a su vez el trabajo es igual al producto de una fuerza por la distancia recorrida en la dirección de aplicación de dicha fuerza. El potencial de una onda a lo largo de toda su longitud y por ancho unitario, se expresa.

$$P = \frac{\rho g H^2}{8} C \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)} \right] = E_u n C \quad (3.85)$$

donde:

C Celeridad de la onda. $[LT^{-1}]$

E_u Energía total del oleaje por unidad de superficie del mar. $[FL^{-1}]$

n Factor de grupo.

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh} \right) \quad (3.86)$$

3.3.2. Ondas estacionarias y quasi - estacionarias.

Estas se pueden ver en la naturaleza y están asociadas al concepto de la reflexión que se vera en el capítulo 4.

Esta se forma por la superposición de dos ondas progresivas con la misma amplitud, igual periodo e igual dirección viajando en distinto sentido, se puede presentarse en la cercanía de una pared vertical, donde la onda incidente se refleja casi completamente y la dirección de incidencia debe ser normal a ella. Esta se puede representar como se ve en la figura (3.8). También llamada clapotis.

Asumiendo que las olas progresivas tienen amplitud $H/4$, el potencial correspondiente a una onda estacionaria resulta de la suma de las dos ondas progresivas.

$$\Phi(x, z, t) = \frac{A.g \cosh k(h+z)}{\omega \cosh kh} \cos kx \operatorname{sen} \omega t \quad (3.87)$$

Después de conocer (Φ), se obtiene la ecuación de la superficie libre dada por:

$$\eta(x, t) = \frac{H}{4} \cos(kx - \omega t) + \frac{H}{4} \cos(kx + \omega t) \quad (3.88)$$

que puede simplificarse como:

$$\eta(x, t) = \frac{H}{4} \cos kx \cos \omega t \quad (3.89)$$

La altura de la onda estacionaria (H') es igual al doble de la altura de la ola progresiva ($H' = 2H$).

La ecuación de la dispersión es la misma que la estacionaria ec. (3.48).

Este tipo de olas se puede observar que oscilan en el espacio (x) y en el tiempo (t). En donde la superficie libre oscila arriba y abajo localmente con una amplitud que varía espacialmente como $A(x) = H / 2 \cos kx$ y se mantiene estacionaria en el tiempo. Esta superficie cuenta con los nodos, que no es otra cosa que puntos donde la superficie se encuentra sin movimiento y que se encuentran en.

$$kx_1 = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{donde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.90)$$

Por el contrario, los antinodos (punto donde se presenta la cresta y el valle) se encuentran con la ec. (3.91) como se muestra en la figura (3.8), (CFE, 1983).

$$kx_2 = n\pi \quad \text{donde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.91)$$

Campo de velocidades.

Las componentes de la velocidad para una onda estacionaria con el potencial descrito están dados por:

$$u = \frac{H}{2} \omega \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t = \frac{Hgk}{2\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t \quad (3.92)$$

$$w = -\frac{H}{2} \omega \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \cos kx \operatorname{sen} \omega t = -\frac{Hgk}{2\omega} \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\cosh kh} \cos kx \operatorname{sen} \omega t \quad (3.93)$$

donde:

h	Profundidad.	$[L]$
H	Altura de la ola.	$[L]$
k	Número de onda.	$[L^{-1}]$
g	Aceleración de la gravedad.	$[LT^{-2}]$
t	Tiempo.	$[T]$
z	Altura a la que se desea la velocidad del viento.	$[L]$
ω	Frecuencia angular de la ola.	$[T^{-1}]$
u	Es la componente de la velocidad en dirección x .	
w	Es la componente de la velocidad en la dirección z .	

Para las aceleraciones tenemos.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{H}{2} \omega^2 \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \operatorname{sen} kx \cos \omega t = \frac{Hgk}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \operatorname{sen} kx \cos \omega t \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{H}{2} \omega^2 \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \cos kx \cos \omega t = -\frac{Hgk}{2} \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\cosh kh} \cos kx \cos \omega t \quad (3.95)$$

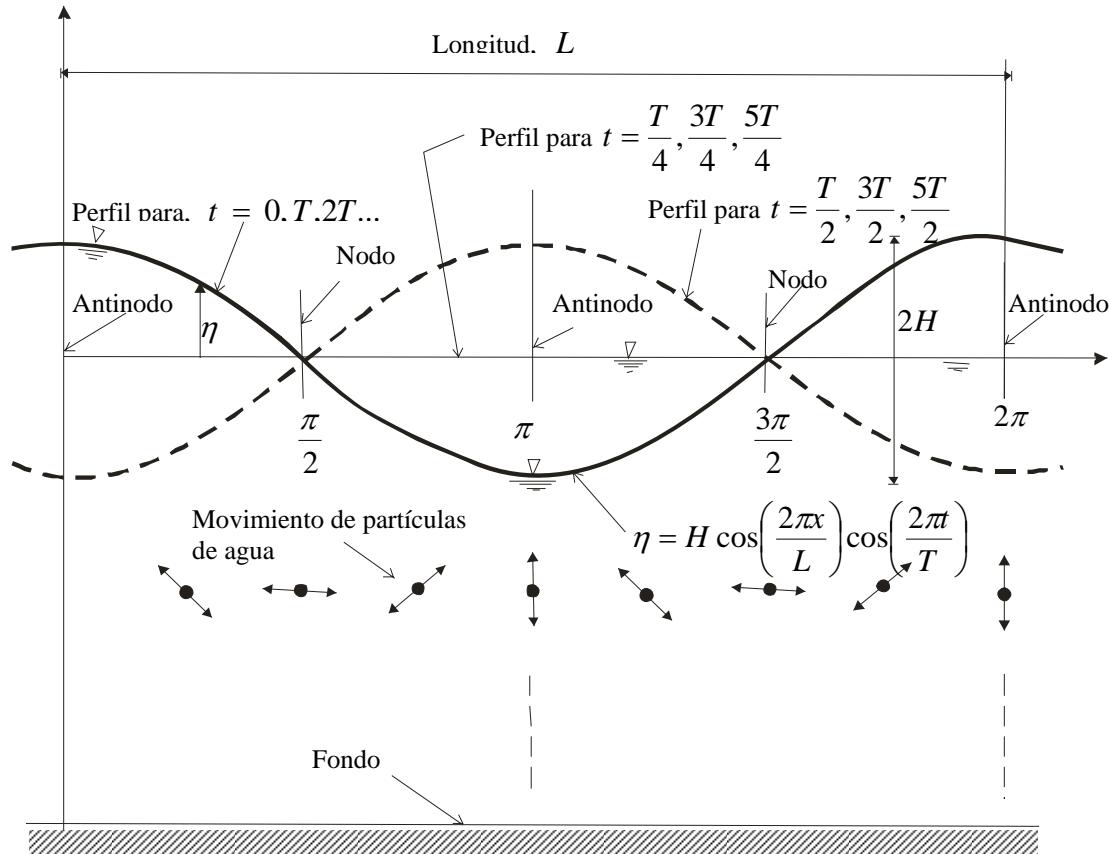


Figura 3.8 Representación de una onda estacionaria.

Trayectorias de las partícululas.

Las expresiones para la trayectoria de una partícula con coordenadas (ζ, ξ) para una onda estacionaria se tiene.

$$\zeta = -\frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senhkh}} \operatorname{senkx} \cos \omega t = -\alpha \cos \omega t \quad (3.96)$$

$$\xi = \frac{H}{2} \frac{\operatorname{senhk}(h+z)}{\operatorname{senhkh}} \cos kx \cos \omega t = \beta \cos \omega t \quad (3.97)$$

Se puede observar que las partículas se desplazan en forma lineal y su magnitud e inclinación dependen de la posición bajo el perfil y la profundidad a la que se encuentra la partícula ver figura (3.9.), (U. Cantabria, 2000).

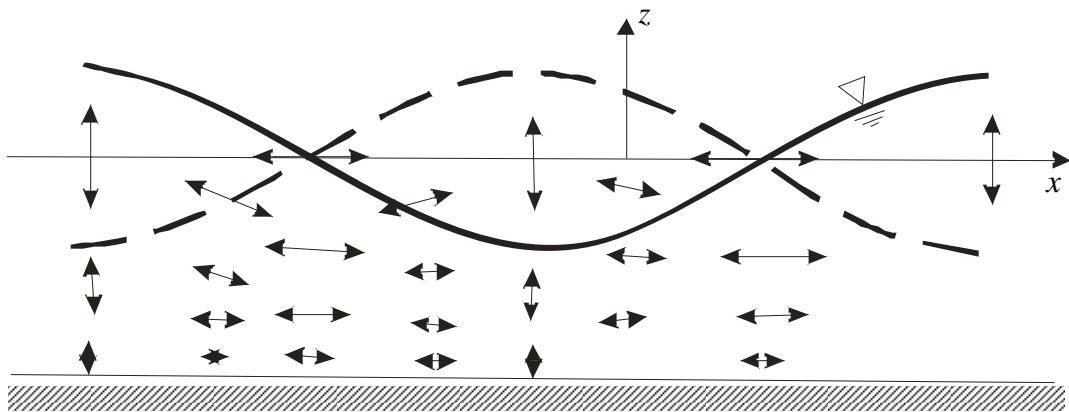


Figura 3.9 Campo de velocidades de las partículas para una onda estacionaria.

Para una onda cuasi-oscilatoria resulta de la superposición de una ola incidente con altura (H_i) y una onda viajando en sentido opuesto con una altura menor (H_r). Esta reducción en la altura de la ola y el desfase (ε), entre incidente y reflejada están asociados. Dada por la siguiente expresión.

$$\eta = \frac{H_i}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{H_r}{2} \cos(kx - \omega t + \varepsilon) \quad (3.98)$$

En la figura (3.10) se puede observar que los nodos y antinodos no están claramente definidos, por lo que, generalmente se trabaja con la envolvente de todos los desplazamientos considerando así los valores extremos en cada posición. (U. Cantabria, 2000).

Celeridad de grupo.

Considerando dos trenes de olas de la misma altura propagándose en la misma dirección con frecuencias y números de onda ligeramente diferentes, estas pueden ser superpuestas como.

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 \quad (3.99)$$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \frac{H}{2} \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad (3.100)$$

donde:

$$\omega_1 = \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \quad k_1 = k - \frac{\Delta k}{2} \quad (3.101)$$

$$\omega_2 = \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \quad k_2 = k + \frac{\Delta k}{2} \quad (3.102)$$

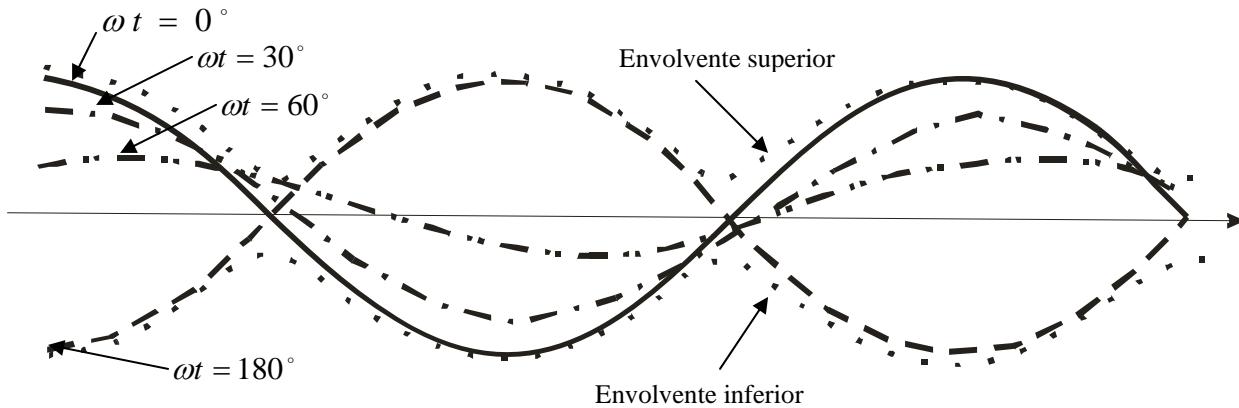


Figura 3.10 Evolución de la superficie de una onda cuasi-estacionaria para diferentes valores de ωt y su envolvente.

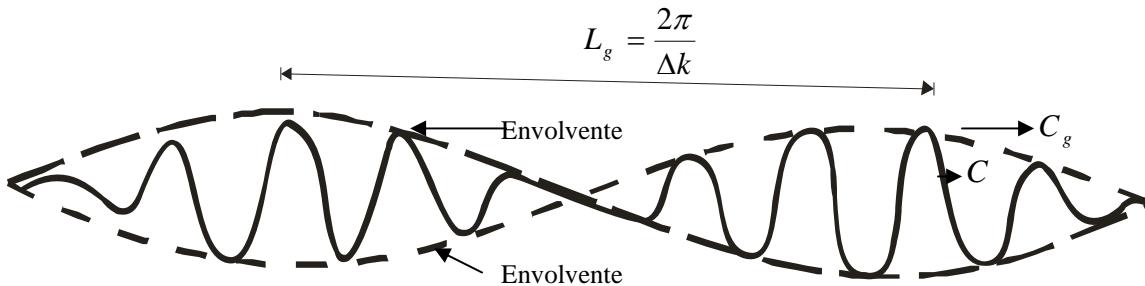


Figura 3.11 Características de un grupo de ondas (UNAM, 2003)

Usando las identidades trigonométricas se llega a que la superficie resultante de la onda es.

$$\eta = H \cos\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)\right] \quad (3.103)$$

En resumen es un oleaje moviéndose con una celeridad $C = \omega / k$, modulado por una envolvente, figura (3.11), $H \cos\left[\frac{1}{2}\Delta k\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}\right)\right]$ propagándose a una velocidad que se llamará celeridad de grupo.

$$C_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (3.104)$$

Haciendo que el límite $\Delta k \rightarrow 0$, se obtiene la velocidad de grupo de longitud infinita (L_g), tal que.

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.105)$$

Partiendo de la ecuación de la dispersión (3.48) y considerando que

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = g \tanh kh + gkh \operatorname{sech}^2 kh \quad (3.106)$$

Se tiene

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{(g \tanh kh + gkh \operatorname{sech}^2 kh)\omega}{2gk \tanh kh} = C \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh} \right) \quad (3.107)$$

Por lo tanto.

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh} \right) \quad (3.108)$$

$$C_g = Cn \quad (3.109)$$

donde:

C Celeridad de la onda. $[LT^{-1}]$

n factor de grupo ecuación (3.86)

Una forma de ver su comportamiento de la onda estacionaria y la onda progresiva, es conocer sus ecuaciones que las define en donde se observa que la estacionaria, no existe la celeridad ya que no se desplaza, ver tablas (3.2) y (3.3).

Tabla 3.2 Características de la onda progresiva.

Profundidad relativa	Aguas someras	Aguas intermedias	Aguas profundas
Periodo de la ola	T	T	T
Longitud de la ola	$L_h = T \sqrt{gh}$	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$	$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$
Celeridad de la onda	$C_h = \sqrt{gh}$	$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$	$C_0 = \frac{gT}{2\pi}$
Celeridad de grupo	$C_{gh} = C_h$	$C_g = \frac{L}{T} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kd)} \right]$	$C_{g0} = \frac{1}{2} C_h$

Tabla 3.3 Características de la onda estacionaria.

Profundidad relativa	Aguas someras	Aguas intermedias	Aguas profundas
Periodo de la ola	T	T	T
Longitud de la ola	$L_h = T \sqrt{gh}$	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$	$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$

3.4. Teoría de las olas de amplitud finita

Hasta ahora solo se ha visto la teoría Lineal de Airy que esta en los rangos de $H/L \ll 1$ o $H/h \ll 1$, en la cual se ha visto que la solución lineal es sencilla y de gran aplicación a la ingeniería. Sin embargo, en la naturaleza las ondas pueden llegar a alcanzar peraltes de hasta $H/L = 0.05 - 0.08$, con lo cual la hipótesis de pequeña amplitud deja de ser valida y es necesario empezar a considerar que la amplitud de la ola es finita. De hecho, desde el punto de vista ingenieril son las ondas mas grandes las de interés, dado que estas inducen las mayores fuerzas, así como, el mayor transporte de sedimentos.

Entre las teoría de amplitud finita tenemos varias soluciones, tales como la de Stokes, Cnoidal, Solitaria, de Olas Largas, de Eckart, Barkhoff y de Boussinesq. Es claro que la validez de estas teorías, depende de las condiciones iniciales y de frontera establecidas en la solución de las ecuaciones básicas que gobiernan el movimiento del flujo. A diferencia de la teoría de olas de amplitud pequeña, los términos de segundo y mayor orden son considerados importantes y los parámetros H/h y H/L adquieren mayor relevancia en la teoría de amplitud finita.

3.4.1. Solución de Stokes.

La teoría de primera aproximación o de primer orden, que es lineal y base para la teoría de amplitud pequeña. Las ecuaciones son muy similares a la teoría de amplitud pequeña por lo que se omiten en esta parte puesto ya se describieron en el apartado anterior, por lo que, comenzaremos con la segunda aproximación de Stokes.

La teoría de segundo orden, se caracteriza por la suma de dos senoides de periodos (T) y ($T/2$) respectivamente, sobre la que Levi-Civita demostró que la serie de Stokes es convergente en la zona de profundidades infinitas, mientras que, Struik lo hizo para profundidades finitas (Vergara, 2005).

Este segundo orden de Stokes esta caracterizado por la suma de dos ondas senoidales con periodos (T) y ($T/2$) respectivamente, lo cual provoca que las crestas tengan mayor pendiente y el valle sea más plano. (CFE, 1983).

Para determinar el periodo, celeridad y longitud de la onda, las ecuaciones que permiten evaluarlas se encuentran en la teoría lineal para las ondas progresivas.

Para la Función potencial tenemos (Le Méhauté, 1976).

$$\Phi = -\frac{H}{2} C \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \operatorname{sen}(kx-\omega t) - \frac{3}{8} k \left(\frac{H}{2} \right)^2 C \frac{\cosh 2k(h+z)}{\operatorname{senh}^4 kh} \operatorname{sen} 2(kx-\omega t) \quad (3.110)$$

donde:

h	Profundidad.	[L]
k	Número de onda.	[L^{-1}]
t	Tiempo.	[T]
C	Celeridad de la onda.	[LT^{-1}]
H	Altura de la ola.	[L]
z	Altura a la que se desea la velocidad del viento.	[L]
ω	Frecuencia angular de la ola.	[T^{-1}]
Φ	Potencial de velocidad.	

Elevación de la superficie libre: (U. Cantabria, 2000).

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + k \left(\frac{H}{4} \right)^2 \frac{[\cosh kh][2 + \cosh 2kh]}{\operatorname{senh}^3 kh} \cos 2(kx - \omega t) \quad (3.111)$$

donde:

η	Superficie libre del agua, medida del nivel medio de referencia.	[L]
--------	--	-----

La sobre elevación del nivel medio del mar (Δz), es calculada por la expresión: (CFE, 1983).

$$\Delta z = k \frac{H^2}{8} \cot kh \quad (3.112)$$

Las componentes de velocidad de las partículas individuales, respecto al NM en aguas tranquilas, resulta: (U. Cantabria, 2000).

$$u = \frac{H}{2} \omega \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \cos(kx - \omega t) + \frac{3}{16} \omega k H^2 \frac{\cosh 2k(h+z)}{\operatorname{senh}^4 kh} \cos 2(kx - \omega t) \quad (3.113)$$

$$w = \frac{H}{2} k \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + \frac{3}{16} \omega k H^2 \frac{\operatorname{senh} 2k(h+z)}{\operatorname{senh}^4 kh} \operatorname{sen} 2(kx - \omega t) \quad (3.114)$$

donde:

- u Es la componente de la velocidad en dirección x .
- w Es la componente de la velocidad en la dirección z .

Comparando la primera y la segunda aproximación de Stokes se tiene el siguiente perfil de la ola, figura (3.12), (CFE, 1983).

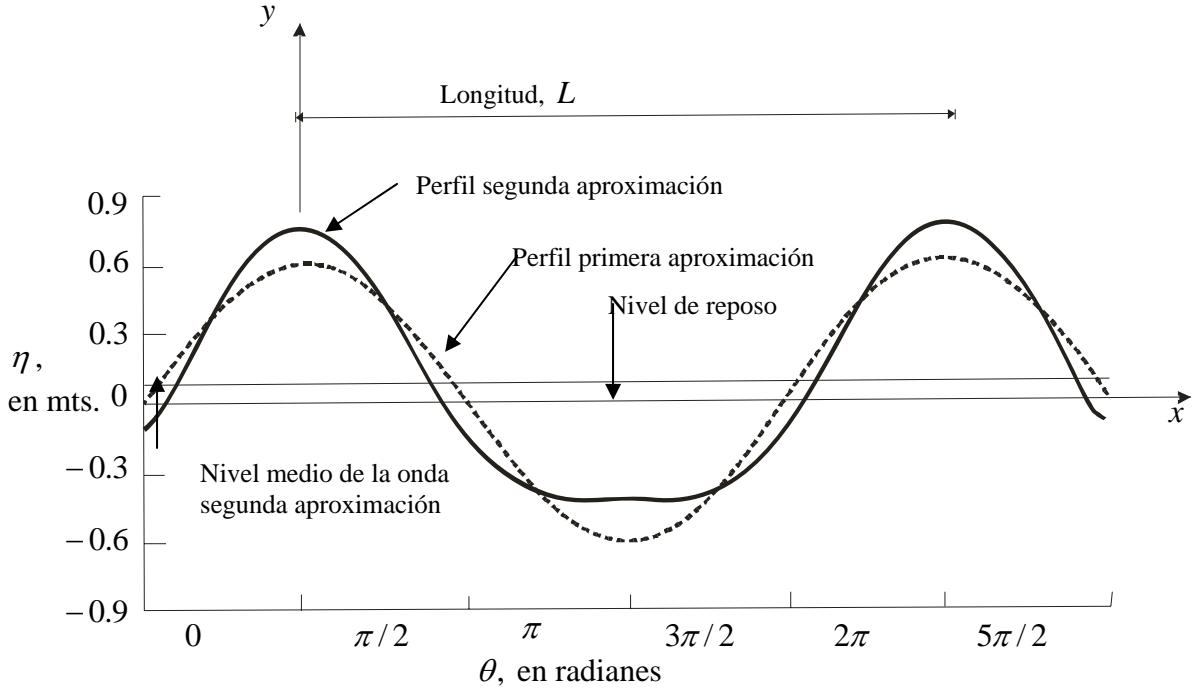


Figura 3.12 Perfil de la superficie libre utilizando la segunda y primera aproximación.

Los desplazamientos horizontales (ζ) y vertical (ξ) de las partículas, a partir de su posición en aguas tranquilas resultan ser: (Ippen, 1966).

$$\zeta = -\frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \operatorname{sen}(kx - \omega t) - \frac{kH^2}{16} \frac{1}{\operatorname{senh}^2 kh} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\operatorname{senh} 2k(h+z)}{\operatorname{senh}^2 kh} \right] \operatorname{sen} 2(kx - \omega t) + \frac{\omega k H^2}{8} \frac{\cosh 2k(h+z)}{\operatorname{senh}^2 kh} t \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{H}{2} \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \cos(kx - \omega t) + \frac{3kH^2}{32} \frac{\operatorname{senh} 2k(h+z)}{\operatorname{senh}^4 kh} \cos 2(kx - \omega t) + \\ & + \frac{kH^2}{16} \frac{\operatorname{senh} 2k(h+z)}{\operatorname{senh}^2 kh} \end{aligned} \quad (3.116)$$

El último término de la expresión para los desplazamientos horizontales (ζ) no es cíclico, sino que aumenta con el tiempo (t). Ello indica que existe un desplazamiento continuo de todas las partículas en la dirección de avance de la onda. La magnitud de dicho desplazamiento es mayor en la superficie y va disminuyendo conforme se acerca al fondo.

Transporte de masa

Si el último término de la ec. (3.115) que es el desplazamiento que ocurre en un tiempo igual a (T) se divide entre dicho tiempo, se obtiene el transporte de masa, que es la velocidad con la que se desplazan las partículas en la dirección de avance de la onda, y está definido, para aguas intermedias y someras, por.

$$U = \frac{\omega k H^2}{8} \frac{\cosh 2k(h+z)}{\operatorname{senh}^2 kh} \quad (3.117)$$

donde:

U es el transporte de masa para un punto localizado a una profundidad h

Para aguas profundas se tiene.

$$U = \frac{\pi H^2}{2 L_0 T} e^{4\pi z/L_0} \quad (3.118)$$

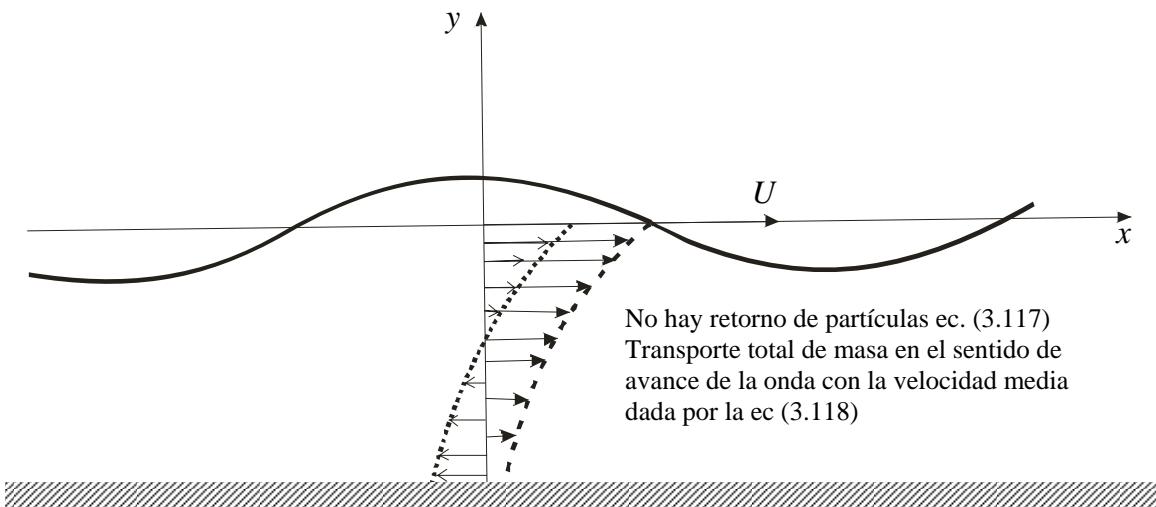


Figura 3.13 Dirección del transporte de masa.

La velocidad promedio del flujo (\bar{U}) ver figura (3.13), dado por la ecuación (3.117) en toda la vertical está dada por (U. Cantabria, 2000).

$$\bar{U} = \frac{\pi H^2}{4Th \tanh(kh)} \quad (3.119)$$

donde:

h	Profundidad.	$[L]$
k	Número de onda.	$[L^{-1}]$
H	Altura de la ola.	$[L]$
\bar{U}	Velocidad promedio del flujo.	$[LT^{-1}]$

Distribución de presión

La presión para cualquier punto de la masa líquida bajo la acción de una onda está dada por.

$$p = -\gamma z + \gamma \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z) \cos(kx - \omega t)}{\cosh kh} + \\ + \frac{3}{16} \gamma k H^2 \frac{\tanh kh}{\operatorname{senh}^2 kh} \left[\frac{\cosh 2k(h+z)}{\operatorname{senh}^2 kh} - \frac{1}{3} \right] [\cos 2(kx - \omega t)] - \\ - \frac{1}{16} \gamma k H^2 \frac{\operatorname{senh} kh}{\operatorname{senh}^2 kh} [\cos 2k(h+z)] - 1 \quad (3.120)$$

donde:

h	Profundidad.	$[L]$
k	Número de onda.	$[L^{-1}]$
H	Altura de la ola.	$[L]$
t	Tiempo.	$[T]$
p	Presión hidrostática.	$[FL^{-2}]$
$\gamma = \rho g$	Peso específico del agua.	$[FL^{-3}]$
z	Altura a la que se desea la velocidad del viento.	$[L]$
ω	Frecuencia angular de la ola.	$[T^{-1}]$

La Energía, el potencial de la onda y celeridad de grupo son idénticas a las obtenidas con la teoría lineal.

Longitud de la onda

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (3.121)$$

Celeridad

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (3.122)$$

donde:

h	Profundidad.	[L]
L	Longitud de la onda.	[L]
T	Periodo de la ola.	[T]
C	Celeridad de la onda.	[LT^{-1}]
π	3.14159	

Eobeltez de la onda o pendiente máxima

La pendiente de la ola es la relación entre su altura y longitud. Michell en 1989 encontró que la máxima relación de esbeltez, en aguas profundas, está dado por. (CFE, 1983)

$$\left(\frac{H_0}{L_0}\right)_{\max} = 0.142 \approx \frac{1}{7} \quad (3.123)$$

Para aguas someras y onda progresiva.

$$\left(\frac{H}{L}\right)_{\max} = 0.142 \tanh kh \quad (3.124)$$

Y para una ola estacionaria en aguas someras.

$$\left(\frac{H}{L}\right)_{\max} = 0.218 \tanh kh \quad (3.125)$$

Cuando estos valores de las ecs (3.121) a (3.123) se sobrepasan de los valores, la ola tiende a romper con formación de espuma en la cresta. Esta disipación de energía hace que H disminuya y con ello la relación H/L también.

La teoría de tercer orden de aproximación, a partir de este orden la ecuación de la dispersión deja de ser $\omega^2 = gk \tanh kh$ e incluye un término adicional que tiene en cuenta la amplitud de la onda.

El desarrollo de las ecuaciones se pueden encontrar en Dingemans, pero para nuestro caso solo tomaremos los términos más importantes ya que no profundizaremos en estas teorías.

Para la Función potencial tenemos (Dingemans, 1997)

$$\Phi = \varepsilon_1 \Phi_1 + \varepsilon_1^2 \Phi_2 + \varepsilon_1^3 \Phi_3$$

$$\Phi = \frac{A\omega_0}{k\operatorname{sen}kh}\left[\cosh(k(h+z))\operatorname{sen}(kx-\omega_1 t) + kA \frac{3}{8\operatorname{senh}^3 kh} \cosh[2k(h+z)]\operatorname{sen}2(kx-\omega_1 t) + \right. \\ \left. + k^2 A^2 \frac{9-4\operatorname{senh}^2 kh}{64\operatorname{senh}^6 kh} \cosh[3k(h+z)]\operatorname{sen}3(kx-\omega_1 t) \right] \quad (3.126)$$

donde:

$$\omega_1 = w_0 \left[1 + k^2 A^2 \frac{9 - 10\sigma^2 + 9\sigma^4}{16\sigma^4} \right]$$

$$\sigma = k \tanh kh$$

$$\omega_0^2 = gk \tanh kh$$

A	Amplitud de la ola.	[L]
h	Profundidad.	[L]
k	Número de onda.	[L^{-1}]
t	Tiempo.	[T]
g	Aceleración de la gravedad.	[LT^{-2}]
ω	Frecuencia angular de la ola.	[T^{-1}]
z	Altura a la que se desea la velocidad del viento.	[L]
Φ	Potencial de velocidad.	

Elevación de la superficie libre: (Dingemans, 1997).

$$\eta = \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_1^2 \eta_2 + \varepsilon_1^3 \eta_3 \\ \eta = \frac{H}{2} \left[\left(1 + k^2 \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{6 - 7\sigma^2 + 2\sigma^4 - 2\sigma^6}{16\sigma^4} \right) \cos(kx - \omega t) + k \frac{H}{2} \frac{3 - \sigma^2}{4\sigma^3} \cos 2(kx - \omega t) + \right. \\ \left. + k^2 \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{27 - 9\sigma^2 + 9\sigma^4 - 3\sigma^6}{64\sigma^6} \cos 3(kx - \omega t) \right] \quad (3.127)$$

donde:

$$H \quad \text{Altura de la ola.} \quad [L]$$

Longitud de la ola

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh kh \left[1 + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \frac{5 + 2 \cosh 2kh + 2 \cosh^2 2kh}{8 \operatorname{senh}^4 kh} \right] \quad (3.128)$$

Celeridad

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh kh \left\{ 1 + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \left[\frac{5 + 2 \cosh 2kh + 2 \cosh^2 2kh}{8 \operatorname{senh}^4 2kh} \right] \right\} \quad (3.129)$$

3.4.2. Teoría Cnoidal

Esta teoría, desarrollada por Korteweg y De Vries sustentada en el trabajo de Boussinesq, trata con una ola progresiva de forma permanente, válida en profundidades reducidas que considera los efectos dispersivos y los no lineales, cuyo perfil es dado por una función Jacobiana de coseno elíptico, usualmente designado por $Cn(u)$, de donde se desprende el término Cnoidal.

Esta teoría, se aplica a un rango de validez determinada por Laitone (1962) y otros y es de $< h/L < 1/8$, y un parámetro de Ursell > 26

Existen una gran variedad de autores que han trabajado con la teoría Cnoidal a diferentes ordenes tales como: Wiegel, 1960 en primer orden; Laitone, 1960 en segundo orden, y después hasta el quinto orden trabajados por Fenton, 1979, 1958.

Para la superficie libre del primer orden corresponde la siguiente ecuación.

$$\eta(x,t) = -A_s + HCn^2 \left(2K(m) \frac{x-Ct}{L} \mid m \right) \quad (3.130)$$

donde:

A_s Amplitud del seno de la ola [L]

Cn es la función elíptica del coseno

K es la integral elíptica de primer especie

m es el parámetro elíptico

Otros parámetros obtenidos con

esta teoría son:

Longitud de la ola

$$L = \sqrt{\frac{16h^3}{3H}} m K(m) \quad (3.131)$$

Periodo de la ola

$$T = \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2} = \left(\frac{16z_v}{3H} \right)^{1/2} \frac{h}{z_v} \left[\frac{m K(m)}{1 + \frac{H}{z_v m^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E(m)}{K(m)} \right)} \right] \quad (3.132)$$

donde:

$E(m)$ Es la integral elíptica completa de segundo orden.

Celeridad

$$C = \left[1 - \frac{H}{2h} + \frac{H}{mh} \left(1 - \frac{3E(m)}{2K(m)} \right) \right] \sqrt{gh} \quad (3.133)$$

También se puede demostrar que.

$$A_c = \frac{H}{m} \left(1 - \frac{E}{K} \right) \quad (3.134)$$

$$A_s = H - A_c \quad (3.135)$$

3.4.3. Teoría de la ola solitaria.

La ola solitaria es una onda progresiva que se desplaza prácticamente sobre la superficie del agua en reposo; es decir, las partículas del agua se desplazan únicamente en la dirección de avance de la ola. La forma de esta ola es simple, figura (3.14), y consiste solo en una cresta situada totalmente por arriba del nivel del mar de referencia. En este tipo de olas se ubican los maremotos (tsunamis) y los producidos por los desplazamientos de las placas tectónicas.

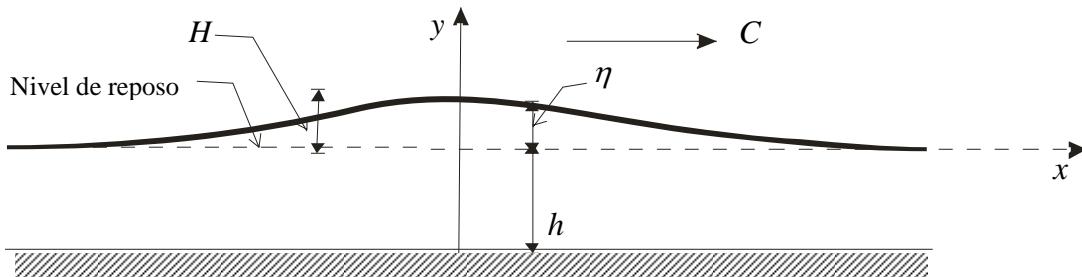


Figura 3.14 Esquema de una ola solitaria.

Para su estudio se parte de las expresiones generales de la onda Cnoidal, ya que la onda solitaria es uno de sus dos casos extremos. Dicho extremo se alcanza cuando L^2H/h^3 tiende a ser un valor grande.

Las fórmulas obtenidas tomando la anterior condición, coinciden con los resultados de Boussinesq.

Perfil de la ola

$$\eta = \frac{H}{\sec h^2 \left(\frac{3Hx^2}{4h^3} \right)^{1/2}} \quad (3.136)$$

donde:

- η Es la distancia vertical entre la superficie [L] de la onda y el nivel de reposo.
- h Profundidad entre el nivel de reposo y el [L] fondo.
- H Altura máxima de la cresta sobre el nivel [L] de reposo.

Celeridad de la ola.

$$C = [g(h + H)]^{1/2} \quad (3.137)$$

El volumen de agua sobre el nivel de reposo y que se desplaza con la onda por unidad de ancho de cresta, es igual a:

$$\forall_u = 2 \int_0^{\infty} \eta dx = \left[\frac{16}{3} h^3 H \right]^{1/2} \quad (3.138)$$

donde:

$$\forall_u \quad \text{es el volumen unitario} \quad [L^3]$$

Velocidad de las partículas.

$$u = \frac{1 + \cos\left(M \frac{z+h}{h}\right) \cosh\left(M \frac{x}{h}\right)}{\left[\cos\left(M \frac{z+h}{h}\right) + \cosh\left(M \frac{x}{h}\right)\right]^2} CN \quad (3.139)$$

$$w = \frac{\sin\left(M \frac{z+h}{h}\right) \operatorname{senh}\left(M \frac{x}{h}\right)}{\left[\cos\left(M \frac{z+h}{h}\right) + \cosh\left(M \frac{x}{h}\right)\right]^2} CN \quad (3.140)$$

Donde (M) y (N) son funciones que dependen de H/h , y que pueden ser obtenidos de la figura 3.15, (IPPEN, 1966).

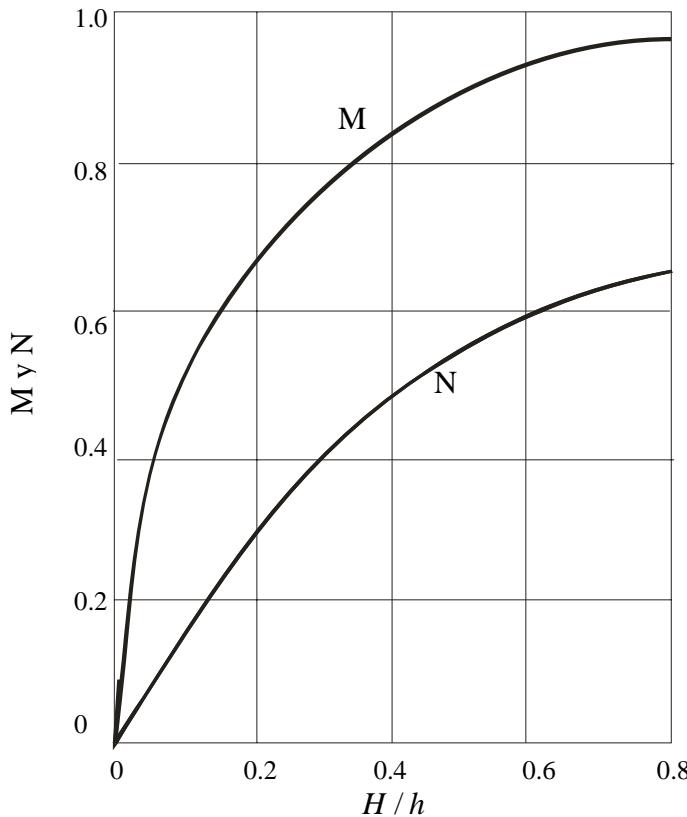


Figura 3.15. Valores de M y N en función de H/h . Según Punk (1949)

También se pueden obtener mediante las ecuaciones siguientes según Punk (1949) (CFE, 1983)

$$\frac{H}{h} = \frac{N}{M} \tan \left[\frac{1}{2} M \left(1 + \frac{H}{h} \right) \right] \quad (3.141)$$

$$N = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \left[M \left(1 + \frac{2}{3} \frac{H}{D} \right) \right] \quad (3.142)$$

donde:

D Diámetro de las partículas. [L]

Energía total por unidad de longitud de cresta para una onda solitaria es.

$$E = \gamma H^{3/2} h^{3/2} \frac{8}{3\sqrt{3}} \quad (3.143)$$

Presión

$$p = \gamma \left[\eta - z - \frac{3}{4} \frac{H^2}{h} \left[\left(\frac{z}{2} \right)^2 + \frac{2z}{h} \right] \right] \left[\frac{2}{\cosh^2(\alpha x - Ct)} - \frac{3}{\cosh^4(\alpha x - Ct)} \right] \quad (3.145)$$

donde:

- $\alpha = \left(\frac{3}{4} \frac{H}{h^3} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{5}{8} \frac{H}{h} \right)$
- t Tiempo. [T]
- C Celeridad de la onda solitaria. [LT⁻¹]
- γ Peso específico del líquido. [FL⁻³]
- z Ordenada del punto donde se desea obtener la presión medida desde la superficie libre en reposo.

3.5. Clasificación de los modelos de propagación de oleaje

3.5.1. Introducción.

Según el Grupo de Ingenieros Oceanográficos y de la Costa de la Universidad de Cantabria, existen dos grandes grupos: *Los modelos basados en la simulación de flujos de superficie libre, y los modelos basados en la teoría de propagación de ondas*; **Los primeros** resuelven las ecuaciones de Navier – Stokes o las ecuaciones de Boussinesq, estos tipos de modelos tratan el fenómeno de propagación de una forma mucho mas amplia y con menores restricciones, estando directamente basados en principios mas elementales de la dinámica de fluidos (conservación de masa y movimiento), lo que permite tratar el problema con un rango mayor; por otro lado, los segundos, basados de la teoría de propagación de ondas se encuentra la teoría del rayo y la ecuación de la pendiente suave (mild-slope equation), los cuales requieren una serie de hipótesis sobre el fenómeno, de las cuales algunas pueden ser claramente restrictivas o irregulares, donde se simplifica el tiempo computacional, así como también las ecuaciones. (Oluga-Mc, 2005).

También pueden ser clasificados de la siguiente forma. En función de los valores adimensionales se pueden definir dos regímenes: el régimen de Stokes y el régimen de onda larga. El primero corresponde a problemas en los que la longitud de onda no es muy grande en comparación con la profundidad (h/L no es muy pequeño), Ver tabla (2.1) correspondiendo a profundidades indefinidas e intermedias. En el segundo régimen considera el caso en que la longitud de onda es grande en comparación con la profundidad, siempre que $h/L \ll 1$. (U. Cantabria, 2000).

Tabla 3.4 Tipos de Regímenes de Onda.

Régimen	kh o h/L
Stokes	≥ 1
Onda larga	$\ll 1$

De acuerdo a la clasificación en las ecs (2.17) puede hacerse nuevas subdivisiones.

Por ejemplo, en el régimen de Stokes, si las ondas son de pequeña amplitud, es decir $\delta \ll 1$ o $\varepsilon \ll 1$, la teoría correspondiente es la teoría lineal de ondas, teoría de ondas de pequeña amplitud, teoría de Airy o teoría de Stokes de 1^{er} orden, donde todos los nombres corresponden a la misma teoría. Esta teoría es la más simple de todas y de gran aplicación por lo que será desarrollada más a delante. A medida que el valor del peralte de la ola (ε) aumenta, aumenta también el carácter no lineal de la onda y dentro del régimen de Stokes es necesaria la aplicación de otras teorías como son Stokes II, Stokes III, y órdenes superiores. Es decir, a medida que se aumenta el orden de la solución y la no linealidad aumenta, la solución obtenida mediante el 1^{er} orden o teoría lineal se va corriendo con nuevos términos.

Dentro del régimen de ondas largas la clasificación es más compleja. En este régimen pueden considerarse tres casos diferentes como $\mu_p^2 \ll 1$ descrito este termino adimensional en el Capítulo 2 se tiene

Tabla 3.5 Clasificación del régimen de ondas largas.

	Ur	Teoría
$\delta \ll \mu_p^2$	$\ll 1$	Onda larga lineal
$\delta \sim O(\mu_p^2)$	$O(1)$	Boussinesq
$\delta \gg \mu_p^2$	$\ll 1$	Onda larga no lineal

El segundo que es el de Boussinesq y su relación con la ecuación de la KdV (Korteweg-de Vries) se puede obtener soluciones analíticas, como se vera mas adelante.

Estas dos clasificaciones, si ponemos debida atención son las mismas, por lo que, podemos hacer otra clasificación, de los modelos más sencillos hasta los más complicados, empezando con los modelos de la **primera generación**.

3.5.2. Primera generación

Este tipo de modelos datan de (1949) con Munk, donde el realizó una asociación de las ondas infragravitorias con las ondas de viento de alta frecuencia. Posteriormente viene Longuet – Higgins y Stewart (1962) donde dieron una explicación física y matemática de la generación de ondas largas libres y ligadas por efectos no lineales. Estos son básicamente desarrollados para la aproximación de la teoría del rayo para ondas infinitesimales propagándose por una batimetría suavemente variable en distancias mucho mayores que la longitud de onda local. Esta Teoría es la primera como ya se había comentado anteriormente, que se desarrolló con el fin de hacer un modelo unificado capaz de propagar ondas desde profundidades indefinidas hasta reducidas, incluso dentro de la zona de rompientes. La aproximación comienza con la obtención de los rayos con base en la teoría óptico- geométrica, en la que se definen los rayos como la línea tangente al vector número de onda (LOSADA, 2000).

Este primer método tiene muchas limitaciones por lo que Eckart (1952) y Berkhoff (1972, 1976), propusieron una mejoría a la aproximación del rayo introduciendo una teoría para dos dimensiones que es adecuada para estudiar procesos de refracción y difracción en grandes extensiones. Esta teoría se basa fundamentalmente en asumir que los modos evanescentes no son importantes cuando las ondas se propagan sobre batimetrías suavemente variables, excepto cerca de los obstáculos tridimensionales. Este tipo de modelo es de la **segunda generación**.

3.5.3. Segunda generación

Está basado principalmente en la ecuación de la pendiente suave, que ha sido derivada también por una gran variedad de autores, como Smith y Spinks, (1975) y Massel (1989). (LOSADA, 2000).

Por otra parte Chamberlain y Poter, (1995) desarrollaron la llamada ecuación modificada de la pendiente suave, la cual, al considerar los términos de segundo orden que despreciaba Berkhoff, (1973), representa con mejor precisión la propagación del oleaje en presencia de batimetrías complicadas como es el caso de fondo móvil. (UNAM, 2003).

La ecuación modificada de la pendiente suave, es una diferencial de tipo elíptico y ha sido resuelta como un problema de valores en la frontera. Algunos autores que han desarrollado soluciones son Tsai y Liu, (1983) quienes utilizaron un esquema de elemento finito, otros autores han propuesto resolver la ecuación de la pendiente suave aproximándola con una ecuación de tipo parabólico, Luke (1967) Booij (1981) y Kirby (1983), utilizaron un principio variacional, los métodos basados en perturbaciones, Redder (1979) desarrolló para la ecuación de la pendiente suave una aproximación parabólica que tiene varias ventajas sobre la forma elíptica presentada por Berkhoff (1972), Panchang, et al., (1991), Li y Anastasiou, (1992) y Zhao y Anastasiou,(1996) han utilizado técnicas iterativas de solución del tipo Gradiente Conjuguado (CG) y Residuo Mínimo Generalizado (GMRES) adaptadas a mallas regulares; mientras que Borthwick, et al., (1997) resolvió la ecuación modificada de la pendiente suave implementando técnicas iterativas a mallas de tipo jerárquico (*quadtree*) (Oluca-MC, 2005).

Se ha hablado de la ecuación de pendiente suave (mild-slope), es una de las ecuaciones que funciona muy bien para simular los fenómenos de refracción, difracción y rompiente, por lo que para este trabajo nos enfocaremos más adelante a este tipo de solución, al problema de la Central Núcleo Eléctrica Laguna Verde. Par tener en cuenta esta ecuación se presenta en su forma general ec (3.146) definiendo cada una de sus partes: (Linwood, 2002).

Dentro de los modelos que existen en el mercado, básicamente le dan solución a la ecuación de la pendiente suave, entre los cuales se tienen: RCPWAVE, REFDF, STWAVE, Oluca-MC, MIKE21, entre otros que son modelos muy costosos, además de que no se tiene muy claro con que tipo de ecuación están trabajando y como le dan solución numéricamente por lo que se propone el desarrollo del mismo como se verá mas adelante.

$$\frac{\partial E(x, y, t, f, \theta)}{\partial t} + \nabla \cdot [C_g(x, y, f) E(x, y, t, f, \theta)] = S_W + S_M + S_D + S_F + S_P \quad (3.146)$$

donde :

$\frac{\partial E(x, y, t, f, \theta)}{\partial t}$	Representa el índice del cambio temporal del espectro.
$\nabla \cdot [C_g(x, y, f)E(x, y, t, f, \theta)]$	Representa la propagación de la energía de la onda.
S_w	Representa entradas del viento.
S_m	Representa la redistribución de la energía de la onda entre diversos componentes no lineales que se presenten.
S_d	Representa la disipación debido a la rompiente.
S_f	Representa las pérdidas debido a la fricción.
S_p	Representa las pérdidas debido a la filtración.

3.5.4. Tercera generación

Por último están los modelos de la **tercera generación** que resuelven las ecuaciones de Stokes y de Boussinesq, que básicamente son adecuadas para simular el oleaje en la zona de generación, es decir, en aguas muy profundas.

Por lo que en este trabajo nos enfocaremos a un modelo de la **segunda generación** basada en la ecuación de la pendiente suave, que es adecuada para la zona de propagación del oleaje, además con los fenómenos que modifican al oleaje como refracción, difracción y rompiente. Que es el objetivo de este trabajo.

Dentro de estos modelos existen ecuaciones que propagan el oleaje desde profundidades indefinidas hasta reducidas incluyendo los efectos no lineales, estas soluciones son llamados modelos unificados. (Losada, 2000).

CAPÍTULO 4

FENÓMENOS QUE MODIFICAN EL OLEAJE

4.1. Introducción

La interacción del oleaje con el fondo del mar es una de las razones por las que el oleaje se modifica. Como consecuencia de esta interacción de las ondas con el fondo, el tren de ondas u oleaje se transforma dando lugar a varios procesos costeros visibles para un observador desde la costa. Estos procesos de transformación se traducen fundamentalmente en: variación de la altura de la ola y en la dirección de propagación. Llamados refracción, difracción, reflexión y rompiente ver figura (4.1)



Figura 4.1 Fenómenos que modifican el oleaje

Cada uno de estos fenómenos se ha venido analizando de forma separada mediante métodos gráficos y numéricos. Cabe destacar que en la naturaleza todos los fenómenos están relacionados entre si, por lo que, en el presente capítulo se describirá cada uno de ellos, para dar paso a la elaboración de un modelo numérico que tome en cuenta varios fenómenos.

4.1.1. Conservación de las ondas (Teoría del Rayo)

Para un tren de ondas propagándose oblicuamente hacia la costa, se tiene que, para una dirección de propagación, puede representar mediante el vector número de ondas ec. (2.12) \vec{k} (k_x, k_y). Utilizando operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)i + (\partial/\partial y)j$ y en función de la fase (S), el número de ondas se puede expresar como.

$$k = \nabla S \quad (4.1)$$

donde:

k	Número de onda.	$[L^{-1}]$
k_x	Componente en la dirección x del número de onda.	$[L^{-1}]$
k_y	Componente en la dirección y del número de onda.	$[L^{-1}]$
\vec{k}	Vector número de onda.	$[L^{-1}]$

Se define el rayo como el lugar geométrico de los puntos al que el vector numérico de onda es siempre tangente.

El lugar geométrico de los puntos que cumplen $S = cte$ se le conoce como cresta o frente. Dado que los rayos son perpendiculares a los frentes, a veces suelen recibir el nombre de ortogonales. Sin embargo, en la refracción que es el cambio de dirección del frente de ola debido a un obstáculo natural o artificial, por efecto de una corriente no se cumple esta condición de ortogonalidad por lo cual es preferible mantener el nombre de rayos.

Por otro lado, la frecuencia angular asociada a una onda puede obtenerse a partir de la función de fase tal que

$$w = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.2)$$

donde:

t	Variación en el tiempo.	$[T]$
w	Velocidad correspondiente al plano cartesiano en la dirección (z).	
S	Función de la fase.	

Utilizando las ecs. (3.1) y (3.2) tenemos que.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_h S) + \nabla \left(-\frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Esta ecuación implica que cualquier variación temporal del vector número de onda debe ser equilibrada con variaciones espaciales de la frecuencia angular. En el caso de la presencia de una corriente estacionaria. A la ec. (4.3) se le conoce como ecuación de conservación de ondas pues implica que el número de ondas en un dirección cualquiera (dx) se conserva, por lo que, una primera conclusión es que el proceso de transformación de las ondas el periodo se mantiene constante.

4.1.2. Conservación de energía (Acción de la onda)

A partir de la conservación de la energía mecánica se puede obtener que para un fluido no viscoso, flujo irrotacional, en ausencia de corrientes, sin disipación y fondo horizontal, se cumple la siguiente ecuación.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla(E\bar{C}_g) = 0 \quad (4.4)$$

donde:

t	Variación en el tiempo.	$[T]$
E	Energía total de la ola.	$[FL^{-1}]$
C_g	Celeridad de grupo	$[LT^{-1}]$

Esta ecuación implica que cualquier variación en el tiempo de la energía asociada a las ondas debe compensarse con variaciones espaciales del flujo de energía. Para fondos suavemente variables, la ecuación anterior se ve modificada tal que.

$$\frac{\partial(E/\omega)}{\partial t} + \nabla \left(\frac{E}{\omega} \vec{C}_g \right) = 0 \quad (4.5)$$

donde:

ω	Frecuencia angular.	$[T^{-1}]$
(E/ω)	Se le conoce como la acción de onda.	

Ahora bien, si se tiene una corriente Bretherton y Garret (1986) introdujeron el efecto de la corriente en la ecuación de conservación de la acción de onda que se expresa como.

$$\frac{\partial(E/\omega)}{\partial t} + \nabla \left(\frac{E}{\omega} (\vec{U} + \vec{C}_g) \right) = 0 \quad (4.6)$$

donde:

\bar{U} Campo de velocidades asociada a la corriente.

4.2. Refracción

4.2.1. Definición

La refracción tiene lugar cuando un tren de ondas incidiendo oblicuamente sobre la costa encuentra un cambio de profundidad. En ese caso una parte del frente de la onda viaja en aguas más someras y por tanto, con menor celeridad que el resto dando lugar a un cambio de dirección. Análogamente, en presencia de una corriente, puede producirse un retraso de parte del frente con el consiguiente cambio de dirección. Por lo tanto, la refracción puede ser debida al efecto del fondo o a la presencia de una corriente (U. Cantabria, 2000).

La refracción es un efecto que cuando el oleaje se traslada a aguas someras, el cambio de profundidad causa una disminución en la celeridad y como consecuencia su longitud disminuye y su altura aumenta. Generando un cambio de dirección del frente de oleaje, haciéndose paralelo a las líneas batimétricas. (CFE, 1983).

Viendo que varios autores llegan a la misma conclusión, se llega a una definición clara del fenómeno. La refracción es un fenómeno que modifica el oleaje, es decir cuando el oleaje se propaga de aguas profundas a aguas intermedias y posteriormente a poco profundas, van disminuyendo su celeridad, longitud de la ola y aumenta su altura. También se presenta un cambio de dirección del oleaje y el frente de ola se reorienta conforme al contorno del fondo. Este cambio de dirección se puede estudiar trazando los rayos perpendiculares a la cresta de una ola como muestra la figura (4.2), (CIGEFI, 2003).

4.2.2. Refracción por efecto de fondo

Este fenómeno está gobernado por la ecuación de Laplace y sus correspondientes condiciones de contorno en el fondo, y en la superficie libre.

La solución potencial del problema de contorno (Φ), puede expresarse como: (Dingemans, 1997)

$$\Phi = \operatorname{Re} \left\{ \phi(x, y, z) e^{-i\omega t} \right\} \quad (4.7)$$

Y a su vez.

$$\phi(x, y, z) = A(x, y, z) e^{iS'(x, y, z)} \quad (4.8)$$

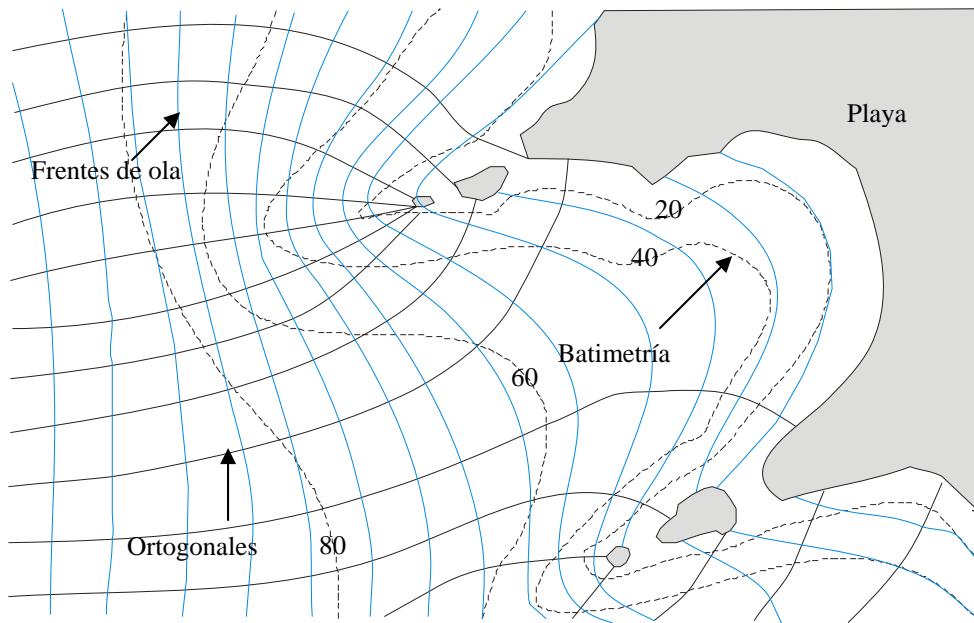


Figura 4.2 Diagrama de Refracción de oleaje.

Donde la amplitud $A(x, y, z)$ y la fase $S(x, y, z)$ son funciones reales.

Sustituyendo esta expresión en el problema de contorno y tras una serie de operaciones se puede demostrar que:

$$(\nabla S)^2 = k^2(x, y) \quad (4.9)$$

$$\nabla(CC_g A^2 \nabla S) = 0 \quad (4.10)$$

donde:

A Amplitud de la ola. $[L]$

k Número de onda. $[L^{-1}]$

S Función de la fase.

Irracionalidad del número de onda

Existe otra aproximación diferente a la anterior que se basa en la irrotacionalidad del número de onda. En el apartado anterior, vimos que el vector número de onda puede expresarse como el gradiente de la función escalar, fase de la onda, ec. (4.1). Aplicando el operador rotacional a la ec. (4.1) y dado que el rotacional del gradiente es cero por definición se llega a que.

$$\nabla \times k = 0 \quad (4.11)$$

Es decir, el vector número de onda es irrotacional. Sustituyendo las componentes de k (k_x, k_y) ec. (2.12) en la ec. (4.11) se llega a la siguiente expresión (U. Cantabria, 2000).

$$\frac{\partial(k_x \operatorname{sen}\theta)}{\partial x} - \frac{\partial(k_y \cos\theta)}{\partial y} = 0 \quad (4.12)$$

donde:

θ Ángulo de incidencia de las ondas con respecto a la línea de costa.

Esta ecuación sirve de base para las soluciones que se presentan a continuación.

4.2.3. Soluciones

Batimetría recta y paralela

Para una costa con batimetría recta y paralela las variaciones de cualquiera de las variables respecto a y son nulas y, por lo tanto, la ec. (4.12) se reduce a:

$$\frac{d(k_x \operatorname{sen}\theta)}{dx} = 0 \quad (4.13)$$

Lo que implica $k \operatorname{sen}\theta = cte$. Teniendo en cuenta que $C = \omega/k$, se llega a que:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{C} = cte \quad (4.14)$$

En general, la constante se evalúa en profundidades indefinidas con lo que la ec. (4.14) pasa a ser:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{C} = \frac{\operatorname{sen}\theta_0}{C_0} \quad (4.15)$$

Que es conocida como ley de Snell. Esta ecuación deducida originalmente en el campo de la óptica, relaciona las variables en la dirección de propagación con las variaciones en la celeridad.

Se puede realizar un primer análisis de esta ecuación pues da una información muy valiosa. En primer lugar, y teniendo en cuenta que la celeridad de las ondas (C) disminuye a medida que se reduce la profundidad es evidente que de:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta_0}{C_0} C \quad (4.16)$$

Se deduce que el ángulo (θ) disminuye a medida que el tren se acerca a la costa. Esto implica que los frentes tienden a ponerse paralelos a la playa.

Hasta ahora se ha analizado la variación en la dirección del frente por efecto de la refracción. Para estimar las variaciones de la altura de ola es necesario considerar que el flujo de energía entre dos rayos es constante, siempre y cuando no se produzca la disipación o aporte de energía.

Teniendo en cuenta la convergencia y divergencia entre los rayos, y asumiendo que no se produce flujo de energía a través de los mismos, se puede obtener una refracción entre el flujo de energía por unidad de superficie en dos secciones 1 y 2 entre dos rayos próximos, ver figura (4.3)

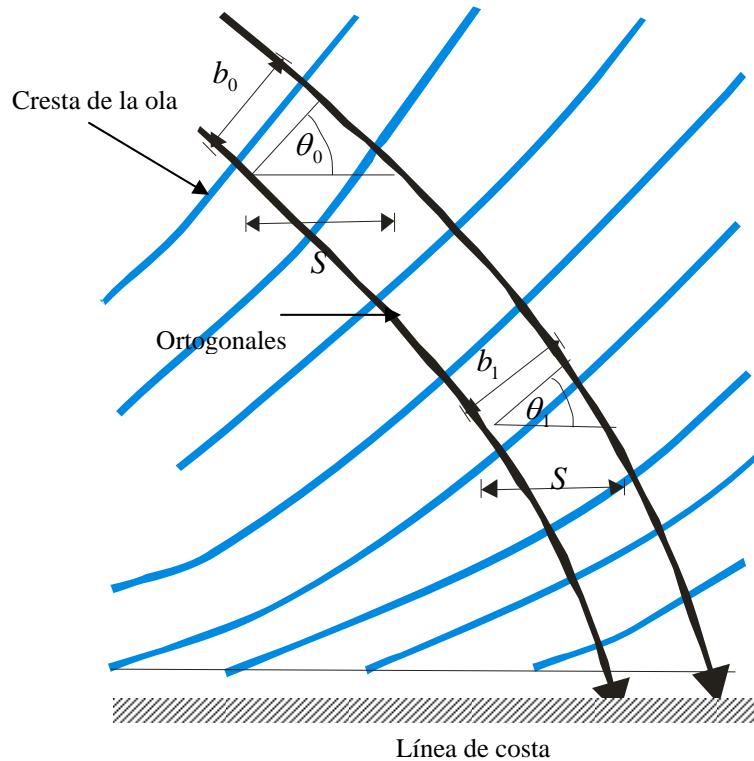


Figura 4.3 Rayos producidos por la refracción del oleaje.

$$\left(\frac{1}{8} \rho g H^2 n C \right)_0 b_0 = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 n C \right)_1 b_1 = cte \quad (4.17)$$

donde:

$$H_1 = H_0 \sqrt{\frac{C_{g0}}{C_{g1}}} \sqrt{\frac{b_0}{b_1}} \quad (4.18)$$

- | | | |
|----------|---|---------------|
| b_0 | Ancho entre ortogonales en el punto cero. | [L] |
| b_1 | Ancho entre ortogonales en el punto uno. | [L] |
| g | Aceleración de la gravedad. | [LT^{-2}] |
| C_{g0} | Celeridad de grupo en el punto cero (aguas profundas). | [LT^{-1}] |
| C_{g1} | Celeridad de grupo en el punto uno (aguas intermedias). | [LT^{-1}] |

H_0	Altura de la ola en aguas profundas.	[L]
H_1	Altura de la ola en aguas intermedias.	[L]
ρ	Densidad.	[$FT^2 L^{-4}$]
n	Factor de grupo. ec. (3.86)	

Para cuando la sección 1 se encuentre en aguas profundas y el otro en aguas intermedias, la ec. (4.18) cambia por:

$$H_1 = H_0 \sqrt{\frac{C_{g0}}{C_{g1}}} \sqrt{\frac{b_0}{b_1}} = H_0 K_s K_r \quad (4.19)$$

Donde:

- K_r Es el coeficiente de refracción. Este depende de la separación entre rayos en cada sección, la cual puede ser determinada directamente de la representación gráfica de los rayos de forma manual.
- K_s Es el coeficiente de propagación en aguas someras.

Para el caso de batimetría recta y paralela, el coeficiente de refracción se puede estimar directamente mediante la siguiente expresión, teniendo en cuenta los rayos o frentes de ola idénticos con una separación constante, ver figura (4.4), (IPPEN, 1966)

$$K_r = \left(\frac{b_0}{b_1} \right)^{1/2} = \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta_1} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 - \sin^2 \theta_0}{1 - \sin^2 \theta_1} \right)^{1/4} \quad (4.20)$$

donde:

- θ_0 Ángulo de incidencia de las ondas en el punto cero.
- θ_1 Ángulo de incidencia de las ondas en el punto uno.

Batimetría irregular.

Por lo general en nuestro caso se presentan los problemas en zonas con batimetrías irregulares lo cual invalida la utilización de la ley de Snell, por lo que, es necesario tomar otras consideraciones que permitan el manejo de este tipo de problemas. Haciendo un cambio de variables a la ec. (4.12) se llega a la propuesta por Dean y Dilrymple, (1991).

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial n_c} = -\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial n_c} \quad (4.21)$$

donde:

C	Celeridad de la onda.	$[LT^{-1}]$
k	Número de onda.	$[L^{-1}]$
n_c	Coordenada en la dirección normal al mismo.	
θ	Ángulo de incidencia de las ondas con respecto a la línea de costa.	
s	Coordenada a lo largo del rayo.	

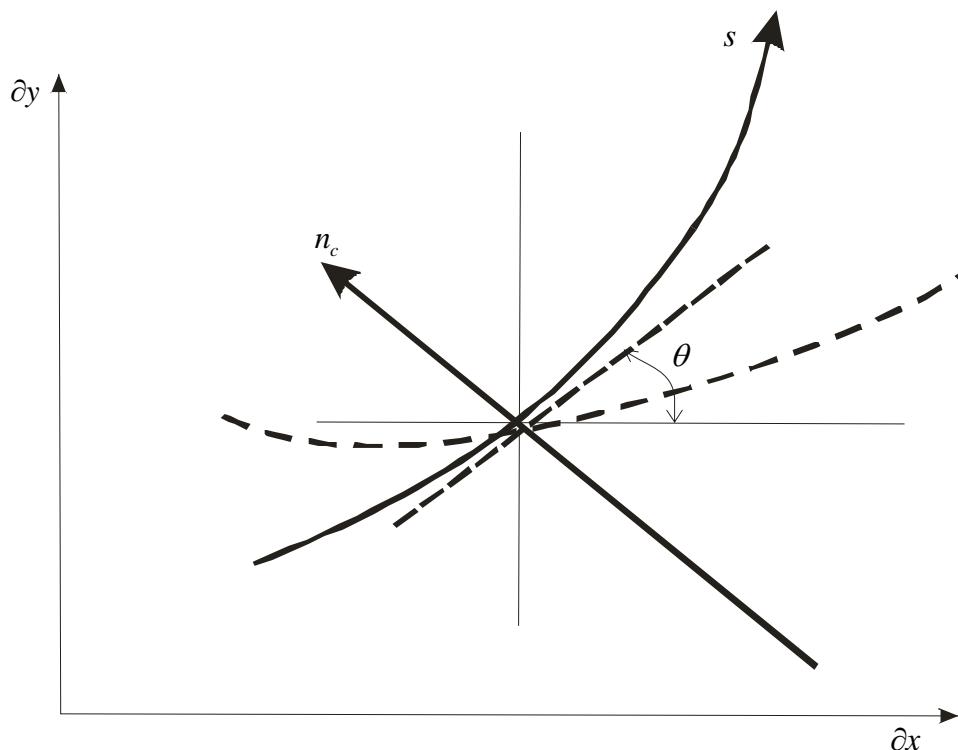


Figura 4.4 Construcción del diagrama de refracción por el método del rayo.

La trayectoria del rayo puede ser definido mediante el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t} &= C \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= C \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= C \sin \theta\end{aligned}\tag{4.22}$$

Estas ecuaciones son la base de la teoría del rayo que es una de las teorías mas empleadas en la actualidad, ya que permite conocer los frentes de ola y las ortogonales de manera muy simple, sin tomar en cuenta otros fenómenos que se presentan.

En 1952 Munk y Arthur obtuvieron un procedimiento matemático para la obtención del coeficiente de refracción tal que (Linwood, 2002).

$$Kr = \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1/2} = \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta_1} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_0}{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_1} \right)^{1/4} \quad (4.23)$$

donde:

$$\beta = \frac{b_1}{b_0}$$

b_0 Separación entre rayos en aguas profundas

β Se puede obtener mediante la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{d^2 \beta}{ds^2} + p(s) \frac{d\beta}{ds} + q(s) \beta = 0 \quad (4.24)$$

con

$$p(s) = -\frac{\cos \theta}{C} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{C} \frac{\partial C}{\partial y} \quad (4.25)$$

$$q(s) = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - 2 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\cos^2 \theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (4.26)$$

Las ecs. (4.22), (4.24), (4.25) y (4.26) conforman un sistema de 4 ecuaciones diferenciales que pueden ser resueltas simultáneamente para un conjunto de rayos sobre una batimetría dada.

Este método ha sido desarrollado por varios autores que lo han llevado a la programación tales como Harrison y Wilson (1964), Dobson (1967), Noda *et al.* (1974).

Este método se puede consultar en Ippen si se quiere saber más, en este caso no se hablará mas de este método ya que no se utilizará en este trabajo (Ippen, 1966).

La figura (4.5) proporciona diagramas idealizados de los rayos de la onda para varios tipos de batimetría (Linwood, 2002).

Para el caso que nos compete se manejará la ecuación de la pendiente suave, donde se simula lo que es la refracción y la difracción al mismo tiempo, por lo que se describe mas adelante.

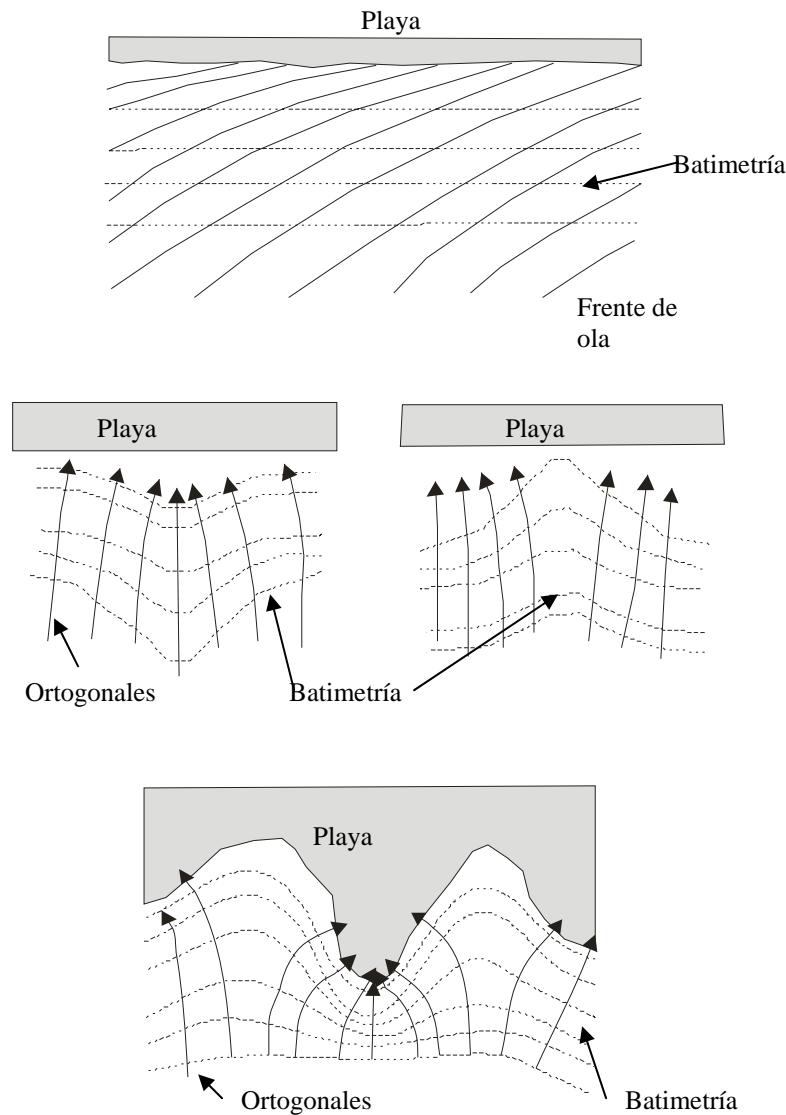


Figura 4.5 Diagramas de los rayos de ola.

4.3. Difracción

4.3.1. Definición

Es un fenómeno de transferencia de energía lateral a lo largo de la cresta de la ola cuando esta es interrumpida en su recorrido parcialmente por una barrera natural o artificial (isla, rompeolas, escollera, etc.) ver figura (4.6), donde se muestran algunos ejemplos de la forma en que se presenta la difracción. (CFE, 1983).

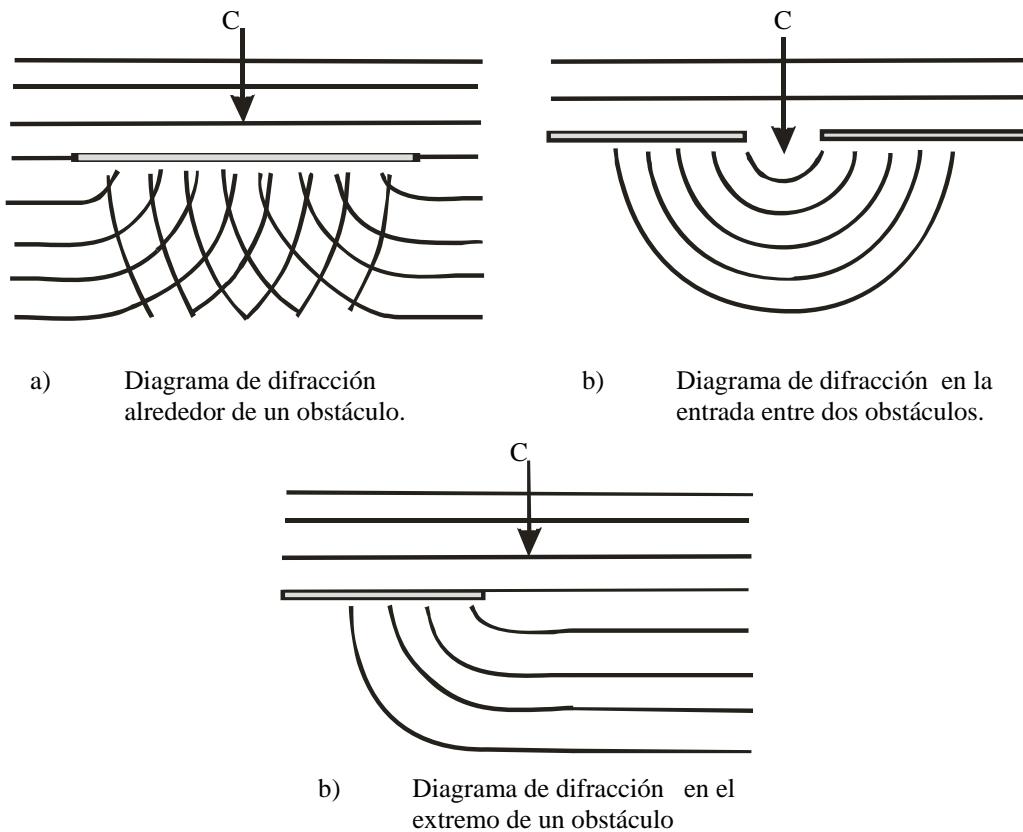


Figura 4.6 Diagramas de difracción

Cuando el oleaje pasa por el extremo de una barrera la energía se reduce al dispersarse dentro de una zona llamada de penumbra, en forma circular. En el caso de una barrera discontinua como es la entrada a un puerto, el proceso de difracción se produce en ambos extremos de los rompeolas que la forma en este último la energía del oleaje decrece más rápidamente, hacia el interior.

Una solución utilizando la teoría lineal, fue desarrollada por Penny y Price para ondas incidentes sobre el extremo de un rompeolas, en donde su modelo matemático define 4 zonas importantes, las cuales describen a continuación mediante la figura (4.7) (CFE, 1983).

- 1 La primera zona esta comprendida $0 < \theta < \theta_1$; es una zona donde no hay oleaje o bien la altura del mismo es muy pequeña y menor de un valor preestablecido, por ejemplo la altura difractada es menor a un décimo de la altura incidente, $H_D < 0.1H$. Cuando el ángulo es menor de 90° esta zona no existe. Es llamada zona de sombras.
- 2 La segunda zona esta comprendida $\theta_1 < \theta < \theta_0$; llamada zona de penumbra en donde la solución está formada por olas con altura variable. En esta área las crestas de las olas son circulares con el centro en el extremo final del obstáculo.

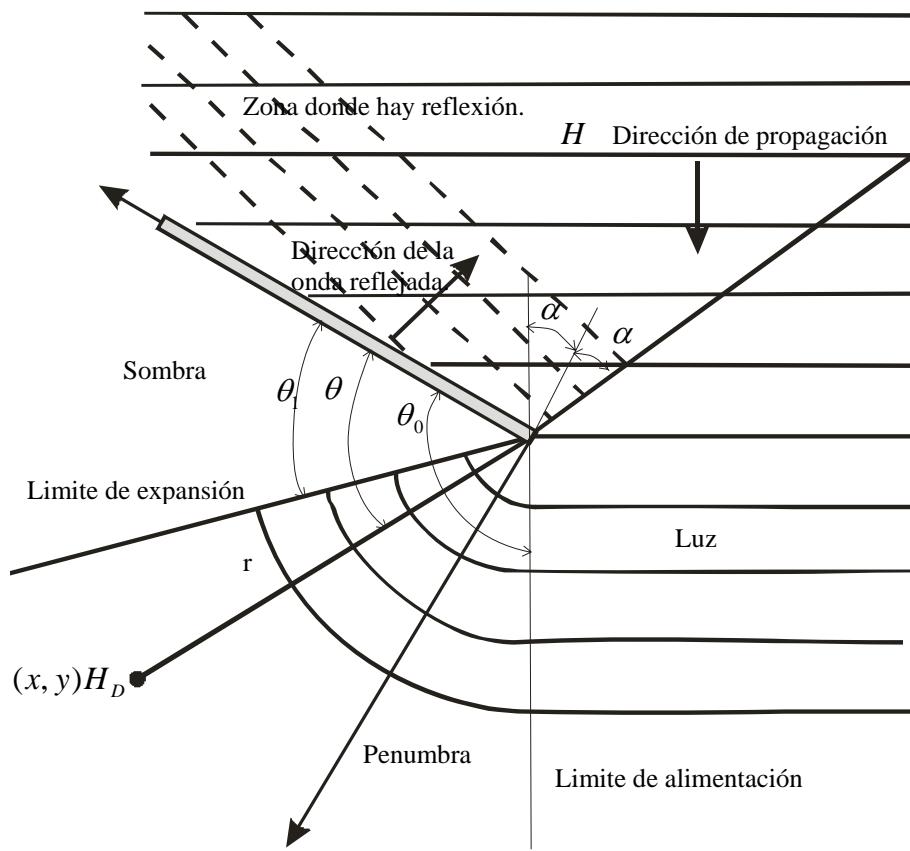


Figura 4.7 Difracción del oleaje en el extremo de un rompeolas.

- 3 La tercera zona va de $\theta_0 < \theta < (\theta_0 + \pi \pm 2\alpha)$; en esta zona las ondas no sufren ninguna modificación por la presencia del rompeolas. α es el ángulo medido entre la ortogonal incidente y la perpendicular al rompeolas.
- 4 La última zona se comprende entre $(\theta_0 + \pi \pm 2\alpha) < \theta < 2\pi$; en esta zona la onda incidente y la reflejada por la barrera están superpuestas y, de manera aparte, se observa que se forma un sistema de ondas de cresta corta si el oleaje incidente es oblicuo al rompeolas y si es normal se forma una onda parcialmente estacionaria.

4.3.2. Soluciones

Asumiendo la teoría lineal se puede asumir el problema de la difracción por las siguientes ecuaciones.

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad -h(x) \leq z \leq 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_c} = 0 \quad \text{en el obstáculo} \quad (4.30)$$

donde:

h	Profundidad de la columna de agua.	$[L]$
g	Aceleración de la gravedad.	$[LT^{-2}]$
z	Altura a la que se desea la velocidad del viento.	$[L]$
n_c	Es un vector normal a la superficie del obstáculo.	
Φ	Potencial de velocidad.	

Dado que las condición en la frontera implica que la variación de la solución en z se puede expresar como $f(z) = \cosh k(h+z)/\cosh kh$ y asumiendo un movimiento armónico simple, se llega a

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad -h(x) \leq z \leq 0 \quad (4.31)$$

que es la ecuación de Helmholtz que controla la difracción, siendo (U. Cantabria, 2000).

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \exp(-i\omega t) \quad (4.32)$$

donde:

k	Número de onda.	$[L^{-1}]$
ω	Frecuencia angular.	$[T^{-1}]$
$\phi(x, y)$	Es una función compleja.	

Cuando el oleaje es normal e incide sobre un dique semi-infinito impermeable situado sobre el eje $-x$ desde $x = 0$ hasta $x = \infty$, la ec. (4.30) se transforma en

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad 0 < x < \infty, y = 0 \quad (4.33)$$

Para $x < 0$ asumimos que las ondas son progresivas y se propagan en la dirección positiva del eje $-y$.

$$\phi(x, y) = A \exp[-iky] \quad x \rightarrow -\infty, \text{ para todo } y \quad (4.34)$$

donde:

- A Amplitud de la ola. [L]
- i Es la unidad imaginaria.

Utilizando la condición de contorno dinámica en la superficie libre (η) se llega a:

$$\eta = i\omega\phi(x, y)e^{-i\omega t} \quad (4.35)$$

Que comprende a la expresión compleja del desplazamiento total de la superficie libre, por lo tanto, resolviendo $\phi(x, y)$ se puede obtener el coeficiente de difracción (K_D) de la siguiente forma.

$$K_D = \frac{|\eta|}{A} \quad (4.36)$$

Para la solución de $\phi(x, y)$ fue obtenida por Sommerfeld (1896) y se expresa como (Dean y Dalrymple, 1991).

$$\phi(x, y) = \frac{1+i}{2} \left[e^{-iky} \int_{-\infty}^{\beta} e^{-i(\pi/2)u^2} du + e^{iky} \int_{-\infty}^{\beta'} e^{-i(\pi/2)u^2} du \right] \quad (4.37)$$

donde:

β, β' , y r se definen como.

$$\beta^2 = \frac{4}{L}(r - y)$$

$$\beta'^2 = \frac{4}{L}(r + y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Los signos de (β) y (β') dependen del cuadrante en el que se desea obtener la solución ver figura (4.8) (Le Méhauté, 1976).

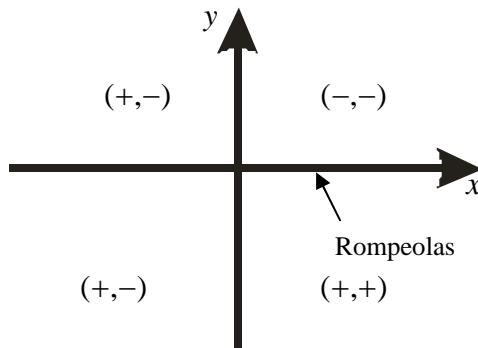


Figura 4.8 Determinación de signos de (β, β')

Ahora bien para un dique semi-infinito y con un oleaje incidente oblicuo, se parte de la solución de la ec. de $\phi(x, y)$ (4.37), en donde Penney y Price (1952) obtuvieron una solución en polares para el coeficiente de difracción tal que.

$$K_D = \left| I\left(-\sqrt{\frac{4kr}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \theta}{2}\right) e^{-ikr \cos(\alpha - \theta)} + I\left(-\sqrt{\frac{4kr}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{\alpha + \theta}{2}\right) e^{-ikr \cos(\alpha + \theta)} \right| \quad (4.38)$$

donde:

α , θ y r se representan en la figura (4.9)

Para $I(\lambda)$

$$I(\lambda) = \frac{1 + C(\lambda) + S(\lambda)}{2} + \frac{C(\lambda) - S(\lambda)}{2} \quad (4.39)$$

donde:

$C(\lambda)$ y $S(\lambda)$ son las integrales de Fresnel definidas como

$$C(\lambda) = \int_0^\lambda \cos \frac{\pi \lambda^2}{2} d\lambda \quad S(\lambda) = \int_0^\lambda \operatorname{sen} \frac{\pi \lambda^2}{2} d\lambda \quad (4.40)$$

Si se desea mas información de las integrales de Fresnel, se puede consultar en el documento de la Universidad de Cantabria (U. Cantabria, 2000).

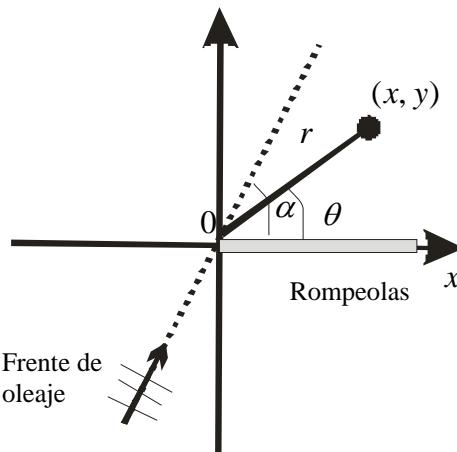


Figura 4.9 Sistema de coordenadas utilizado para la difracción.

4.4. Refracción y Difracción

Ya se ha comentado que los fenómenos de refracción y difracción no pueden separarse completamente, dado que la refracción puede dar lugar a discontinuidades en la altura de la ola que conducen a fenómenos de difracción. Además para las estructuras de protección de la costa, ambos fenómenos pueden ser importantes, lo cual requiere un estudio de refracción y difracción.

También el problema de la propagación de la onda sobre batimetría irregular es tridimensional e involucra condiciones de contorno no lineales. Por este motivo existen muy pocas soluciones al problema tridimensional y todas ellas lo son para fondo plano horizontal. En dos dimensiones los sofisticados modelos de Chu y Mei (1970) y Djordjevic y Redekopp (1978) predicen el comportamiento de ondas de Stokes sobre batimetría con variación suave. Para la simplificación del problema tridimensional, Berkhoff (1972), entre otros, hizo notar que la mayor parte de las propiedades de las ondas progresivas lineales, podrían ser predichas mediante un modelo ponderado integrado en la vertical.

4.4.1. Solución

Retomando la ecuación de la pendiente suave o también llamada Hipótesis de Rayleigh ec. (3.146), esta puede ser escrita en función del desplazamiento de la superficie libre y en su estado más simple se puede poner en función del potencial (ϕ), mediante un operador de gradiente horizontal como:

$$\nabla(CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad (4.41)$$

$$\nabla(CC_g \nabla \eta) + k^2 CC_g \eta = 0 \quad (4.42)$$

donde:

$\nabla = (\partial / \partial x) i + (\partial / \partial y) j$	
C	Celeridad de la onda. $[LT^{-1}]$
C_g	Celeridad de grupo. $[LT^{-1}]$
k	Número de onda $[L^{-1}]$
η	Superficie libre del agua, medida del nivel medio de referencia $[L]$

Para mayor detalle de la obtención de estas ecuaciones se puede consultar Dingemans (Dingemans, 1997).

Existen dos formas de solución de la ecuación de la pendiente suave: elíptico, para este tipo de resolución es preciso especificar las condiciones en todo el contorno, incluyendo la línea de costa, cuya posición no se conoce a priori; Por otro lado las aproximaciones parabólicas de la ecuación como la realizada por Radder (1979), conlleva a muchos problemas como la imposibilidad de incluir la irradiación de ondas en un amplio sector que contiene la dirección opuesta a la de avance, siendo dichos modelos incapaces, por tanto, de reproducir de forma adecuada el efecto de la reflexión. Por lo que en este trabajo se realiza una solución de tipo elíptica. (Baquerizo, 2004).

Booij (1983) en sus primeras aproximaciones, demostró que esta ecuación da resultados satisfactorios para fondo plano con pendiente de hasta 1:3. Posteriormente otros autores como, Massel (1993), Porter y Staziker (1995), han realizado extensiones de la ecuación de la pendiente suave que permite utilizarla para pendientes mayores.

Para ver claramente la relación que tiene la ecuación con los fenómenos de refracción y difracción, podemos asumir que el potencial (ϕ), de la ec. (4.41) puede ser definido por (Olucas-MC, 2005).

$$\phi = A(x, y)e^{iS(x, y)} \quad (4.43)$$

donde:

A	Amplitud de la onda. $[L]$
$(S = kx - \omega t)$	Fase.

Que es la ecuación que describe la propagación de la onda armónica lineal en dos dimensiones.

La ec. (4.43) insertada en la ecuación que describe la propagación de olas armónicas en dos dimensiones, la siguiente ecuación puede ser derivada (Balas y Inan, 2002).

$$\frac{1}{A} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{1}{CC_g} (\nabla A \cdot \nabla (CC_g)) \right] + k^2 - |\nabla S|^2 = 0 \quad (4.44)$$

$$\nabla (A^2 CC_g \nabla S) = 0 \quad (4.45)$$

La ec. (4.44), parte real, es conocida como la ecuación Eiconal, en la que el primer término evalúa la difracción. Cuando este término es despreciable ($\nabla A = 0$), se recupera la relación entre el gradiente de la fase y el número de onda, (Christopher, 1988).

$$\nabla S = k; \quad \frac{\partial S}{\partial x} = k_x; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = k_y \quad (4.46)$$

Y la ec. (4.45) parte imaginaria es una ecuación de conservación de la energía. En efecto, sustituyendo la celeridad (C) por la expresión,

$$C = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{|\nabla S|} \quad (4.47)$$

Y definiendo el vector de la velocidad de propagación de la energía como:

$$\vec{C}_g = C_g \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \quad (4.48)$$

La ecuación de conservación queda,

$$\nabla \cdot (\omega \vec{C}_g E) = 0 \quad (4.49)$$

donde:

E	$\frac{1}{2} \rho g A^2$	
A	Amplitud de la ola.	[L]
C	Celeridad de la onda.	[LT^{-1}]
C_g	Celeridad de grupo.	[LT^{-1}]
g	Aceleración de la gravedad.	[LT^{-2}]
E	Es la energía espacial media.	[FL^{-1}]
k	Número de onda.	[L^{-1}]
ρ	Densidad.	[$FT^2 L^{-4}$]
ω	Frecuencia angular.	[T^{-1}]

Ahora bien partiendo de la ec. (4.44) y calculando el rotacional del gradiente de la función escalar de la fase, la siguiente ecuación puede ser obtenida.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nabla S | \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial y} (\nabla S | \cos \theta) = 0 \quad (4.50)$$

Y la siguiente ecuación de la energía puede ser utilizada.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H^2 C C_g |\nabla S| \cos \theta \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H^2 C C_g |\nabla S| \sin \theta \right) = 0 \quad (4.51)$$

Las ecs. (4.44), (4.50) y (4.51) son resueltas simultáneamente en términos de tres parámetros de la onda, altura (H), dirección local (θ) y el escalar de la función de la fase (S). Estas tres ecuaciones describen los fenómenos de refracción y difracción.

4.4.2. Versión de la ecuación de la pendiente suave que incluye a la variable tiempo

En el capítulo tres, se obtuvieron las expresiones fundamentales del oleaje de la teoría lineal, válidas para un fondo horizontal a una profundidad (h) respecto al nivel medio del mar.

Retomando la ec. (4.43), se propone que la superficie libre este dada como

$$\eta = A(x, y)e^{iSt} \quad (4.52)$$

donde:

A	Amplitud de la onda.	[L]
$(S = kx - \omega t)$	Fase.	
η	Superficie libre del agua, medida del nivel medio de referencia	[L]
t	Tiempo	[T]

Donde la amplitud (A) es una función de las coordenadas x y y , en un plano horizontal. Por otra parte de la ec. (3.36) se tiene.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\eta \quad (4.53)$$

donde:

Φ	Potencial de velocidad	
g	Aceleración de la gravedad	$[LT^{-2}]$

Al sustituir la ec. (4.52) se encuentra.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -gA(x, y)e^{iSt} \quad (4.54)$$

Al integrar la ec. (4.54), resulta.

$$\Phi = -gA(x, y) \int e^{iSt} dt \quad (4.55)$$

O sea.

$$\Phi = -g \frac{A(x, y)}{iS} e^{iSt} \quad (4.56)$$

Si sustituimos la ec. (4.52) en la ec. (4.53) se obtiene.

$$\Phi = \frac{g}{iS} \eta \quad (4.57)$$

Si ahora se deriva la ec. (4.52) parcialmente respecto a t

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = A(x, y) iSe^{i\omega S} \quad (4.58)$$

Al derivar nuevamente respecto a t , se tiene

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -A(x, y) iSe^{iSt} \quad (4.59)$$

Cuando se toma en cuenta a la ecuación 4.52, se puede escribir de la siguiente forma

$$\eta = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (4.60)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (4.57) se tiene

$$\Phi = \frac{g}{iS^3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (4.61)$$

Tomando en cuenta que el potencial de velocidad se puede expresar como el producto de dos funciones se tiene que

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t) = Kp(h, z)\phi_1(x, y, t) \quad (4.62)$$

donde:

- Kp Factor de respuesta de la presión
- ϕ_1 Función que depende de x, y, t

Entonces

$$\Phi = Kp \phi_1 \quad (4.63)$$

O bien

$$\phi_1 = \frac{\Phi}{Kp} \quad (4.64)$$

Si se sustituye la ec. (4.61) en la ec. (4.64) y la expresión matemática que resulta, se deriva parcialmente respecto a x y y se obtiene

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{1}{Kp} \frac{g}{iS} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{1}{Kp} \frac{g}{iS} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.66)$$

Además cuando en la ec. (4.64) se toma en cuenta a la expresión (4.53) se encuentra.

$$\phi_1 = \frac{1}{Kp} \frac{g}{iS^3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (4.67)$$

Si se sustituyen las ecs. (4.65) a (4.67) en la ec. (4.41) se plantea que

$$-\frac{g}{iSKp} \frac{\partial}{\partial x} \left(CC_g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{g}{iSKp} \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + S^2 \left(\frac{g}{iS^3 Kp} \right) \frac{C_g}{C} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (4.68)$$

donde:

C	Celeridad de la onda	$[LT^{-1}]$
C_g	Celeridad de grupo	$[LT^{-1}]$

Al multiplicar por $-iSKp/g$ y simplificando

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(CC_g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{C_g}{C} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (4.69)$$

De acuerdo a la ec. (3.109) la ec. (4.69) queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(C^2 n \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C^2 n \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - n \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (4.70)$$

donde:

n Factor de grupo

O bien despejando $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ tenemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left(C^2 n \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y} \left(C^2 n \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (4.71)$$

4.5. Reflexión.

4.5.1. Definición.

Cuando un oleaje no rompiente incide sobre una estructura o acantilado no hay impacto y por ello una parte de la energía es reflejada y la otra se transmite al interior de la estructura, si esta es permeable. En el caso de que el frente de la ola sea paralelo a la frontera y si esta es plana y lisa, se produce una reflexión perfecta que se manifiesta por la presencia de ondas estacionarias ver figura (4.10). Entre más vertical, rígida y lisa sea la frontera mayor es la reflexión y por el contrario si la frontera tiene una pendiente gradual, con pared rugosa, accidentada o permeable menor es la reflexión.

La reflexión del oleaje es muy importante tomar en cuenta en los recintos portuarios, ya que si un frente de ola entra al recinto y choca con una estructura (un muelle) que favorezca la reflexión esta puede causar agitación dentro del puerto, lo cual lo deja en un estado inoperable.

La reflexión se puede dar de diferentes formas, para lo cual, en este trabajo se puede dividir en dos: la primera es una reflexión perfecta, es decir, la onda llega a una estructura impermeable y vertical, esta choca y se regresa de tal forma que se presenta una onda estacionaria; la segunda, es cuando la ola incide sobre una estructura a talud y permeable, existe un desfase entre la ola incidente y la reflejada.

Si el oleaje no incide normalmente a la pared es reflejado con un ángulo igual al de incidencia; en la figura (4.11) se muestra la forma en que se refleja el oleaje incidente.

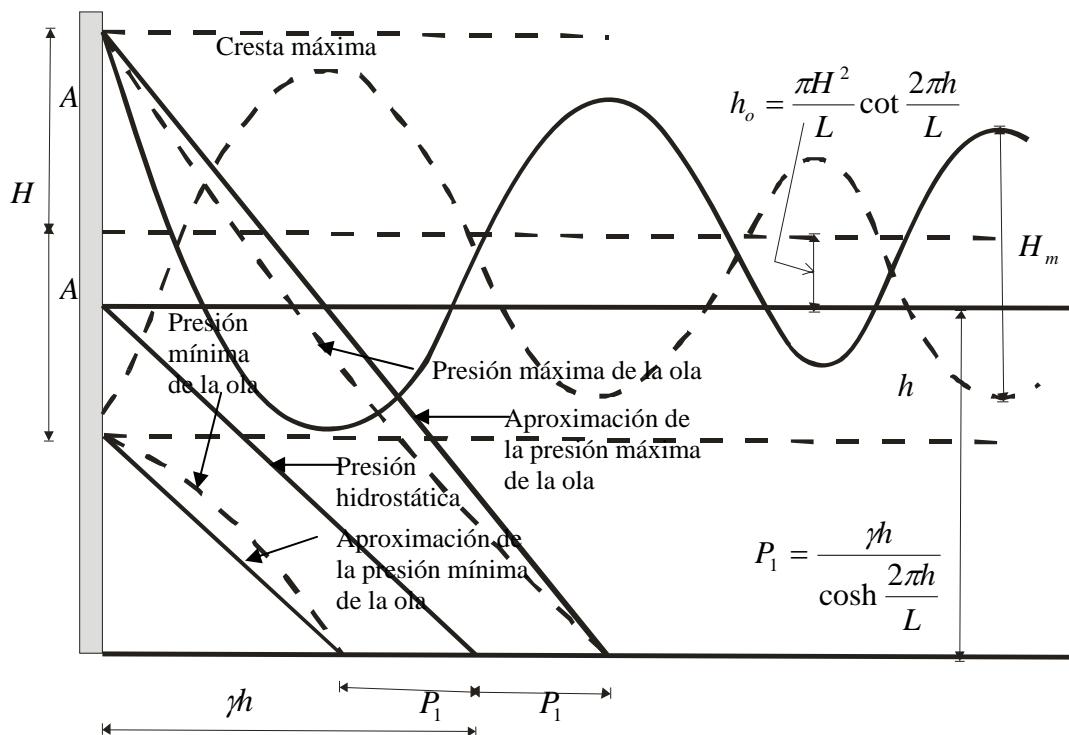


Figura 4.10 Reflexión perfecta.

4.5.2. Soluciones

El análisis de la reflexión se puede hacer de dos formas claramente diferenciadas. La primera se basa en la experimentación, a partir de la cual se han derivado una serie de formulaciones empíricas que determinan la magnitud de la reflexión en playas, o estructuras con diferentes geometrías o materiales pero sin dar ninguna información de cómo se produce la reflexión. El resultado de este tipo de estudio es un coeficiente de reflexión (K_R).

La otra es básicamente un modelo numérico en donde se observa como incide el frente de la onda sobre la estructura y esta se refleja.

Una solución empírica del coeficiente de reflexión en taludes fue dada por primera vez por Miche (1951). Asumiendo ondas monocromáticas e incidiendo normal en una playa con pendiente constante llegó a la ec. (4.72).

$$K_R^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } M_R \geq 1 \\ M_R & \text{si } M_R < 1 \end{cases} \quad (4.72)$$

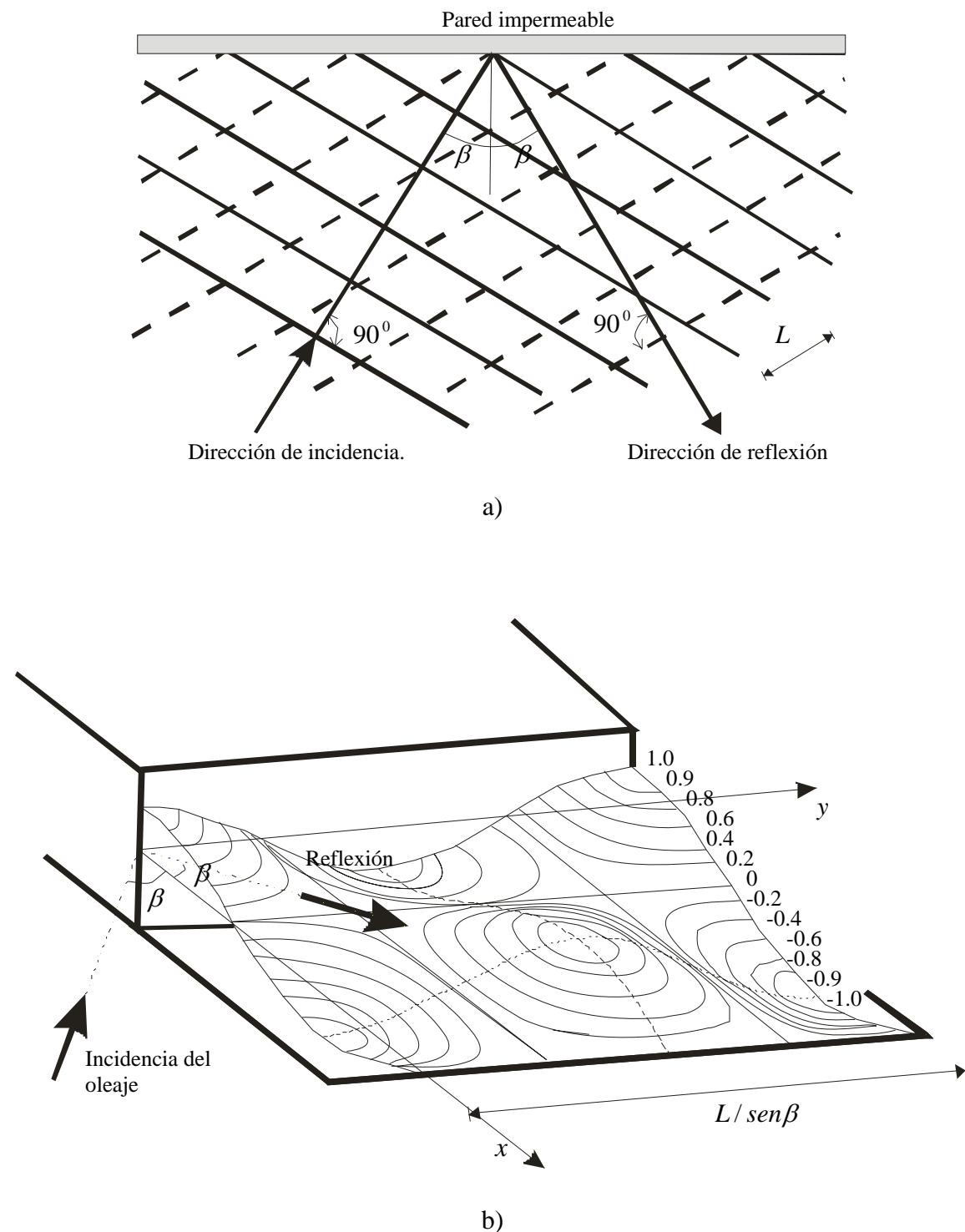


Figura 4.11 Reflexión con un ángulo de incidencia

donde:

$$M_R = \frac{16g^2 \tan^5 \beta}{2\pi H_0^2 \omega}$$

g	Aceleración de la gravedad	$[LT^{-2}]$
H_0	Altura de la ola en aguas profundas	$[L]$
ω	Frecuencia angular	$[T^{-1}]$
β	Es el ángulo del perfil del fondo respecto a un plano horizontal	
π	el numero pi. = 3.14159	

Al disiparse durante la reflexión parte de la energía, el perfil de la onda estacionaria, con origen en el nodo de la onda, está dado por.

$$\eta_S = \eta_I + \eta_R = \frac{H_I}{2} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + \frac{H_I}{2} \operatorname{sen}(kx - \omega t + \pi) \quad (4.73)$$

donde:

η	perfil de la onda estacionaria	$[L]$
k	Número de onda	$[L^{-1}]$
t	Variación en el tiempo	$[T]$
S , I y R	Se refiere al oleaje estacionario, incidente y reflejado, respectivamente	

O bien.

$$\eta_S = \frac{H_I}{2} (1 - K_R) \operatorname{sen}(kx - \omega t) + K_R H_I \cos kx \operatorname{sen} \omega t \quad (4.74)$$

Cuando $K_R = 1$ es una reflexión pura dada por

$$\eta_S = H_I \cos kx \operatorname{sen} \omega t \quad (4.75)$$

Si $K_R = 0$ no hay ola reflejada por lo tanto la ecuación es igual a la onda incidente.

$$\eta_S = \frac{H_I}{2} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (4.76)$$

Al incidir el oleaje en una estructura, parte de su energía se refleja, otra se transmite a la estructura y otra parte se puede llegar a disipar si la onda no rompe.

Reflexión del oleaje en playas

La energía reflejada por una playa es función de su rugosidad, permeabilidad y pendiente, así como la esbeltez y ángulo de incidencia del oleaje. Miche en (1951) consideró que el coeficiente de reflexión se obtuviera como el producto de dos factores, es decir se tiene que.

$$K_R = X_1 X_2 \quad (4.77)$$

donde:

X_1 Factor que esta en función de la rugosidad y permeabilidad de la playa.

X_2 Factor que depende de la pendiente de la playa y de la esbeltez del oleaje incidente.

De trabajos por Schomaker y Thijssse (1949), Miche propone para X_1 un valor de 0.8 para playas lisas e impermeables, para playas rugosas e impermeables se tiene un valor de 0.3 a 0.6 y el segundo factor X_2 se obtiene de la siguiente forma.

$$X_2 = \frac{(H_0 / L_0)_{\max}}{H_0 / L_0} ; \text{ si } \left(\frac{H_0}{L_0} \right) > \left(\frac{H_0}{L_0} \right)_{\max} \quad (4.78)$$

$$X_2 = 1 \quad \text{si } \left(\frac{H_0}{L_0} \right) \leq \left(\frac{H_0}{L_0} \right)_{\max} \quad (4.79)$$

donde:

$$\left(\frac{H_0}{L_0} \right)_{\max} \quad \text{valor característico de cada playa}$$

Y esta representado por:

$$\left(\frac{H_0}{L_0} \right)_{\max} = \left(\frac{2\theta}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\sin^2 \theta}{\pi} \quad (4.80)$$

donde:

$$\begin{aligned} \theta &\quad \text{Ángulo que forma la playa con la horizontal} \\ \left(\frac{H_0}{L_0} \right) &\quad \text{Esbeltez real del oleaje incidente en aguas profundas} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{H_0}{L_0} \right)_{\max} \quad \text{Relación de esbeltez máxima teórica y condición para la cual se presenta la reflexión total}$$

4.6. Rompiente

4.6.1. Definición

Durante la propagación de las olas desde la zona de aguas profundas hasta la zona de aguas poco profundas, además de la deformación que éstas sufren en el plano horizontal, ocurre la deformación vertical, ambas debidas al efecto individual o combinado de los fenómenos de refracción, difracción y reflexión.

La forma del perfil puede mantenerse estable, sin embargo la altura (H) crece hasta alcanzar un límite arriba del cual la ola se hace inestable, por tanto rompe y disipa parte de su energía. Este límite superior de la altura de la ola es llamado *altura de la ola rompiente*. La teoría lineal del oleaje predice, y los experimentos confirman, que en este proceso de deformación, la altura de la ola rompiente es función de la longitud de la ola.

En aguas profundas.

Se dice que la ola rompe cuando la velocidad de las partículas del agua en la cresta supera la velocidad de propagación o celeridad, provocando la inestabilidad, lo que se logra cuando la cresta de la ola presenta un ángulo (α_b) igual a 120° figura (4.12). Por otra parte, Michell (1893), (Ippen, 1966) quien plantea que esta condición puede ser expresada en función de la relación de esbeltez ($\gamma_e = H / L$), con valor límite máximo en el rompimiento (γ_{\max}), igual a la ec. (4.81)

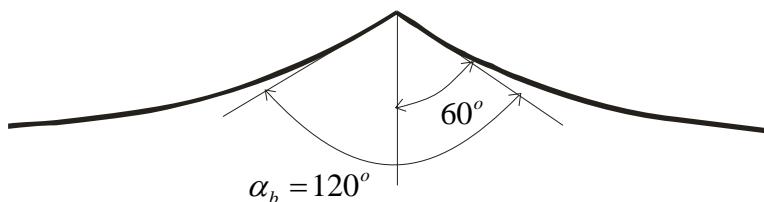


Figura 4.12 Ángulo máximo de la cresta.

$$\gamma_{\max} = \left(\frac{H_b}{L_o} \right)_{\max} = 0.142 \quad (4.81)$$

O bien:

$$\left(\frac{H_b}{T} \right) = 0.875 \quad (4.82)$$

donde:

H_b	Altura de la ola rompiente.	[L]
L_0	Longitud de la ola en aguas profundas.	[L]
T	Periodo de la ola.	[T]

Por otra parte Miche en 1944, obtiene que (Vergara, 2005)

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{7} \tanh \frac{2\pi d}{L} \quad (4.83)$$

En aguas intermedias.

Siguiendo aproximadamente la siguiente ley obtenida de forma heurística por Miche (1944) (U. Granada, 2004).

$$\frac{H}{L} = 0.14 \tanh kh \quad (4.84)$$

En aguas poco profundas.

Desde los trabajos de McCowan (1894), registrado por Dean and Dalrymple (1994), quien determinó que las olas rompen cuando su altura alcanza un valor igual a una fracción de la profundidad de rompimiento (h_b) (Vergara, 2005).

$$H_b = kh_b \quad (4.85)$$

donde:

$k = 0.78$ Para una ola solitaria viajando sobre un fondo horizontal.

Estudios posteriores en laboratorio para olas propagándose en aguas poco profundas han demostrado que el límite de la relación de esbeltez tiende a decrecer en la dirección de propagación de la ola hacia la costa, además de ser función de la profundidad (h). Asumiendo que una ola solitaria rompe para un valor máximo de H/h , los resultados de modelos numéricos ejecutados por Longuet-Higgins y Fenton (1974) entre otros, y reportados en Demirbilek and Vincent (2001) encuentran que esta relación vale.

$$\left(\frac{H_b}{h_b} \right)_{\max} = 0.83 \quad (4.86)$$

Otros autores lo manejan como (Christopher, 1988).

$$\left(\frac{H_b}{h_b} \right)_{\max} = 0.78 \quad (4.87)$$

Posteriormente, se han ejecutado muchos otros estudios para desarrollar modelos que permitan predecir el valor de (H_b), de los cuales se han derivado dos parámetros de rompimiento de las olas que son; el índice de profundidad rompiente (ζ_b) dado por:

$$\zeta_b = \frac{H_b}{h_b} \quad (4.88)$$

Y el índice de altura rompiente (Ω_b) que se expresa como:

$$\Omega_b = \frac{H_b}{H_o} \quad (4.89)$$

donde:

H_o Altura de la ola en aguas profundas. [L]

4.6.2. Clasificación

Como anteriormente se mencionó, el perfil de la ola que alcanza la playa se deforma continuamente; la longitud y la celeridad decrecen, mientras que la altura antes de romper, decrece y después vuelve a crecer. Esta situación ocurre debido al efecto de la profundidad y naturaleza del fondo que provoca pérdida de energía por fricción, de tal suerte que, como ya se mencionó, cuando la relación de esbeltez para una cierta pendiente de playa llega a un valor máximo, la ola se vuelve inestable y rompe creando disipación de energía por la turbulencia generada y la fricción con el fondo.

La respuesta extrema de las pendientes de playa, ocurre cuando la pendiente es muy pequeña y la reflexión de la ola no es apreciable, y por otra parte, cuando las olas se encuentran con una frontera vertical que produce una reflexión prácticamente total con poca pérdida de energía. Entre estos dos extremos, la ola pierde una parte de su energía y la otra es reflejada, lo que da origen a tres perfiles típicos de rompientes de olas, caracterizándose *las olas deslizantes* (spilling).

Las olas se pueden clasificar en tres grandes grupos que se describen a continuación cada una de ellas.

Las *olas deslizantes* (spilling) por el aparente arrastre de espuma sobre la cresta; numerosas olas rompientes se presentan en playas de pendientes pequeñas, lo que da origen a un gradiente de alturas rompientes, dH_b/dS , donde S es la distancia en dirección de la propagación de las olas.

Las *olas rompientes de zambullida* (plunging), tienen la cresta en forma de rollo, cuyo frente se colapsa y penetra en la parte del valle de la ola originando un salpicón y rocío de agua, son las que se registran en playas con pendientes más empinadas.

Las olas *rompientes frontales* (surging), ocurren sobre playas de gran pendiente que producen alta reflexión y su forma tiende a la de zambullida sin lograr la formación total del rollo y por tanto desaparece el colapso de la misma. En la figura (4.13) se muestran estos tipos de perfil de olas.

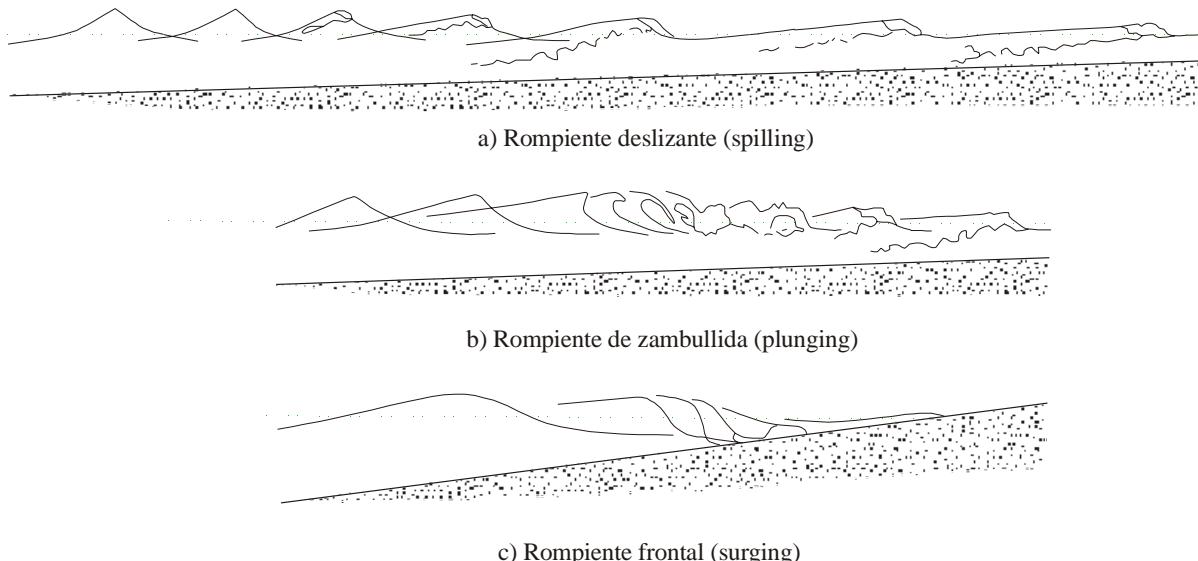


Figura 4.13 Tipo de perfiles de rompiente de olas sobre playas (modificado) de Dean and Dalrymple (1994).

4.6.3. Soluciones

La caracterización de las fórmulas de la rompiente se establece comúnmente a través de la relación de esbeltez de las olas $\gamma_e = H / L$ y de la pendiente de la playa $m = \tan \beta$ (β es el ángulo que forma el perfil de la playa con un plano horizontal). Galvin (1968), presenta un criterio de identificación del tipo de rompimiento de la ola en términos del parámetro de similitud de rompimiento (ξ_0) en la zona de aguas profundas, o en la zona de aguas poco profundas (ξ_b), ambos expresados como:

$$\xi_o = \frac{\tan \beta}{\left(\frac{H_o}{L_o} \right)^{1/2}} \quad (4.90)$$

$$\xi_b = \frac{\tan \beta}{\left(\frac{H_b}{L_b} \right)^{1/2}} \quad (4.91)$$

donde:

γ_{eo} Relación de esbeltez en términos de las características (H_0, L_0) de la ola en la zona de aguas profundas.

Las ecs. (4.90) y (4.91) también se le conoce como numero de Iribarren. En donde se clasifican de la siguiente manera. Tabla (4.1)

Tabla 4.1 Tipos de rompientes de las olas con relación ξ_o y ξ_b .

Condición de ξ_o y ξ_b	Tipo de rompimiento
$\xi_o > 0.46$ ó $\xi_b > 0.4$	Frontal (surfing)
$0.5 < \xi_o < 3.3$ ó $0.4 < \xi_b < 2.0$	Zambullida (plunging)
$\xi_o < 0.33$ ó $\xi_b < 0.2$	Deslizante (spilling)

Propagación de las olas en la zona de rompientes.

La zona de rompientes es la región que se extiende desde la frontera del rompimiento de las olas por el lado del mar, hasta el estrán; aquí el comportamiento hidrodinámico de las olas después de romper, se vincula estrechamente con la disipación rápida de su energía, en la que contribuyen principalmente a tres factores:

- a. La formación de vórtices horizontales acompañados con un chapoteo en el rompimiento de la ola de zambullida, como se muestra en la figura (4.13b), que arrastra burbujas de aire hacia el interior de la masa de agua para después salir rápidamente con la desaparición de los vórtices. En el caso de rompientes deslizantes, figura (4.13a), la forma de la ola se conserva, se observa un penacho de espuma y conforma en el frente de la ola una superficie rodante donde el arrastre de aire es limitado.
- b. La fricción en el fondo a través del esfuerzo cortante cuyo efecto en la disipación de energía es pequeña.
- c. La turbulencia con arrastre de aire, que resulta ser el factor de mayor importancia y que induce a una ola monocromática incidente a transformarse en una ola de alta frecuencia u ola corta.

Sin duda este proceso de rompimiento de las olas y en consecuencia la transformación de la altura de la ola en la zona de rompientes, es altamente complejo, donde, además de la disipación o pérdida de energía mencionadas también se experimenta una pérdida en el flujo de cantidad de

movimiento responsable de la generación de corrientes permanentes y olas de baja frecuencia; situación que hace de esta zona la más dinámica de la región costera, debido a la inducción de otros procesos hidrodinámicos de la variación del nivel del mar, corrientes litorales y transporte de sedimentos, cuyo impacto se manifiesta en la evolución de la línea de costa y en el perfil transversal de la playa.

Decrecimiento de la altura de la ola en la zona de rompimiento.

Después del rompimiento, la altura de la ola decrece por disipación, la forma de la ola cambia rápidamente a un frente abrupto que se desplaza hasta alcanzar un nuevo valor de la altura a cierta distancia del punto de rompimiento. Este proceso ha sido investigado teórica y experimentalmente, disponiéndose actualmente de modelos con aproximaciones diferentes.

Sawaragui and Iwata (1974), determinan la atenuación de la altura de la ola monocromática mediante un modelo bidimensional de turbulencia, con las consideraciones de $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$, $w = \bar{w}$, y $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$; los términos asociados a las fuerzas viscosas son pequeños respecto a los términos de la fuerza de Reynolds (debidos a la fluctuación turbulenta). Este modelo representa las ecuaciones básicas para el rompimiento de las olas dadas como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[K(h + \eta)^2 \left(\frac{u}{h} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.92)$$

Y la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(h + \eta)] = 0 \quad (4.93)$$

Donde cada una de las variables son iguales a las descritas a lo largo del trabajo y K , es definido como coeficiente de intensidad turbulenta. En las expresiones anteriores, se usó la ola solitaria y fueron transformadas en forma adimensional a través de los parámetros.

Un modelo probabilístico fue desarrollado por Wijnberg and van Rijn (1995) para describir los procesos de propagación y transformación individual de las olas en la zona de rompientes y su relación con las corrientes a lo largo de la costa. El modelo asume que las olas se propagan, unidireccionalmente hacia la playa con líneas batimétricas paralelas incluyendo los procesos de refracción, efecto del fondo por la variación de la profundidad y las corrientes medias en la profundidad a lo largo de la costa y la disipación de la energía por fricción del fondo y rompimiento; también se considera que el oleaje en aguas profundas se constituye por una serie discreta de alturas y periodos de las olas agrupadas en clases, de modo que el citado modelo se expresa como sigue:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{EC_g \cos \theta + U}{\omega} \right) + \frac{D_{ef} + D_{er}}{\omega} = 0 \quad (4.94)$$

donde:

$E = \rho g H^2 / 8$	
$C_g' = n_p C'$	
$\omega' = 2\pi/T'$	
$\theta = \arcsen[(C'/C_o') \operatorname{sen} \theta_o]$	
$T' = T / [1 - (Tu \cos \phi / L)]$	
$C' = L/T'$	
$k = 2\pi/L$	
E	Energía de la ola por unidad de área. $[FL^{-1}]$
C_g'	Velocidad de grupo relativa. $[LT^{-1}]$
ω'	Frecuencia relativa angular de la ola. $[T^{-1}]$
H	Altura de la ola local. $[L]$
ρ	Densidad del fluido. $[FT^2 L^{-4}]$
g	Aceleración de la gravedad. $[LT^{-2}]$
C'	Velocidad relativa de propagación de la ola. $[LT^{-1}]$
L	Longitud de la ola. $[L]$
T	Periodo absoluto de la ola. $[T]$
k	Número de la ola. $[L^{-1}]$
u	Velocidad promedio en la vertical por las olas en la dirección x . $[LT^{-1}]$
U	Velocidad promedio en la vertical de la corriente en la dirección x . $[LT^{-1}]$
θ	Ángulo de la ortogonal de una ola con el eje x normal a la cresta
D_{ef}	Disipación de energía por unidad de área por fricción del fondo.
D_{er}	Disipación de energía por unidad de área por rompimiento.
T'	Periodo de la ola relativo
n_p	$0.5 (1 + 2kd / \operatorname{senh} 2kd)$, coeficiente
x	Coordenada positiva en dirección normal hacia la costa.
ϕ	Ángulo entre la dirección de propagación de la ola y la dirección de la corriente.

La longitud de la ola definida por la relación de dispersión, incluyendo el efecto de la refracción por corriente, se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{L}{T} - u \cos \phi \right)^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad (4.95)$$

donde:

$$h \quad \text{Profundidad local del agua respecto al nivel del mar de referencia.} \quad [L]$$

La disipación de energía por fricción del fondo es descrita por:

$$D_{ef} = \frac{\rho}{6} \frac{f}{\pi} \left(\frac{\omega' H}{\operatorname{senh} \frac{2\pi h}{L}} \right)^3 \quad (4.96)$$

donde:

f Coeficiente de fricción, en régimen hidráulico rugoso toma el valor máximo de 0.3.

Por su parte, la disipación de energía por rompiente se puede obtener de:

$$D_{er} = 0.375 \rho g \left(\frac{H^2 - H_{max}^2}{T'} \right) \text{ si } H > H_{max} \quad (4.97)$$

Esta ecuación asume que las olas rompen, si $H > H_{max}$; donde H_{max} es la altura máxima local posible asociada con el rompimiento, k representa el factor de rompimiento que se determina con la figura (4.14), que para un oleaje aleatorio, depende de la pendiente media del fondo, $\tan \alpha$, y de la relación de esbeltez H/L ; β es el ángulo del perfil del fondo respecto a un plano horizontal.

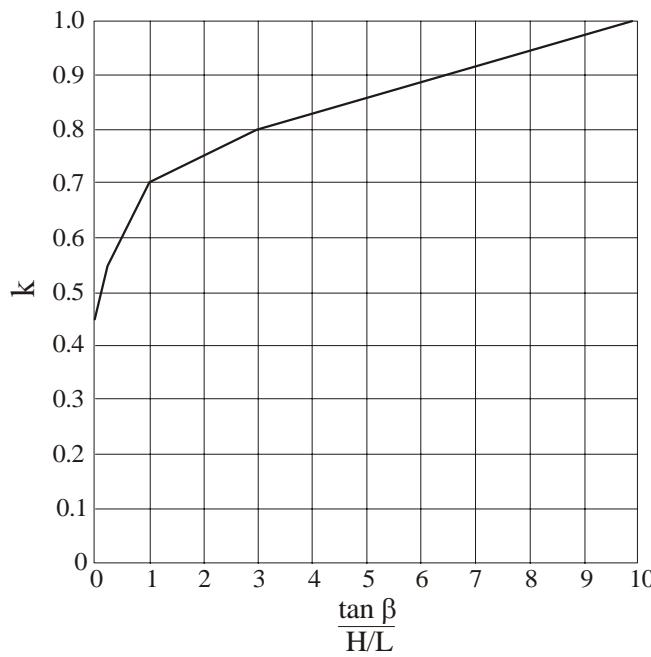


Figura 4.14 Coeficiente de rompimiento. Wijnberg-van Rijn (1995).

CAPÍTULO 5

MODELO NUMÉRICO DE OLEAJE (PENDIENTE SUAVE)

5.1. Antecedentes

El modelo numérico YAXUM/3D, fue diseñado originalmente para el estudio de la hidrodinámica de lagunas costeras (Ramírez y Escalante, 1998). Desde entonces, el modelo ha ido en constante evolución y se han optimizado tanto el algoritmo como los métodos numéricos de solución. Algunas de las aplicaciones y resultados más importantes del modelo en aguas continentales y marinas se pueden consultar en Rodríguez (2003), Herrera (2004), González (2005), Barrios (2006), Campos (2006), Gabriel (2007) y Couder (2005).

En el trabajo de Campos (2006) se parametrizó la interacción aire-océano, para lo cual se cuantifica el flujo de calor con sus términos correspondientes a la radiación de onda larga, radiación de onda corta, calor latente y calor sensible; una aplicación fue presentada para la recirculación de la pluma térmica de la Central Núcleo Eléctrica Laguna Verde (CNLV). En este trabajo se implementó el módulo de oleaje, para determinar los fenómenos que modifican el oleaje; se retoman los resultados de Campos (20006) para determinar la influencia de estos fenómenos en los efectos termodinámicos en el recinto de la obra de toma.

Para mayor detalle del modelo hidrodinámico YAXUM/3D, se puede ver en el (Anexo 1).

5.2. Modelo de Oleaje: Refracción y difracción. (Método explícito)

Una de las partes fundamentales de este trabajo, es determinar un procedimiento numérico para propagar al oleaje desde aguas profundas a una zona cercana a la costa, tomando en cuenta la refracción y la difracción simultáneamente, así como la rompiente de la ola.

Este modelo es adecuado para obtener los patrones de oleaje en lugres donde la irregularidad de las batimétricas provocaría, cuando solo se estudia a la refracción, zonas cáusticas; es decir, áreas donde las líneas imaginarias (rayos de ondas) que representan a la dirección de avance de las olas se cruzarían y habría una gran concentración de energía del oleaje. El procedimiento es útil para obtener el oleaje cerca de la costa o de cuerpos que impiden el desplazamiento de las olas.

En la propagación del oleaje desde aguas profundas hasta una zona cerca de las obras marítimas o a la línea de playa, intervienen en forma combinada la refracción y difracción de las olas. Cuando se limita a obtener el oleaje hasta esta zona, no resulta ser importante el efecto de la reflexión; por lo que al no tomarla en cuenta, el cálculo de propagación de esta se hace más sencillo.

Para establecer el patrón del oleaje desde aguas profundas hasta una región próxima a las zonas mencionadas conviene emplear las ecs. (4.44), (4.50) y (4.51), que se pueden escribir de la siguiente forma.

$$|\nabla S|^2 = k^2 + \frac{1}{A} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{1}{CCg} (\nabla A \cdot \nabla (CC_g)) \right] \quad (5.1)$$

O bien considerando la ec (4.9) y la amplitud de la ola (A) sustituir por la altura de la ola (H)

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 + \frac{1}{H} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{1}{CCg} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial CC_g}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial CC_g}{\partial y} \right) \right] \quad (5.2)$$

La ec. (4.50) tomando en cuenta la definición de k_x y k_y ec. (3.47) queda:

$$\frac{\partial}{\partial x} k_y - \frac{\partial}{\partial y} k_x = 0 \quad (5.3)$$

Y por ultimo la ec. (4.51).

$$\frac{\partial}{\partial x} (H^2 CC_g k_x) + \frac{\partial}{\partial y} (H^2 CC_g k_y) = 0 \quad (5.4)$$

Donde las incógnitas son los componentes de la función de fase (k_x y k_y) y la altura de la ola (H).

5.2.1. Submódulo de refracción y difracción

Para resolver las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4) se propone un método de diferencias finitas.

Se considera en la zona donde se propaga el oleaje una malla rectangular de lados Δx y Δy como se muestra en la figura (5.1). En los puntos de la malla (vértices de los rectángulos) se define la profundidad del fondo al nivel medio del mar. Para ellos se obtiene el número de onda (k) a partir de la ecuación de dispersión ec. (3.48a) y el periodo del oleaje (T).

Con base en las ecuaciones diferenciales (5.1) a (5.3) se proponen las expresiones de diferencias finitas siguientes:

$$k_{x_{i,j+1}}^2 + k_{y_{i,j+1}}^2 = k_{i,j+1}^2 + \frac{1}{H_{i,j+1}} \left[\frac{H_{i+1,j+1} - 2H_{i,j+1} + H_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{H_{i,j+1} - 2H_{i,j} + H_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{CCg} \frac{\partial CC_g}{\partial x} \right)_{i,j+1} \frac{H_{i+1,j+1} - H_{i-1,j+1}}{2\Delta x} + \left(\frac{1}{CCg} \frac{\partial CC_g}{\partial x} \right)_{i,j+1} \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta y} \right] \quad (5.5)$$

$$\frac{k_{x_{i,j+1}} - k_{x_{i,j}}}{\Delta y} - \frac{k_{x_{i+1,j}} - k_{x_{i-1,j}}}{2\Delta x} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{0.5H_{i,j+1}^2 (CC_g)_{i,j+1} (k_{y_{i+1,j+1}} + k_{y_{i-1,j+1}}) - H_{i,j}^2 (CC_g)_{i,j} k_{y_{i,j}}}{\Delta y} + \\ + \left\{ \varphi \frac{H_{i+1,j+1}^2 (CC_g)_{i+1,j+1} k_{x_{i+1,j+1}} - H_{i-1,j+1}^2 (CC_g)_{i-1,j+1} k_{x_{i-1,j+1}}}{2\Delta x} + \right. \\ \left. + (1-\varphi) \frac{H_{i+1,j}^2 (CC_g)_{i+1,j} k_{x_{i+1,j}} - H_{i-1,j}^2 (CC_g)_{i-1,j} k_{x_{i-1,j}}}{2\Delta x} \right\} = 0 \quad (5.7)$$

En estas expresiones (φ), es el factor de ponderación (constante) comprendido entre cero y uno. Sirve para darle importancia en el cálculo a las aproximaciones de ciertas derivadas.

(M, N)

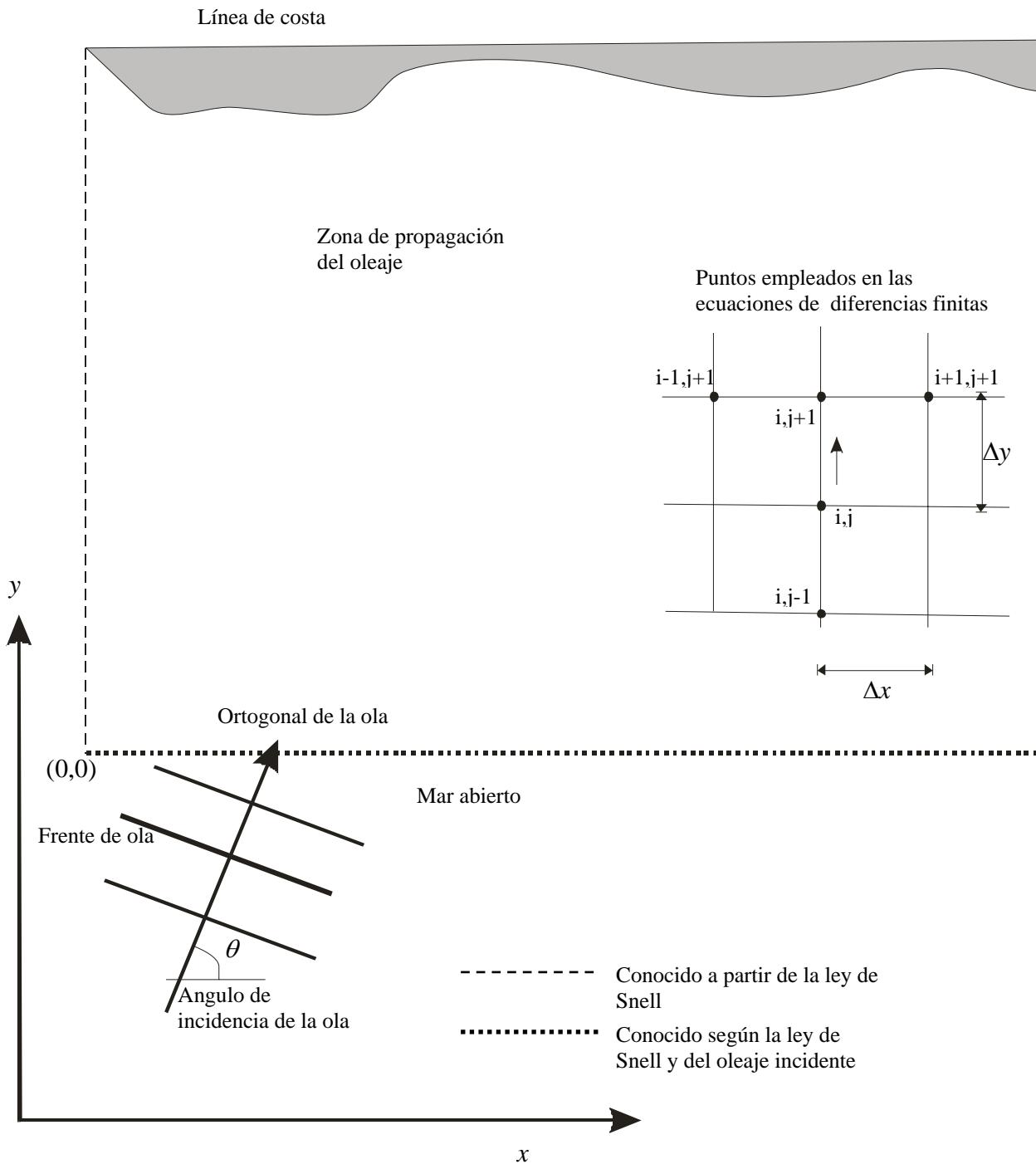


Figura 5.1 Coordenadas de referencia y notación usada en el modelo de refracción y difracción.

Estas últimas tres ecuaciones tienen como incógnitas a $k_{x_{i,j+1}}$, $k_{y_{i,j+1}}$ y $H_{i,j+1}$. Dado que estas aparecen en cada ecuación con un exponente distinto de uno o algunas se multiplican entre sí, estas ecuaciones son no lineales.

5.2.2. Método para calcular la refracción y difracción

Para obtener la solución de las ecs. (5.5) a (5.7) se desarrolla el método que a continuación se describe.

Obtención de los componentes del gradiente de la función de fase.

De acuerdo con la ecs. (2.12) y (2.13), para disponer de un procedimiento simple de cálculo que permita evaluar $k_{x_{i,j+1}}$ y $k_{y_{i,j+1}}$ se propone una aproximación lineal de la ecuación (2.13) con base en la función

$$y = \sqrt{y^2 - x^2} = f(x) \quad (5.8)$$

Según el desarrollo en series de Taylor de $f(x)$, hasta la primera derivada.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x \quad (5.9)$$

Si se acepta que n represente el número de iteración y se anota como un superíndice en las variables, y que.

$$\Delta x = x^{(n+1)} - x^{(n)} \quad ; \quad x = x^n$$

$$f(x + \Delta x) = f(x^{(n+1)}) = y^{(n+1)} \quad ; \quad f(x) = f(x^{(n)}) = y^{(n)} = \sqrt{r^2 - (x^{(n)})^2}$$

El desarrollo anterior puede escribirse de la siguiente forma, sustituyendo en la ec. (5.9).

$$f(x^{(n+1)}) = f(x^{(n)}) + (f'(x^{(n)})) (x^{(n+1)} - x^{(n)}) \quad (5.10)$$

Para el caso particular de la función $f(x)$ de la ec. (5.8) se tiene.

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (5.11)$$

Al igual que la ec. (5.10) se tiene.

$$f'(x^n) = -\frac{x^{(n)}}{\sqrt{r^2 - (x^{(n)})^2}} = -\frac{x^{(n)}}{y^{(n)}} \quad (5.12)$$

Por lo que se puede escribir como.

$$y^{(n+1)} = \gamma_c^{(n)} \delta_c^{(n)} x^{(n+1)} \quad (5.13)$$

donde:

$$\gamma_c^{(n)} = y^{(n)} + \left(\frac{(x^{(n)})^2}{y^{(n)}} \right)$$

$$\delta_c^{(n)} = \frac{x^{(n)}}{y^{(n)}}$$

Ahora bien, en términos del gradiente de la función de fase, la ec. (5.13) queda.

$$k_{y_{i,j+1}}^{(n+1)} = \gamma_{ci}^{(n)} \delta_{ci}^{(n)} k_{x_{i,j+1}}^{(n+1)} \quad (5.14)$$

donde:

$$\gamma_{ci}^{(n)} = k_{y_{i,j+1}}^{(n)} + \left(\frac{(k_{x_{i,j+1}}^{(n)})^2}{k_{y_{i,j+1}}^{(n)}} \right)$$

$$\delta_{ci}^{(n)} = \frac{k_{x_{i,j+1}}^{(n)}}{k_{y_{i,j+1}}^{(n)}}$$

$$k_{x_{i,j+1}}^{(n)} = \sqrt{|k_{i,j+1}^{(n+1)}|^2 - (k_{x_{i,j+1}}^{(n)})^2}$$

Cuando el radical anterior es negativo, conviene asignarle un valor pequeño a $\gamma_c^{(n)}$ y a $\delta_c^{(n)}$. Al sustituir la ec. (5.14) en la ec. (5.6) y después de ordenar términos se llega a.

$$k_{y_{i,j+1}}^{(n+1)} = \beta_{ci} + \alpha_c \left(\gamma_{ci+1}^{(n)} - \gamma_{ci-1}^{(n)} \right) \quad (5.15)$$

donde:

$$\alpha_c = \frac{\varphi \Delta y}{2 \Delta x}$$

$$\beta_{ci} = k_{x_{i,j}} + \frac{1}{2 \Delta y} \left(k_{y_{i+1,j}} - k_{y_{i-1,j}} \right)$$

Para que quede más claro el procedimiento de cálculo para obtener $k_{x_{i,j+1}}$ y $k_{y_{i,j+1}}$ consiste en los siguientes pasos:

- 1) Obtener $k_{x_{i,j+1}}$ para $i = 1, 2, \dots, M - 2$ a partir de la ec. (5.15).
- 2) Calcular los valores $k_{y_{i,j+1}}^{(n+1)}$ con la ec. (5.14).
- 3) Se compara con los valores de $k_{x_{i,j+1}}^{(n)}$ con los de $k_{y_{i,j+1}}^{(n+1)}$.

Cuando son muy parecidos se continua con el paso 4. De otro modo, se asigna a n en valor $(n+1)$ y se va al paso 1.

- 4) Los valores de $k_{x_{i,j+1}}^{(n+1)}$ y $k_{y_{i,j+1}}^{(n+1)}$ corresponden a los de $k_{x_{i,j+1}}$ y $k_{y_{i,j+1}}$ de interés.

5.2.3. Cálculo de la altura de ola

Una vez conocidas $k_{x_{i,j+1}}$ y $k_{y_{i,j+1}}$ se obtiene $H_{i,j+1}$ a partir de la ec. (5.7) es decir:

$$H_{i,j+1}^{(n+1)} = \left[\left(\alpha_c \left(H_{i-1,j+1}^{(n+1)} \right)^2 \left(CC_g \right)_{i-1,j+1} k_{x_{i-1,j+1}} - \left(H_{i+1,j+1}^{(n+1)} \right)^2 \left(CC_g \right)_{i+1,j+1} k_{x_{i+1,j+1}} \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon_i \right) / \left(\left(CC_g \right)_{i-1,j+1} k_{y_{i,j+1}} \right)]^{1/2} \quad (5.16)$$

donde:

$$\varepsilon_i = H_{i+1,j}^2 \left(CC_g \right)_{i+1,j} k_{y_{i,j}} + \frac{(1-\varphi)\Delta y}{2\Delta x} \left(H_{i-1,j}^2 \left(CC_g \right)_{i-1,j} k_{x_{i-1,j}} - H_{i+1,j}^2 \left(CC_g \right)_{i+1,j} k_{x_{i+1,j}} \right)$$

5.2.4. Revisión del valor del gradiente de la función

Los valores calculados de $H_{i,j+1}^{(n+1)}$ son sustituidos en la ec. (5.5) de donde

$$\left| k_{i,j+1}^{(n+1)} \right|^2 = \frac{1}{H_{i,j+1}^{(n+1)}} \left(\frac{H_{i+1,j+1}^{(n)} - 2H_{i,j+1}^{(n+1)} + H_{i-1,j+1}^{(n+1)}}{\Delta x^2} + \frac{H_{i-1,j+1}^{(n+1)}}{\Delta y^2} \rho_i + \tau_i \left(H_{i+1,j+1}^{(n)} - H_{i-1,j+1}^{(n+1)} \right) + \Omega_i H_{i,j+1}^{(n+1)} \right) + k_{i,j+1}^2 \quad (5.17)$$

donde:

$$\rho_i = \frac{H_{i,j-2} - 2H_{i,j}}{\Delta y^2} - \Omega_i H_{i,j}$$

$$\Omega_i = \frac{(CC_g)_{i,j+1} - (CC_g)_{i,j}}{\Delta x^2 (CC_g)_{i,j+1}}$$

$$\tau_i = \frac{(CC_g)_{i+1,j+1} - (CC_g)_{i+1,j+1}}{4\Delta x^2 (CC_g)_{i,j+1}}$$

5.2.5. Condiciones de frontera

Uno de los aspectos mas abordados en las últimas décadas, la búsqueda de eficiencia numérica y predeción en los resultados, es el estudio del problema del valor de las fronteras, es decir, cómo representar lo que sucede fuera del dominio de cálculo. Hasta el momento son muy diversas las aproximaciones que se han presentado en la literatura especializada; sin embargo, todavía es mucho lo que queda por realizar al respecto. En particular, para la implementación numérica del modelo modificado de la ecuación de la pendiente suave se presentan dificultades considerables al representar fronteras abiertas (donde el dominio computacional intercepta con agua de mar que se encuentra fuera de la malla de estudio). Normalmente, estas fronteras además de incluir al oleaje incidente, contienen la superimposición de un conjunto de ondas perturbadas originadas por efectos batimétricos y/o la presencia de otras fronteras. El oleaje perturbado no es conocido al inicio, por lo que la finalidad es, precisamente, su cálculo de estas zonas. En un buen número de modelos comerciales, la frontera abierta normalmente se coloca lo suficientemente lejos de el área de interés, intentando que las imprecisiones en las condiciones de frontera no afecten los resultados. Sin embargo, esta práctica resulta en un aumento del trabajo computacional y en la mayoría de los casos no logra su objetivo. (Martínez, 2004)

Condiciones de frontera del lado de la playa

Para nuestro caso, conforme se acerca la ola a la playa este sufre un fenómeno que se denomina rompiente, visto en el Capítulo 4 donde las condiciones de frontera están dadas por la ec. (4.85)

Desde los trabajos de McCowan (1894), registrado por Dean and Dalrymple (1994), quien determinó que las olas rompen cuando su altura alcanza un valor igual a una fracción de la profundidad de rompimiento (h_b) (Vergara, 2005)

$$H_b = kh_b$$

donde:

$k = 0.78$ Para una ola solitaria viajando sobre un fondo horizontal.

Condiciones de frontera abiertas

Como ya se mencionó anteriormente con respecto al lado izquierdo y derecho del dominio visto en la figura 5.1, se pudo resolver fácilmente mediante una expresión matemática adecuada como la ley de Snell, vista de la siguiente forma.

$$C^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (5.18)$$

donde:

C	Celeridad de la onda.	$[LT^{-1}]$
η	Superficie libre del agua, medida del nivel medio de referencia.	$[L]$
Q	Gasto.	$[L^3T^{-1}]$

5.2.6. Secuencia de cálculo

El modelo matemático de oleaje de refracción-difracción se basa en el desarrollo anterior para lo cual conviene hacer un repaso de los pasos necesarios para calcular la propagación del oleaje ver (Anexo 2). Se considera que t_0 es un número positivo pequeño cercano a cero, que $M-1$ es el número de celdas en la dirección x , $N-1$ es el número de celdas en la dirección y , y también que los valores de i comienzan en 2 y terminan en $M-1$ y los de j se inician con 3 y concluyen con M . Los pasos a seguir son:

- 1) Con los datos del oleaje por propagar y la batimetría se obtienen los parámetros iniciales de la onda, en los puntos de la malla para $j=1$ y $j=2$.
- 2) Se emplea la ley de Snell ec. (5.18) para calcular los componentes del gradiente de la función de fase y la altura de la ola, tanto en las orillas de la zona en estudio (con esto queda definidas las condiciones de oleaje en las fronteras) como en el interior de la zona (corresponden a los valores iniciales del proceso de relajación).
- 3) Se asigna a j el valor 2.
- 4) Para cada punto de la malla (con $i=2,3,\dots,M-1$ sobre la línea $y=(j+1)\Delta y$ se calculan los valores de $k_{x_i,j}^{(n+1)}$ y $k_{y_i,j+1}^{(n+1)}$ como se indicó en el inciso (5.2.2)
- 5) Cuando para cada punto de la malla sobre la línea $y=(j+1)\Delta y$, se tiene $|k_{x_i,j+1}^{(n+1)} - k_{x_i,j+1}^{(n)}| < t_0$, se continúa con el paso 7. De otro modo, se toma a n como $n+1$ y se va al paso 4.
- 6) Para cada punto de la malla sobre la línea $y=(j+1)\Delta y$, se obtiene $H_{i,j+1}^{(n+1)}$ y $|k_{i,j+1}^{(n+1)}|^2$. Cuando para cada uno de estos puntos $|H_{i,j+1}^{(n+1)} - H_{i,j+1}^{(n)}| < t_0$ y $|k_{i,j+1}^{(n+1)}|^2 - |k_{i,j+1}^{(n)}|^2 < t_0$ se va al paso 7. De otra manera, se regresa al paso 4.

- 7) Se asigna a j el valor de $j+1$. Si el nuevo valor de j es menor o igual al de j , se va al paso 4. De otro modo, se termina el procedimiento.

Cabe mencionar la dirección del oleaje ($\theta_{i,j+1}$) se determina a partir de la ec. (2.12) se tiene.

$$\theta_{i,j+1} = \arctan \frac{k_{y_{i,j+1}}}{k_{x_{i,j+1}}} \quad (5.18a)$$

5.2.7. Cálculo de la superficie libre

La superficie libre esta determinada en el Capítulo 3, ec. (3.98) que es una ecuación en dos dimensiones, expresada como sigue.

$$\eta = \frac{H_i}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{H_y}{2} \cos(kx - \omega t + \varepsilon) \quad (5.19)$$

5.2.8. Cálculo de velocidades

Para la obtención de las ecuaciones de movimiento de las velocidades del plano horizontal, donde la superficie libre esta localizado en $z = \eta_m(x, y)$ y el fondo en $z = -h(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_m}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho h} - \frac{1}{\rho h} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_m}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho h} - \frac{1}{\rho h} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \eta_m}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} \quad (5.22)$$

Las ecs. (5.20), (5.21) y (5.22) corresponden a las ecuaciones para aguas someras. Estas ecuaciones forman un sistema de tres ecuaciones, con tres variables desconocidas, las componentes de velocidad (u , v y η_m)

Donde

η_m	Variación de la superficie libre del agua debida a la marea.	[L]
g	Aceleración de la gravedad.	[LT^{-2}]
τ_{bx}	Esfuerzo cortante.	[FL^{-2}]
σ_{xx}	Esfuerzo radial.	[FL^{-1}]
ρ	Densidad del agua.	[$FT^2 L^{-4}$]
h	Profundidad.	[L]

Ejemplos y Validación

En la actualidad existen varios modelos que pueden ser empleados con o sin modificaciones para el estudio de oscilaciones portuarias. A continuación se mostrarán algunos resultados obtenidos, para observar el buen funcionamiento de nuestro modelo para después hacer una comparación con otro modelo y así validarla.

El primer ejemplo expuesto en este trabajo se hará en base a una batimetría recta, paralela y de pendiente suave, teniendo una profundidad máxima de -50 m, hasta llegar a la batimetría cero (línea de costa), con un dominio en el eje x igual a 2200 m y en el eje y de 1100 m, como se muestra en la figura (5.2). El periodo es de 9 s, con una altura de ola de 2 m.

Primero se probará con un ángulo de incidencia perpendicular a la línea de costa, es decir con un ángulo de 90°, en donde se observa una superficie libre que no cambia de dirección; posteriormente se probó con un ángulo de -40 y de 30 grados. En donde se observa como el frente de la ola va teniendo un cambio de dirección (ver figura (5.3)), donde tiende a hacerse paralelo a la costa, tal como se observa en la figura (4.5) mostrada en el Capítulo 4. También se pueden ver en la figura (5.4) las correspondientes alturas de ola, donde se observa como las olas van disminuyendo la altura conforme se acercan a la costa hasta llegar a cero.

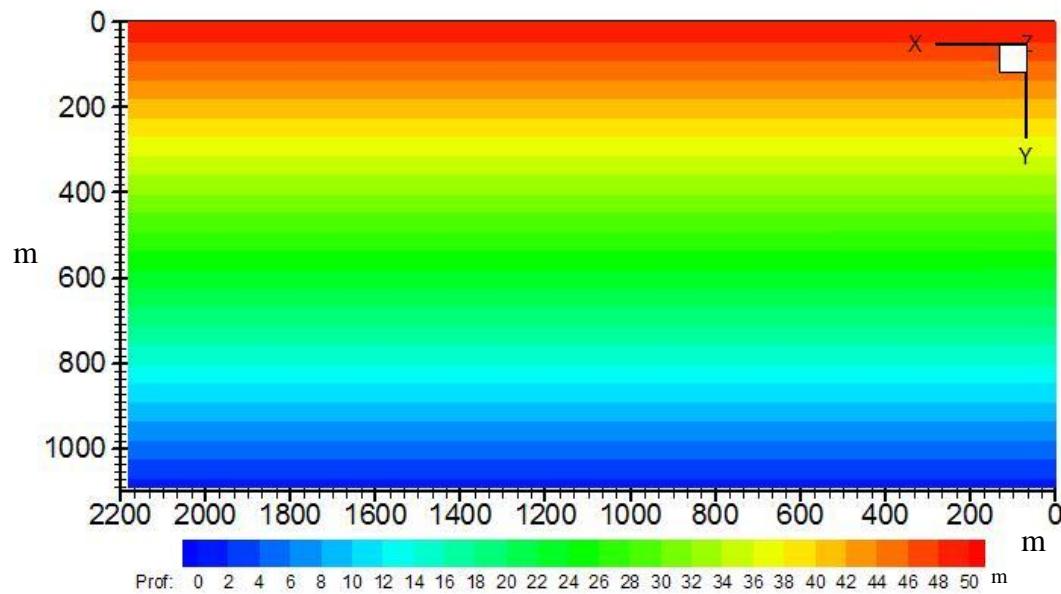


Figura 5.2 Batimetría de la zona de estudio.

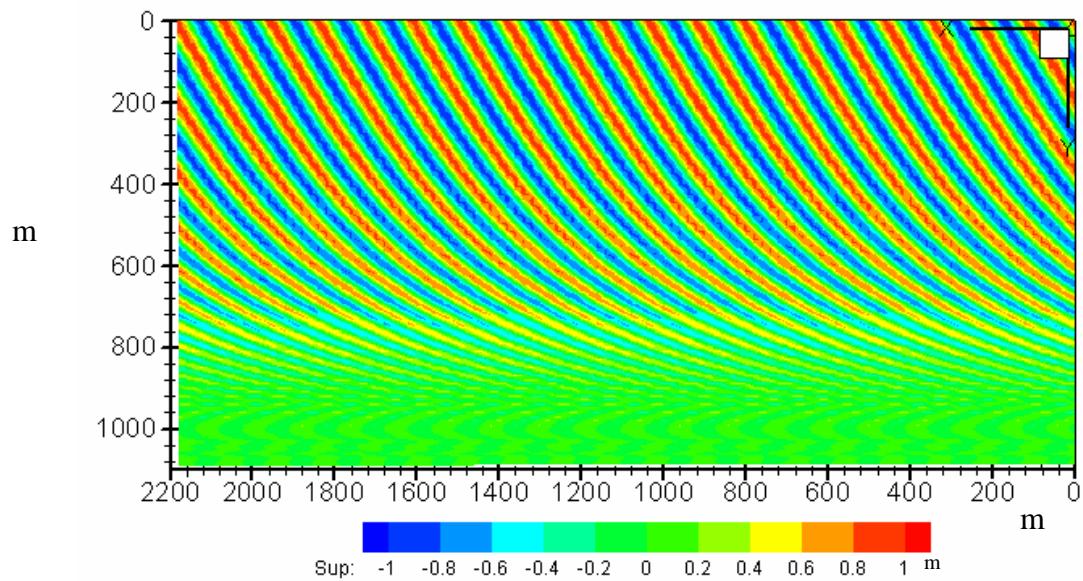


Figura 5.3 Propagación de frentes de ola, con ángulo de incidencia de 30° .

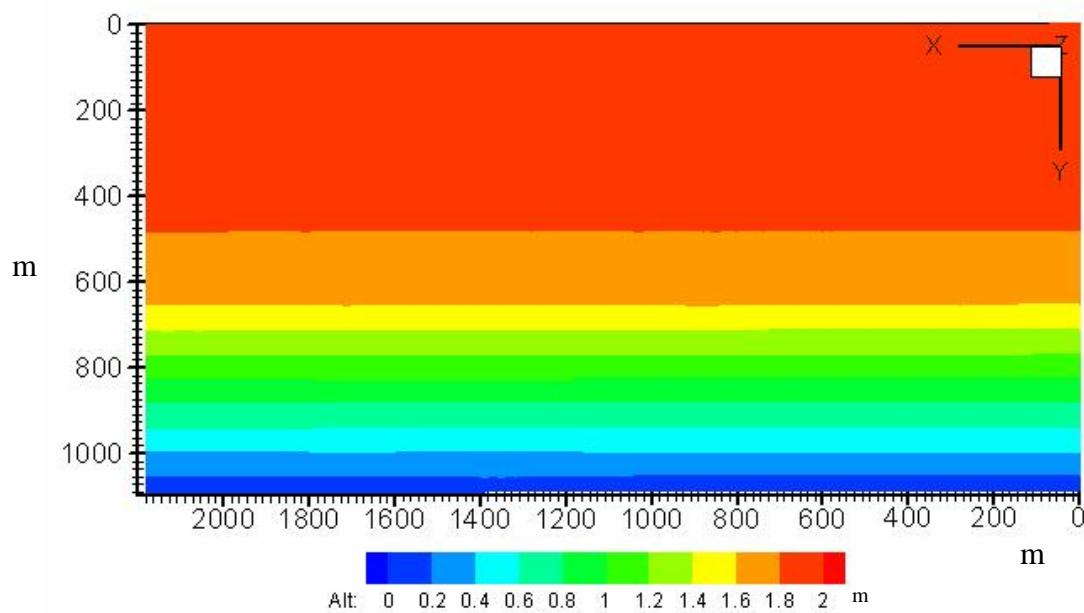


Figura 5.4 Alturas de ola conforme se acerca a la línea de costa

Ahora bien, se hace una batimetría un poco mas deformada, tal como se muestra en la figura (5.5) donde se dibuja una forma de la línea de playa mas acoplada a la realidad con sus líneas batimétricas, donde se observan los frentes de la ola como se van deformando a tal grado que tienden a tomar la forma de la batimetría como se muestra en la figura (5.6).

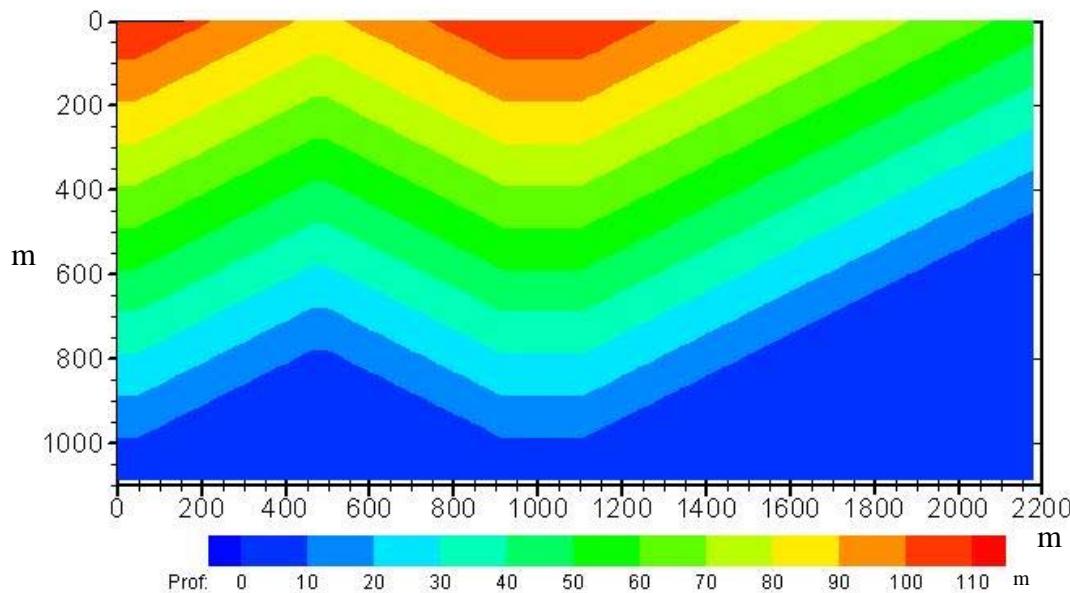


Figura 5.5 Batimetría de la zona de estudio.

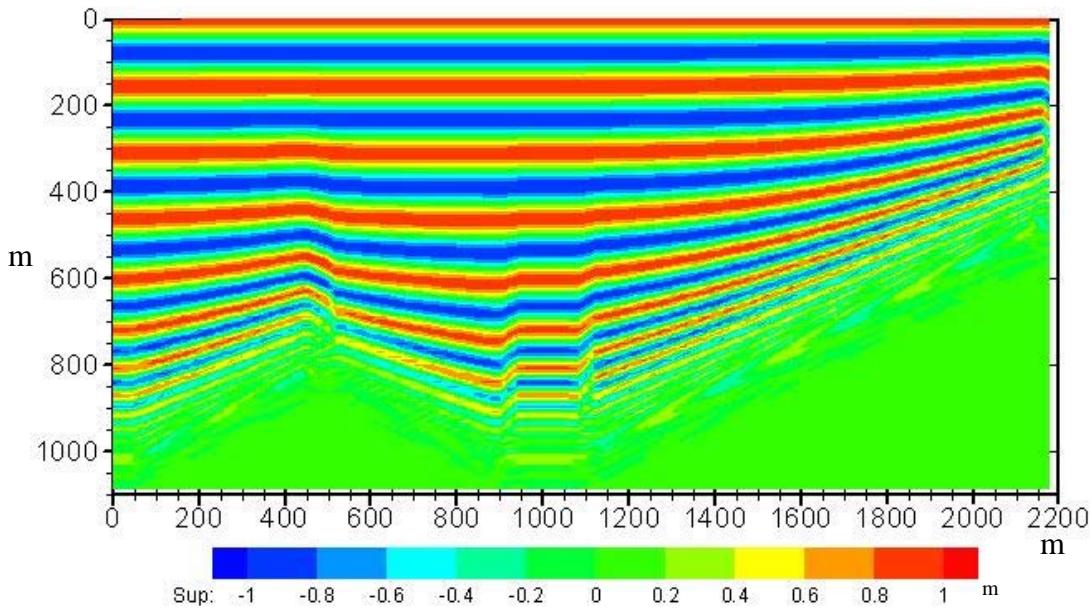


Figura 5.6 Propagación de frentes de ola, con ángulo de incidencia de 90°.

Este ejemplo se comprobó con otro modelo realizado en la UNAM, el cual tiene el mismo principio de la pendiente suave en donde se comparó la variación de la superficie libre, en donde se observa en la parte media una altura mayor donde se puede apreciar claramente una franja la cual se puede interpretar de forma negativa, ver figura (5.7) (Martínez, 2004).

En nuestro caso, vemos una propagación de la onda simétrica, por lo que, nos lleva a que el modelo desarrollado para este trabajo es adecuado para determinar la refracción de la ola.

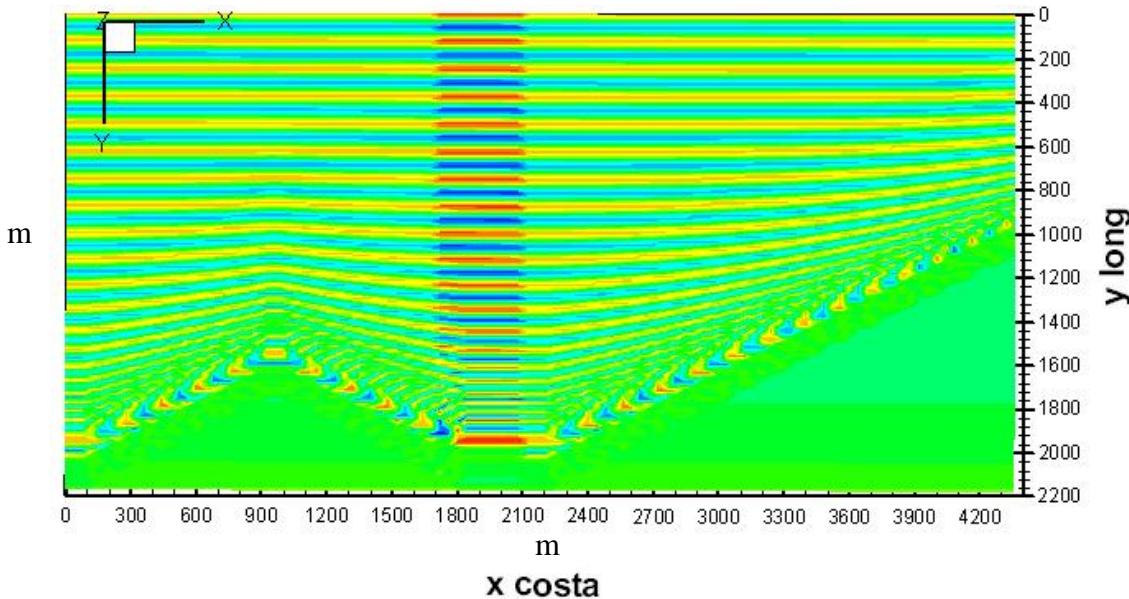


Figura 5.7 Propagación de frentes de ola, con ángulo de incidencia de 90°
(Martínez, 2004).

Ahora vemos como se comportan las alturas de ola para esta batimetría obteniendo los siguientes resultados como se ve en la figura (5.8); se observa como en la saliente hay un punto de concentración de la energía donde encontramos alturas de ola de hasta 3m y vemos que en la parte donde hay una entrante, se ve claramente como se disipa la energía en donde tenemos alturas menores a 2 m.

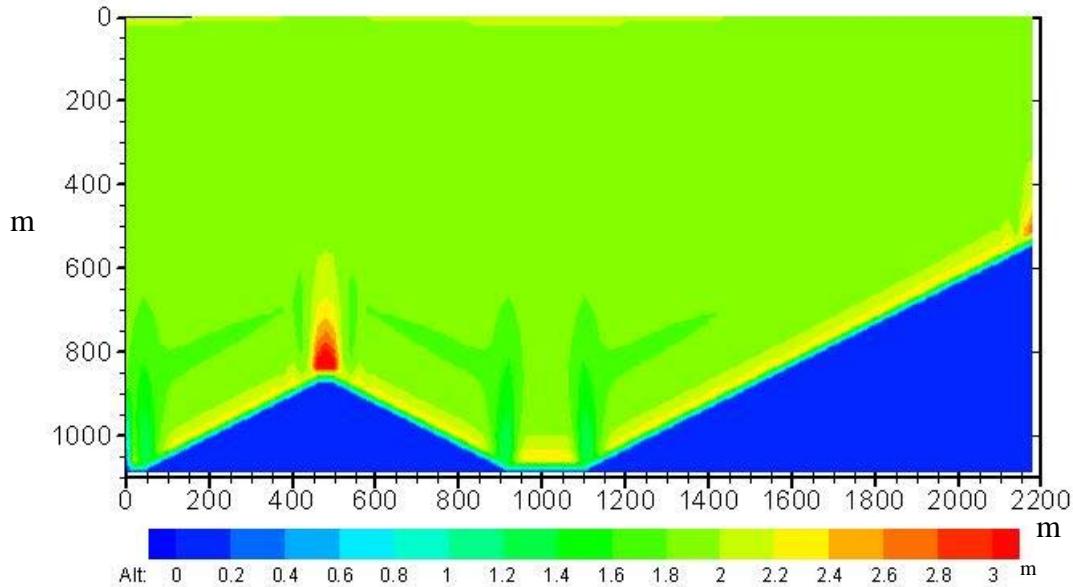


Figura 5.8 Alturas de ola conforme se acerca a la línea de costa

Haciendo la comparación de las altura de ola, no tienen ninguna relación con los resultados que se deberían de obtener, ver figura (5.9), por lo que, nuestro modelo se acerca mas con la realidad y los resultados obtenidos son mas acordes.

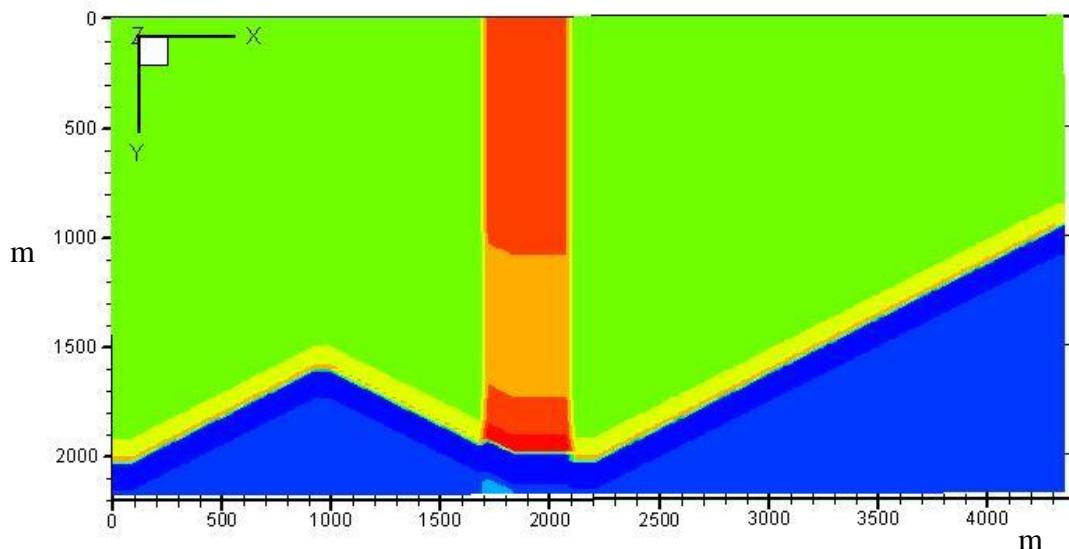


Figura 5.9 Alturas de ola conforme se acerca a la línea de costa
(Martínez, 2004).

En resumen, el modelo explícito permite estudiar los fenómenos de refracción y difracción presentando un computo rápido y un alcance aceptable pero limitado, esto al no considerar el fenómeno de reflexión sobre algún obstáculo debido al empleo del esquema explícito el cual presenta algunas imprecisiones en el cálculo de la superficie libre en celdas después de pasar dicho obstáculo.

Por tal motivo, en la sección 5.3 se procede a modificar el esquema de cálculo de las ecs (4.41) y (4.42) empleando un esquema implícito para el cálculo de las fases del oleaje en el plano (x,y) y para la superficie libre, obteniendo así sistemas tridiagonales y pentadiagonales respectivamente.

5.3. Modelo de oleaje: refracción, difracción y reflexión (método implícito)

Debido a la necesidad de modelar los tres fenómenos en conjunto, se hace una modificación al código inicial el cual se describe a continuación.

Partiendo de las ecuaciones para la fase del oleaje ec. (5.18), se tiene para la dirección x y para la dirección y las siguientes ecuaciones

$$C^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial Q_x}{\partial t} \quad (5.23)$$

$$C^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial Q_y}{\partial t} \quad (5.24)$$

donde:

C Celeridad de la onda. $[LT^{-1}]$

η Superficie libre del agua, medida del nivel medio de referencia. $[L]$

Q Gasto en la dirección correspondiente. $[L^3T^{-1}]$

Y de la variación de la superficie libre descrita en el capítulo 4 ec. (4.71), pero en función del gasto se tiene:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{n} \left[\frac{\partial}{\partial x} (nQ_x) + \frac{\partial}{\partial y} (nQ_y) \right] \quad (5.25)$$

donde:

C Celeridad de la onda. $[LT^{-1}]$

η Superficie libre del agua, medida del nivel medio de referencia. $[L]$

Q Gasto en la dirección correspondiente. $[L^3T^{-1}]$

n Factor de grupo. ec. (3.86)

Este tipo de ecuaciones tienen la ventaja de disponer de los valores de las razones del flujo Q_x y Q_y que permiten encontrar la dirección del oleaje y plantear la presencia de obstáculo de una forma sencilla.

5.3.1. Ecuaciones en diferencias finitas del modelo refracción-difracción-reflexión.

Para tener resultados con buena precisión se propone escribir las ecs. diferenciales (5.23 a 5.25) en diferencias finitas, de manera que para la derivada temporal, se use una diferencia de primer orden y para las derivadas espaciales, diferencias de cuarto orden (Fuentes, 1996).

La solución de estas ecuaciones diferenciales, se obtendrá por un esquema numérico donde el dominado error de discretización (diferencia entre la solución exacta de la ecuación diferencial y la solución exacta de la ecuación de diferencias utilizada para aproximar la ecuación diferencial) sea pequeña.

Ecuaciones para las razones de flujo

Se propone aproximar las derivadas parciales de la ec. (5.23) de la manera siguiente

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial Q_x}{\partial t} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^t = b_1 \left(\frac{1}{c_{i-1,j}^2} \frac{Q_{x,i-1,j+\frac{1}{2}}^{t+1} - Q_{x,i-1,j+\frac{1}{2}}^t}{\Delta t} \right) + b_2 \left(\frac{1}{c_{i,j}^2} \frac{Q_{x,i,j+\frac{1}{2}}^{t+1} - Q_{x,i,j+\frac{1}{2}}^t}{\Delta t} \right) + b_3 \left(\frac{1}{c_{i+1,j}^2} \frac{Q_{x,i+1,j+\frac{1}{2}}^{t+1} - Q_{x,i+1,j+\frac{1}{2}}^t}{\Delta t} \right) \quad (5.26)$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^t = \frac{a_1 \eta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^t + a_2 \eta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^t}{\Delta x} \quad (5.27)$$

donde:

los parámetros b_1, b_2, b_3, a_1 y a_2 , se determinan con la expansión en serie de Taylor de una función de 2 variables independientes hasta 5 términos (Fuentes, 1996). $b_1 = 1/24$; $b_2 = 11/22$; $b_3 = 1/24$; $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$

De modo que el esquema de diferencias finitas utilizado, quedó planteado de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{i-1,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x,i-1,j+\frac{1}{2}}^{t+1} + \frac{22}{c_{i,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x,i,j+\frac{1}{2}}^{t+1} + \frac{1}{c_{i+1,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x,i+1,j+\frac{1}{2}}^{t+1} = \\ \frac{1}{c_{i-1,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x,i-1,j+\frac{1}{2}}^t + \frac{22}{c_{i,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x,i,j+\frac{1}{2}}^{t+1} + \frac{1}{c_{i+1,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x,i+1,j+\frac{1}{2}}^t - \frac{24\Delta t}{\Delta x} \left(\eta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^t - \eta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^t \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

El primero ($i = 2$) y el último ($i = M$) valor de Q_x en la línea $y = \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta s$ son obtenidos con una ecuación distinta a la ec. (5.28) porque antes y después de estos valores no está definido $Q_{x_{1,j+\frac{1}{2}}}$ ni $Q_{x_{M+1,j+\frac{1}{2}}}$. Para ellos se propone utilizar las ecuaciones de diferencias finitas siguientes.

$$Q_{x_{1,j+\frac{1}{2}}}^{t+1} = Q_{x_{1,j+\frac{1}{2}}}^t - \frac{c_{1,j+\frac{1}{2}}^2 \Delta t}{\Delta x} \left(\eta_{\frac{5}{2},j+\frac{1}{2}}^t - \eta_{\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^t \right) \quad \text{Para } i = 2 \quad (5.29)$$

$$Q_{x_{M,j+\frac{1}{2}}}^{t+1} = Q_{x_{M,j+\frac{1}{2}}}^t - \frac{c_{m,j+\frac{1}{2}}^2 \Delta t}{\Delta x} \left(\eta_{m+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^t - \eta_{m-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^t \right) \quad \text{Para } i = M \quad (5.30)$$

La aplicación de la ec. (5.28) para cada línea de la malla $y = (j + 1/2)\Delta s$ para $i = 2$ a M de lugar a un sistema de ecuaciones lineales tridiagonales $Q_{x_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^{t+1}$, $Q_{x_i,j+\frac{1}{2}}^{t+1}$ y $Q_{x_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{t+1}$.

Los valores $\eta_{\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^t$ y $\eta_{M+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^t$ son determinados por medio de las condiciones de frontera.

Procediendo de manera similar para la ec. (5.24) se encuentra la ecuación diferencial para la dirección en y

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_{i+\frac{1}{2},j-1}^2} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j-1}}^{t+1} + \frac{22}{c_{i+\frac{1}{2},j}^2} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{t+1} + \frac{1}{c_{i+\frac{1}{2},j+1}^2} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{t+1} = \\ & \frac{1}{c_{i+\frac{1}{2},j-1}^2} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j-1}}^t + \frac{22}{c_{i+\frac{1}{2},j}^2} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^t + \frac{1}{c_{i+\frac{1}{2},j+1}^2} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j+1}}^t - \frac{24\Delta t}{\Delta y} \left(\eta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^t - \eta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^t \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

El primero ($j = 2$) y el último ($j = N$) valor de Q_y en la línea $x = \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta s$ son obtenidos con una ecuación.

$$Q_{y_{i+\frac{1}{2},1}}^{t+1} = Q_{y_{i+\frac{1}{2},1}}^t - \frac{c_{i+\frac{1}{2},1}^2 \Delta t}{\Delta y} \left(\eta_{i+\frac{1}{2},\frac{5}{2}}^t - \eta_{i+\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^t \right) \quad \text{Para } j = 2 \quad (5.32)$$

$$Q_{y_{i+\frac{1}{2},N}}^{t+1} = Q_{y_{i+\frac{1}{2},N}}^t - \frac{c_{i+\frac{1}{2},N}^2 \Delta t}{\Delta y} \left(\eta_{i+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}}^t - \eta_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^t \right) \quad \text{Para } j = N \quad (5.33)$$

La aplicación de la ec. (5.31) se establece para cada sección $y = j\Delta s$ para $i = 2$ a N sobre la línea $x = (i + 1/2)\Delta s$, con lo que se establece un sistema de ecuaciones tridiagonal con incógnitas $Q_{y_{i+1/2},j-1}^{t+1}$, $Q_{y_{i+1/2},j}^{t+1}$ y $Q_{y_{i+1/2},j+1}^{t+1}$. También en este caso $\eta_{i+1/2,3/2}^t$ y $\eta_{i+1/2,N+1/2}^t$ se calculan a partir de las condiciones de frontera.

Para la ecuación diferencial parcial (5.25) también se desarrolló una ecuación de diferencias, donde el error de truncado es pequeño. Las aproximaciones a las derivadas parciales son de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(n\eta)}{\partial t} \right)_{i,j}^t &= b_1 n_{i-1/2,j} \frac{\eta_{i-1/2,j}^{t+1} - \eta_{i-1/2,j}^t}{\Delta t} + b_2 n_{i+1/2,j} \frac{\eta_{i+1/2,j}^{t+1} - \eta_{i+1/2,j}^t}{\Delta t} + b_3 n_{i+3/2,j} \frac{\eta_{i+3/2,j}^{t+1} - \eta_{i+3/2,j}^t}{\Delta t} + \\ &+ b_4 n_{i,j-1/2} \frac{\eta_{i,j-1/2}^{t+1} - \eta_{i,j-1/2}^t}{\Delta t} + b_5 n_{i,j+1/2} \frac{\eta_{i,j+1/2}^{t+1} - \eta_{i,j+1/2}^t}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(nQ_x)}{\partial x} \right)_{i,j}^t &= \frac{1}{\Delta x} \left(a_1 (nQ_x)_{i+1,j-1/2} + a_2 (nQ_x)_{i,j-1/2} + a_3 (nQ_x)_{i+1,j} + a_4 (nQ_x)_{i,j} \right. \\ &\left. + a_5 (nQ_x)_{i+1,j+3/2} + a_6 (nQ_x)_{i,j+3/2} \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(nQ_y)}{\partial y} \right)_{i,j}^t &= \frac{1}{\Delta y} \left(d_1 (nQ_y)_{i-1,j+1} + d_2 (nQ_y)_{i-1/2,j} + d_3 (nQ_y)_{i,j+1} + d_4 (nQ_y)_{i,j} \right. \\ &\left. + d_5 (nQ_y)_{i+3/2,j+1} + d_6 (nQ_y)_{i+3/2,j} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Los parámetros $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ y d_6 que se pueden obtener en la tabla (5.31), que se determinan con la expansión en serie de Taylor de una función de 2 variables independientes hasta 5 términos (Fuentes, 1996).

Tabla 5.1 Parámetros obtenidos mediante series de Taylor

	K					
	1	2	3	4	5	6
b_k	1/24	5/6	1/24	1/24	1/24	-----
a_k	1/24	-1/24	11/12	-11/12	1/24	1/24
d_k	1/24	-1/24	11/12	-11/12	1/24	1/24

Tomando en cuenta los valores de los parámetros, la ecuación de diferencias correspondientes a la expresión (5.25) queda de la siguiente manera, ec. (5.37)

$$\begin{aligned}
 & n_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \eta^{t+1} + n_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} \eta^{t+1} + n_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \eta^{t+1} + n_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} \eta^{t+1} + 20n_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \eta^{t+1} = \\
 & n_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \eta^t + n_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} \eta^t + n_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \eta^t + n_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} \eta^t + 20n_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \eta^t - \\
 & \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left(n_{i+1, j-\frac{1}{2}} Q_{x, i+1, j-\frac{1}{2}}^{t+1} - n_{i, j-\frac{1}{2}} Q_{x, i, j-\frac{1}{2}}^{t+1} + n_{i+1, j+\frac{3}{2}} Q_{x, i+1, j+\frac{3}{2}}^{t+1} - n_{i, j+\frac{3}{2}} Q_{x, i, j+\frac{3}{2}}^{t+1} \right) - \\
 & \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right) \left(n_{i-\frac{1}{2}, j+1} Q_{y, i-\frac{1}{2}, j+1}^{t+1} - n_{i-\frac{1}{2}, j} Q_{y, i-\frac{1}{2}, j}^{t+1} + n_{i+\frac{3}{2}, j+1} Q_{y, i+\frac{3}{2}, j+1}^{t+1} - n_{i+\frac{3}{2}, j} Q_{y, i+\frac{3}{2}, j}^{t+1} \right) - \\
 & 22 \left(n_{i+1, j+\frac{1}{2}} Q_{x, i+1, j+\frac{1}{2}}^{t+1} - n_{i, j+\frac{1}{2}} Q_{x, i, j+\frac{1}{2}}^{t+1} n_{i+\frac{1}{2}, j+1} Q_{y, i+\frac{1}{2}, j+1}^{t+1} - n_{i+\frac{1}{2}, j} Q_{y, i+\frac{1}{2}, j}^{t+1} \right)
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

En este caso la aplicación de la ec. (5.37) en los puntos interiores de la malla en el dominio de interés, de lugar a un sistema con cinco coeficientes distintos de cero en cada una de las ecuaciones lineales que lo forman, que tiene como incógnitas a las elevaciones $\eta_{i-\frac{1}{2}, j}^{t+1}, \eta_{i+\frac{3}{2}, j}^{t+1}, \eta_{i-j-\frac{1}{2}}^{t+1}, \eta_{i, j+\frac{3}{2}}^{t+1}$ y $\eta_{i+\frac{1}{2}, j}^{t+1}$

Las ecs. (5.28), (5.31) y (5.37) muestran que, si se conocen las condiciones de η, Q_x y Q_y , en un instante t , puede calcularse sus valores correspondientes en el instante $t + \Delta t$. De esta manera, se dispone de un método que permite la determinación sucesiva de la elevación de la superficie libre η y las razones de flujo Q_x y Q_y en cada uno de los puntos de la malla que se extiende dentro de una zona de interés. Esto puede ser posible mediante una condición inicial (t_0) en donde η^t, Q_x^t y Q_y^t sean iguales a cero, salvo en la frontera donde incide el oleaje, ya que en ella los valores de la ola son conocidos.

5.3.2. Condiciones de frontera.

Para obtener el oleaje en las orillas de la región en estudio o en los obstáculos que existan en esta región, es necesario tomar en cuenta las condiciones de frontera. Para ello, se considera un pared, con un coeficiente de reflexión K_R , cuyo valor está entre 0 y 1. Lo anterior, se aplica en todo el perímetro y en los obstáculos.

Para la obtención de la elevación de la superficie libre en los extremos del rompeolas se tienen las siguientes ecuaciones.

$$\eta(L, t + \Delta t) = (1 + K_R) * \eta \left(L - \frac{C \Delta t}{\Delta x}, t \right) - K_L * \eta(L, t - \Delta t) \quad \text{para el extremo derecho} \tag{5.38}$$

$$\eta(0, t + \Delta t) = (1 + K_R) * \eta\left(\frac{C\Delta t}{\Delta x}, t\right) - K_R * \eta(0, t - \Delta t) \quad \text{para el extremo izquierdo} \quad (5.39)$$

donde

η	Superficie libre del agua, medida del nivel medio de referencia	[L]
t	Variación en el tiempo	[T]
C	Celeridad de la onda	[LT ⁻¹]
K_R	Coeficiente de reflexión	
L	Longitud de la onda en aguas intermedias	[L]

Para una onda cuasi-oscilatoria resulta de la superposición de una ola incidente con altura (H_i) y una onda viajando en sentido opuesto con una altura menor (H_r). Esta reducción en la altura de la ola y el desfase (ε), entre incidente y reflejada están asociados. Dada por la siguiente expresión, expuesta en el capítulo 3. ec. (3.98). Que también puede ser escrita de la siguiente forma

$$\eta(0, t + \Delta t) = A \cos(k_x x - \omega(t + \Delta t)) + A \cos(k_x x - \omega(t - \Delta t)) + \eta(\lambda \Delta y, t) \quad (5.40)$$

En la expresión anterior, queda considerado que el oleaje reflejado saldrá de la región en estudio. Esto es de importancia porque se evita que en esta frontera se refleje y con esto altere al oleaje incidente.

Segundo caso Difracción – Reflexión.

Para poder observar estos fenómenos y validarlos nos remontaremos al Capítulo 4, donde describimos la forma en como se calcula y como se representa gráficamente estos dos fenómenos.

El fenómeno que afecta la distribución de la energía detrás de un obstáculo es la difracción. Esta puede ocurrir en el extremo de un rompeolas o a la entrada a un recinto formado por dos rompeolas o la presencia de una isla. Como se ve claramente en la figura (4.6)

Para la reflexión, que es cuando un oleaje no rompe incide sobre una estructura o acantilado, no hay impacto y por ello una parte de la energía es reflejada y la otra se transmite al interior de la estructura (ver figura 4.11), esto depende de las condiciones de frontera que se le dé a la estructura. Para este caso se supone que es impermeable y recta.

Ejemplos y Validación

El dominio es idealizado, en forma de un cuadrado, con dimensiones de 1000 m de ancho por 1000 m de longitud, con una profundidad de 10 metros en todo el dominio, se inicializa un frente de ola con una altura de 3 m y con un periodo de 8 seg. Se coloca un rompeolas, como se muestra en la figura (5.10); se propone que es una estructura impermeable con dimensiones de 100 m de ancho y 600 m de largo el cual se encuentra paralelo a la costa.

Una vez que se inicializó el modelo con el frente de la ola, se observa como se propaga el frente de la ola como se muestra en la figura (5.11), donde lleva un tiempo de 49 segundos, que es donde el frente de la ola choca con la estructura, por lo que empieza a modificarse.

Al avanzar en el tiempo el frente de la ola, choca con la estructura y sufre dos fenómenos que analizaremos en la figura (5.12): en primer término, el primero que se muestra es el de reflexión, ya que al impactar el frente de la ola, éste se regresa con la misma intensidad con la que llegó ya que no existe una disipación de la energía, debido a que el obstáculo es impermeable y vertical, por lo cual no deja pasar la energía de la ola, generando una reflexión total como se describió en el Capítulo 4.

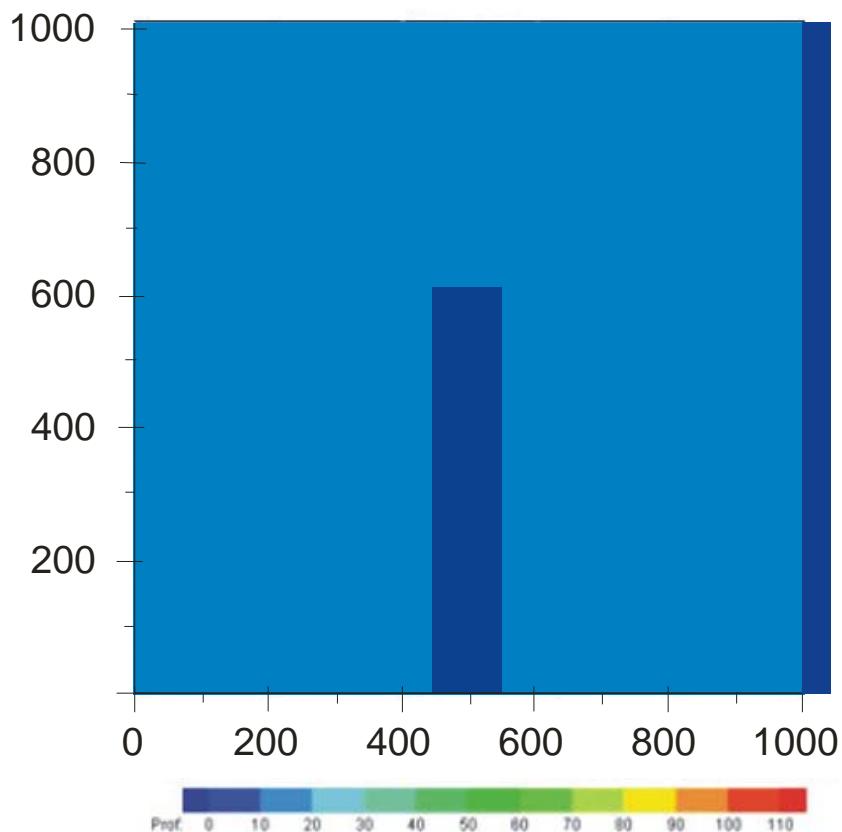


Figura 5.10 Dominio idealizado.

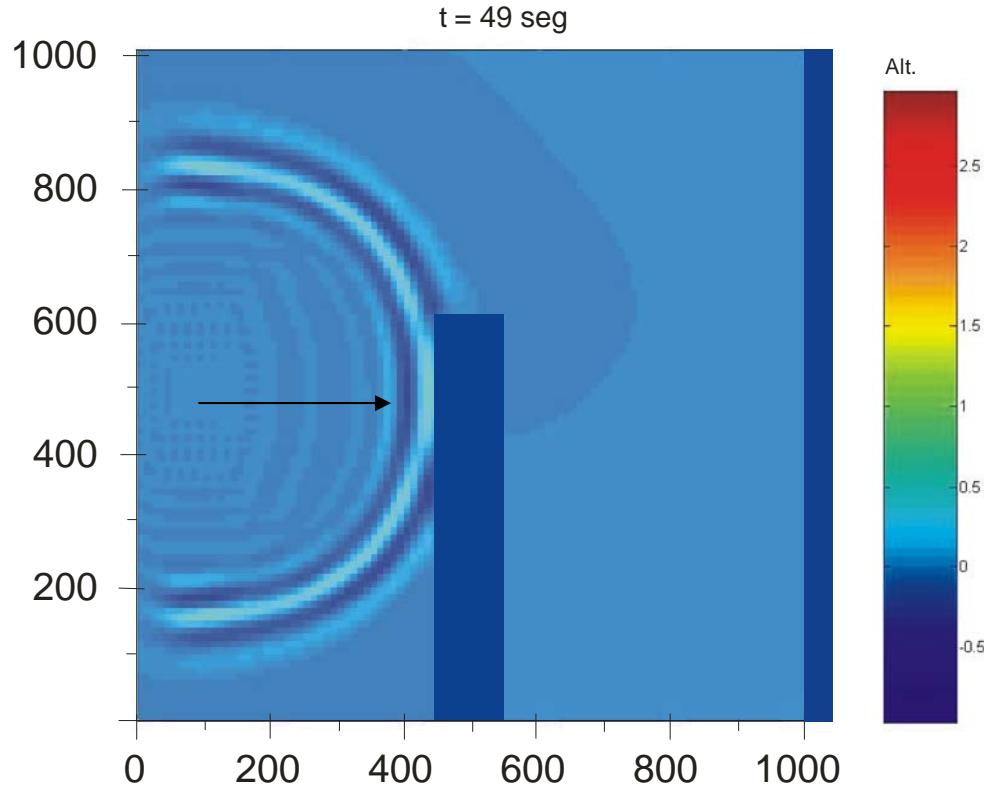


Figura 5.11 Propagación del frente de ola. $t = 49$ seg.

El segundo fenómeno que se puede ver claramente en la figura (5.12) es el de difracción, llamado en la figura (4.6) diagrama de difracción en el extremo de un obstáculo. Este fenómeno se aprecia muy bien, cuando han transcurrido 88 segundos, que se considera un tiempo en donde ya ha pasado el frente de la ola y se dibujan bien los semicírculos formados debido al obstáculo. También se puede ver en el Capítulo 4 en la figura (4.7).

Para apreciar mejor este fenómeno y validar el modelo se hace un traslape de la figura (4.6) y la figura (5.12), donde se muestran los frentes de la ola, que son muy parecidos, por lo que el modelo de oleaje describe el fenómeno de reflexión y difracción del oleaje adecuadamente, ver figura (5.13). Debido a la dirección del oleaje se gira un poco la figura (4.6) generando una aproximación aceptable.

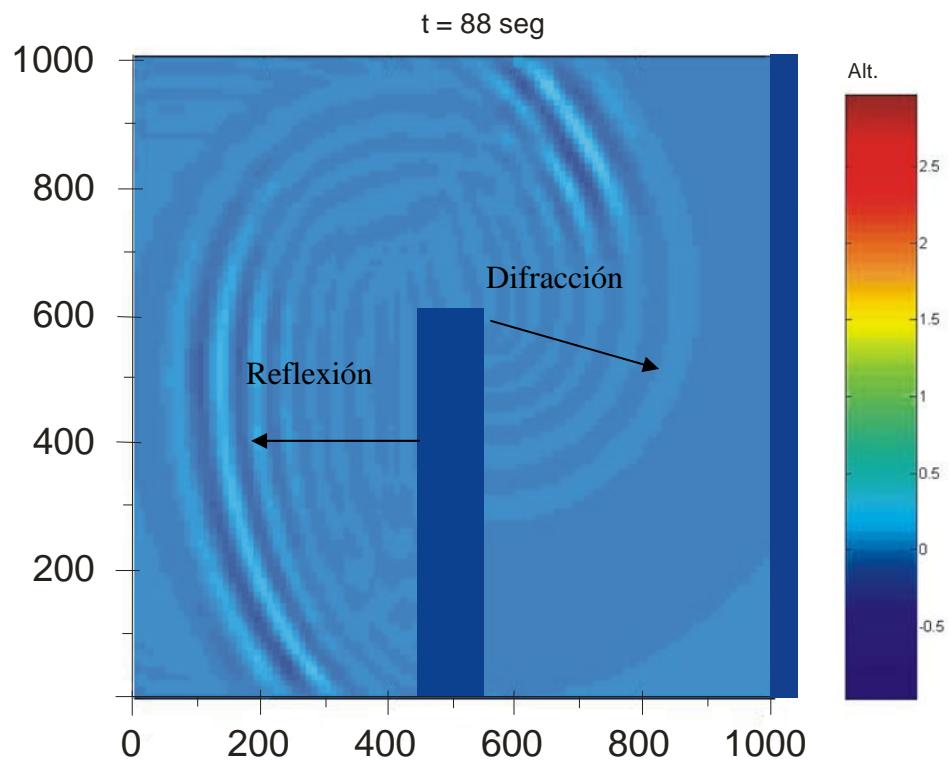


Figura 5.12 Propagación del frente de ola. $t = 88$ seg.

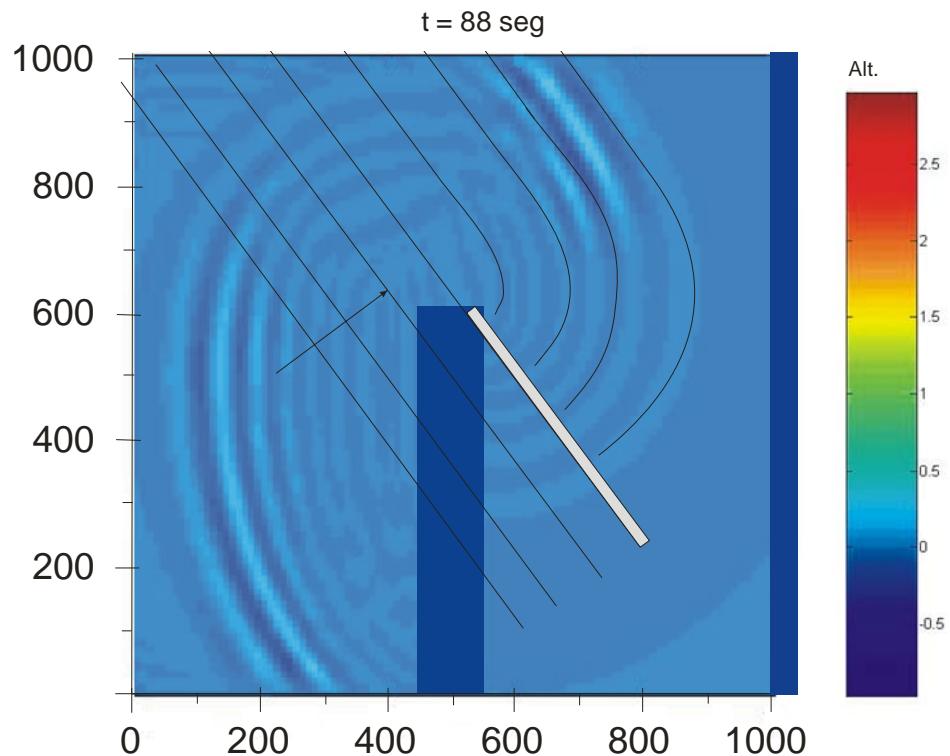


Figura 5.13 Traslape del modelo con lo expuesto en la teoría.

Ahora se realizará el diagrama de difracción en la entrada entre dos obstáculos. Se consideran las mismas condiciones que en el ejemplo anterior.

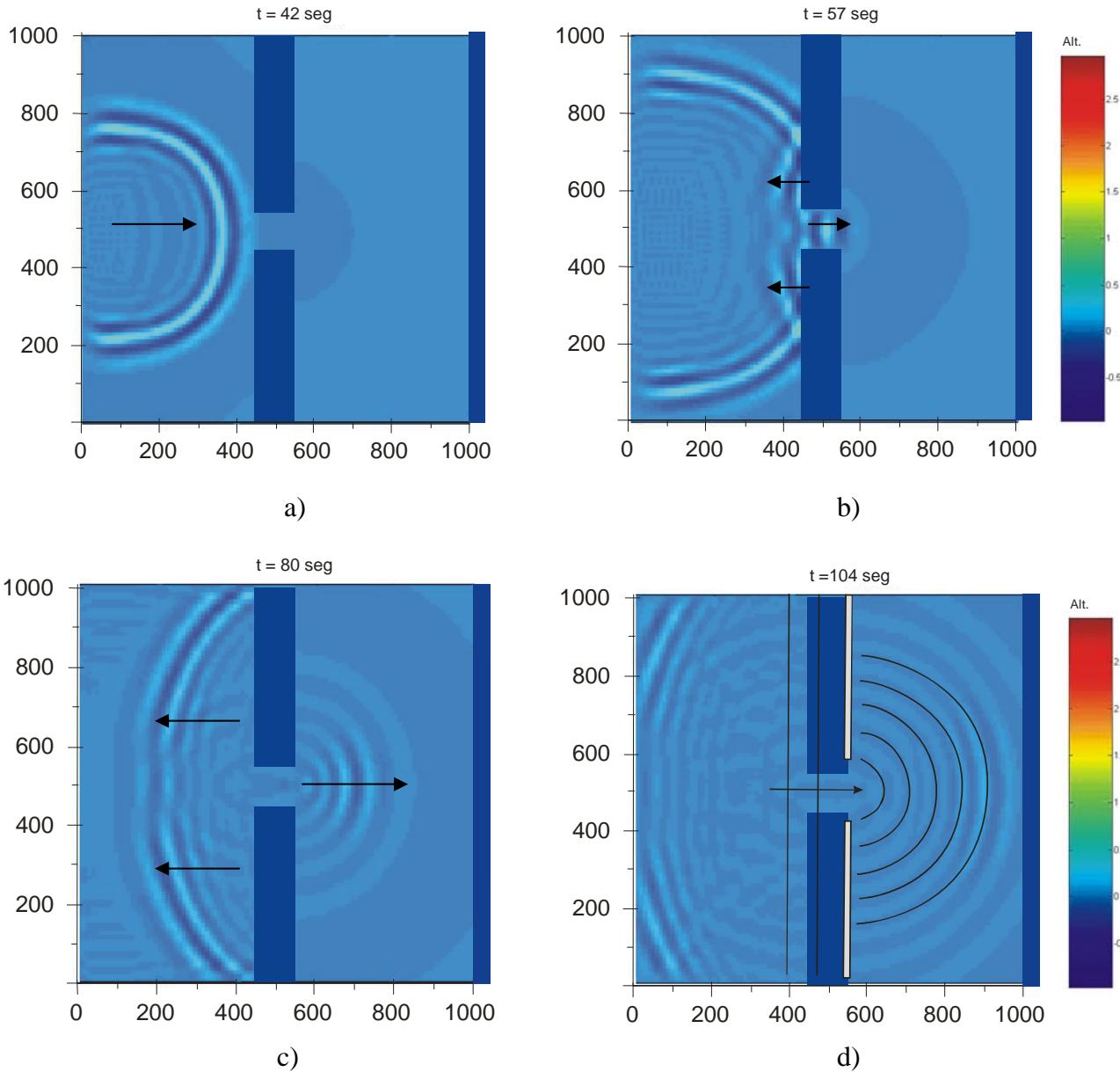


Figura 5.14 Propagación de la onda entre dos obstáculos.

Se puede ver en la figura (5.14a) como se propaga la onda antes de chocar con la estructura impermeable y horizontal. Después en la figura (5.14b) al chocar la ola en la estructura una parte de la ola se refleja, regresando con la misma intensidad y una pequeña parte pasa entre los obstáculos generando un nuevo frente que avanza. En la figura (5.14c) se ve claramente como se difracta la ola dibujando semicírculos y en la parte donde se refleja los frentes de la ola regresan donde iniciaron. Por ultimo en la figura (5.15d) se junta lo teórico (ver figura 4.6) con lo que nos da en el modelo dando aproximaciones similares.

El siguiente ejemplo que vamos a analizar es en un obstáculo paralelo a la costa, que es el que se muestra en la figura (4.6a) en donde se tendrá que ver muy similar a nuestro modelo, en seguida se presentan las imágenes de nuestro modelo.

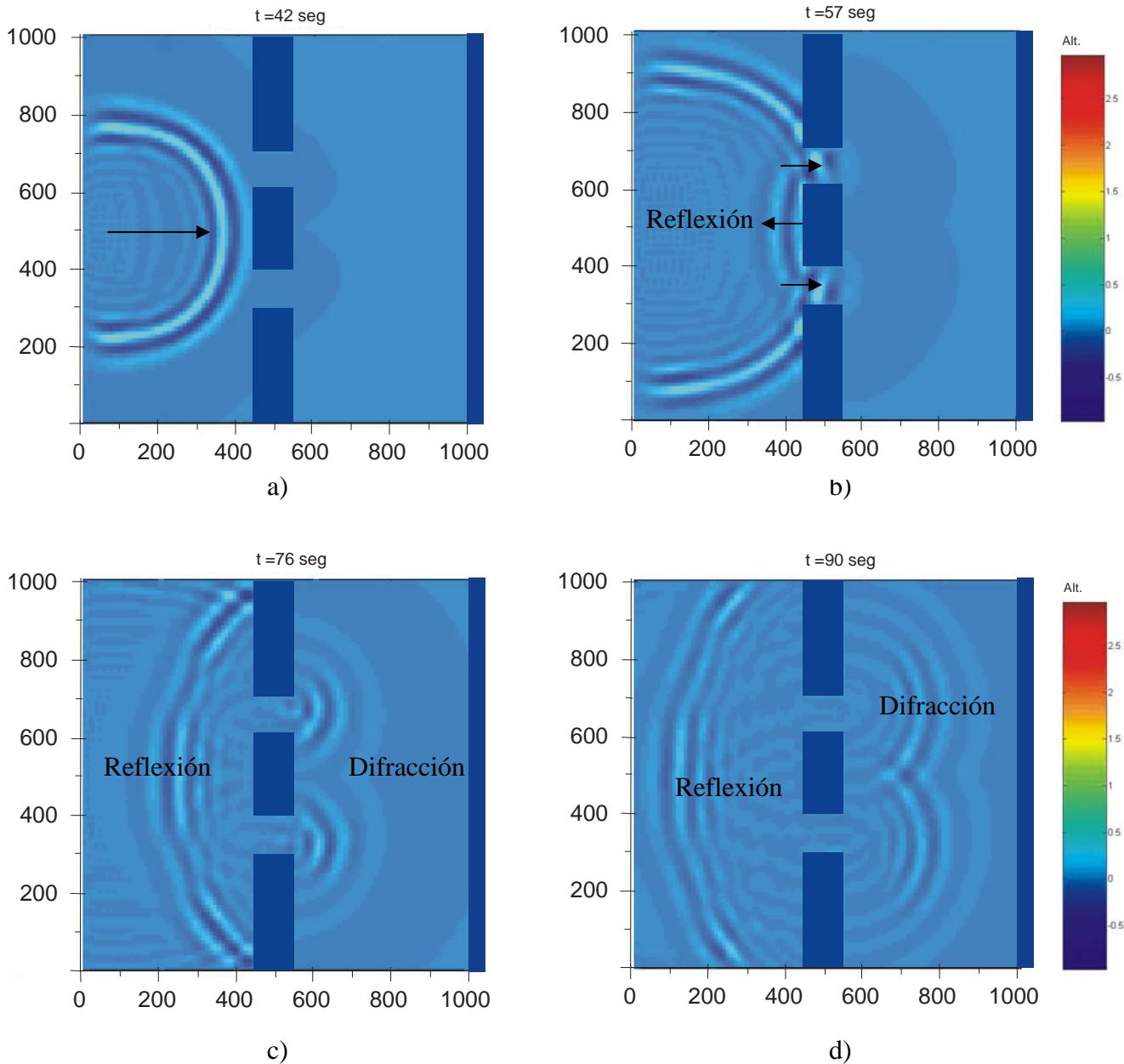


Figura 5.15 Propagación de la onda en un obstáculo paralelo a la costa.

Como vemos, los ejemplos demuestran que nuestro modelo con un esquema implícito trabaja adecuadamente los fenómenos de refracción, difracción, reflexión y rompiente. Como se observa desde la figura (5.3) a la figura (5.14) presentada anteriormente.

Una vez demostrado lo anterior, que esta dentro de nuestro objetivo principal del trabajo, que es realizar un modelo matemático que simule los fenómenos que modifican el oleaje, se da por terminada esta parte del trabajo, dando paso al ensamble del Modelo Numérico de los Fenómenos que Modifican el Oleaje y el Modelo Hidrodinámico de Corrientes, para después aplicarlo a las Obras de Protección de la Central Nucleoeléctrica Laguna Verde.

Para tal efecto, tenemos que describir la zona de estudio y analizar el estudio que realizó Campos (2006), para comparar el estudio realizado por él con la dispersión de la pluma térmica sin considerar oleaje y ver que sucede al considerar el oleaje, esto con la finalidad de ver si el oleaje es un factor que modifique la temperatura dentro de la zona protegida por las estructuras de protección, además que se consideran los fenómenos que modifican el oleaje y ver si existe la variación de la temperatura como se explico en el capítulo 1, mismo que se describe mas a fondo en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 6

ÁREA DE ESTUDIO, CENTRAL NUCLEOELÉCTRICA LAGUNA VERDE

6.1. Antecedentes

Como se menciona en los objetivos de este trabajo, se desarrolla el mismo escenario trabajado por Campos (2006), pero considerando los fenómenos producidos por el oleaje, para demostrar que es un factor que induce una variación de la temperatura dentro de la zona protegida. Asimismo se incluyen también los efectos termodinámicos producidos en la interacción océano-atmósfera, particularmente los efectos de radiación de onda larga y corta. En la figura 6.1a, se muestra una grafica con los registros de temperatura medida dentro del recinto o zona protegida por las escolleras, como puede verse los registros muestran un comportamiento totalmente irregular alrededor de los 30 °C; en la figura 6.1b se muestran los resultados obtenidos por Campos (2006), la cual muestra un comportamiento regular predominando el valor de 30 °C. La justificación de esta diferencia hace pensar en la consideración de los efectos asociados a los fenómenos del oleaje y a los efectos termodinámicos mencionados anteriormente.

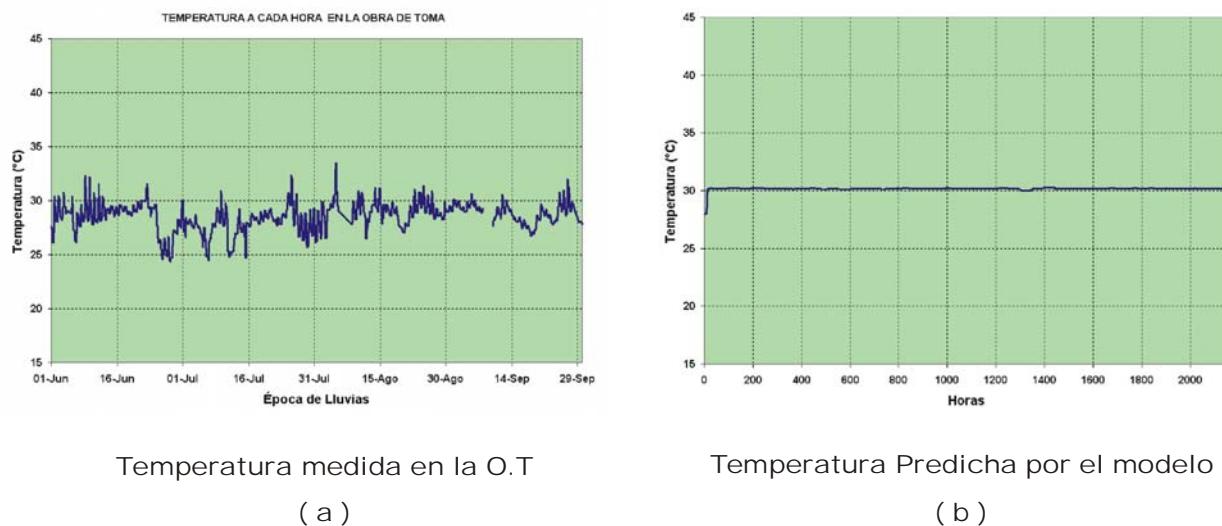


Figura 6.1 Variación de la temperatura en la obra de toma, para época de lluvias.

6.2. Información Necesaria

Los principales componentes de un reactor nuclear son: un núcleo compuesto básicamente por el combustible, el moderador y el refrigerante; un sistema de control y seguridad para regular el ritmo de liberación de energía; un contenedor hermético, dentro del cual se encuentra el material nuclear, que es un blindaje biológico para la protección de los trabajadores; un sistema de extracción de energía o de enfriamiento para transportar el calor producido como se puede ver en la figura (6.2) que representa las principales partes antes mencionadas . (Campos, 2006)

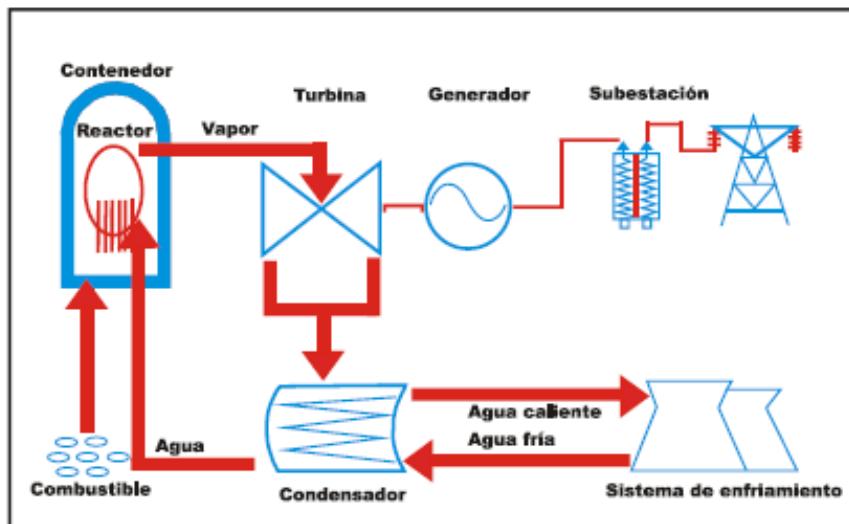


Figura 6.2 Esquema de una Central Nucleoeléctrica.

6.2.1. Aspectos Geográficos

En nuestro país sólo se cuenta con una Central Nucleoeléctrica, la cual se encuentra ubicada sobre la costa del Golfo de México en el Km. 42.5 de la carretera federal Cardel-Nautla, en la localidad denominada Punta Limón municipio de Alto Lucero, Estado de Veracruz, cuenta con un área de 370 has. Geográficamente situada a 60 km, al Noreste de la ciudad de Xalapa, 70 km al Noroeste del Puerto de Veracruz y a 290 km al Noreste de la Ciudad de México. La CNLV, se localiza en la costa Nororiental del Estado de Veracruz, México, en los $19^{\circ}43'30''$ N y los $96^{\circ}43'09''$ W, sobre la costa del Golfo de México (ver figura 6.3).

Topográficamente el sitio es plano, limitado al Este por el Golfo de México y al Oeste por montañas de baja elevación, de 500 m aproximadamente en los primeros 5 kilómetros de la costa y elevaciones de alrededor de 1,400 m a 60 kms de la misma.

La descarga del agua del sistema de enfriamiento de esta central se realiza a través de un canal, el cual conduce un gasto de $63 \text{ m}^3/\text{s}$ con una velocidad media aproximada de 1.4 m/seg., el canal desemboca al mar. Es muy importante llevar a cabo campañas de medición de la temperatura con el fin de conocer el efecto que la descarga del sistema de enfriamiento tiene en el medio receptor, además de que el buen funcionamiento de la central nucleoeléctrica depende en gran parte de la temperatura que entra por su obra de toma. Sin embargo dichas campañas de medición requieren de un alto costo debido al equipo y personal necesario para su ejecución. Sin duda alguna la base de datos experimentales son de vital importancia; sin embargo, se puede combinar estas con herramientas que nos permitan pronosticar posibles escenarios, todo esto con un menor costo económico, ya que en un modelo matemático que, si es correctamente diseñado, simulará el comportamiento del fenómeno bajo las condiciones experimentadas. Usado con discreción y una correcta apreciación de sus limitaciones, el modelo es una herramienta útil en el proceso de análisis y diseño, permitiéndole explorar soluciones, comparar opciones e identificar la solución óptima al problema.

La CNLV cuenta con 2 unidades generadoras de 682.5 MW eléctricos cada una. El sistema de enfriamiento de la CNLV es de tipo abierto, actualmente su obra de toma es superficial la cual cuenta con dos escolleras figura (6.4); esta obra de toma presenta serios problemas de azolve y de recirculación de agua caliente, motivo por el cual se construirá una obra de toma submarina, misma que suministrará un gasto de $66 \text{ m}^3/\text{s}$ para enfriar los condensadores, $3 \text{ m}^3/\text{s}$, más que lo que alguna vez la toma superficial suministró. Dicha toma se situará en la batimétrica -12.

El gasto de suministro, del sistema de enfriamiento, que pasa a través de los condensadores se descarga a la Laguna Salada, de la cual mediante un canal se conduce y descarga al mar, dicho gasto va con un incremento de temperatura de 8 a 10 °C .



Figura 6.3 Localización geográfica de la CNLV



Figura 6.4 Obra de toma superficial, de la CNLV.

6.2.2. Aspectos meteorológicos

El clima del área es semitropical con una temperatura media anual de 25.4°C, con frentes de aire polar durante el invierno y el inicio de la primavera, mientras que durante el verano (de junio a septiembre), se presentan perturbaciones tropicales frecuentes. Se presentan vientos reinantes al norte, noreste y vientos dominantes con direcciones norte 31 km/hr. Estas son las direcciones con mayor interés para nuestro trabajo ya que son las que generan oleaje con mayor altura de ola.

En el sitio de interés, no se cuenta con información meteorológica reciente, por tal motivo se vio en la necesidad de interpolar la información disponible de otro lugar, en este caso, del puerto de Veracruz. Por ejemplo, la figura (6.5), contiene la información de vientos en el Observatorio de Veracruz, Ver.

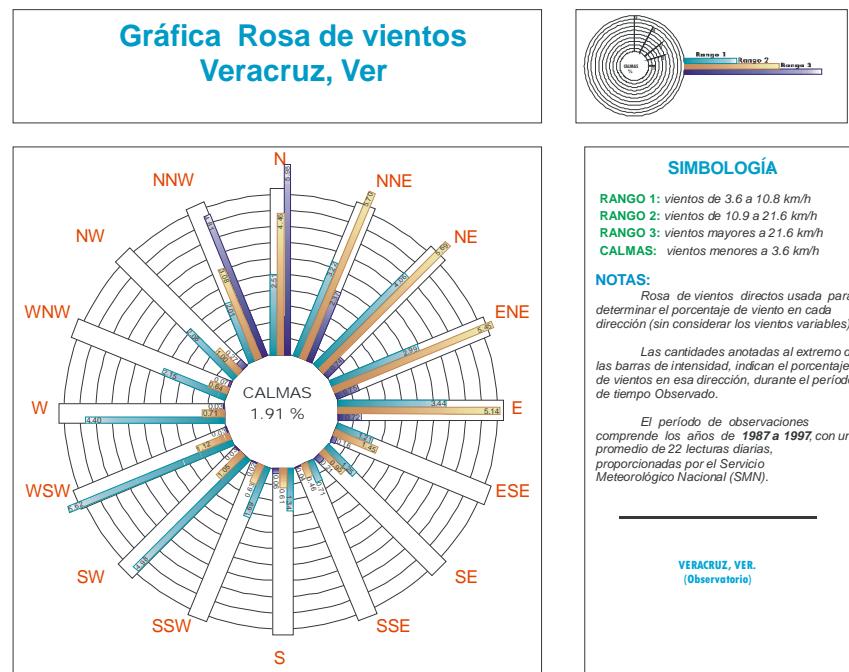


Figura 6.5 Vientos presentados en Veracruz.

En la tabla (6.1) se pueden observar los datos que se utilizaron para generar la rosa de vientos mostrada en la figura (6.5), donde la mayor frecuencia relativa de los vientos se encuentra distribuida en el cuadrante comprendido entre las direcciones Norte y Este. A su vez, los rangos de intensidad más frecuentes son de 3.6 a 21.6 km/hr., los cuales acumulan el 82% de la frecuencia relativa total de los eventos. Por otra parte en el cuadrante Norte-Este se encuentra el 53% de la frecuencia de los vientos.

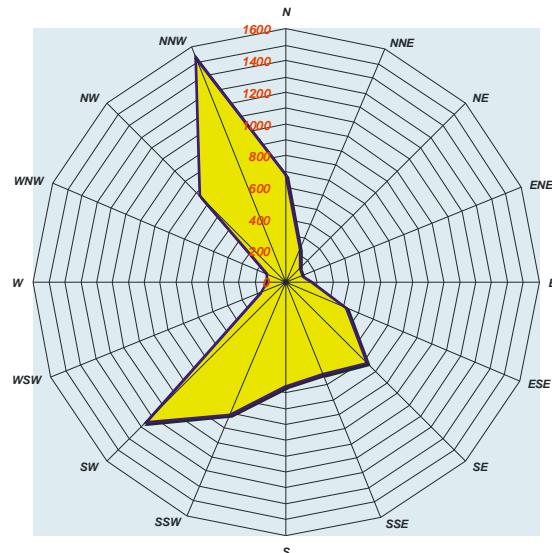
Por otra parte, en la Central Nucleoeléctrica Laguna Verde se cuenta con datos de viento, del periodo comprendido del mes de enero al mes de diciembre del año 2004. Dicha información se muestra en la figura (6.6), en donde los vientos predominan en las direcciones SW y NNW con una frecuencia acumulada del 32 %.

Tabla 6.1 Frecuencia de vientos, Observatorio de Veracruz, Ver.1987-1997

Dirección	Rango-1 3.6 a 10.8 km/h	Rango-2 10.9 a 21.6 km/h	Rango-3 > 21.6 km/h	Total %
N	2,51	4,46	5,98	12,95
NNE	3,22	5,7	2,37	11,29
NE	4,06	5,69	0,74	10,49
ENE	2,99	5,45	0,75	9,19
E	3,44	5,14	0,72	9,3
ESE	1,21	1,45	0,16	2,82
SE	1,25	0,95	0,21	2,41
SSE	0,71	0,46	0,04	1,21
S	1,34	0,61	0,06	2,01
SSW	1,69	0,63	0,02	2,34
SW	4,98	1,05	0,03	6,06
WSW	5,62	1,12	0,03	6,77
W	4,4	0,71	0,03	5,14
WNW	2,15	0,64	0,07	2,86
NW	2,08	1	0,27	3,35
NNW	2,01	3,08	4,81	9,9
Calmas				1,91
Total				100,00

Dirección	Rap. (m/seg)	Frec. Rel.	Dirección	Eventos
N	4.9	7.73%	N	676
NNE	3.0	2.53%	NNE	221
NE	2.1	1.39%	NE	122
ENE	1.9	1.22%	ENE	107
E	2.3	1.89%	E	165
ESE	2.8	4.70%	ESE	411
SE	4.0	8.30%	SE	726
SSE	3.9	7.13%	SSE	624
S	3.7	7.55%	S	660
SSW	2.6	10.38%	SSW	908
SW	2.5	14.34%	SW	1254
WSW	1.6	1.94%	WSW	170
W	1.3	1.35%	W	118
WNW	1.6	1.47%	WNW	129
NW	6.6	8.84%	NW	773
NNW	7.8	17.48%	NNW	1529
SUMA	52.6	98.24%		8593

Datos de viento



Rosa de vientos

Figura 6.6 Datos de viento de enero a diciembre del 2004, en la CNLV.

En la tabla (6.2) se puede ver claramente que en todo un año las intensidades de viento con mayor fuerza, se presentan en la dirección nornoroeste y noroeste, seguido del norte y suroeste.

Por otra parte, la clasificación climática del sitio de estudio de acuerdo a las “Modificaciones al Sistema de Clasificación Climática de Köppen”, (García, 1973), es Aw1(w)(e), la cual corresponde a Cálido Subhúmedo, el de humedad intermedia de los Subhúmedos, regímenes de

lluvia de verano, porcentaje de lluvia invernal respecto a la total anual menor de 5, oscilación térmica extremosa. La zona de estudio presenta una temperatura ambiente media anual de 26.5 °C para el año 2004 ver figura (6.7); una lámina de precipitación media anual de 112 mm. para el período comprendido del año 1973 al año 2004, como se muestra en la figura (6.8); y una evaporación media anual de 5 mm. para el período comprendido del año 1977 al año 1984, figura (6.9).

Tabla 6.2 Frecuencia de vientos en la CNLV, por rangos de intensidad del período enero a diciembre del 2004.

Vel. (m/s)	0.55-1	1.1-2	2.1-3	3.1-4	4.1-5	5.1-6	6.1-8	8.1-10	10.1-13	13.1-18	18.1-50
DIRECCIÓN											
N	25	51	91	N	106	126	82	N	126	46	20
NNE	16	49	78	NNE	48	9	9	NNE	8	0	2
NE	19	43	44	NE	13	2	0	NE	0	1	0
ENE	11	54	37	ENE	4	1	0	ENE	0	0	0
E	14	56	66	E	21	5	2	E	1	0	0
ESE	6	107	137	ESE	105	43	13	ESE	0	0	0
SE	8	77	166	SE	152	135	84	SE	82	21	1
SSE	8	91	147	SSE	132	106	51	SSE	76	13	0
S	4	84	142	S	160	160	78	S	32	0	0
SSW	14	227	458	SSW	140	53	11	SSW	5	0	0
SW	21	272	813	SW	132	10	4	SW	2	0	0
WSW	29	113	25	WSW	2	1	0	WSW	0	0	0
W	44	64	6	W	4	0	0	W	0	0	0
WNW	34	65	25	WNW	4	0	0	WNW	1	0	0
NW	35	89	83	NW	64	75	54	NW	98	91	101
NNW	32	68	94	NNW	125	136	126	NNW	252	223	283
										NNW	173
											17

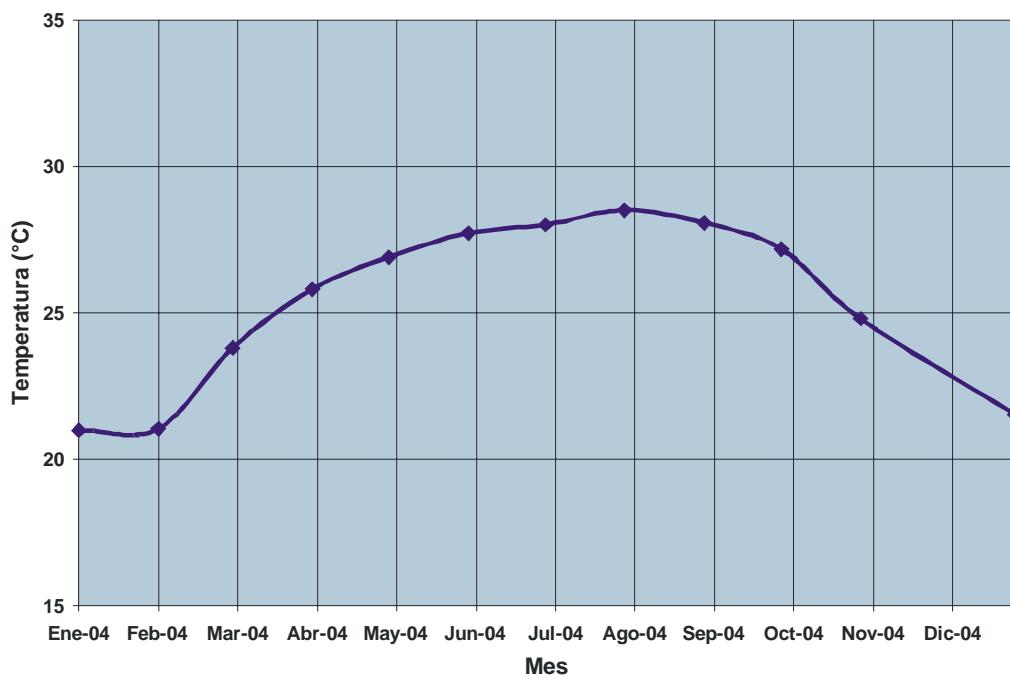


Figura 6.7 Temperatura ambiente media mensual (°C) para el 2004, estación meteorológica de la CNLV.

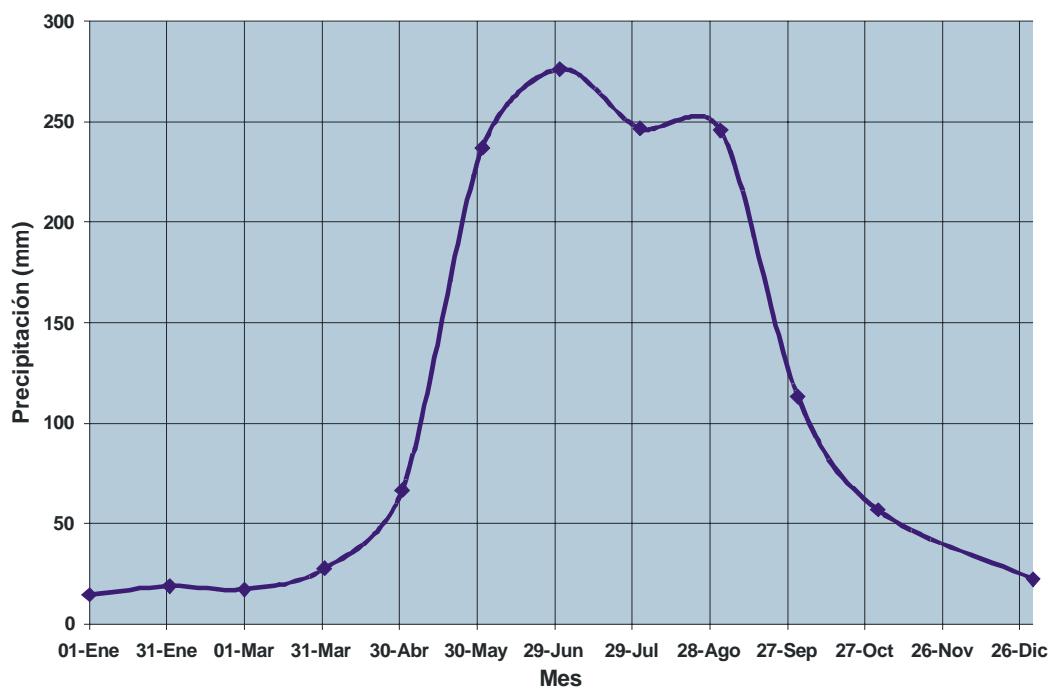


Figura 6.8 Precipitación media mensual (mm) para el periodo (1973-2004), estación meteorológica de la CNLV.

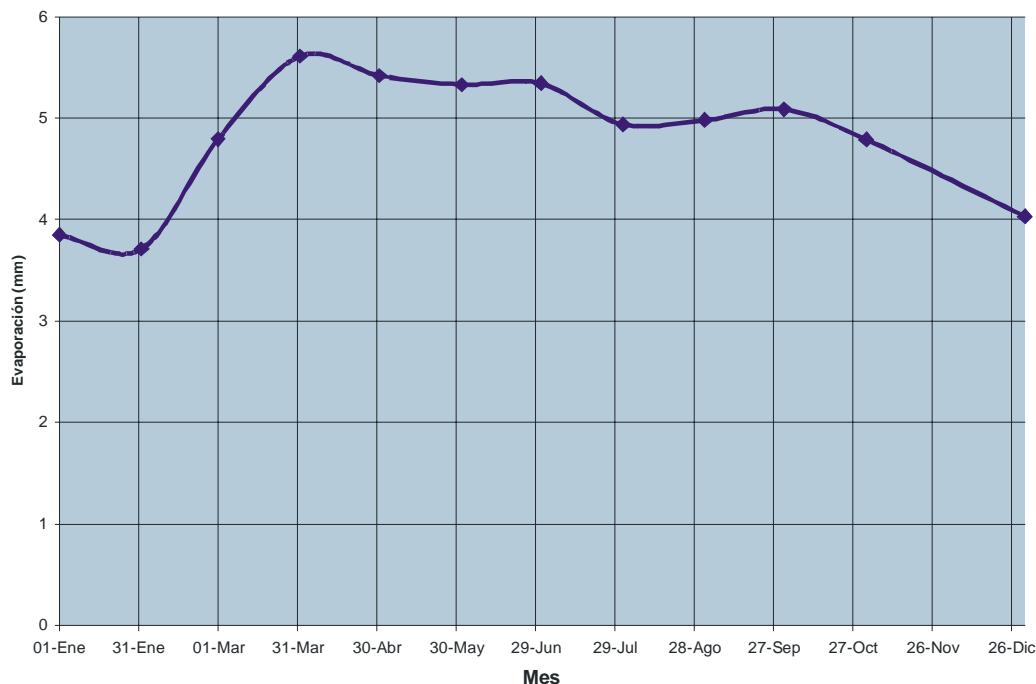


Figura 6.9 Evaporación media mensual (mm) para el periodo 1977-1984, estación meteorológica de la CNLV.

6.2.3. Oceanografía

La zona de estudio presenta una batimetría con pendiente suave, el dominio abarca un área aproximada de 11.7 km², con una longitud de 42000 m en la dirección x y de 3500 m en la dirección y. La descarga se localiza a 1800 m de la obra de toma superficial y a 2200 m de la toma submarina, aproximadamente. A 800 m al Sur del canal de descarga se ubica la desembocadura del río El Viejón.

La figura (6.10), presenta el área de interés para este estudio, en el cual se abarca la toma superficial de la CNLV, la descarga de la Laguna Salada y el aporte del gasto descargado por el río El Viejón, esto con el objeto de delimitar el dominio tomando en cuenta la posible área de influencia de las descargas de manera que, se observe su interacción con el medio receptor, a su vez, se seleccionó la profundidad máxima de -28 por el hecho de que la toma submarina se localizará en la batimétrica -12, por lo que de este modo se garantiza visualizar la influencia que esta nueva toma tendrá dentro de la zona de estudio. Una vista del dominio en tercera dimensión se puede apreciar de mejor forma en la figura (6.11)

El manual de dimensionamiento portuario divide todo el litoral mexicano en varias zonas en donde varían los aspectos oceanográficos por lo cual para nuestro lugar de interés se tomará como referencia la zona XXIII.

Oleaje: Se presenta un régimen anual de oleaje, el cual fue obtenido por análisis y procesamiento de la información estadística editada por el Sea and Swell, el cual divide la república mexicana en varias zonas, tomando para el caso que nos compete la zona XIV, ver figura (6.12) donde encontramos el régimen de oleaje en aguas profundas, por lo que es importante darle una correcta interpretación, según sea la orientación de la costa. La información se presenta en forma gráfica con frecuencias y rangos de oleaje para cada dirección de procedencia; ver el manual de dimensionamiento portuario (SCT, 2001).

En la figura (6.13) se puede ver claramente los régimen de oleaje en aguas profundas local y distante, la altura de ola está en metros.

También se tienen datos de oleaje donde se colocaron aparatos de medición que abarcó del período del 15 de marzo al 15 de julio de 2002, en donde ambos equipos fueron colocados a una profundidad de desplante de 23.5 m, con coordenadas 19° 14' 27.56" Latitud 96° 05' 05.94" Longitud, dando los siguientes resultados.

En la tabla (6.3), se presenta una síntesis con los valores estadísticos más representativos de las alturas de ola registradas, habiéndose obtenido una altura de ola promedio de 0.53 m considerando el total de datos adquiridos durante el lapso de medición y que abarcó 2 398 bloques de registro. Para este lapso se obtuvo una altura de ola máxima de 10.07 m, con una altura H_{1/10} extrema de 8.11 m y significante de 6.38 m. En promedio las alturas de ola máximas tienen un valor de 1.35 m, mientras que las H_{1/10} son de 1.08 m y las significantes de 0.85 m.

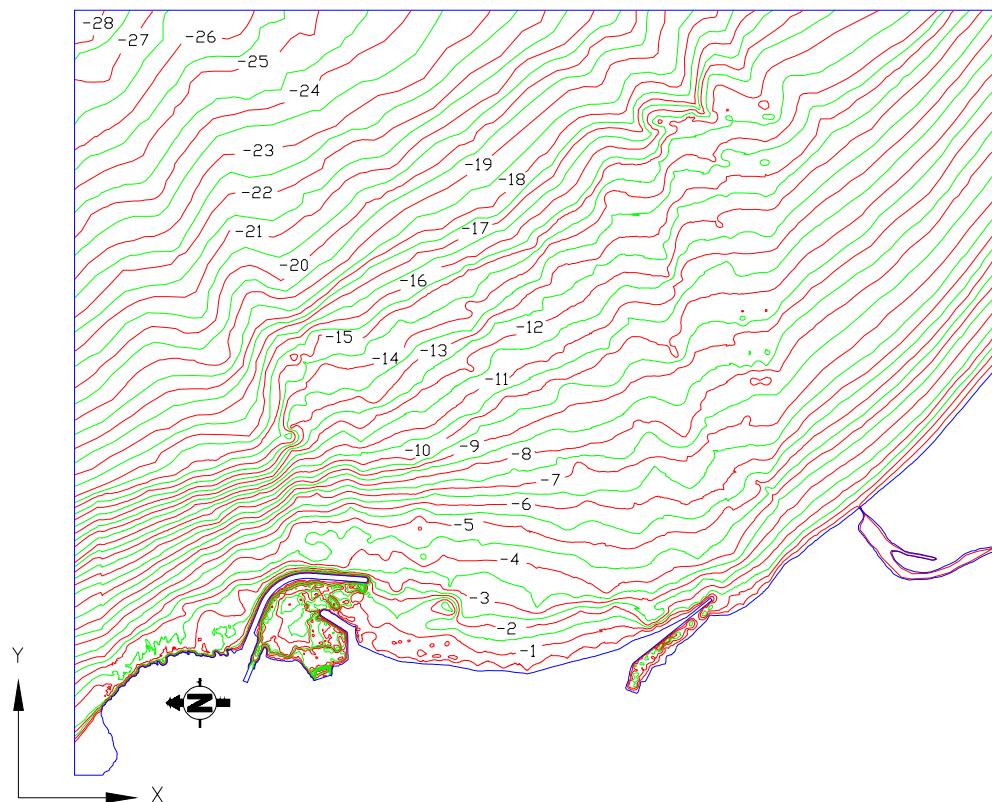


Figura 6.10 Batimetría de la zona de estudio en el plano (x , y).

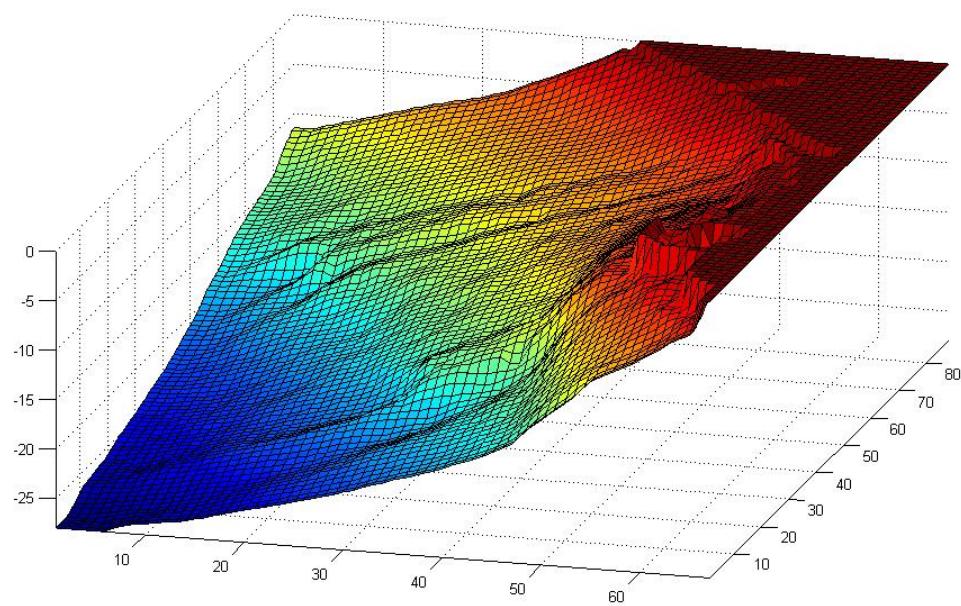


Figura 6.11 Batimetría de la zona de estudio en el plano (x , y , z).

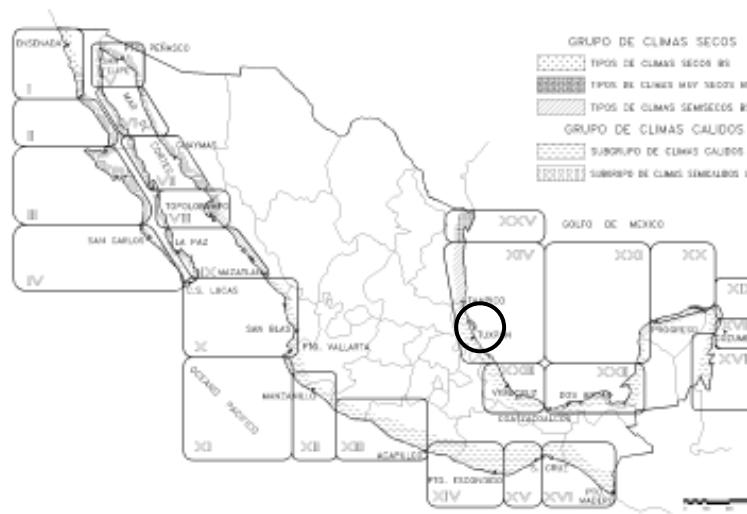


Figura 6.12 Zonificación de acuerdo a condiciones físicas.

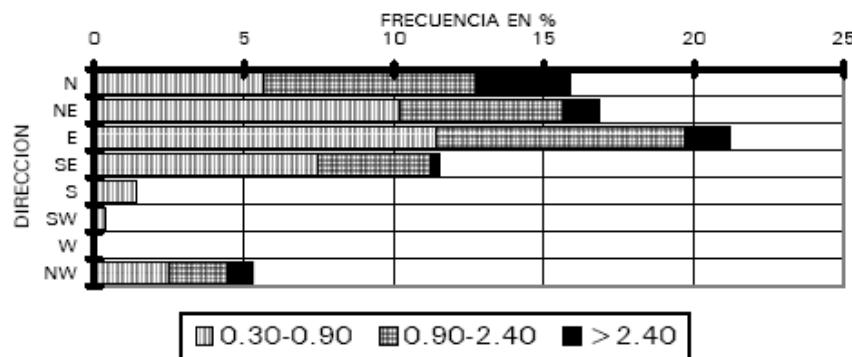


Figura 6.13 Régimen anual de oleaje.

Tabla 6.3 Síntesis de Altura de Oleaje.

Parámetro	Alt. Agua Med. s/Sensor (m)	Altura de Ola Prom. (m)	Altura de Ola Signif. (m)	Altura de Ola Máx. (m)	Altura H _{1/10} (m)
Máximo	22.66	4.00	6.38	10.07	8.11
Promedio	21.80	0.53	0.85	1.35	1.08
Mínimo	21.06	0.03	0.05	0.08	0.06
Rango	1.60	3.97	6.33	9.99	8.05
Desv-Std	0.23	0.45	0.72	1.13	0.91
Contador	2,398	2,398	2,398	2,398	2,398

En general, el análisis de distribución de alturas presenta una forma asimétrica con sesgo a la derecha o positivo, siendo dominante la clase 0.0 a 0.5 m con 62% de las alturas promedio, seguidas por las clases de 0.5 a 1.0 m con casi el 27% de frecuencia y la de 1.0 a 1.5 m con casi el 6%. Para las alturas significantes predomina la clase de 0.5 a 1.0 m con 44.62%, seguida por

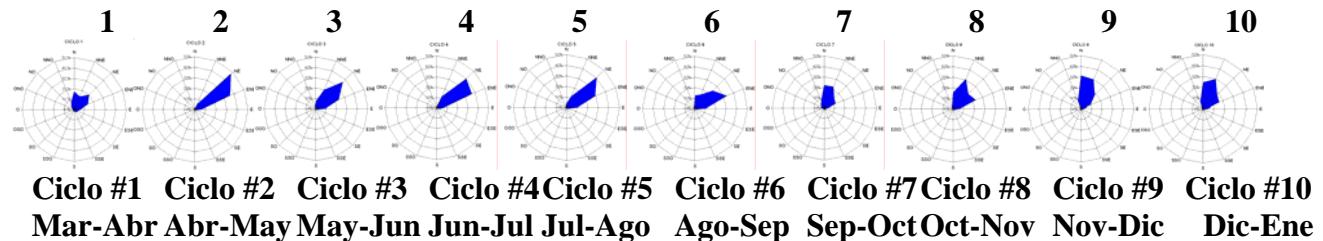


Figura 6.14 Rosas de Dirección de Oleaje, Ciclos 1 al 10.

las clases de 0.0 a 0.5 m con 32.03% y la de 1.0 a 1.5 m con 11.38%. Para las alturas máximas el orden es de 1.0 a 1.5 m con casi el 29% de frecuencia, de 0.5 a 1.0 m con casi 28% y de 0.0 a 0.5 m con 16%. Cabe resaltar que las alturas de 1.5 a 2.0 m presentan ya una frecuencia de casi 13%. Para las alturas $H_{1/10}$ destaca la clase de 0.5 a 1.0 m con 38%, seguida por la de 1.0 a 1.5 m y la de 0.0 a 0.5 m, ambas con un valor de ocurrencia cercano a 22.5%. Los intervalos extremos son la clase de 3.5 a 4.0 m con 0.08% para las alturas promedio, 6.0 a 6.5 m con 0.08% para las alturas significantes, 10.0 a 10.5 m para las alturas máximas con 0.04% de frecuencia, y 8.0 a 8.5 m con 0.04% para las alturas $H_{1/10}$.

Los valores de estos parámetros corresponden al valor promedio de altura de ola, considerando el total de olas registradas, siendo la altura significante el valor promedio del tercio de mayor altura de la distribución de olas. La altura ola máxima corresponde a un valor individual de registro, mientras que la altura de ola $H_{1/10}$ corresponde al valor promedio de la décima parte de mayor altura de la distribución de olas registradas durante cada bloque.

En la figura (6.14) se presentan las rosas de dirección correspondientes para cada uno de los ciclos estudiados, apreciándose claramente que domina el oleaje del 1^{er} cuadrante, o bien de los sectores que se ubican entre el N y el E francos, con ligeras fluctuaciones en el porcentaje individual entre éstos.

Nótese por ejemplo que en el Ciclo #1 predominaron tanto la dirección N como la NE, mientras que para los ciclos #2 al #5 la dirección cambia hacia el NE, mientras que para el Ciclo #6 la dominante cambia al sector ENE, regresando a oleajes procedentes del N y NNE para los Ciclos #7, #9 y #10.

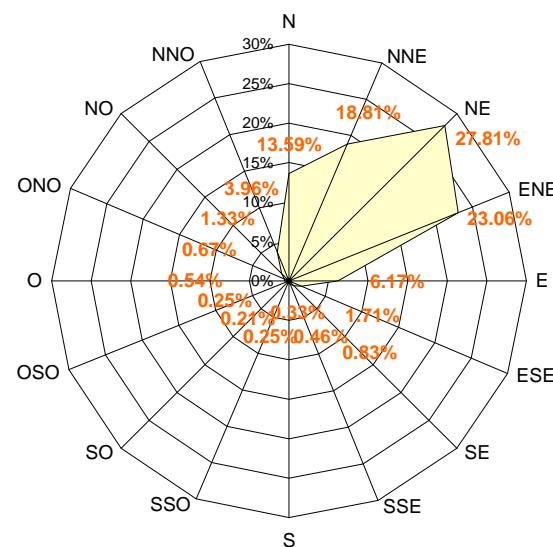


Figura 6.15 Rosa de Dirección de Oleaje.

En la figura (6.15) se presenta el gráfico resultante de los 10 ciclos de medición, integrándose la rosa de dirección respectiva y que muestra la dominancia del sector NE como preponderante con casi el 28% de las olas incidentes, seguido por las direcciones ENE con 23%, NNE con casi 19% y N con casi 14%, en orden de importancia decreciente, acumulando entre éstas poco más del 83% de la distribución total para el período comprendido del 15 de marzo de 2002 al 13 de enero de 2003.

Tabla 6.4 Síntesis de Período de Oleaje.

Parámetro	Período Pico (s)	Período Cruce Cero (s)	Período Signif. (s)	Período Cresta (s)	Período Máximo (s)	Dirección de Oleaje (°)	Desv. Estándar	EPSI
Máximo	11.98	8.65	8.92	7.63	8.77	359.93	1.59	0.57
Promedio	6.54	6.09	6.16	5.84	6.14	82.07	0.21	0.26
Mínimo	4.75	4.97	4.98	4.95	4.98	0.17	0.01	0.10
Rango	7.23	3.68	3.94	2.68	3.79	359.76	1.58	0.47
Desv-Std	1.30	0.60	0.65	0.42	0.63	96.71	0.18	0.09
Contador	2,398	2,398	2,398	2,398	2,398	2,398	2,398	2,398

Con relación a los períodos de ola obtenidos durante el transcurso de los 10 ciclos de medición, se registró un valor promedio cercano a lo 6 s para los períodos pico, Cruce Cero, Significante, Cresta y Máximo, con períodos mínimos ligeramente por debajo de los 5 s y máximos que fluctúan entre los 7.63 s y los 11.98 s. Véase la tabla (6.4).

Con respecto a la distribución de frecuencia, predominan los períodos de 6 a 7 s para los períodos pico con 32%, 5 a 6 s para los períodos cruce cero con 48%, 6 a 7 s para los significantes con casi 45%, y nuevamente 5 a 6 s para los crestas y máximos con 66% y 46% respectivamente.

Corrientes: Para el régimen anual de corrientes se recurrió a la información de Pilots Charts (Pacífico) y Atlas Oceanográfico que edita la Secretaría de Marina a través de la Dirección General de Oceanografía y señalamiento marítimo (Golfo de México). Las corrientes son del tipo superficial en ambos casos y la dirección indica hacia donde se dirigen. También están representadas en forma gráfica por frecuencias e intensidad ver figura (6.16), (CFE, 2001).

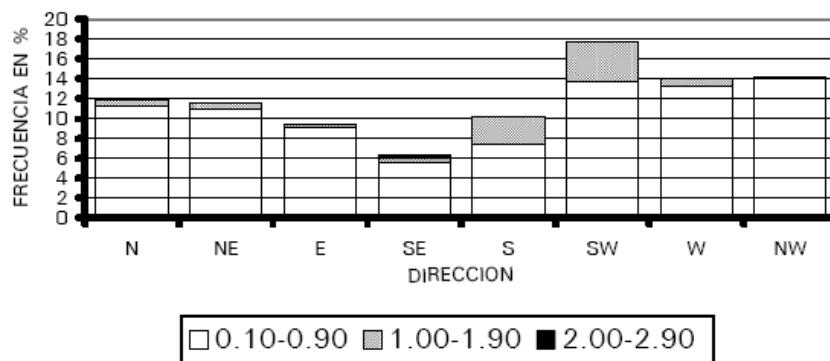


Figura 6.16 Régimen anual de corrientes.

Específicamente para el dominio de estudio se cuenta con poca información oceanográfica misma que se refiere a corrientes superficiales, las cuales se midieron en los años 1982, 1983 y 1984. En la tabla (6.5) y figura (6.17) se observa que en el frente costero de la CNLV se presentaron en el período de 1982 a 1984 corrientes superficiales con intensidad máxima de 0.8 m/s en la dirección NW y WSW con una frecuencia relativa de 21.74% y 7.25% respectivamente. A su vez se observa que durante este período las corrientes superficiales tuvieron un patrón predominante con direcciones NW, WNW y S.

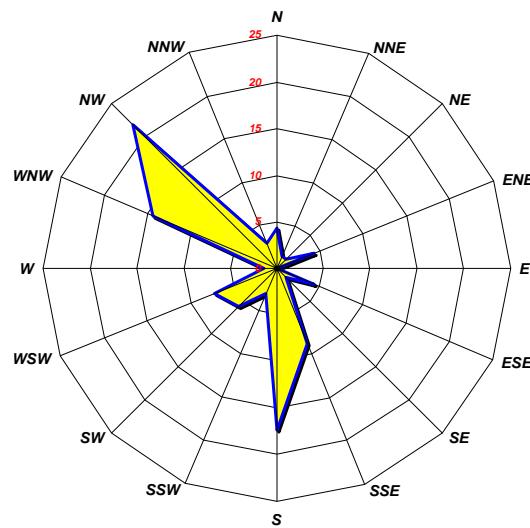


Figura 6.17 Rosa de dirección de corrientes

Tabla 6.5 Intensidad de corrientes superficiales en el frente costero de la CNLV. Período de mediciones: 1982 a 1984.

Dirección	Rap. (m/seg)	Frec. Rel.	Dirección	Eventos
N	0.7	4.35	N	3
NNE	0.44	1.45	NNE	1
NE	0.62	1.45	NE	1
ENE	0.01	4.35	ENE	3
E	0	0.00	E	0
ESE	0.37	4.35	ESE	3
SE	0.03	1.45	SE	1
SSE	0.34	8.70	SSE	6
S	0.7	17.39	S	12
SSW	0.19	2.90	SSW	2
SW	0.66	5.80	SW	4
WSW	0.81	7.25	WSW	5
W	0.17	1.45	W	1
WNW	0.61	14.49	WNW	10
NW	0.8	21.74	NW	15
NNW	0.67	2.90	NNW	2
Total		100		69

Mareas: Se presenta la información de mareas de tipo astronómico, indicando los planos de referencia de una estación características por zona; para la definición de altura se debe tomar como cero de referencia el N.B.M.I. (Nivel de Bajamar Media Inferior para el Pacífico y N.B.M. (Nivel de Bajamar Media) para el Golfo de México. La información es la recabada por el Servicio Mareográfico Nacional, dependiente del Instituto de Geofísica de la UNAM, y por las Tablas de Predicción de Mareas del Fondo Nacional de Fomento al Turismo.

Por otra parte se recurrió también a la base de datos de marea del CISECE, Departamento de Oceanografía Física, para el Estado de Veracruz, en el cual la información se presenta por períodos que van de un día hasta varios años, en intervalos de tiempos, en minutos. Por lo que esta fuente es muy completa en cuanto a información de mareas se refiere ver figura (6.18) Por lo que para esta zona de la Central Nucleoeléctrica la marea presenta un periodo aproximado de 24h y una sola pleamar y bajamar durante el periodo, la amplitud de la marea durante el año 2005 presenta un valor mínimo de -0.60m y un máximo de 0.46m, la pleamar se presenta durante el día.

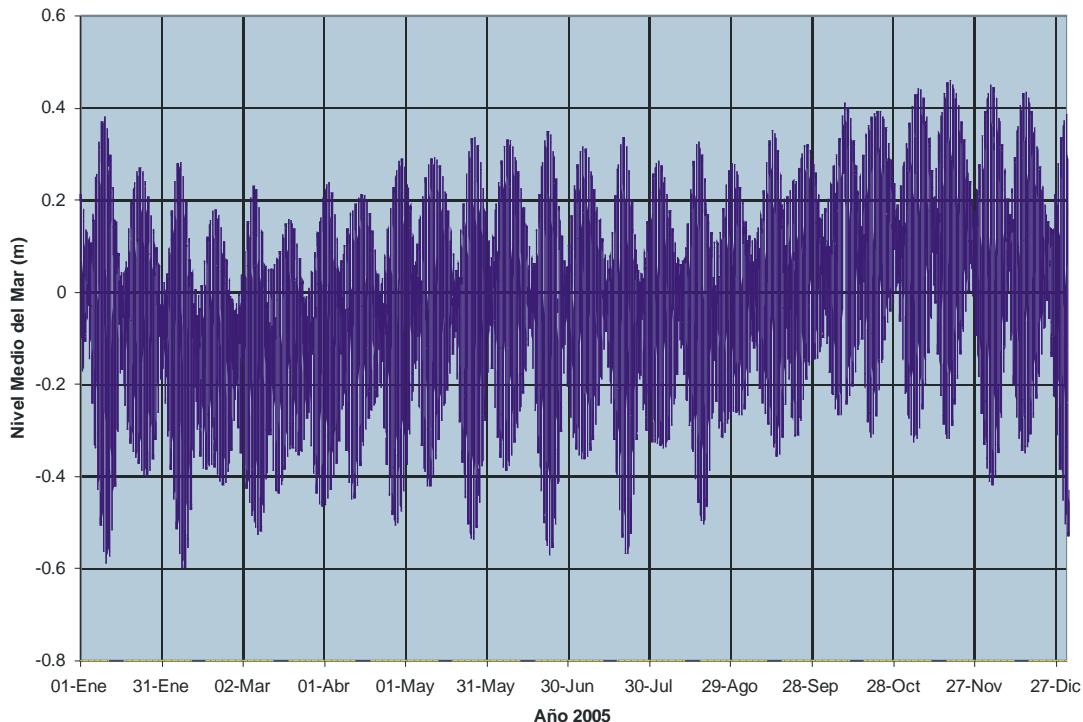


Figura 6.18 Variación del Nivel Medio del Mar en el puerto de Veracruz en el año 2005.

El área de Estudios de Sitio del Departamento de Ingeniería Ambiental, mantiene un limnígrafo con el cual se mide la marea en forma continua. El limnígrafo se encuentra instalado en el muelle dentro de la dársena de la obra de toma de la CNMV. Figura (6.19)

En la zona de la Central Nucleoeléctrica la marea en el mes de junio se presenta un periodo aproximado de 24 hr y una sola pleamar y bajamar durante el periodo, la amplitud de la marea durante la campaña de medición osciló de 0,897 m el día 16 a 0,716 m el día 18; la pleamar se presenta durante el día.

6.2.4. Hidrología.

En lo que respecta a la información hidrológica, el dominio en estudio presenta un escurrimiento superficial el cual desemboca al mar a 800 metros aproximadamente del canal de descarga. Dicho escurrimiento corresponde al río El Viejón figura (6.20). Para este caso, no se cuenta con información hidrométrica actualizada y la información climatológica existente es la siguiente:

La cuenca del río El Viejón tiene un área aproximada de 152 Km^2 ; está localizada dentro de los $19^{\circ}38'$ y $19^{\circ}44'$ de latitud Norte, los $96^{\circ}23'$ y $96^{\circ}35'$ de longitud Oeste. Limita al Norte con la cuenca del río Barranca Hernández de la región hidrológica No. 28. Se trata de una cuenca independiente sin ningún aporte por escurrimiento superficial de otra cuenca.

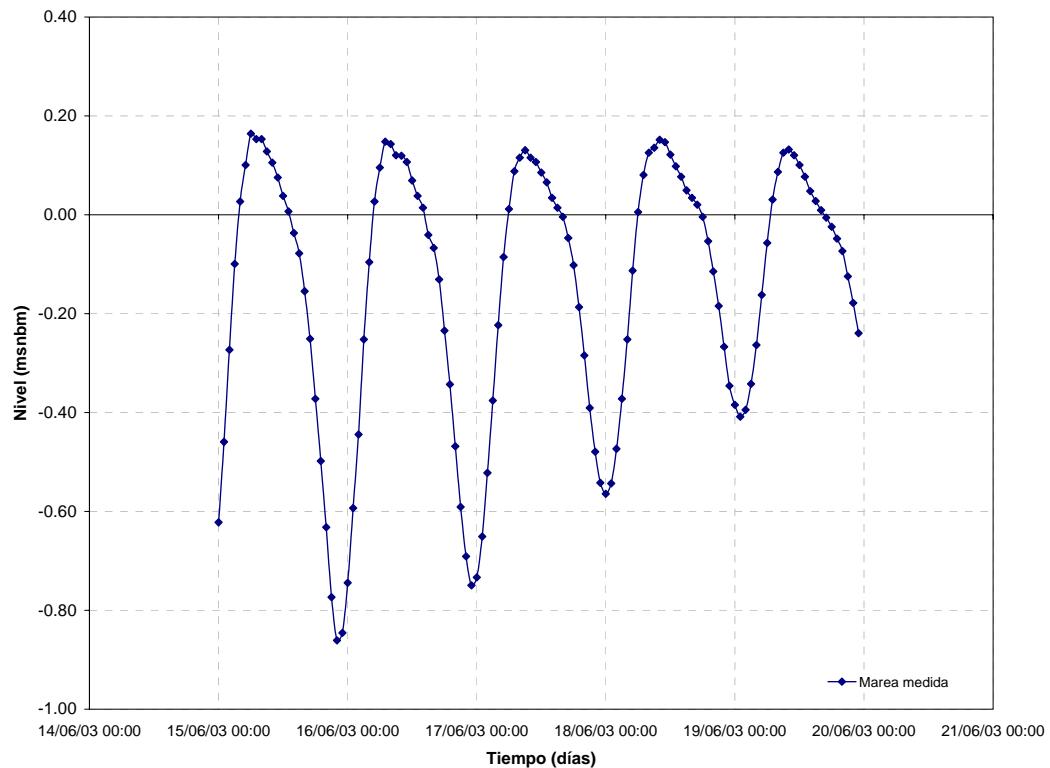


Figura 6.19 Marea medida en el Muelle dentro de la obra de toma

Este río tiene su origen dentro del estado de Veracruz a 800 m.s.n.m.; escurre en su parte alta con pendientes del orden de $1/4$, en su parte media con pendiente de $1/35$, sobre roca andesítica, y hacia la parte baja con pendientes de $1/71$, sobre sedimentos aluviales, formando un valle (“El Viejón”), en un área de 11.4 Km^2 aproximadamente, desde la población “El Milagro” hasta su desembocadura al Golfo de México.

El área del valle “El Viejón” forma una buena superficie de infiltración debido a la permeabilidad de los materiales, por lo que se forma un acuífero local con espesor de 40 m aproximadamente, el cual se encuentra en comunicación con el agua superficial, haciendo que el río “El Viejón” actúe como corriente efluente en época de secas, y actúe como dren e influente en períodos de lluvias, lo que representa una considerable recarga del acuífero.

A lo largo de la cuenca y desde las partes más elevadas, el agua de este río es la única fuente para el uso de las poblaciones, ya que esta escurre generalmente sobre materiales impermeables que no permiten la infiltración, y por lo tanto no forman mantos acuíferos que se puedan explotar. Aproximadamente a la altura de “El Milagro” los materiales se vuelven permeables, y es posible explotar agua subterránea; sin embargo, debido principalmente a las diferencias topográficas,

existen algunos manantiales, producto de acuíferos locales formados en basaltos fracturados en las partes altas, sobre todo cerca de la población “El Viejón”.

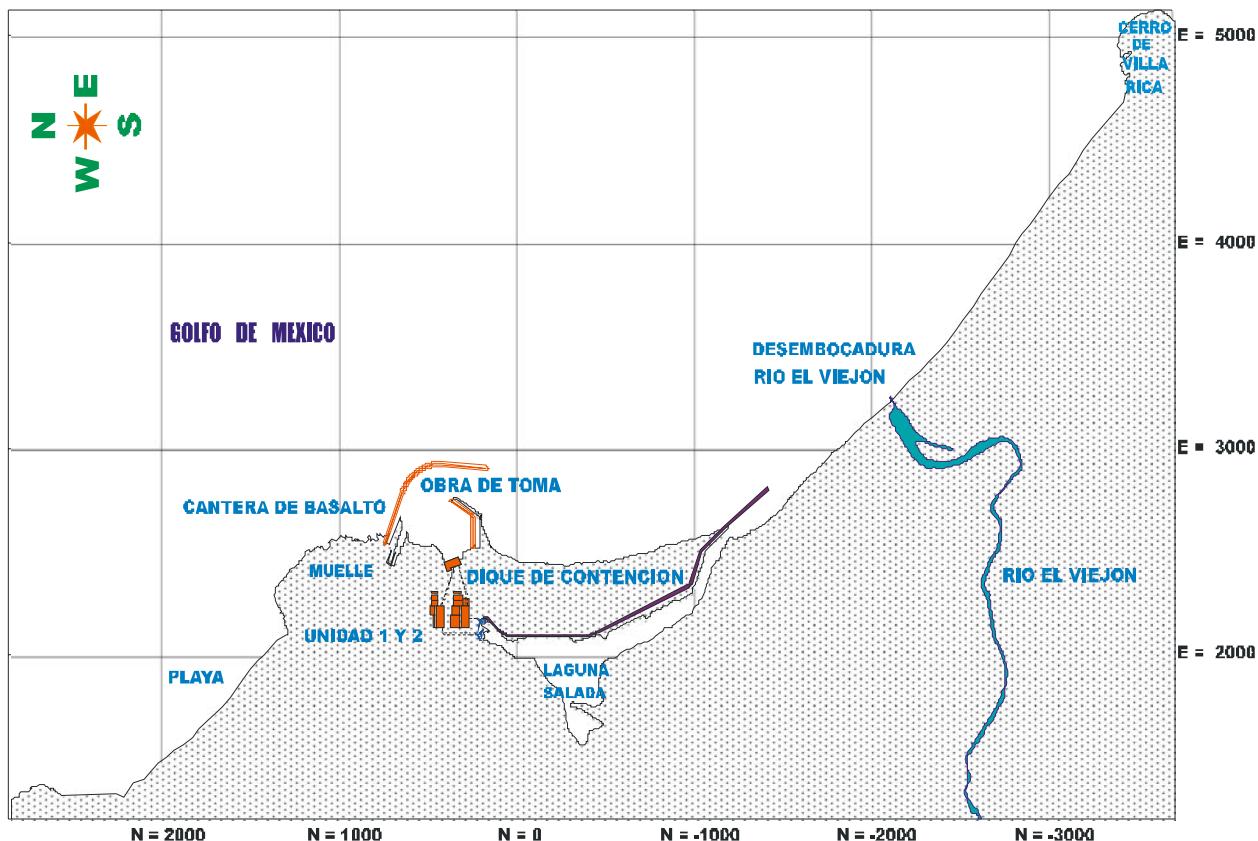


Figura 6.20 Ubicación del río El Viejón.

Con el propósito de conocer el régimen de escurrimiento del río El Viejón, se llevó a cabo un programa de medición de caudales sobre el río mismo, para lo cual se localizó una estación hidrométrica (El Viejón) a la salida de la cuenca, la periodicidad de las mediciones de gastos fue diaria para el período de septiembre de 1978 a diciembre de 1979. La evolución del volumen escurrido para el río se muestra en la figura (6.21), en la cual se graficó el gasto promedio mensual. Se observa que el gasto máximo se presenta en los meses de mayor precipitación (junio a septiembre), llegando a tener un gasto despreciable o nulo en época de secas (febrero a mayo); por lo tanto se trata de un río de tipo intermitente.

Este río carece de registros de duración suficientemente extensos como para conocer el nivel máximo histórico, por esta razón se obtuvo el nivel máximo histórico de un estudio realizado por la Comisión Federal de Electricidad en el año 1981, los resultados se presentan en la tabla (6.6). De acuerdo a los datos obtenidos en la estación hidrométrica El Viejón, los gastos máximos fueron para 1978, de $6.09 \text{ m}^3/\text{seg}$ y para 1979, de $17.35 \text{ m}^3/\text{seg}$. De aquí se concluye que los gastos máximos calculados con los métodos utilizados (datos históricos sintéticos e hidrograma unitario triangular), son bastante conservadores.

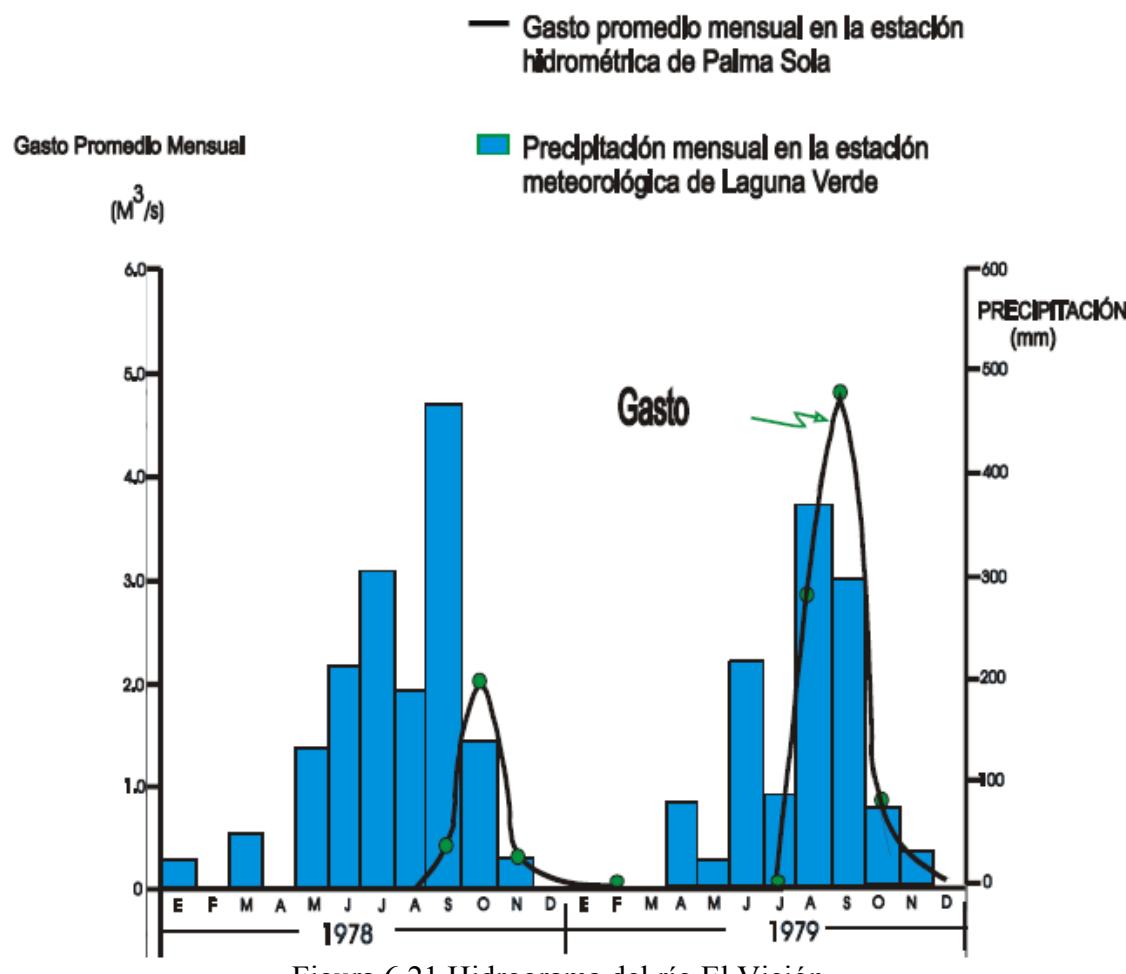


Figura 6.21 Hidrograma del río El Viejón.

Tabla 6.6 Gastos máximos probables, en el río El Viejón.

1.- Nivel Máximo	(+) 4.54 m sobre el fondo del cause
Gasto Máximo (datos históricos sintéticos)	51.98 m^3 / s
2.- Nivel Máximo	(+) 5.36 m sobre el fondo del cause
Gasto Máximo (hidrograma unitario triangular)	62.41 m^3 / s

6.3. Comportamiento de la temperatura dentro de la zona protegida, sin considerar oleaje.

Para el caso de la variación de la temperatura dentro de la zona protegida; Campos realizó su estudio de dispersión de la pluma térmica sin considerar oleaje en su tesis de maestría, en la cual realiza un escenario en la época de lluvias que a continuación describe. (Campos, 2006)

6.3.1. Condiciones para el escenario de simulación

Para este escenario la descarga del río El Viejón es de $6.09 \text{ m}^3 / \text{s}$, con una temperatura constante de 25°C . De acuerdo a la información oceanográfica existe una forzante de corrientes marinas cuya intensidad es de 0.1 m/s con dirección de Sur a Norte. Se considera la variación de la superficie libre del mar producido por la marea. También existe la forzante producida por el viento, a 10 metros sobre la superficie. De acuerdo a la información de la CNMV, en el canal de descarga la temperatura máxima para esta época es de 44°C , misma con la cual se inyecta en la simulación. La temperatura media del mar, para el periodo de 1994 – 2003, es de 28°C . La salinidad se inicializó para todo el dominio con 33 ups .

La figura (6.22) muestra la dispersión de la pluma de temperatura; en el inciso a) se tiene el inicio de la pluma descargada con una temperatura de 44°C ; en el inciso b) presenta una deflexión de la pluma hacia la obra de toma, esto debido a las forzantes de marea, corrientes y viento presentes para este escenario; el inciso c) y d) muestran el efecto de la pluma dentro de la obra de toma, en el inciso e) y f) la pluma se pega a la línea de costa produciendo una situación crítica para la obra de toma, esto debido a la intensidad de la corriente marina la cual predomina con dirección de Sur a Norte, para este escenario.

En la figura 6.23 del inciso a) al inciso f) se muestra el campo hidrodinámico resultante de la simulación para la época de lluvias.

La figura 6.24 muestra el decaimiento de la temperatura a lo largo de dicha trayectoria, al término de la simulación, con un decaimiento de 44°C en el canal de descarga a 30.31°C en la obra de toma.

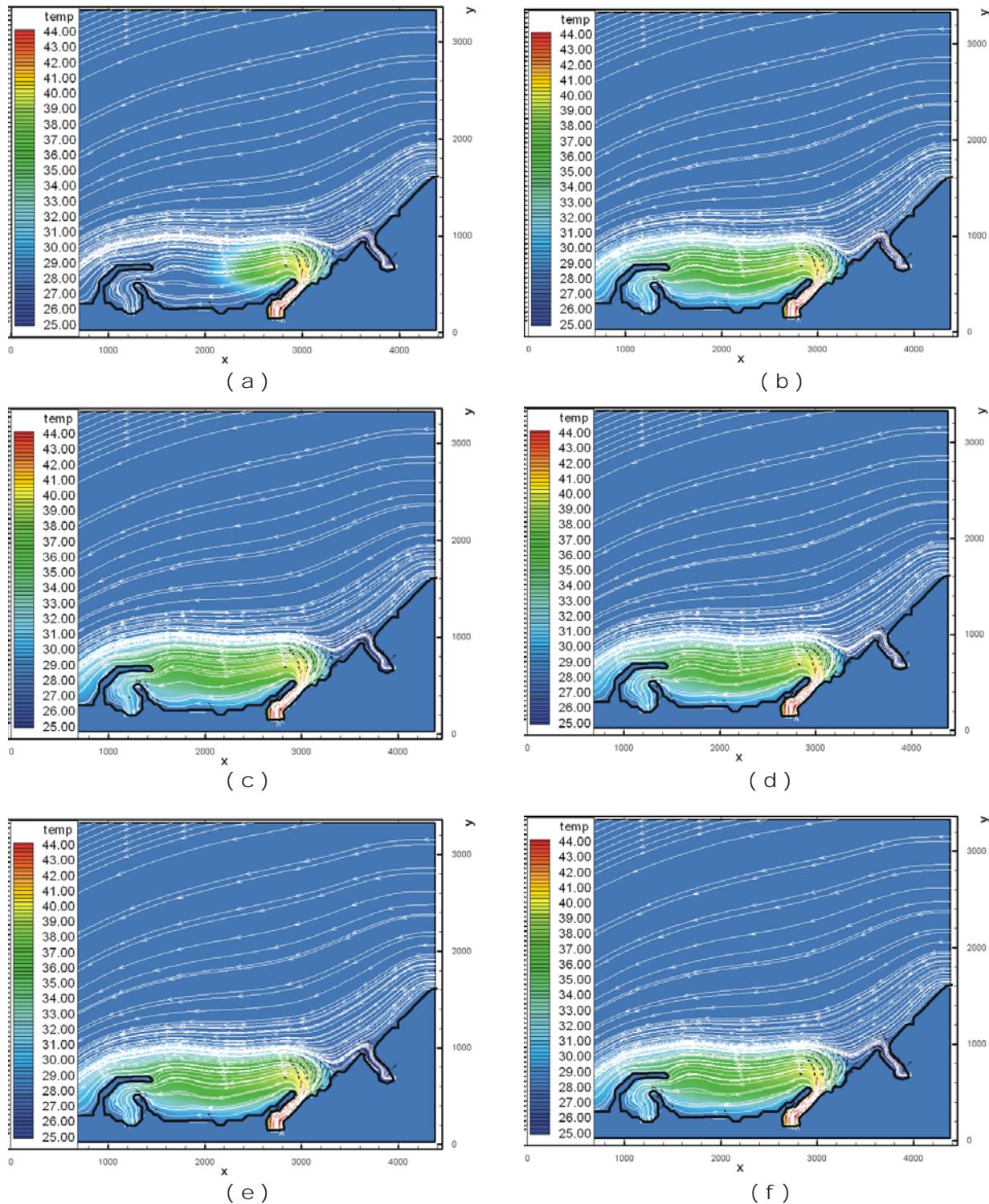


Figura 6.22 Dispersión de la pluma térmica del sistema de enfriamiento de la CNLV, para época de lluvias. a) 1 día de simulación, b) 3 días de simulación, c) 9 días de simulación, d) 45 días de simulación, e) 90 días de simulación, f) 120 días de simulación.

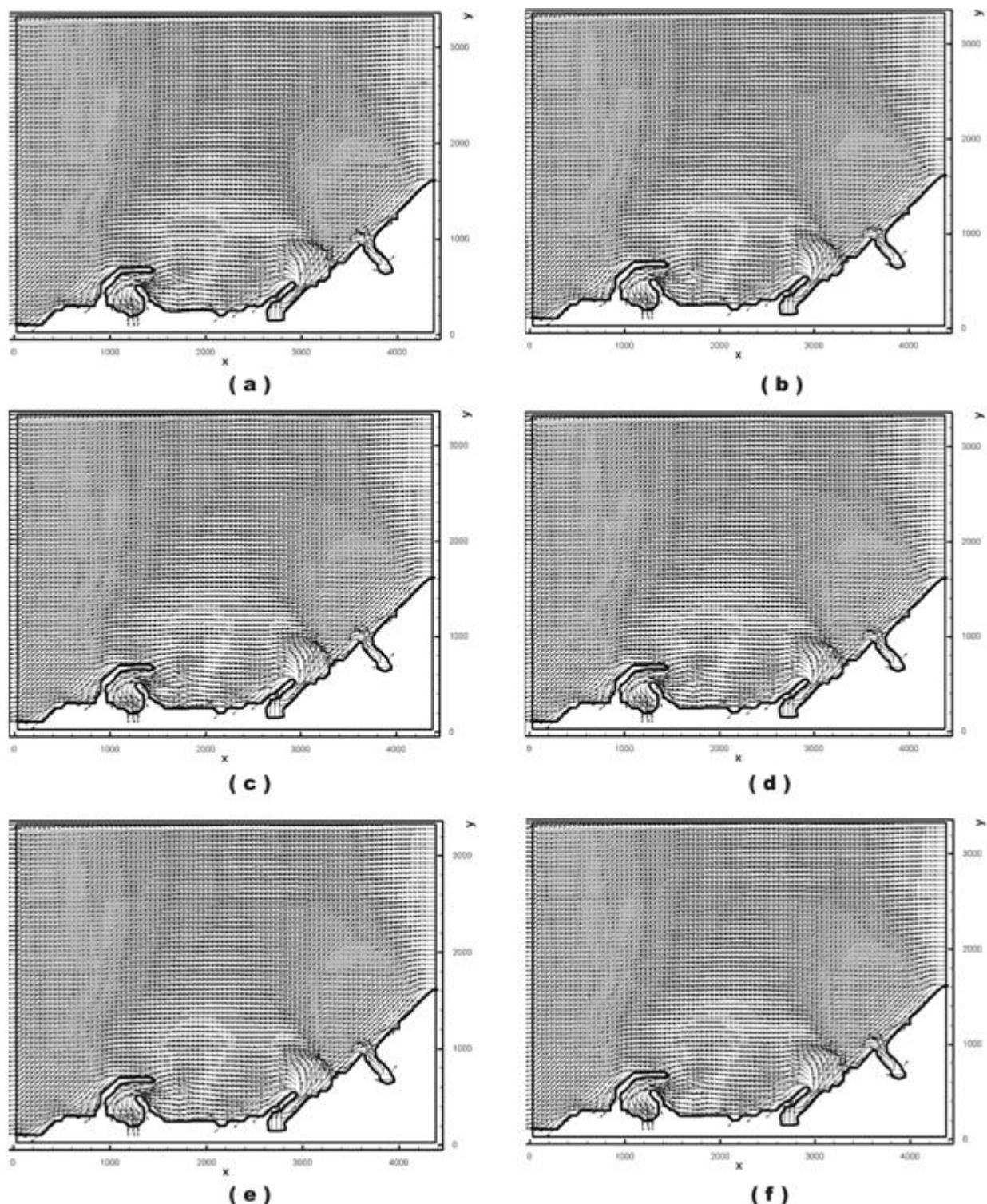


Figura 6.23 Vectores velocidad para la simulación de la pluma térmica de la CNLV, para época de lluvias. a) 1 día de simulación, b) 8 días de simulación, c) 46 días de simulación, d) 54 días de simulación, e) 90 días de simulación, f) 120 días de simulación.

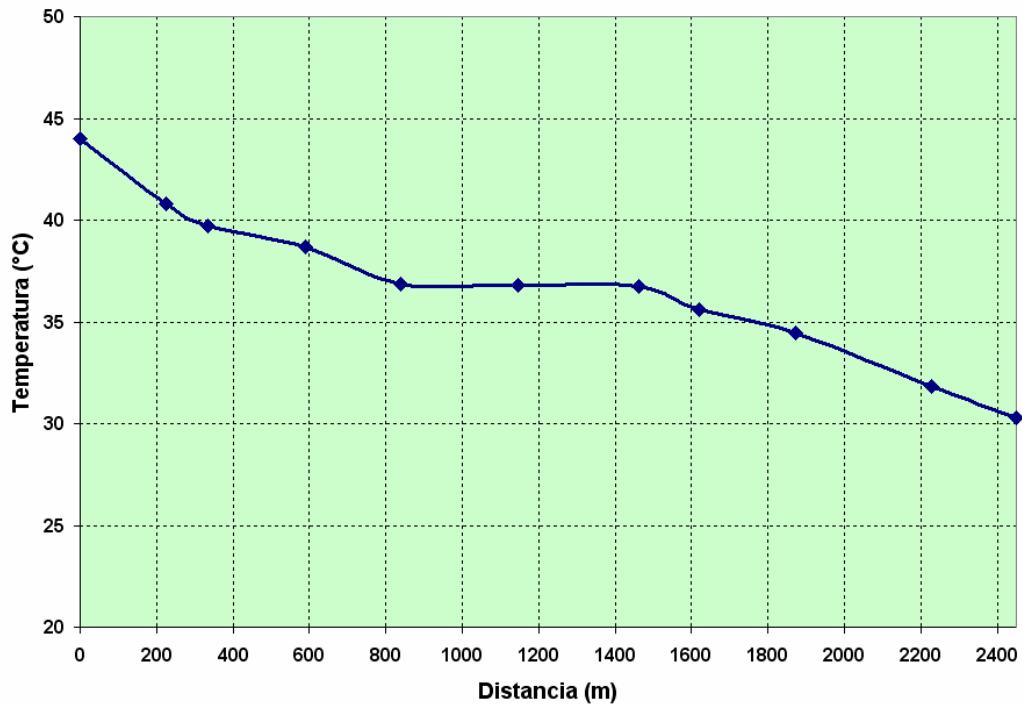


Figura 6.24 Evolución de la pluma térmica, en la CNLV. Para época de lluvias.

Como se abordó en el inicio de este Capítulo, la figura (6.1) muestra la variación de la temperatura en la obra de toma, el inciso a) corresponde a la temperatura medida en campo, el inciso b) a la temperatura predicha por el modelo, en ambos incisos se observa que la temperatura media es de 30°C , aproximadamente.

6.4. Comportamiento de la temperatura dentro de la zona protegida, considerando oleaje.

En base a la figura (6.10 y 6.20) la descarga de agua del sistema de enfriamiento de este caudal se realiza a través de un canal, el cual conduce un gasto de $63 \text{ m}^3/\text{s}$. con una velocidad media aproximada de $1.4 \text{ m}^3/\text{s}$., el canal desemboca al mar. Es muy importante llevar a cabo campañas de medición de oleaje con la finalidad de conocer a detalle cada uno de los fenómenos que se encuentran inmersos en la zona de estudio con la finalidad de revisar las condiciones críticas que afectan al buen funcionamiento del sistema de enfriamiento, el cual fue diseñado por Campos (Campos, 2006) además de que se encuentra otro fenómeno que afecta el buen funcionamiento de la zona de extracción del agua, debido al transporte de sedimentos, producida por la hidrodinámica, en especial, los fenómenos del oleaje que se toman en cuenta para el diseño de las estructuras que protegen la obra de toma. Sin embargo, dichas campañas de medición requieren de un alto costo debido al equipo y personal necesario para su ejecución. Sin duda alguna la base de datos experimentales son de vital importancia, sin embargo, se puede combinar estas con herramientas que nos permitan pronosticar posibles escenarios, todo esto con un menor costo económico, ya que en un modelo matemático que, si es correctamente diseñado, simulará el

comportamiento del fenómeno bajo las condiciones experimentadas. Usado con discreción y una correcta apreciación de sus limitaciones, el modelo es una herramienta útil en el proceso de análisis y diseño, permitiéndole explorar soluciones, comparar opciones e identificar la solución óptima al problema.

6.4.1. Generación de la malla

En base a la información topobatimétrica de la zona de estudio figura (6.10) se realiza la discretización del dominio, la cual puede ser mediante una hoja de cálculo o por medio del programa ARGUS ONE (<http://www.argusint.com>), éste último fue el que se decidió utilizar en este trabajo. El programa ARGUS ONE es un paquete comercial, el cual realiza de manera rápida y fácil el mallado de cualquier cuerpo de agua en elementos rectangulares. Para que el ARGUS ONE exporte sus resultados, necesita que se le proporcione el contorno del cuerpo de agua en formato DXF, y en formato ASCII el valor numérico de la batimetría. Una vez hecho lo anterior, el programa exporta en formato ASCII, el número total de las celdas en las direcciones x y y , el espaciamiento Δx y Δy de todas las celdas y el valor numérico de la elevación de cada celda. El dominio se discretizó en un malla rectangular con un total de 5,896 elementos, con espaciamiento constante, figura (6.25). (Campos, 2006)

Para visualizar el fenómeno en las obras de protección de la zona de estudio se realizó una submalla y se colocaron las estructuras de forma tal de generar el escenario mas critico, como se muestra en la Figura (6.26)

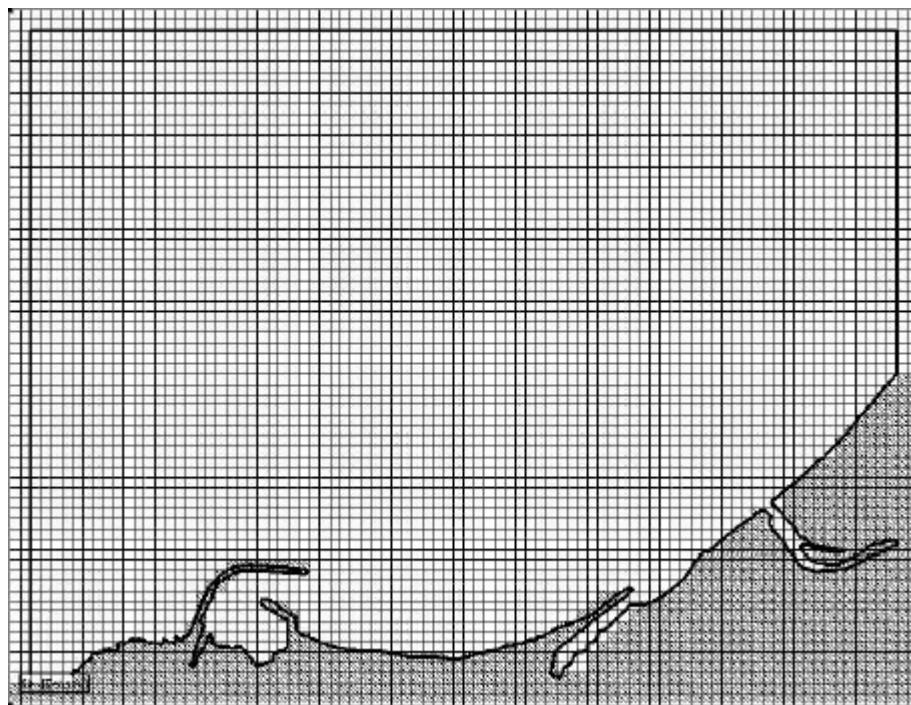


Figura 6.25 Malla del dominio en estudio.

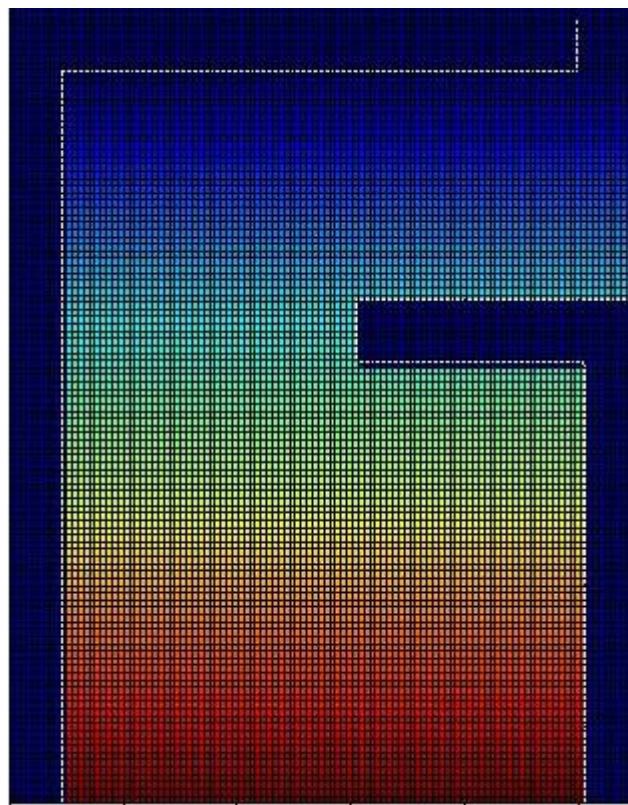


Figura 6.26 Submalla en las obras de protección

6.4.2. Diseño de escenarios de modelación

Con base a la información topográfica, batimétrica, hidrológica, oceanográfica y meteorológica recabada del sitio de estudio, se generaron dos escenarios de simulación para las obras de protección de la CNLV.

Para la elaboración de los escenarios se compararon los datos de viento recabados con la base de datos PO.DAAC Physical Oceanography DAAC (<http://poet.jpl.nasa.gov/>) de donde se obtuvieron los vectores de velocidad puntual para las coordenadas 19.79 Norte y los 96.70 Oeste, pertenecientes a la CNLV; dicha información se presenta de forma diaria para todo el año 2005, siendo estos valores muy similares a los datos de viento del Observatorio de Veracruz, ver, y los vientos presentes en la CNLV en el 2004, tabla (6.2).

La información de la marea utilizada para los escenarios, es la obtenida del CISECE Departamento de Oceanografía Física para el puerto de Veracruz (figura 6.18), la cual presenta la variación diaria del Nivel Medio del Mar, para el año 2005. La información de la Dirección General de Puertos, sirvió como base de comparación y de referencia, ya que para los escenarios de modelación se necesita la información diaria y para todos los meses del año.

Para los datos de oleaje se obtuvieron mediante un registro de medición que se llevaron a cabo en la zona de estudio, que abarcó del período del 15 de marzo al 15 de julio de 2002, en donde se colocaron equipos a una profundidad de desplante de 23.5 m, con coordenadas $19^{\circ} 14' 27.56''$ Latitud $96^{\circ} 05' 05.94''$ Longitud. Los cuales se muestran en la tabla (6.3 y 6.4).

La información de corrientes superficiales para el frente costero de la Central Nucleoeléctrica figura (6.16) fue la base para la elaboración de los escenarios, ya que no se cuenta con una mejor información relacionada a ésta. En lo que se refiere a la información hidrológica, se tomó la información del río El Viejón que se presenta en la figura (6.21), la cual es suficiente para la elaboración de los dos escenarios.

6.4.3. Dirección de oleaje más frecuente.

Para este escenario la descarga del río El Viejón es de $6.09 \text{ m}^3 / \text{s}$, con una temperatura constante de 25°C . De acuerdo a la información oceanográfica, existe una forzante de corrientes marinas cuya intensidad es de 0.1 m/s con dirección de Sur a Norte. Se considera la variación de la superficie libre del mar producido por la marea. También existe la forzante producida por el viento, a 10 metros sobre la superficie. De acuerdo a la información de la CNLV en el canal de descarga la temperatura máxima para esta época es de 44°C , misma con la cual se inyecta en la simulación. La temperatura media del mar, para el periodo de 1994 – 2003, es de 28°C . La salinidad se inicializó para todo el dominio con 33 ups . Los parámetros del oleaje tomados para esta primera simulación son: la altura se toma la ola máxima promedio de 1.35 m , el periodo significante promedio es de 6.16 s y la dirección del oleaje mas frecuente que se presenta es de sur este.

En la figura (6.27) se muestra la propagación del oleaje, con los tres fenómenos descritos en los capítulos anteriores, es decir, refracción, difracción y reflexión. Donde se observa como se modifica la dirección del oleaje respecto a la batimetría producido por la refracción, figura (6.28). Para poder ver mejor los demás fenómenos se hace una submallada, debido a que estos fenómenos son más locales.

Se puede ver como se comporta la propagación de la onda conforme avanza en el área protegida, en la figura (6.29) inciso a) la onda lleva un tiempo de 50 s , donde se observa que en el punto donde choca la onda por primera vez se encuentra un punto donde se presenta la máxima altura de la ola y conforme entra al recinto, se ve como pierde energía, altura y se puede apreciar con claridad el fenómeno de difracción; en el inciso b) ya transcurrieron 100 s una vez que choca con la pared de la estructura la onda se refracta, por lo que, se pueden ver claramente los dos fenómenos; sin embargo el de refracción también está inmerso en el modelo, pero en esta parte es difícil de apreciar por que no existe una variación significativa con respecto a los otros dos fenómenos; en el inciso c) ya han transcurrido 150 s , así sucesivamente en múltiplo de 50 se va desarrollando el fenómeno hasta llegar a los 300 s , tiempo suficiente para ver claramente estos fenómenos.

En la parte derecha se encuentra una barra con diferentes colores los cuales representan las alturas que se presentan en el lugar, arrojando buenos resultados. La figura (6.29) del inciso a) al f), se muestra el proceso de la propagación de la ola, en un tiempo de 5 min

Para este mismo ejemplo y mismos tiempos, se puede ver cada uno de los perfiles de la superficie libre del agua, donde se aprecia la variación de la superficie libre, velocidades y la variación de la profundidad.

Cabe destacar que al momento del inicio, figura (6.30), (inciso a) del modelo se cuenta con algunos parámetros de inicio: los cuales al irse propagando la ola se produce un flujo (inciso b), al llegar a la costa (inciso c), se produce un remanso (inciso d), lo cual teniendo este tipo de avance en el modelo, procederemos a analizar el siguiente caso de estudio.

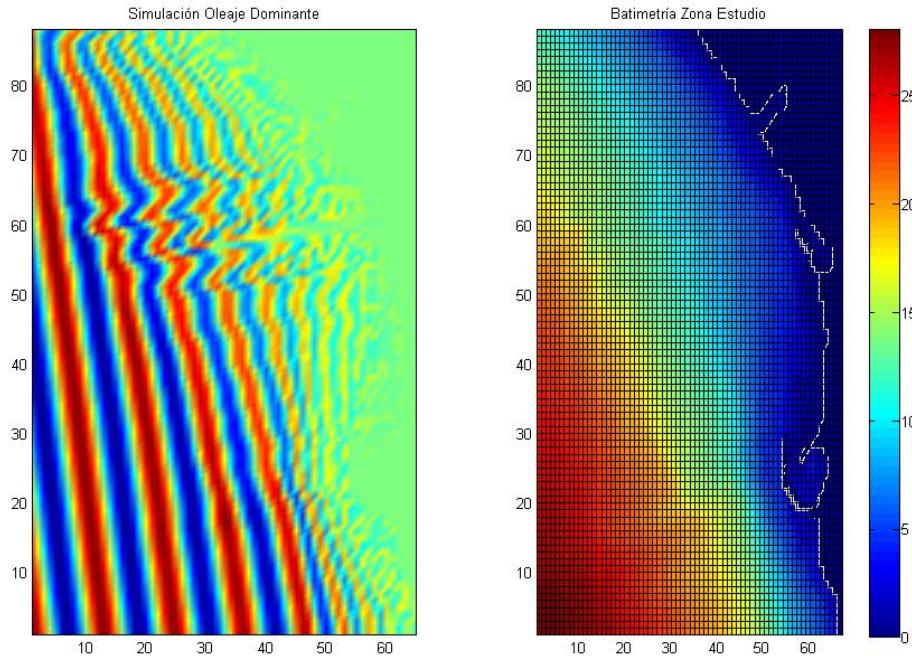


Figura 6.27 Simulación del oleaje en dirección Sur-Este.

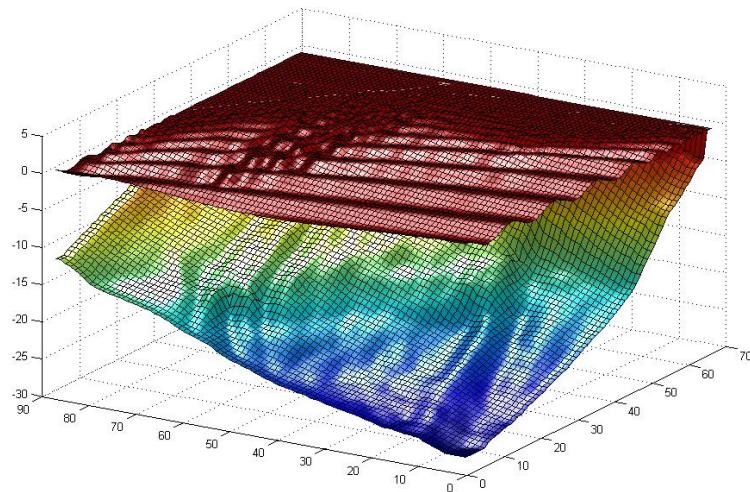


Figura 6.28 Simulación del oleaje en dirección Sur-Este en el plano (x, y, z)

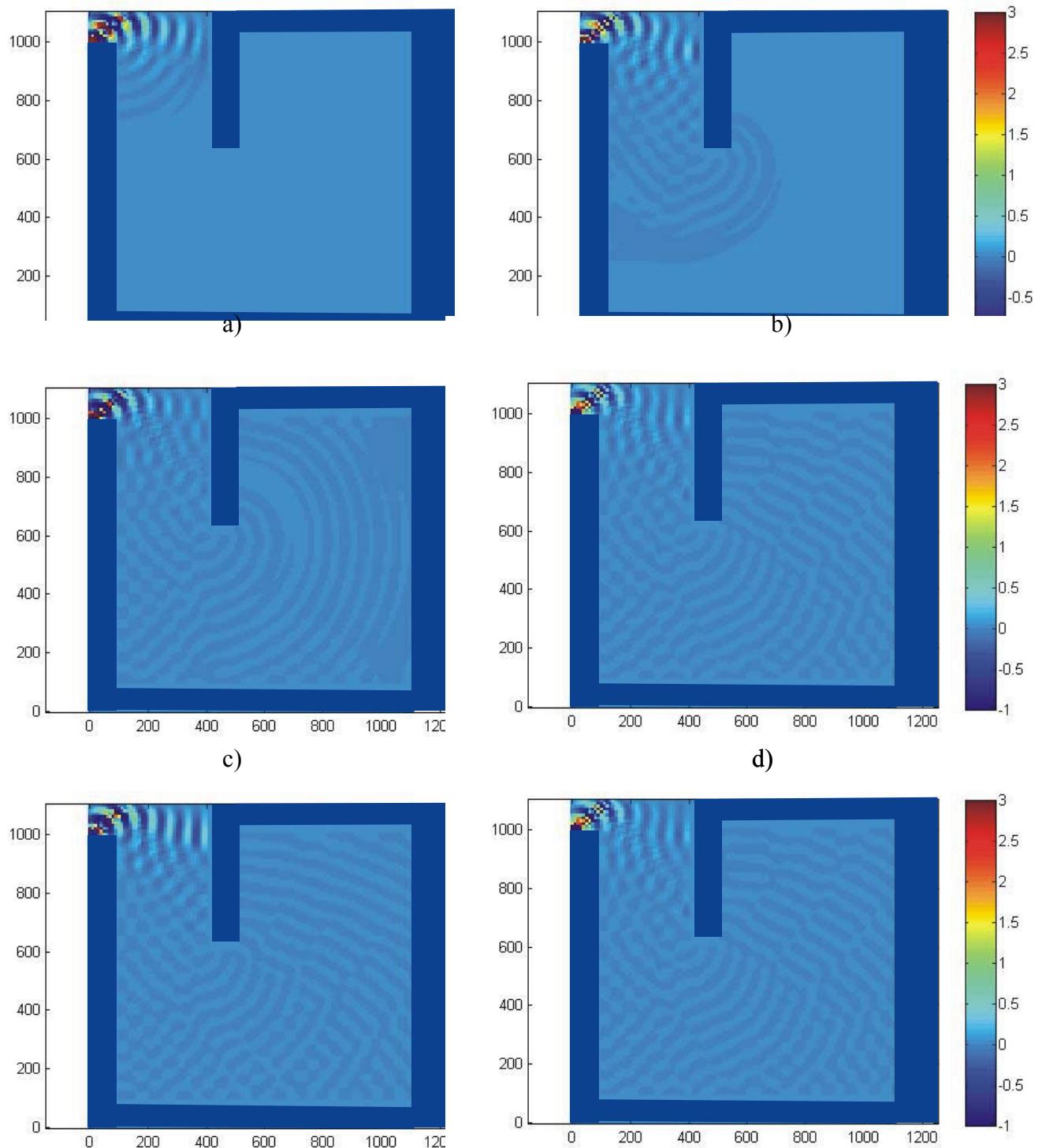


Figura 6.29 Simulación del oleaje en dirección Sur-Este: a) 50 s de simulación, b) 100 s de simulación, c) 150 s de simulación, d) 200 s de simulación, e) 250 s de simulación y f) 300 s de simulación.

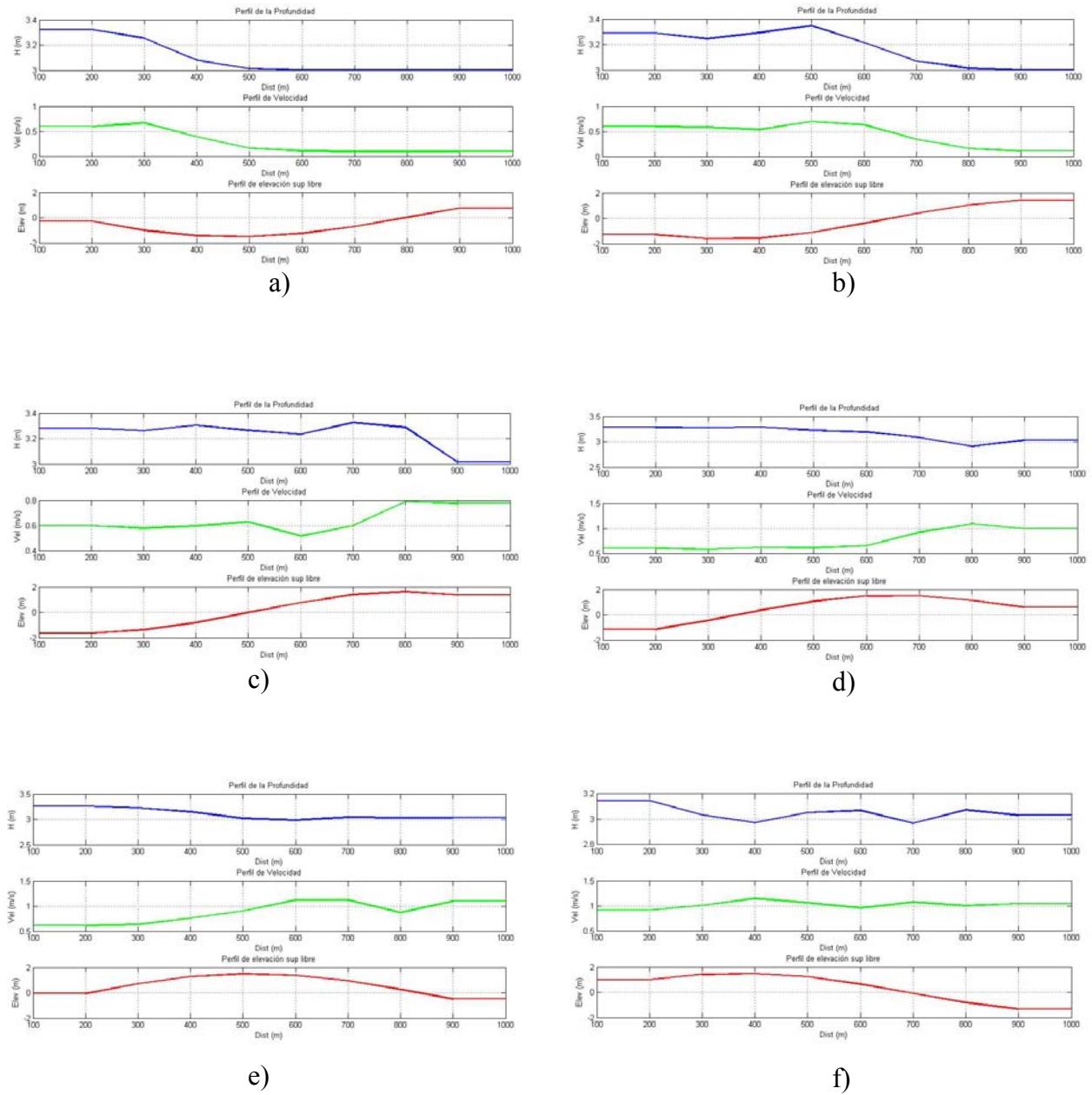


Figura 6.30 Perfiles de la superficie libre del agua: a) 50 s de simulación, b) 100 s de simulación, c) 150 s de simulación, d) 200 s de simulación, e) 250 s de simulación y f) 300 s de simulación.

6.4.4. Dirección de oleaje critico.

Para este escenario se tomaran las condiciones de inicio, propuestas en el apartado 6.3.4, antes descrito, lo único que se modifica es la dirección del oleaje, esto con la finalidad de observar, como se comporta la propagación de la onda, en relación a la dirección mas crítica, en la cual la ola entra directa al recinto.

En la figura (6.31) se muestra la propagación del oleaje, con los tres fenómenos descritos en los capítulos anteriores, es decir, refracción, difracción y reflexión. Donde se observa como se modifica la dirección del oleaje respecto a la batimetría producido por la refracción, figura (6.32).

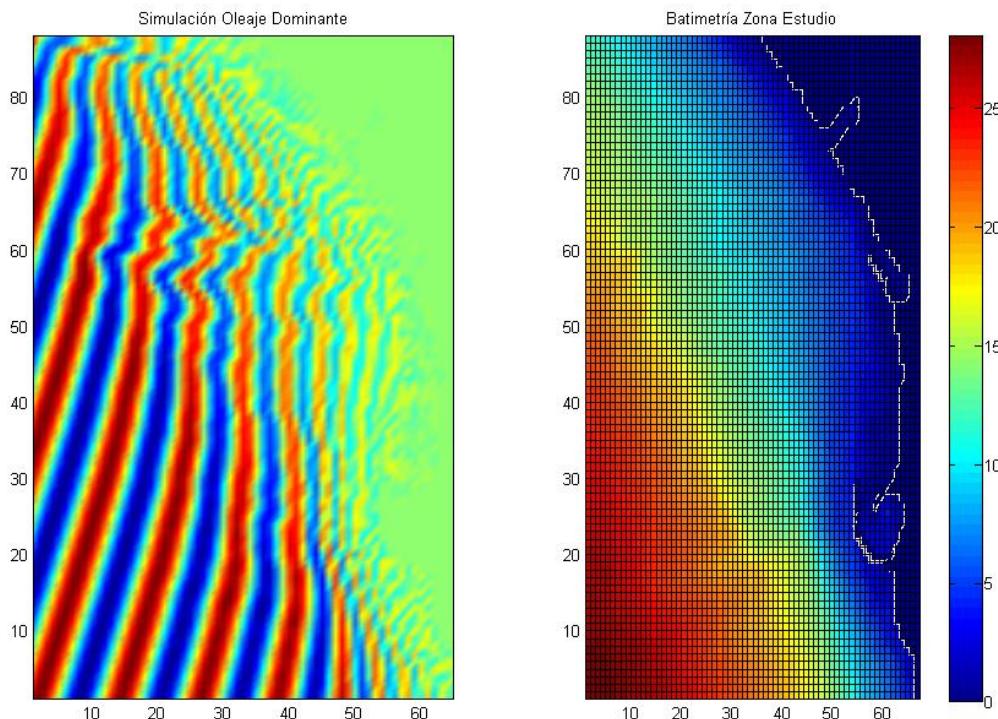


Figura 6.31 Simulación del oleaje en dirección crítica Sur-Oeste.

Donde se puede ver como se comporta la propagación de la onda conforme se disipa en el área protegida; en la figura (6.33) inciso a) la onda lleva un tiempo de 50 s, donde se observa que en el punto donde choca la onda por primera vez en la estructura se encuentra un punto donde se presenta la máxima altura de la ola y conforme entra al recinto, se ve como pierde energía, altura y se puede apreciar con claridad el fenómeno de difracción, así como también se ve que el oleaje entra al recinto con una altura de ola mayor; en el inciso b) ya transcurrieron 100 s una vez que choca con la pared de la estructura la onda se refracta, por lo que, se pueden ver claramente los dos fenómenos; sin embargo el de refracción también esta inmerso en el modelo, pero en esta parte es difícil de apreciar por que no existe una variación significativa con respecto a los otros dos fenómenos; en el inciso c) ya han transcurrido 150 s, así sucesivamente en múltiplo de 50 se va desarrollando el fenómeno hasta llegar a los 300 s, tiempo suficiente para ver claramente estos fenómenos.

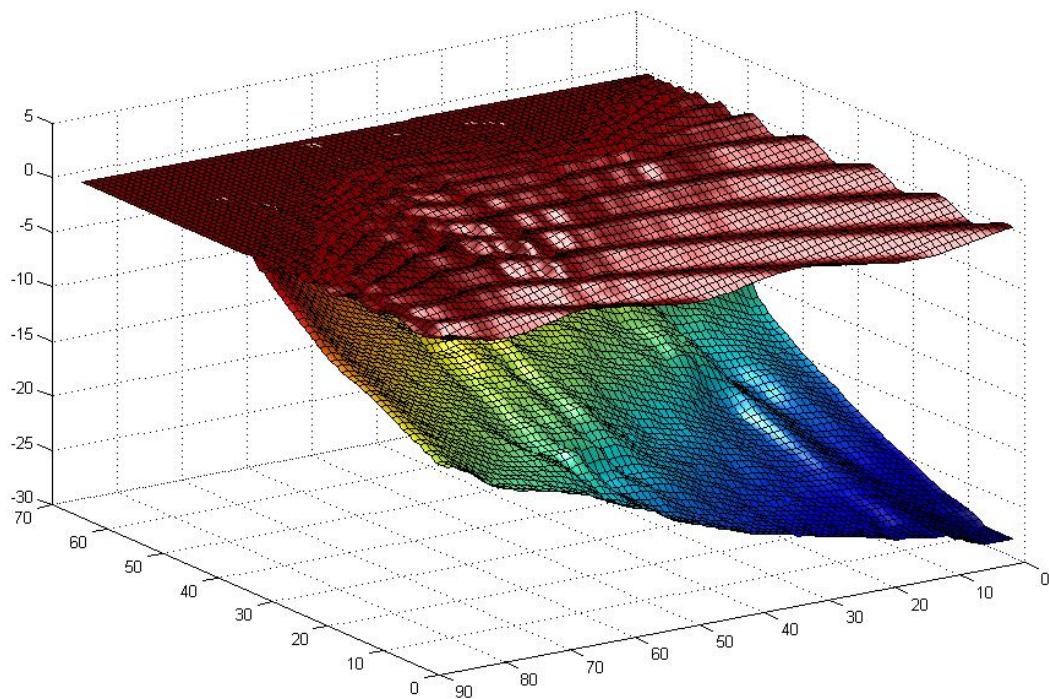


Figura 6.32 Simulación del oleaje en dirección Sur-Oeste en el plano (x, y, z)

En la parte derecha se encuentra una barra con diferentes colores los cuales representan las alturas de ola que se presentan en el lugar, arrojando buenos resultados. La figura (6.33) del inciso a) al f), se muestra el proceso de la propagación de la ola, en un tiempo de 5 min

Para este mismo ejemplo y mismos tiempos, se puede ver cada uno de los perfiles de la superficie libre del agua. Donde se aprecia la variación de la superficie libre, velocidades y la variación de la profundidad.

Cabe destacar que al momento del inicio, figura (6.34), (inciso a) del modelo se cuenta con algunos parámetros de inicio: los cuales al irse propagando la ola se produce un flujo (inciso b), al llegar a la costa (inciso c), se produce un remanso (inciso d).

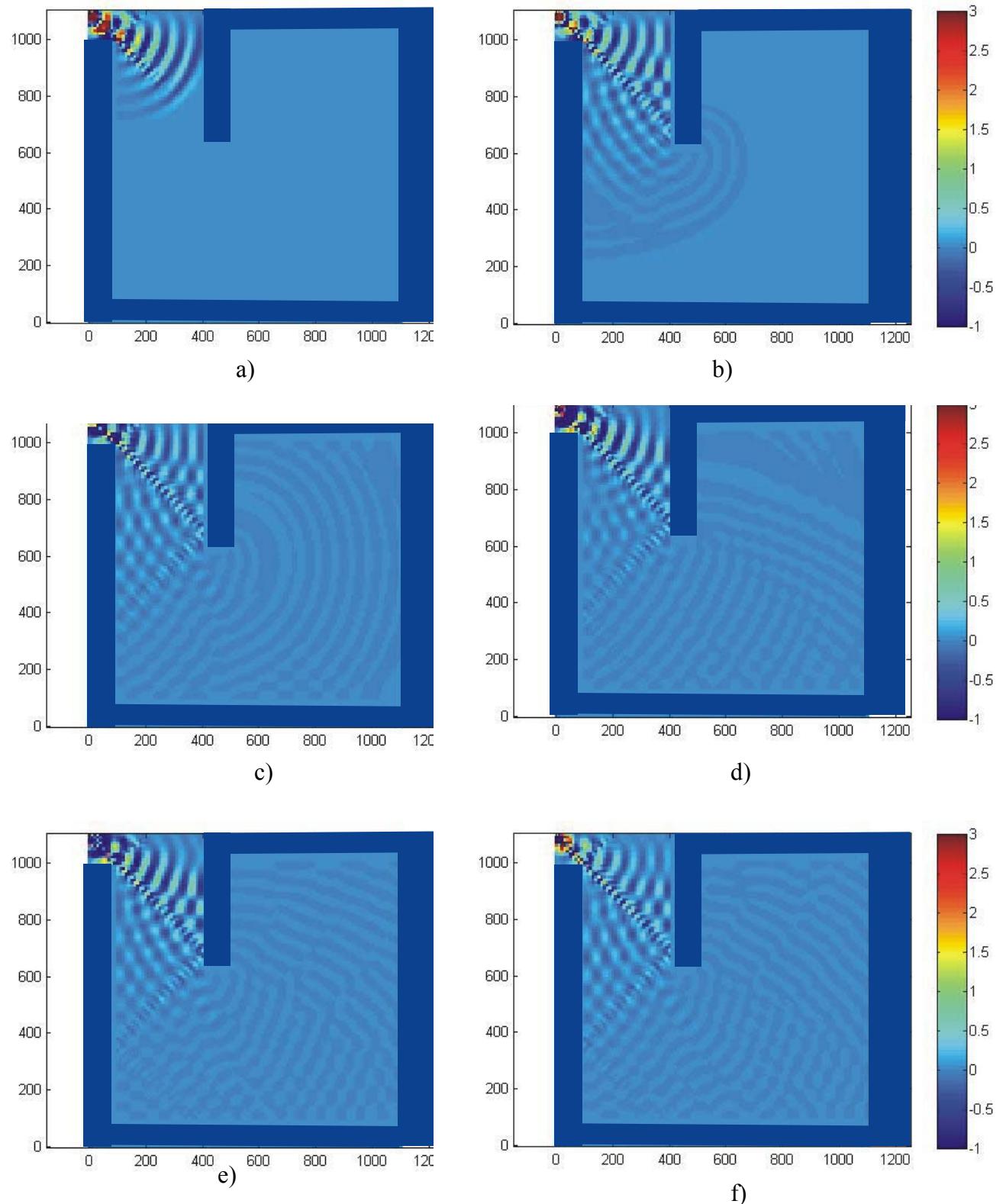


Figura 6.33 Simulación del oleaje en dirección Sur-Este: a) 50 s de simulación, b) 100 s de simulación, c) 150 s de simulación, d) 200 s de simulación, e) 250 s de simulación y f) 300 s de simulación

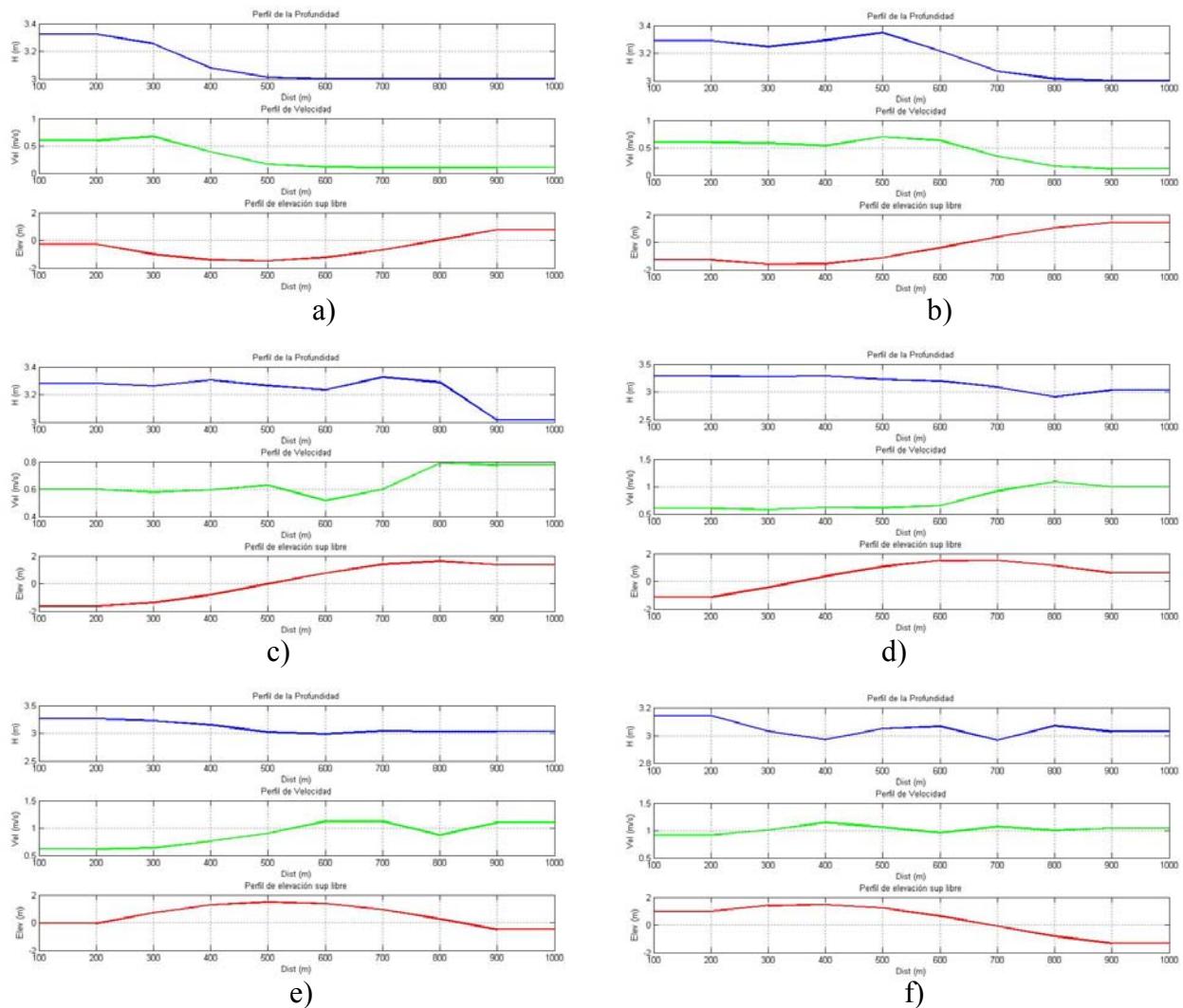


Figura 6.34 Perfiles de la superficie libre del agua: a) 50 s de simulación, b) 100 s de simulación, c) 150 s de simulación, d) 200 s de simulación, e) 250 s de simulación y f) 300 s de simulación.

6.5. La variación de la temperatura en el recinto

Como se mencionó en la sección 6.1 sobre los resultados de la escasa variación de la temperatura en la superficie libre producto de la modelación sin considerar los fenómenos del oleaje (figura 6.1b), se retoma este escenario involucrando el perfil de variación de la temperatura ambiental (figura 6.7), la variación de la superficie libre producida por los fenómenos de refracción, difracción y reflexión y el campo de velocidades producto del modelo hidrodinámico. Así mismo, se contemplan los efectos de radiación entre la superficie libre y la atmósfera representados por la siguiente ecuación: (Campos 2007)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z} = K_{TH} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{Tz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Qn \quad (6.1)$$

donde:

Qn	Flujo neto de calor	T^{-1}
T	Temperatura.	
KT	Difusividad térmica	$[L^2 T^{-1}]$

La variación de la temperatura esta fuertemente afecta al proceso de flujo neto de calor, los términos de advección y los coeficientes de difusión ya que sin ellos el resultado es el que se obtuvo en la figura (6.1.b).

Para la modelación de la variación de la temperatura en un punto dentro de la zona protegida acorde con los aspectos meteorológicos para determinado tiempo es necesario conocer el flujo neto de calor y su interacción entre las fases aire-agua en un volumen finito.

6.5.1. Flujo neto de calor

El flujo neto de calor en la superficie del océano es la suma de la radiación de longitud de onda larga y onda corta, por la evaporación y por el calor sensible: (Campos, 2006)

$$Q = Qr - Qe - Qh \quad (6.2)$$

donde

Q	Flujo de calor en el océano	$[FL^{-1}T]$
Qr	Radiación neta recibida por el océano	$[FL^{-1}T]$
Qe	Flujo de calor por evaporación	$[FL^{-1}T]$
Qh	Flujo de calor sensible	$[FL^{-1}T]$

6.5.2. Flujo neto de calor para volumen finito

En la ec (6.1) aparece el término del flujo neto de calor (Qn) en la superficie del agua, que es la suma de la radiación de longitud de onda larga y onda corta, por la evaporación y por el calor sensible. En este trabajo se utiliza la idea del flujo de calor linearizada propuesta por Haney, (1971), quien cuantifica el flujo de calor entre la interfase agua-aire, con la formulación siguiente, valida para volúmenes de control finitos: (Campos 2007)

$$Qn = \frac{\Delta Q}{\rho C_{pw}} \frac{(\Delta A)}{(\Delta V)} \Delta t \quad (6.3)$$

donde:

ΔQ	Aporte de temperatura por flujo de calor en la superficie	$[L^{-1}]$
C_{pw}	Calor específico del agua	$[L^2 T]$
ρ	Densidad del agua del mar	$[FL^{-3}]$
ΔA	Área de control ($\Delta x \Delta y$)	$[L^2]$
ΔV	Volumen de control ($\Delta x \Delta y \Delta z$)	$[L^3]$

Como se menciona al principio de este capítulo, se desarrolla el mismo escenario trabajado por Campos (2006). Asimismo se incluyen también los efectos termodinámicos producidos en la interacción océano-atmósfera, para lo cual se muestra la variación de la temperatura dentro de la zona protegida por las escolleras para un mes de simulación en la figura (6.36a) se muestran los datos obtenidos en campo y en la figura (6.36b) son los datos obtenidos por el modelo. Donde se puede observar que tienen una aproximación, sin embargo esa diferencia se debe a las condiciones iniciales que son mediante oleaje regular para nuestro modelo.

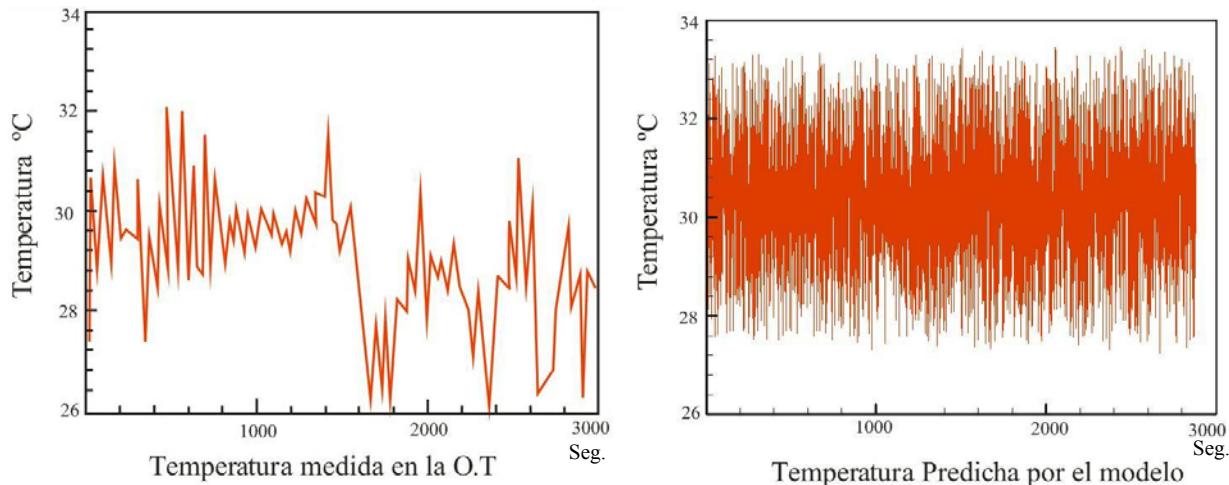


Figura 6.36 Variación de la temperatura en un punto dentro de la zona protegida por las escolleras.

CONCLUSIONES, PERSPECTIVAS Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

Este trabajo fue realizado con la finalidad de dar pauta al estudio de los fenómenos del oleaje, mediante un modelo matemático, el cual al realizar el estudio del estado del arte, se encontraron una gran variedad de métodos para atacar el problema, por lo que se decidió utilizar el Método de la Pendiente Suave (mild-slope equation), con una aproximación elíptica, acoplado al modelo hidrodinámico YAXUM 3D. Mediante los ejemplos mostrados y los resultados obtenidos, se demuestra que es un modelo adecuado para simular dichos fenómenos.

En el desarrollo de este documento se describieron cada una de las variables que intervienen en la propagación del oleaje, así como las teorías que describen la variación de la superficie libre del agua, por lo que se determinó que para una primer aproximación del módulo de oleaje, se concluye que la teoría lineal, es una de las teorías mas utilizadas para este tipo de modelos, debido a la facilidad de programación de sus ecuaciones.

Existen dos formas de solución de la ecuación de la pendiente suave: elíptico, para este tipo de resolución es preciso especificar las condiciones en todo el contorno, incluyendo la línea de costa, cuya posición se conoce a priori; Por otro lado, las aproximaciones parabólicas de la ecuación como la realizada por Radder (1979), conlleva a muchos problemas como la imposibilidad de incluir la irradiación de ondas en un amplio sector que contiene la dirección opuesta a la de avance, siendo dichos modelos incapaces de reproducir de forma adecuada el efecto de la reflexión. Por lo que se concluye que la solución de tipo elíptica proporciona buenos resultados en comparación con otro tipo de modelos.

Para poder hacer la simulación y realizar los diferentes escenarios, se analizó toda la información necesaria, lo cual se dio como resultado, que para un oleaje incidente con dirección sur-oeste, siendo esta la mas critica ya que entra directamente al recinto, generando una agitación dentro del mismo; en la dirección sur-este, ocurre lo contrario al entrar al recinto este disminuye su intensidad, altura y genera una zona de calma.

La forma como se observan los fenómenos del oleaje en comparación con otro tipo de modelos se puede apreciar en la figura (1) del lado izquierdo fue desarrollada con otro tipo de modelo y en comparación con el presentado en este trabajo, son muy similares. Debido a la batimetría, el tipo de ecuaciones utilizadas, condiciones iniciales y de frontera se pueden encontrar algunas

diferencias. La figura 1a) se obtuvo mediante la solución de las ecuaciones de Boussinesq, la figura 1b) es el obtenido con la ecuación de Berkhoff, donde se observa la refracción producida por la batimetría de la zona.

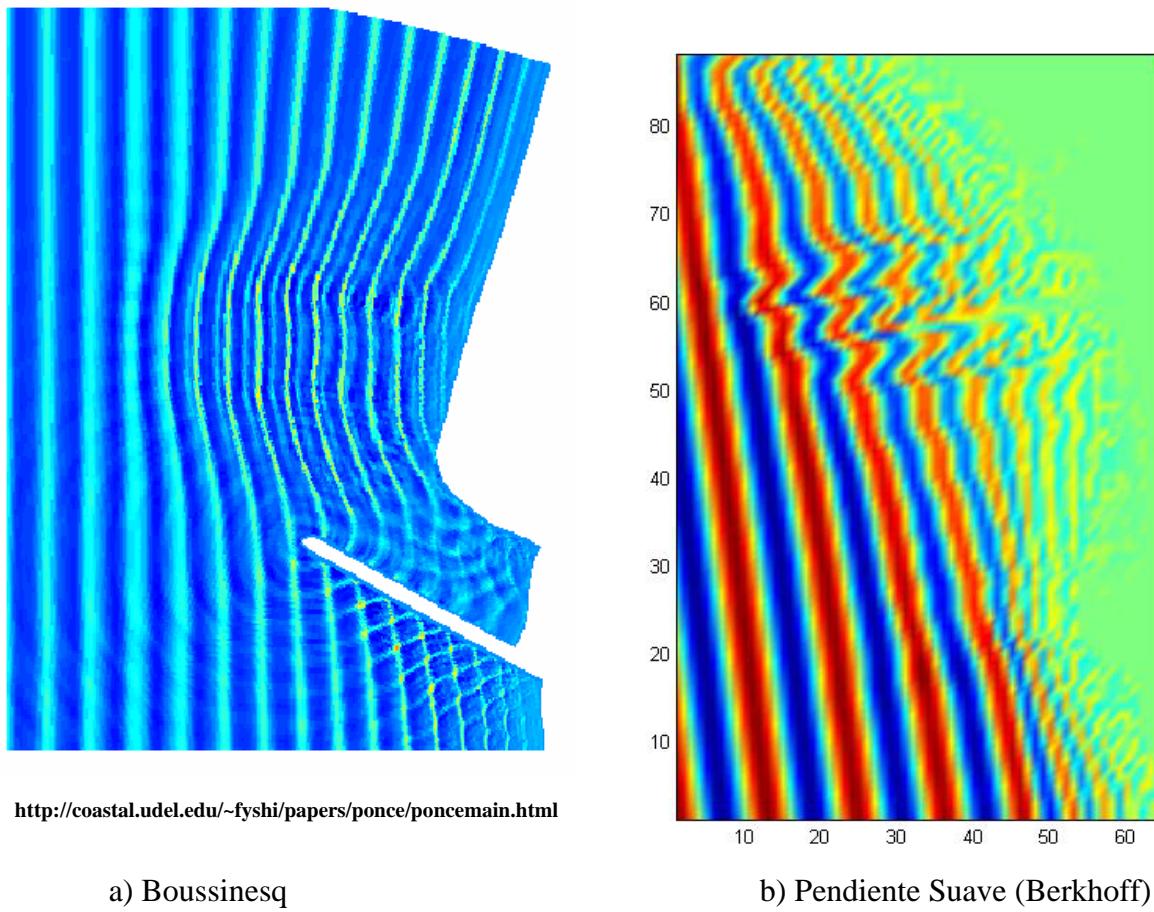


Figura 1 Comparación de los modelos de oleaje.

Para observar lo que ocurre en la zona protegida, se hace una ampliación a la imagen donde se observa la agitación dentro del de la zona protegida, y se aprecia el fenómeno de reflexión y difracción, al momento del choque con las estructuras. Figura (2)

Por tal motivo queda validado el modelo y dando buenos resultados.

La comparación de la variación de la temperatura obtenida en campo y la obtenida por el modelo, se observa que tienen una aproximación suficientemente buena (figura 6.36); las variaciones, que se observan son debidas a que en este modelo se considera un oleaje regular, a diferencia de las mediciones corresponden a un oleaje irregular.

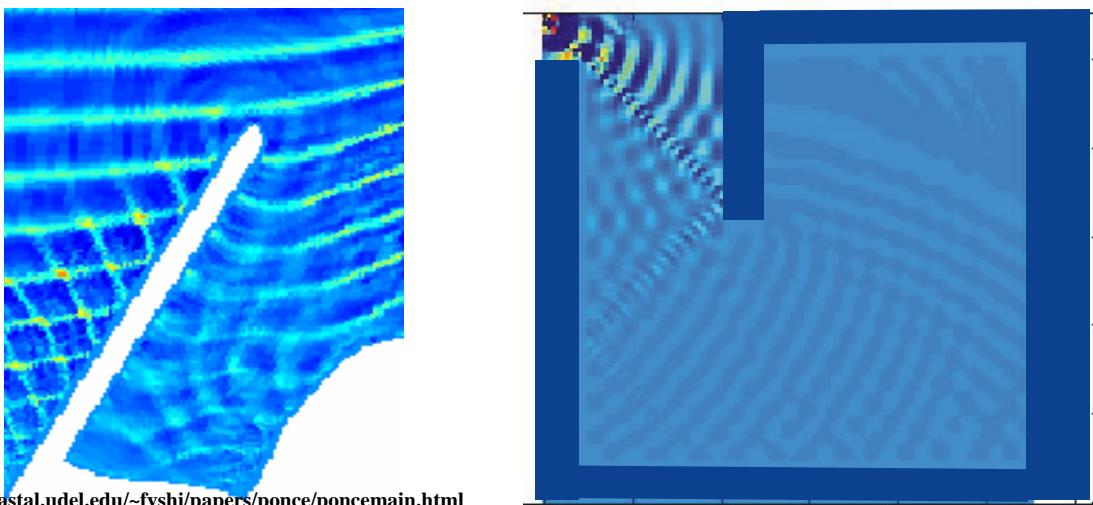


Figura 2 Zona donde se encuadran las estructuras

Perspectivas

El trabajo que se desarrolló, no termina con esta modelación de los fenómenos antes mencionados; actualmente se está trabajando con la simulación del oleaje en 3 dimensiones tanto para condiciones de oleaje regular como irregular.

Otro tema que se tiene contemplado es el de refinar la modelación de la zona de rompiente tanto en 2D vertical como 3D, esto con la implementación de las ecuaciones de Navier – Stokes; posteriormente adecuarle los módulos de sedimentos y de calidad del agua, cuya finalidad es de poseer un mejor conocimiento del entorno costero en aspectos de transporte de sedimentos, de contaminantes y otras aplicaciones relacionadas con la hidrodinámica costera y ambiental.

Una perspectiva que se tiene en especial, es de emplear una malla de elemento finito (mallas adaptativas) en lugar de diferencias finitas, cuyo propósito es de no llegar a la necesidad de emplear modelos de sub malla para refinar ciertas zonas donde se desea estudiar el fenómeno a detalle.

Recomendaciones

La aplicación de la ecuación de la pendiente suave es muy amigable para la solución de problemas relacionados a los fenómenos de refracción, difracción y reflexión. Sin embargo existen algunas recomendaciones para la solución de estas ecuaciones:

1. Emplear un método numérico o algoritmo diferente al propuesto aquí, de solución del sistema de ecuaciones pentadiagonal bandeadas que reduzca el tiempo de cómputo.

2. Validar el modelo con una serie de mediciones actuales *in situ* en diferentes épocas del año y así obtener escenarios hidrodinámicos distintos.
3. Implementar otro tipo de teorías de oleaje como la de cnoidal, o stokes que describen de otra forma la variación de la superficie libre.
4. Compararlo con un modelo físico que permita visualizar cada uno de los fenómenos que modifican el oleaje.
5. El trabajo desarrollado en esta tesis fue complicado, lo que se recomienda es formar equipos interdisciplinarios para la solución de problemas. En caso particular el empleo de las ecuaciones mostradas en esta tesis son difíciles llevarlas a un lenguaje de programación, además de que se debe tener cuidado con las condiciones de frontera dentro del dominio.

Referencias Bibliografía

1. Balas L., Inan A. 2002. “A numerical model of wave propagation on mild slopes”. Journal of Coastal Research, Special Issue 36.
2. Baquerizo Azofra Asunción, et all, “Fundamentos del movimiento oscilatorio”. Grupo de Puertos y Costas Universidad de Granada, Granada, 2004.
3. Barrios, H. (2006), “Modelación baroclínica en medios marinos estratificados. Aplicación al Golfo de México”, Tesis de Maestría en Ciencias, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura U. Z., México D. F.
4. Berkhof, J. (1972) Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th. International Conference on Coastal Engineering, ASCE. Vancouver, Canada.
5. Berkhof, J. (1976) Mathematical models for simple harmonic linear water waves, wave diffraction, and refraction. Ph. D. Dissertation, Publication No. 163. Delft Hydraulics Laboratory.
6. Berkhof, J. (1982) Refraction and diffraction of water waves; wave deformation by a shoal, comparison between computation and measurements, report on mathematical investigation. Delft Hydraulics Laboratory, Report W 154 part VIII.
7. Berkhof, J., N. Booij y A. Radder (1982) Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. Coastal Engineering Vol. 6. pp. 255-279
8. Booij, N. (1981) Gravity waves on water with non-uniform depth and current. Tesis Doctoral. Technical University of Delft.
9. Campos Pérez Claudio Iván (2006) que para obtener el grado de Maestro en Ciencias con especialidad en Hidráulica. “Modelacion Matematica de Desacargas Térmicas en Medios Marinos. Aplicación a la Descarga de la Central Nucleoeléctrica Laguna Verde”.
10. Campos Iván, et al (2007) *MODELACION DE LA RECIRCULACIÓN DE LA DESCARGA TÉRMICA DE LA CENTRAL NUCLEOELÉCTRICA LAGUNA VERDE*, Articulo para el Instituto de Ciencias del Mar y Limnología, UNAM.
11. Casulli, V., Cheng, R. T (1992)., “Semi-implicit finite difference methods for three dimentional shallow water flow”, International Journal for numerical methods in fluids, Volume 15, pp. 629-648.
12. CFE, (1983). Comisión Federal de Electricidad, “Manual de Diseño de Obras Civiles. Hidrotecnia, Hidráulica Marítima” Instituto de Investigaciones Eléctricas. México, México, Ed. Mexicana.

13. CFE, (2003). Comisión Federal de Electricidad Subdirección Técnica Gerencia de Estudios de Ingeniería Civil y Administración Portuaria Integral de Veracruz S.A. de C.V, INFORME GLOBAL DE RESULTADOS 15 MARZO 2002 A 14 ENERO 2003, Departamento de Oceanografía Residencia Zona Golfo.
14. Christopher, (1988). “*Mthematical Models in Coastal Engineering*”, Aritotle University Thessaloniki, Greece.
15. (CIGEFI) Centro de Investigaciones Geofísicas, Técnicas de pronóstico de oleaje para las costas de Costa Rica, Universidad de Costa Rica Instructor: Dr. Omar G. Lizano R. Febrero del 2003.
16. Couder, C. C. (2005), Paralelización del modelo YAXUM/3D para el estudio de la circulación en el Golfo De México, Protocolo de investigación doctoral, Instituto Mexicano del Petróleo, México D. F.
17. Dingemans, (1997), Maarten W Dingemans, “*Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms*” , Ed. World Scientific, Singapore, 1997, 471pp.
18. Frías, (1986) Ingeniería de Costas, México, Ed. Limusa, 339 pp
19. Fuentes (1996), Propagación del oleaje en la proximidad de la costa, Tesis Doctoral. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
20. Gabriel L. (2007): Modelación matemática de mecanismos de reacción de variables ambientales en ecosistemas acuáticos costeros, caso de estudio: laguna "El Yucateco", en el Estado de Tabasco, Méx", Tesis de maestría. Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, IPN..
21. Goda, (1970), Numerical experiments on wave statistics with spectral simulations, Port and Harbour Res Inst.
22. Goda, (2000), Random sea and design of maritime structures, 2nd ed, Advances Series on Ocean Engineering, Singapur, World Scientific, 443 p.p.
23. González, S. R. (2005), Modelación numérica de circulación de corrientes oceánicas para el Golfo de México. Generación de escenarios hidrodinámicos, Tesis de Maestría en Ciencias, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura U. Z., México D. F.
24. Herrera, E. (2004), Dinámica y modelación de los sedimentos en la desembocadura del río Grijalva, Tesis de Maestría en Ciencias, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura U. Z., México D. F.
25. Ippen, (1966) Arturo T. Ippen, “*Estuary and Coastline Hidrodynamics*, Ed McGraw-Hill, Cambridge, Massachusetts, 744 p.p.

26. Le Méhauté Bernard. (1976), “*An Introduction to Hidrodinamics y water waves*”, Ed. Springer – Verlag, New York Heidelberg Berlin, pag. 197.
27. Linwood (2002). *Estimation of near shore waves*, Part II, chapter 3.
28. Losada (2000), “*Modelos matemáticos y numéricos para el estudio de la agitación portuaria*”, Grupo de Ingenieros Oceanográficos y de la Costa, Vol.1 Numero 1, España.
29. Martínez (2004), Modelo lineal elíptico de transformación del oleaje, Tesis de Maestría en Ingeniería Civil Hidráulica, Universidad Autónoma de México.
30. Oluca – Mc 2005, Universidad de Cantabria, “*Modelo de propagacion de oleaje monocromático*”, Ed. Ministro del Medio Ambiente, Dirección General de Costas.
31. Pierson (1964), A proponed spectral from for fully developed wind sea baded on the similarity theory of S A Kitaigorodskii. J Geoph Res.
32. Rader, A. (1979) “On the parabolic ecuation method for water-wave propagation” Jornal of Fluid Mechanics Vol. 95. pp. 159-176.
33. Rodríguez, C. C. (2003), Modelación hidrodinámica en 2D y 3D para lagos. Aplicación a la laguna de Coyuca y al embalse de Valle de Bravo, Tesis de Maestría en Ingeniería Hidráulica, DEPFI, Universidad Nacional Autónoma de México.
34. Rosales (2005), Transmisión del oleaje irregular en rompeolas superficiales permeables a talud., Tesis de Maestría en Ciencias, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura U. Z., México D. F.
35. S.C.T. (2001), Secretaría de Comunicaciones y Transportes, “*manual de dimensionamiento portuario*”. México.
36. U. Cantabria, (2000). Universidad de Cantabria, “*Documento de referencia Dinámicas*” Volumen: 1, Ed. Ministro del Medio Ambiente, Dirección General de Costas.
37. U. Granada, (2004). Asunción Baquerizo Azofra Miguel A. Losada Rodríguez María López Rodríguez. Fundamentos del movimiento oscilatorio, Grupo de Puertos y Costas Universidad de Granada 10 de septiembre de 2004.
38. UNAM, (2003) Curso sobre las recomendaciones para Obras Marítimas, Tampico.
39. Vergara 2005, Procesos costeros, Tesis Doctoral, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura U. Z., México D. F.

Paginas de internet

<http://www.iaea.org/Publications/Factsheets/Spanish/spelectr.html>

<http://www.azti.es/>

[http://www.ce.ufl.edu/~mcdougal/CEM/Part II Coastal Hydrodynamics/II3 Estimation of Nearshore Waves.pdf](http://www.ce.ufl.edu/~mcdougal/CEM/Part%20II%20Coastal%20Hydrodynamics/II3%20Estimation%20of%20Nearshore%20Waves.pdf)

<http://coastal.udel.edu/~fyshi/papers/ponce/poncemain.html>

<http://www.argusint.com>

<http://poet.jpl.nasa.gov/>

ANEXO 1

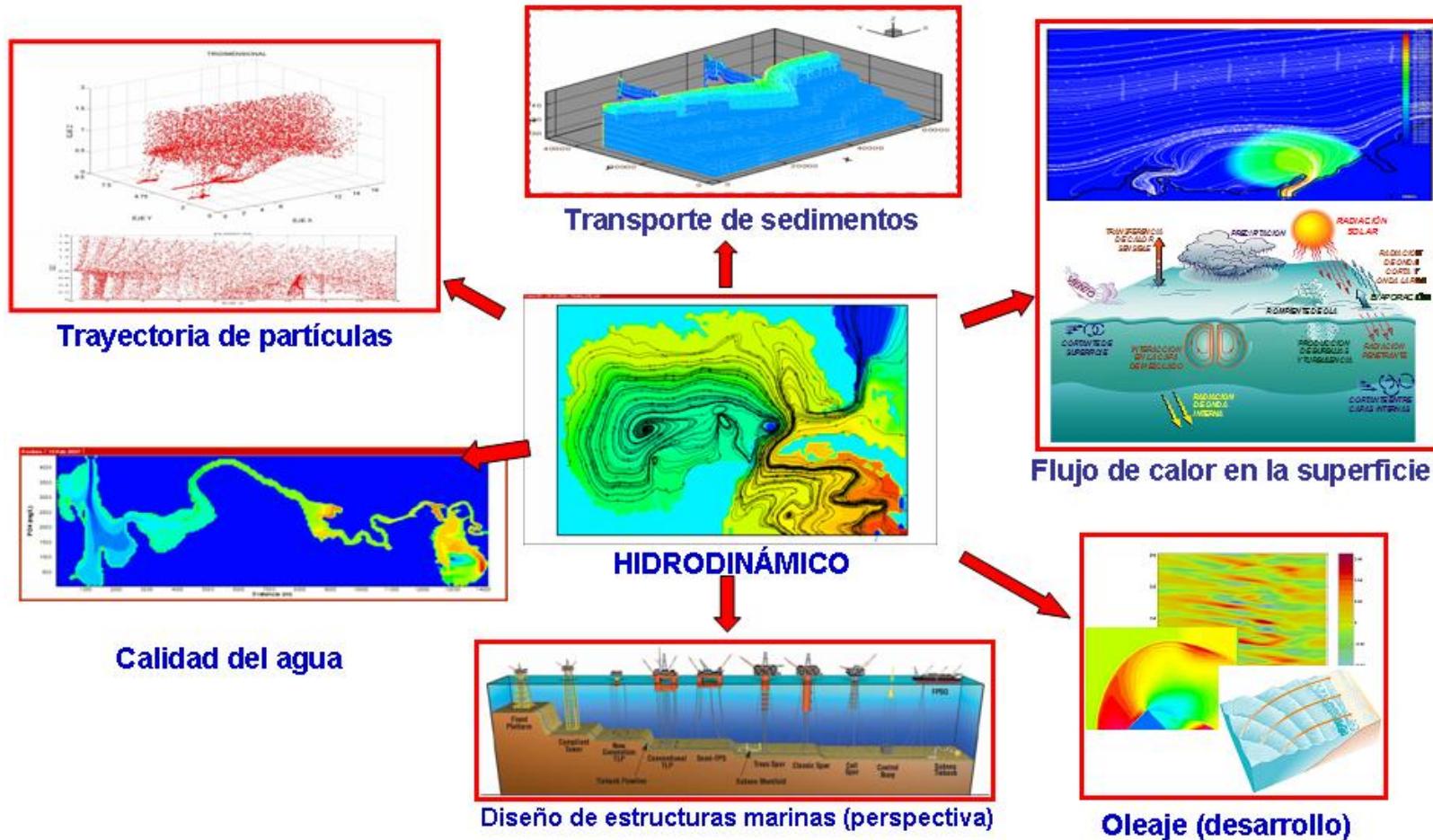
EL MODELO YAXUM/3D

DESCRIPCION

En este anexo se presentan una serie de graficas que describen el potencial de modelo YAXUM/3D. Se muestran las aplicaciones, que corresponden prácticamente, los submodulos del programa. Se muestra también el formulismo físico-matemático, algunos elementos de la solución numérica del mismo, y finalmente, se muestra el algoritmo del modelo. Mayores detalles del YAXUM/3D se podrán consultar en Barrios (20006), Campos (2006) y Couder (2000).

Modelo numérico YAXUM/3D

Capacidades



Modelo numérico YAXUM/3D

El modelo matemático

Ecuaciones de movimiento Reynolds (Broomans, 2003)

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'u'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} - f_x$$

Ecuación de la superficie libre
(Casulli y Cheng, 1992)

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-d}^{\eta} \bar{U} dz \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-d}^{\eta} \bar{V} dz \right)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}'u'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}'v'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial z} - f_y$$

Ecuación de la velocidad vertical (Casulli y Cheng, 1992)

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right)$$

Ecuaciones de transporte (Pond y Pickard, 1991)

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{T_x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{T_y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{T_z} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{S_x} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{S_y} \frac{\partial \bar{S}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{S_z} \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \right)$$

Ecuación de estado
(UNESCO, 1981)

$$\rho(\bar{S}, \bar{T}, \bar{P}) = \frac{\rho_0}{\left(1 - \frac{\bar{P}}{k_p} \right)}$$

Modelo numérico YAXUM/3D

El modelo matemático

Ecuaciones auxiliares:

Ecuación del término de presión
(Broomans, 2003)

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -\frac{\rho g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^{\eta} \frac{\partial \rho'}{\partial x} dz - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_{atm}}{\partial x}$$

donde: $\rho' = \rho - \rho_0$

Ecuación de estado
(UNESCO, 1981)

$$\begin{aligned}\rho_w = & 999,842594 + 6,793952 \times 10^{-2} \bar{T} - 9,095290 \times 10^{-3} \bar{T}^2 \\ & + 1,001685 \times 10^{-4} \bar{T}^3 - 1,120083 \times 10^{-6} \bar{T}^4 + 6,536332 \times 10^{-9} \bar{T}^5\end{aligned}$$

$$\rho(\bar{S}, \bar{T}, \bar{P}) = \frac{\rho_0}{\left(1 - \frac{\bar{P}}{k_p}\right)}$$

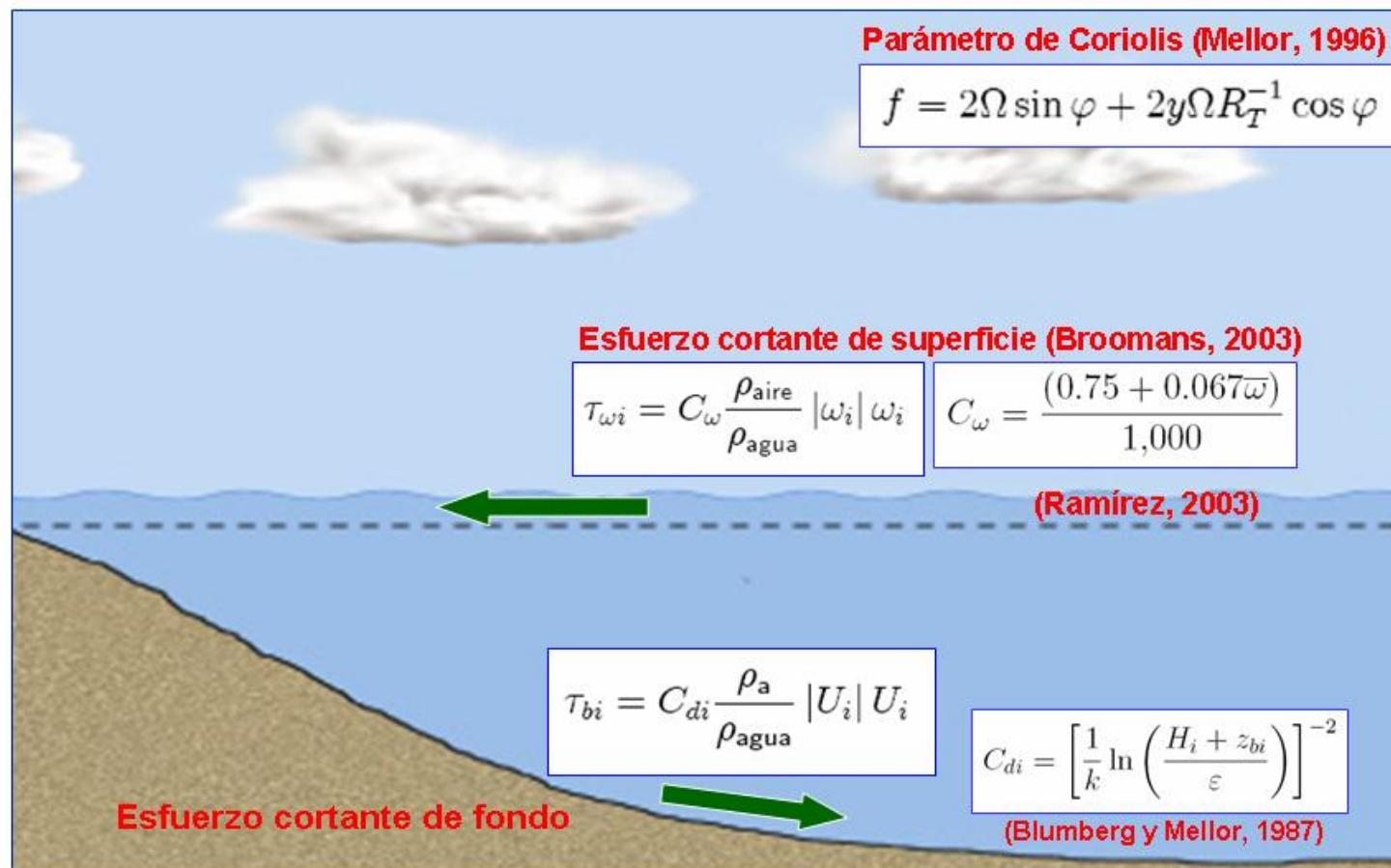
$$\rho_0 = \rho_W + A\bar{S} + B\bar{S}^{3/2} + C\bar{S}^2$$

$$\begin{aligned}k_p = & k(\bar{S}, \bar{T}, 0) \\ & + \bar{P} \left(3,239908 + 1,43713 \times 10^{-3} \bar{T} + 1,16092 \times 10^{-4} \bar{T}^2 - 5,77905 \times 10^{-7} \bar{T}^3 \right) \\ & + \bar{P}\bar{S} \left(2,2838 \times 10^{-3} + 1,0981 \times 10^{-5} \bar{T} - 1,6078 \times 10^{-6} \bar{T}^2 \right. \\ & \quad \left. - 1,91075 \times 10^{-4} \bar{P}\bar{S}^{3/2} \right) \\ & + \bar{P}^2 \left(8,50935 \times 10^{-5} - 6,12293 \times 10^{-6} \bar{T} + 5,2787 \times 10^{-8} \bar{T}^2 \right) \\ & + \bar{P}^2\bar{S} \left(-9,9348 \times 10^{-7} + 2,0816 \times 10^{-8} \bar{T} + 9,1697 \times 10^{-10} \bar{T}^2 \right)\end{aligned}$$

Modelo numérico YAXUM/3D

El modelo matemático

Condiciones de frontera:



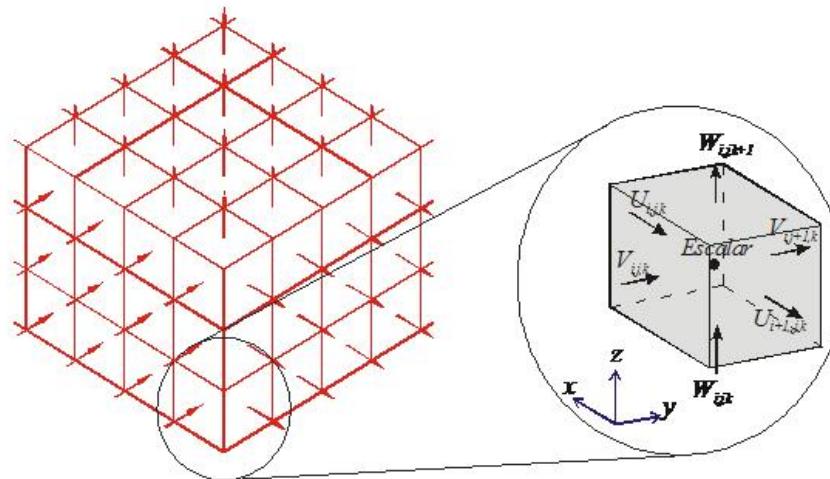
Modelo numérico YAXUM/3D

El modelo matemático

Método de solución numérica:

Método eulereoano-lagrangeano (diferencias finitas-características)

Discretización en Volumen Finito



Mallado rectangular tipo: Staggered Cell ó MAC

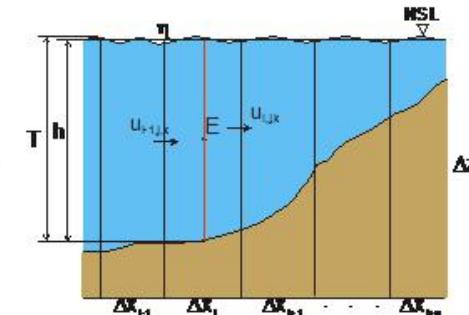
Modelo numérico YAXUM/3D

El modelo matemático

La resolución en la vertical:

Modelo de una sola capa

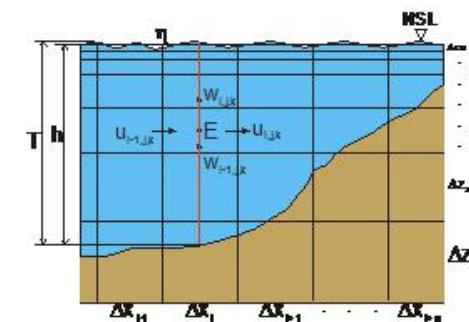
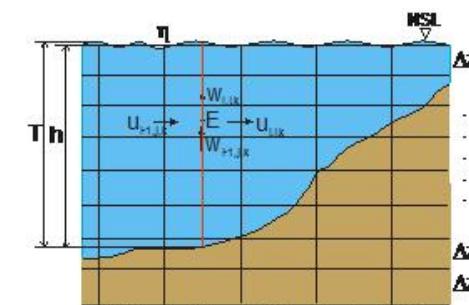
Integrado en la vertical (barotrópico)



Modelo de multicapas

En multicapas con Δz constante (baroclínico)

En multicapas con Δz variable (baroclínico)



Modelo numérico YAXUM/3D

El modelo matemático

Formulación numérica de las ecuaciones:

Para U , se tiene:

(Casulli y Cheng, 1992)

$$\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n+1} = \mathbf{G}_{i+1/2,j}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) \Delta Z \eta_{i+1/2,j}^n$$

donde:

$$\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_{i+1/2,j,M}^{n+1} \\ u_{i+1/2,j,M-1}^{n+1} \\ u_{i+1/2,j,M-2}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{i+1/2,j,m}^{n+1} \end{bmatrix} \quad \Delta Z = \begin{bmatrix} \Delta z_M \\ \Delta z_{M-1} \\ \Delta z_{M-2} \\ \vdots \\ \Delta z_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_{i+1/2,j}^n = \begin{bmatrix} \Delta z_M F U_{i+1/2,j,M}^n + \Delta t \tau_x^w \\ \Delta z_{M-1} F U_{i+1/2,j,M-1}^n \\ \Delta z_{M-2} F U_{i+1/2,j,M-2}^n \\ \vdots \\ \Delta z_m F U_{i+1/2,j,m}^n - \Delta t \tau_x^b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n = \begin{bmatrix} \Delta z_M + \frac{\nu_{TVM-1/2} \Delta t}{\Delta z_{M-1/2}} & \frac{-\nu_{TVM-1/2} \Delta t}{\Delta z_{M-1/2}} & \dots & 0 \\ \frac{-\nu_{TVM-1/2} \Delta t}{\Delta z_{M-1/2}} & \Delta z_{M-1} + \frac{\nu_{TVM-1/2} \Delta t}{\Delta z_{M-1/2}} + \frac{\nu_{TVM-3/2} \Delta t}{\Delta z_{M-3/2}} & \frac{-\nu_{TVM-3/2} \Delta t}{\Delta z_{M-3/2}} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{-\nu_{TVm+1/2} \Delta t}{\Delta z_{m+1/2}} & \Delta z_m + \frac{\nu_{TVm+1/2} \Delta t}{\Delta z_{m+1/2}} & \vdots \end{bmatrix}$$

Modelo numérico YAXUM/3D

El modelo matemático

Formulación numérica de las ecuaciones:

Para U , se tiene:

(Casulli y Cheng, 1992)

$$\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n+1} = \mathbf{G}_{i+1/2,j}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) \Delta Z \eta_{i+1/2,j}^n$$

donde:

$$\begin{aligned} FU_{i+1/2,j,k}^n &= U_{i+1/2-a,j-b,k-d}^n - B_{i+1/2,j,k}^n \\ &+ \left(\nu_{TH} \Delta t \frac{U_{i+1/2-a+1,j-b,k-d}^n - 2U_{i+1/2-a,j-b,k-d}^n + U_{i+1/2-a-1,j-b,k-d}^n}{\Delta x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{U_{i+1/2-a,j-b+1,k-d}^n - 2U_{i+1/2-a,j-b,k-d}^n + U_{i+1/2-a,j-b-1,k-d}^n}{\Delta y^2} \right) \\ &+ \Delta t f V_{i+1/2-a,j-b,k-d}^n \end{aligned}$$

Término baroclínico:

(Hodges y Dallimore, 2001)

$$B_{i+1/2,j,k}^n = \frac{g}{\rho_0 \Delta x} \left\{ \sum_{m=k}^{M=k} \rho'_{i+1,j,m} - \sum_{m=k}^{M=k} \rho'_{i,j,m} \right\}^n$$

Para W ,
ecuación de
continuidad:

$$\begin{aligned} W_{i,j,k+1}^{n+1} &= W_{i,j,k-1/2}^{n+1} - \frac{\Delta z_{i+1/2,j,k}^n U_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \Delta z_{i-1/2,j,k}^n U_{i-1/2,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \\ &\quad - \frac{\Delta z_{i,j+1/2,k}^n V_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \Delta z_{i,j-1/2,k}^n V_{i,j-1/2,k}^{n+1}}{\Delta y} \quad \text{para } k = m, m+1, \dots, M \end{aligned}$$

Modelo numérico YAXUM/3D

El modelo matemático

Formulación numérica de las ecuaciones:

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\Delta z_{i+1/2,j})^T \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n+1} - (\Delta z_{i-1/2,j})^T \mathbf{U}_{i-1/2,j}^{n+1} \right]$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(\Delta z_{i,j+1/2})^T \mathbf{V}_{i,j+1/2}^{n+1} - (\Delta z_{i,j-1/2})^T \mathbf{V}_{i,j-1/2}^{n+1} \right]$$

$$d_{i,j}^n \eta_{i,j}^{n+1} - s_{i+1/2,j}^n \eta_{i+1,j}^{n+1} - s_{i-1/2,j}^n \eta_{i-1,j}^{n+1} - s_{i,j+1/2}^n \eta_{i,j+1}^{n+1} - s_{i,j-1/2}^n \eta_{i,j-1}^{n+1} = q_{i,j}^n$$

Sistema Pentadiagonal
(Casulli y Cheng, 1992)

$$\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n+1} = \mathbf{G}_{i+1/2,j}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) \Delta Z \eta_{i+1/2,j}^n$$

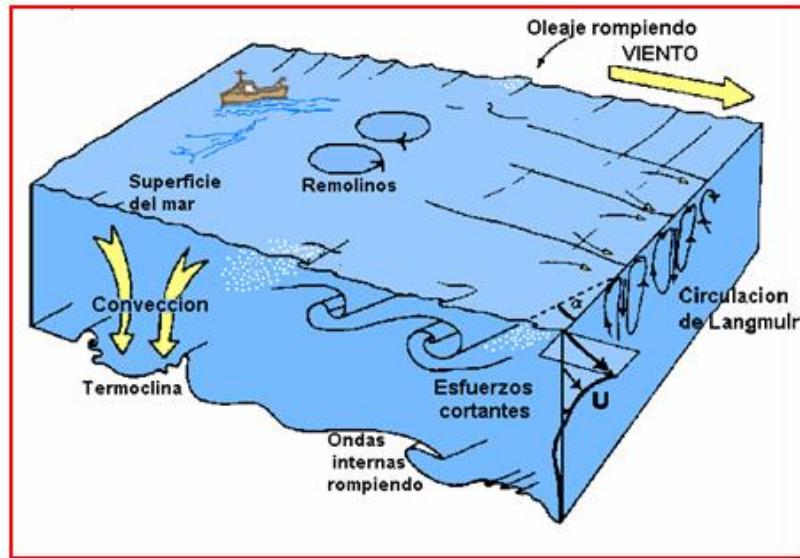
$$a(k) U_{i,j,k-1}^{n+1} + b(k) U_{i,j,k}^{n+1} + c(k) U_{i,j,k+1}^{n+1} = r(k)$$

Sistema Tridiagonal
(Rodríguez, 2003)

Modelo numérico YAXUM/3D

El modelo matemático

Modelación de la turbulencia:



Correlaciones dobles: $-\frac{\partial \bar{v}' u'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}' v'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}' w'}{\partial z}$

$$\approx \nu_{TH} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_{TV} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) \quad (\text{Stansby, 1995})$$

$$\nu_{TH} = \frac{5.9H}{C_Z} \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2} \quad \nu_{TZ} = l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right)^2}$$

$$\nu_{TV} = \left[l_h^{-4} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \right] + l_v^{-4} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\nu_{TV} = qlS_M \quad (\text{Smagorinsky, 1963})$$

$$\nu_{TH} = C_{smag} \Delta x \Delta y \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

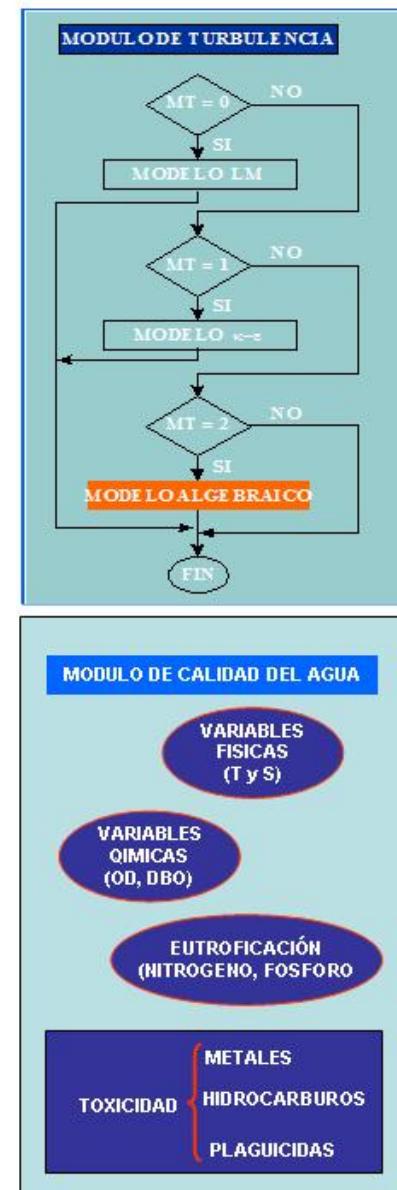
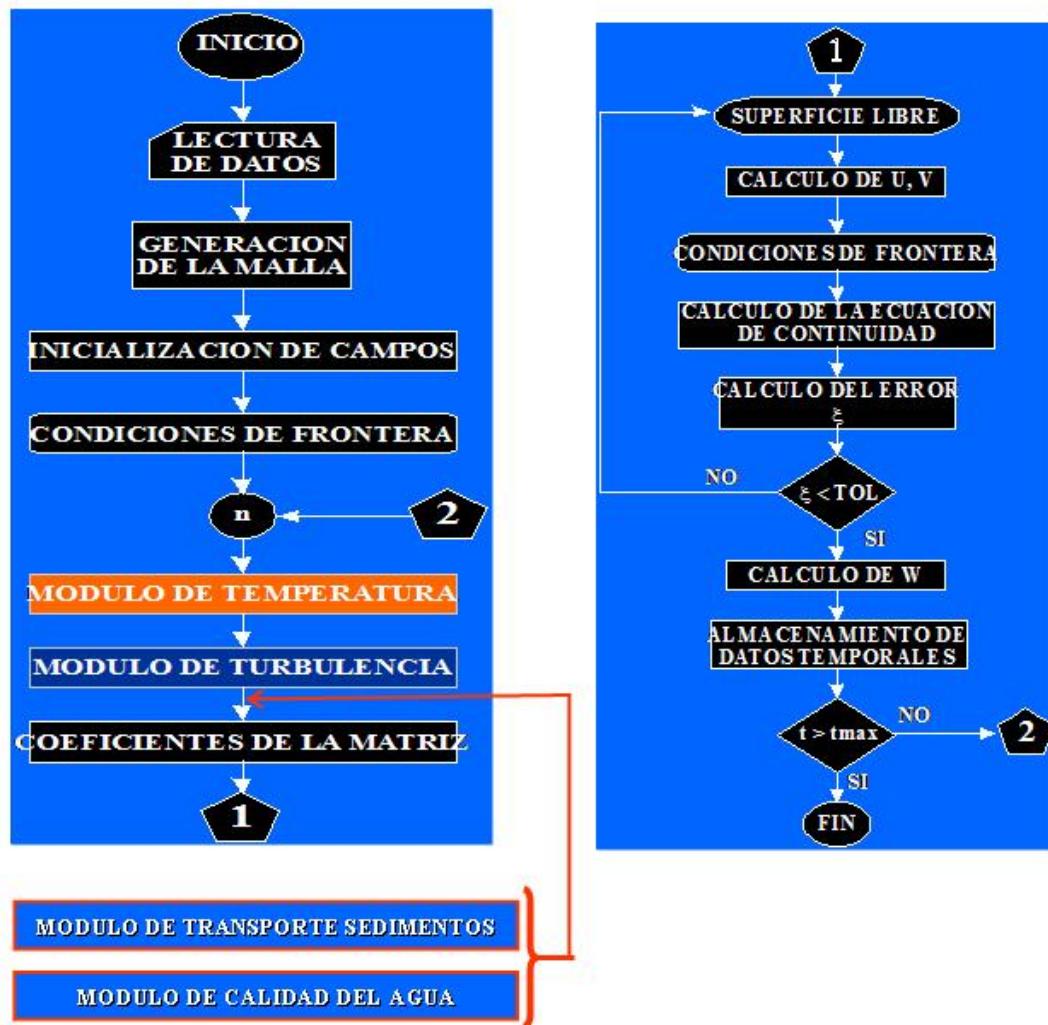
$$\nu_T = C_\mu \frac{\kappa^2}{\epsilon} \quad (\text{Rodi, 1980})$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + P_\epsilon - \epsilon_\epsilon$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right) + P_\kappa - \epsilon$$

Modelo numérico YAXUM/3D

El algoritmo

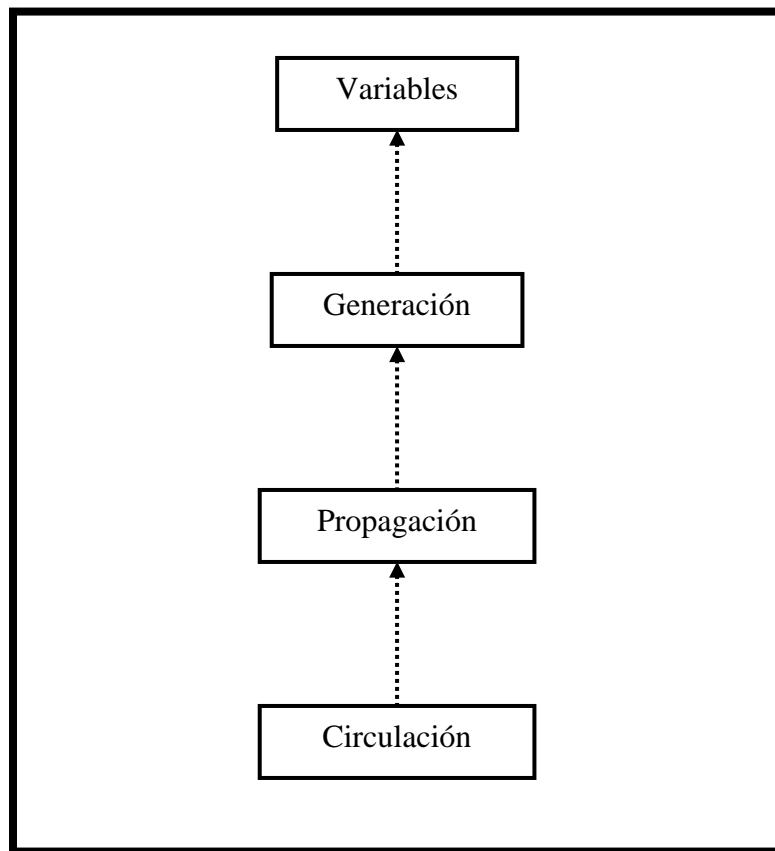


ANEXO 2

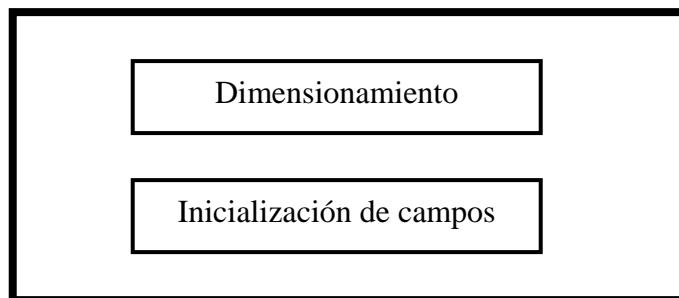
DIAGRAMA DE BLOQUES Y DE FLUJO DEL MODELO

ANEXO 2. Diagrama de bloques del modelo de oleaje.

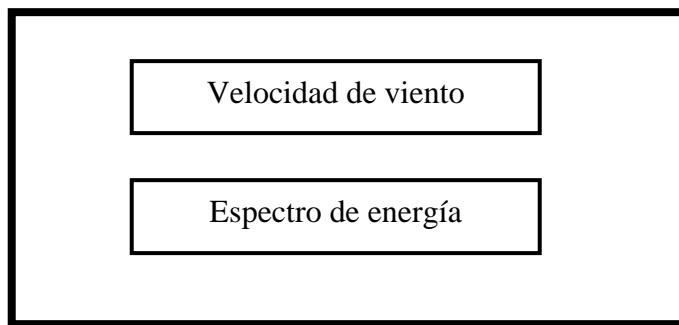
MODULO DE OLEAJE



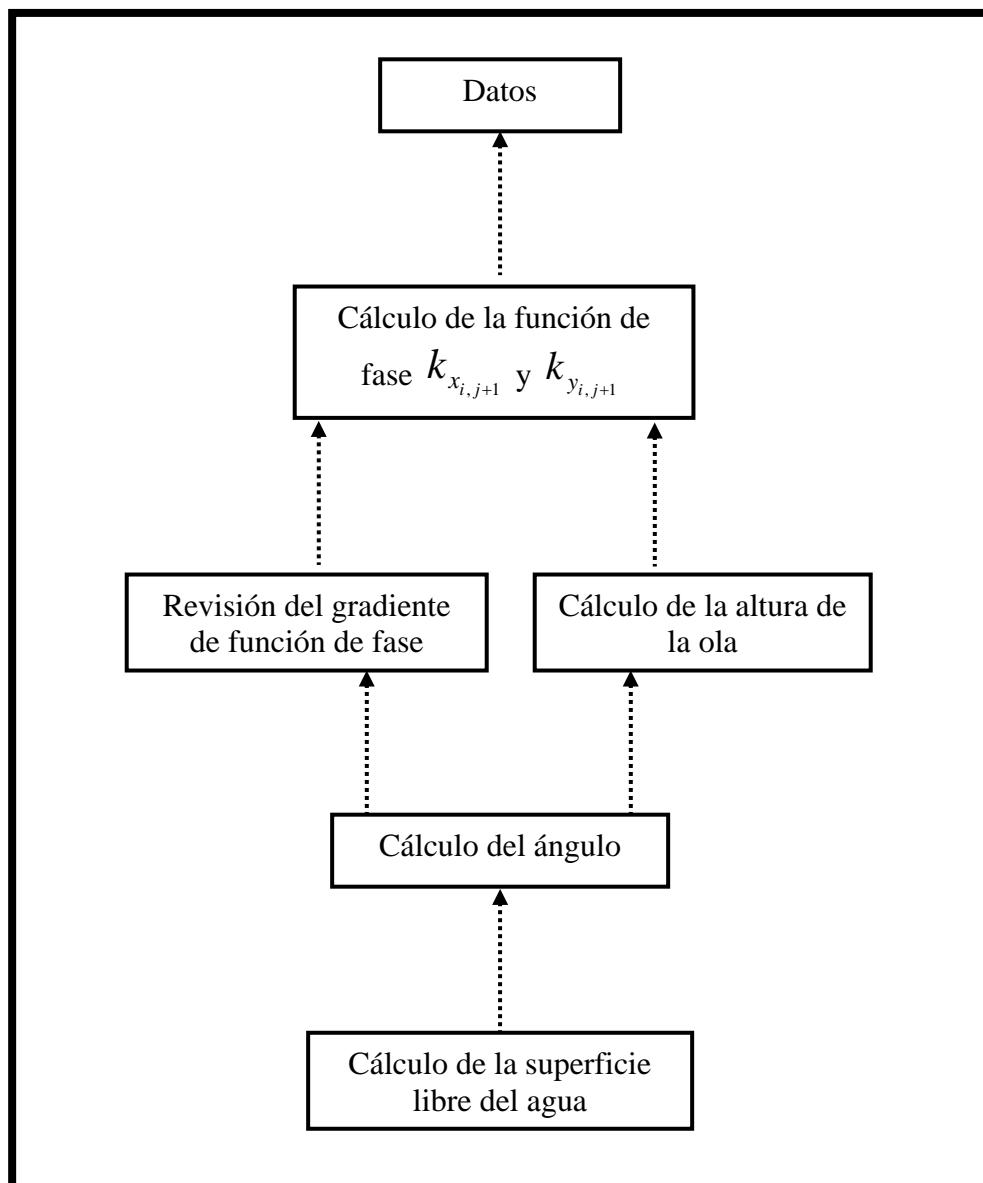
VARIABLES



GENERACION



PROPAGACION



CIRCULACION

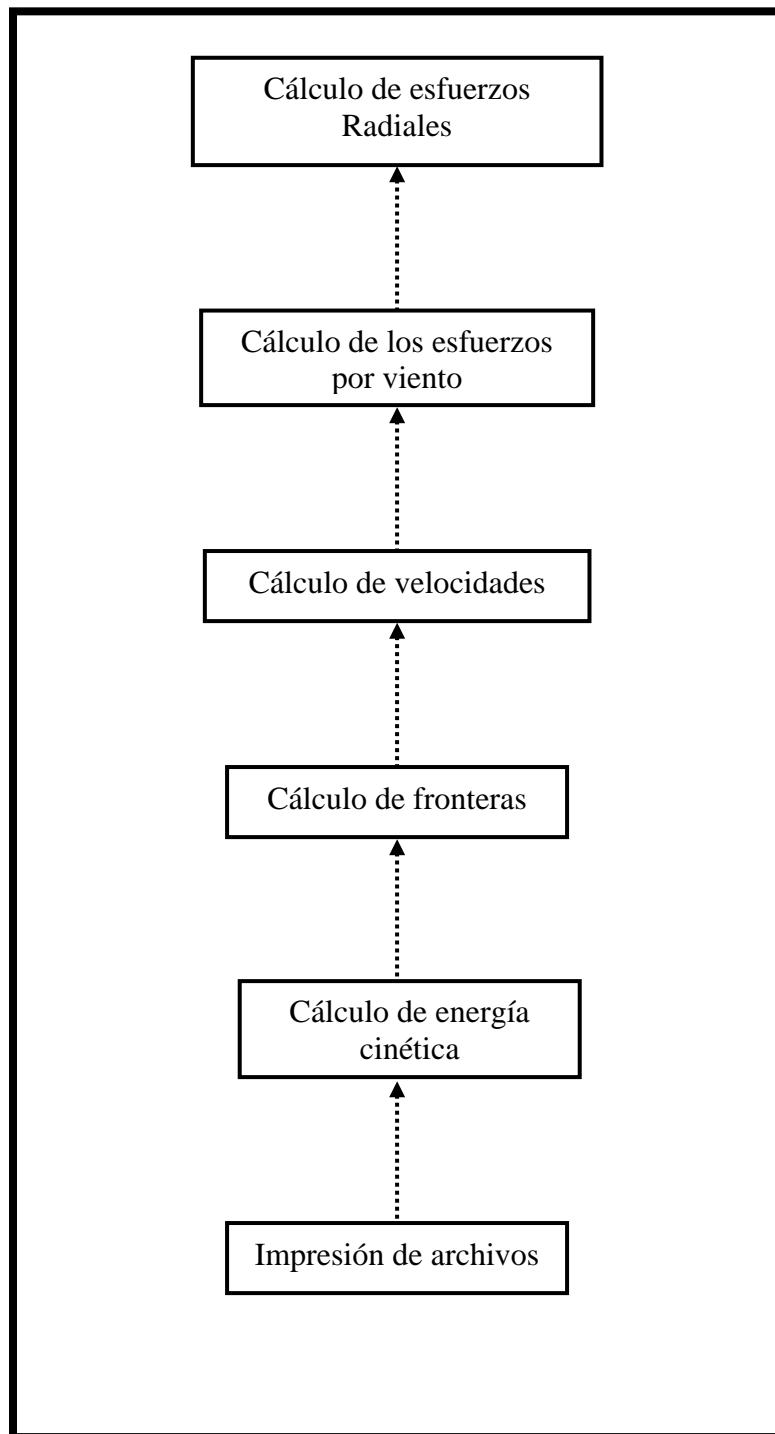
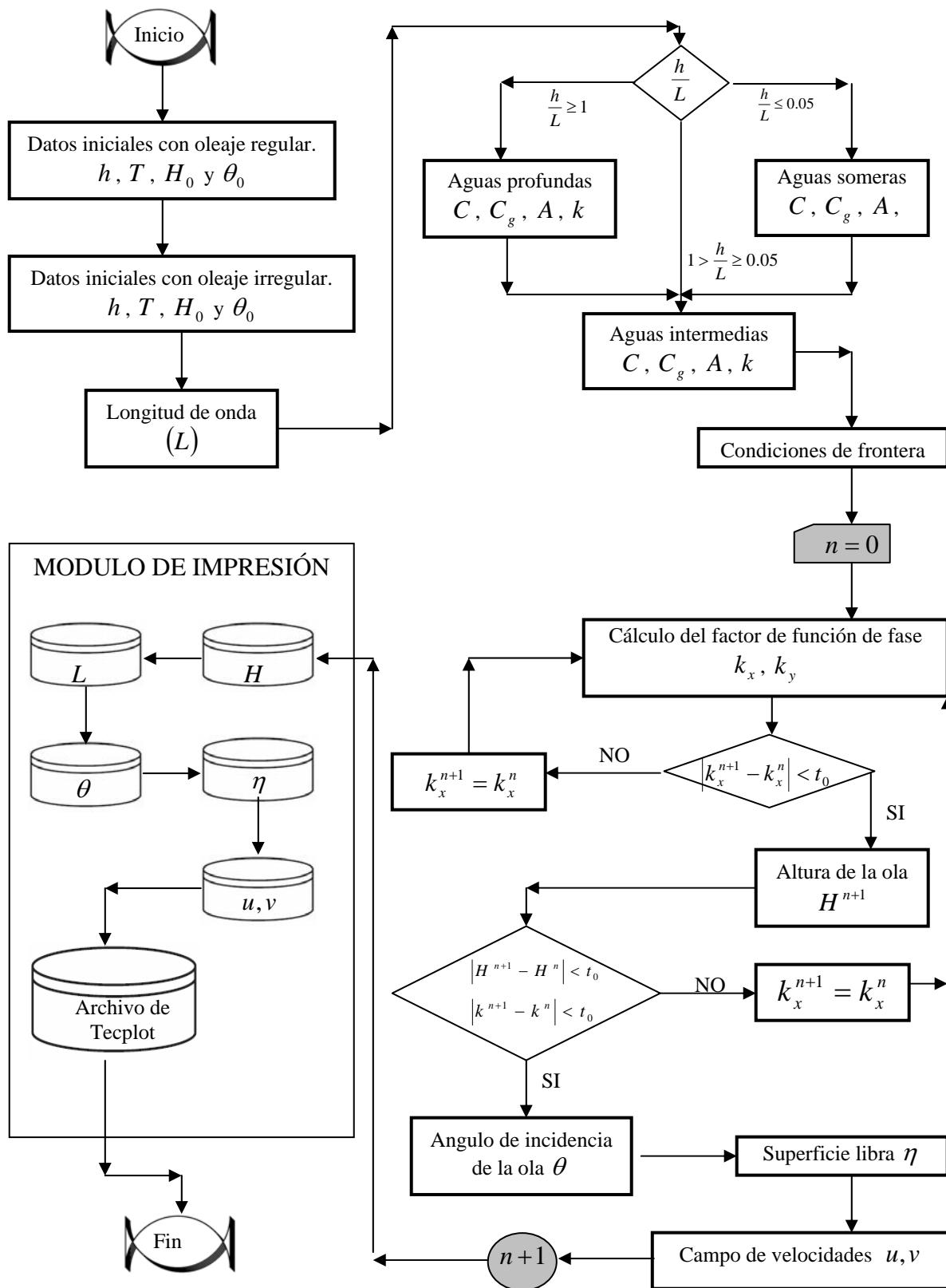


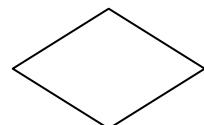
Diagrama de flujo del modelo de oleaje.



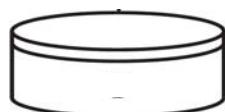
Simbología



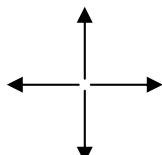
Inicio/Fin del programa



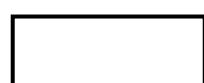
Decisión Lógica



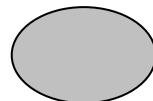
Guardar (almacenar)
Archivo(s)



Dirección del flujo



Proceso o cálculo
de datos



Indica Conector de fin de página o
conector de fin de ciclo



Ciclo o bucle



Sentido de la dependencia

ANEXO 3

ARTICULO

ANEXO 3. Articulo

TITULO: “MODELO MATEMÁTICO DE LOS FENÓMENOS QUE MODIFICAN AL OLEAJE. APLICADO A LAS OBRAS DE PROTECCIÓN DE LA CENTRAL NÚCLEO ELÉCTRICA LAGUNA VERDE (CNLV)”

AUTORES: ING. RAÚL GARNICA MIRANDA, M. EN C. ENRIQUE HERRERA DÍAZ, DR. HERMILO RAMÍREZ LEÓN.

CONGRESO: XII CONGRESO DE LA DIVISIÓN DE FLUIDOS Y PLASMAS, SOCIEDAD MEXICANA DE FISICA. SAN LUÍS POTOSÍ, OCTUBRE 2006