Jorge Ortiz. Inteligencia Artificial. GitHub: https://github.com/jorgeortizc05/ia2 (https://github.com/jorgeortizc05/ia2)

Boletín de prácticas 1 - GradientDescent-1

Objetivos:

- Familiarizarse con los principales aspectos y etapas del método de descenso por gradiente.
- Conocer y aplicar el método de descenso por gradiente para minimizar funciones sencillas.
- Conocer cómo aplicar el proceso de descenso por gradiente de forma automatizada con soporte de **sympy** y **Jupyter Notebook*.

Enunciado:

1. Seleccionar una función matemática para realizar el proceso de minimización. Ejecutar al menos **3 pasos** del método de descenso por gradiente.
2. Diseñar y desarrollar un cuaderno en Jupyter Notebook donde se realicen todos los pasos correspondientes al proceso de minimización de la función a través del método de descenso por gradiente.
3. El cuaderno deberá incluir los siguientes puntos:
   A. Gráfica de la función y los puntos que se obtienen a medida que se ejecutan los pasos de cálculo (hasta $k = 3$).
   B. Aplicación de las funciones de derivación y evaluación de forma similar a la que se ha detallado en el presente cuaderno.
   C. Incluir un acápite sobre las funciones cóncavas y los puntos estacionarios (incluir gráficos).
   D. Emplear las funcionalidades que proveen los paquetes **matplotlib** y **sympy**.

Criterios de evaluación:

Los criterios o rúbrica de evaluación del Boletín de Prácticas 1 son los siguientes:

1. Adecuada complejidad de la función seleccionada para el proceso de minimización (procurar no usar funciones cóncavas).
2. Correcta explicación y detalle de cada paso ejecutado con el método de descenso por gradiente.
3. Verificación de la solución encontrada.
4. Elementos extra: incluye recta (flecha) con la dirección del gradiente, animaciones, etc.

Prerrequisitos:

A fin de poder realizar esta práctica, deberá contar con los siguientes prerrequisitos:

1. Haber leído de forma completa el presente cuaderno.
2. Tener instalados los siguientes paquetes en su computador:
   A. Python 2.7+ (de preferencia 3.6+)
   B. Sympy (http://www.sympy.org)
   C. matplotlib (https://matplotlib.org/)

Detalles de la entrega:

El cuaderno de Jupyter Notebook deberá ser cargado en el AVAC con todos los recursos necesarios (imágenes, enlaces, etc.) en un archivo comprimido, dentro de la tarea **Boletín de Prácticas 1: Descenso por gradiente f(x)**. Los detalles de la fecha y hora de entrega se encuentran especificados en el AVAC.

Algunos enlaces de utilidad:

A continuación se presentan algunos enlaces que pueden resultar de utilidad:

- Wiki con algunas funciones básicas de la librería sympy (https://github.com/sympy/sympy/wiki/Quick-examples)
- Un tutorial interactivo con ejemplos de técnicas de optimización (http://www.benfrederickson.com/numerical-optimization/).

Ejercicio a realizar

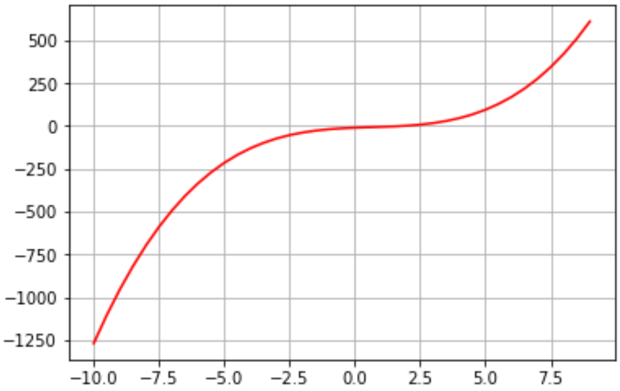
Funcion a minimizar

$\frac{1}{5.3}x^3 - 3x + x^2 - 2.37$

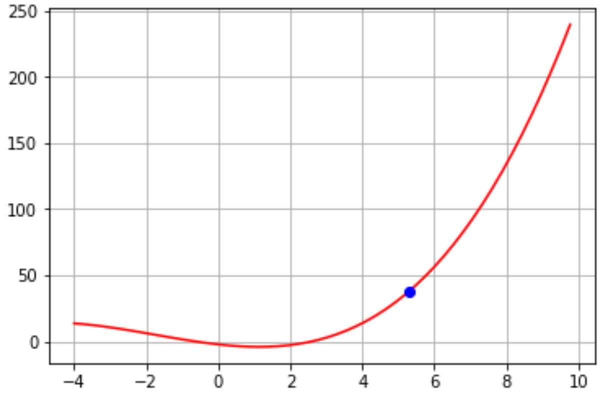
El valor de punto de partida será $x^{(0)} = 5.3$

Graficamos la función que se minimizará y el punto de partida:

In [69]:
```
import matplotlib.pyplot as pp
import numpy as np


def fx(x):
    return np.power(x,3)-2*np.power(x,2)+6*x-10

x=np.arange(-10,9.5,0.5)
y=fx(x)

pp.plot(x,y,c='red')
pp.grid(True)
pp.show()
a = 23
```



In [70]:
```
def fx2(x2):
    return (1/5.3)*np.power(x2,3)-3*x2+np.power(x2,2)-2.37

x2=np.arange(-4,10,0.27)
y2=fx2(x2)
pp.plot(x2,y2,'r')
pp.plot(5.3,fx2(5.3),'bo')
pp.grid(True)
pp.show()
```



Resolución:

- Calculamos la derivada de la función y evaluamos su valor en el punto $x^{(0)}$:

In [71]:
```
from sympy import Symbol, Function, diff, solve

x=Symbol('x')
f=Function('f')(x)
x0=5.3

fx=(1/5.3)*x**3-3*x+x**2-2.37

r=diff(fx)
print("Derivada de la funcion: ",r)
print("Valor en x^(0):",r.subs(x,x0).evalf())
```

```
Derivada de la funcion:  0.566037735849057*x**2 + 2*x - 3
Valor en x^(0): 23.5000000000000
```

Lo que nos da como resultado lo siguiente:

$f^{'}(x) = 0.57x^2 + 2x - 3$

$\nabla f(x^{(0)}) = 23.50$

- A fin de de encontrar el valor de t_0^* requerido para calcular el siguiente punto $x^{(1)}$, calculamos el valor de la siguiente función:

$$\theta(t) = f(x^{(0)}) - t\nabla f(x^{(0)}).$$

$$\begin{aligned}\theta^{'}(t) &= -\nabla f\left(x^{(0)} - t\nabla f(x^{(0)}\right)\nabla f(x^{(0)}) \\ &= -\nabla f\left((5.3) - t\nabla f(x^0)\right)\nabla f(x^{(0)}) \\ &= -\nabla f\left((5.3) - 23.50 \cdot t\right) 23.50\end{aligned}$$

_
En este punto, sustituimos $(5.3 - 23.50 \cdot t)$ por x en la función a minimizar que derivamos previamente $f^{'}(x) = 0.57x^2 + 2x - 3$:

$$= -\left(0.57 \cdot (5.3 - 23.5t)^2 + 2 \cdot (5.3 - 23.5t) - 3\right) \cdot 23.50$$

Aplicamos factoreo a la ecuación y calculamos las raíces:

In [72]:
```
# Ingresamos la funcion en sympy y buscamos las raices:
fp=-((0.57*(5.3-23.5*x)**2+2*(5.3-23.5*x)-3))
print(fp.expand())

print("Raices de la ecuacion:" ,solve(fp))
```

```
-314.7825*x**2 + 188.987*x - 23.6113
Raices de la ecuacion: [0.177289454026470, 0.423083819583086]
```

No realizamos la multiplicación por 23.5 ya que luego se igualará a 0, con ello tenemos lo siguiente:

$$= -\left(-314.78x^2 + 188.99x - 23.6113\right) \cdot 23.5$$

Y las raíces de la ecuación representarán 2 posibles valores para t_0^*:

$$[0.18, 0.42]$$

Con ello, calculamos los dos posibles puntos $x^{(1)}$ y determinamos con cuál de los 2 se minimiza de mejor forma la función:

$$x^{(1)} = \begin{cases} 5.3 - 0.177 \cdot 23.50 &= \mathbf{1.14} \\ 5.3 - 0.423 \cdot 23.50 &= \mathbf{-4.64} \end{cases}$$

De igual forma, evaluamos la función original con los dos nuevos puntos $x^{(1)}$ y en base a ello determinamos cuál es el que minimiza de mejor manera su valor:

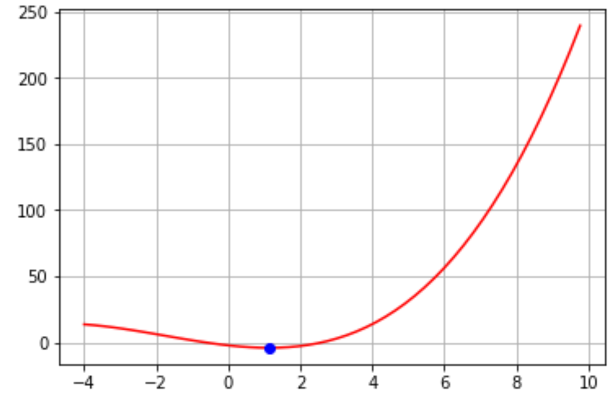
In [73]:
```
v1=fx.subs(x,1.14).evalf()
v2=fx.subs(x,-4.64).evalf()

print("Valores con de la funcion: [%d, %d]" % (v1,v2))
```

```
Valores con de la funcion: [-4, 14]
```

$$f(x) = \begin{cases} f(1.14) & = & \mathbf{-4} \\ f(-4.6405) & = & \mathbf{14} \end{cases}$$

Con ello, determinamos que la mejor alternativa es la de la segunda raíz para calcular el punto $x^{(1)} = 1.14$ y hacemos $k \leftarrow k+1$.

In [74]:
```
pp.plot(x2,y2,'r')
pp.plot(1.14,fx2(1.14),'bo')
pp.grid(True)
pp.show()
```



In [66]:
```
x1 = 1.14
print("Derivada de la funcion: ",r)
print("Valor en x^(1):",r.subs(x,x1).evalf())
```

```
Derivada de la funcion:  0.566037735849057*x**2 + 2*x - 3
Valor en x^(1): 0.566037735849057*x**2 + 2.0*x - 3.0
```

Segunda Interaccion

$\nabla f(x^{(1)}) = 0.016$

$$\theta(t) = f(x^{(1)}) - t\nabla f(x^{(1)}).$$

$$\begin{aligned} \theta^{'}(t) &= -\nabla f\left(x^{(1)} - t\nabla f(x^{(1)}\right) \nabla f(x^{(1)}) \\ &= -\nabla f\left((1.14) - t\nabla f(x^{1})\right) \nabla f(x^{(1)}) \\ &= -\nabla f\left((1.14) - 0.016 \cdot t\right) 0.016 \end{aligned}$$

_ En este punto, sustituimos $(1.14 - 0.016 \cdot t)$ por x en la función a minimizar que derivamos previamente $f^{'}(x) = 0.57x^2 + 2x - 3$:

$$= -\left(0.57 \cdot (1.14 - 0.016t)^2 + 2 \cdot (1.14 - 0.016t) - 3\right) \cdot 0.016$$

Aplicamos factoreo a la ecuación y calculamos las raíces:

In [75]:
```
# Ingresamos la funcion en sympy y buscamos las raices:
fp=-((0.57*(1.14-0.016*x)**2+2*(1.14-0.016*x)-3))
print(fp.expand())

print("Raices de la ecuacion:" ,solve(fp))
```

```
-0.00014592*x**2 + 0.0527936*x - 0.0207719999999997
Raices de la ecuacion: [0.393885601377983, 361.404360012657]
```

No realizamos la multiplicación por 0.016 ya que luego se igualará a 0, con ello tenemos lo siguiente:

$$= -\left(-0.00014x^2 + 0.052x - 0.020\right) \cdot 0.016$$

Y las raíces de la ecuación representarán 2 posibles valores para t_1^*:

$$[0.393, 361.40]$$

Con ello, calculamos los dos posibles puntos $x^{(1)}$ y determinamos con cuál de los 2 se minimiza de mejor forma la función:

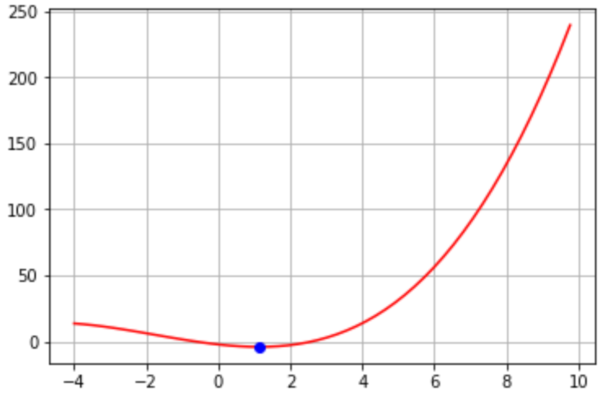
$$x^{(1)} = \begin{cases} 1.14 - 0.393 \cdot 0.016 & = & \mathbf{1.133} \\ 5.3 - 361.40 \cdot 0.016 & = & \mathbf{-4.6424} \end{cases}$$

De igual forma, evaluamos la función original con los dos nuevos puntos $x^{(1)}$ y en base a ello determinamos cuál es el que minimiza de mejor manera su valor:

In [57]:
```
v1=fx.subs(x,1.133).evalf()
v2=fx.subs(x,-4.6424).evalf()

print("Valores con de la funcion: [%d, %d]" % (v1,v2))
```

```
Valores con de la funcion: [-4, 14]
```

In [58]:
```
pp.plot(x2,y2,'r')
pp.plot(1.133,fx2(1.133),'bo')
pp.grid(True)
pp.show()
```



In [59]:
```
x2 = 1.133
print("Derivada de la funcion: ",r)
print("Valor en x^(1):",r.subs(x,x2).evalf())
```

```
Derivada de la funcion:  0.566037735849057*x**2 + 2*x - 3
Valor en x^(1): -0.00738358490566016
```

Tercera Interaccion

$\nabla f(x^{(2)}) = 0.0074$

$$\theta(t) = f(x^{(2)}) - t\nabla f(x^{(2)}).$$

$$\begin{aligned}\theta^{'}(t) &= -\nabla f\left(x^{(2)} - t\nabla f(x^{(2)}\right)\nabla f(x^{(2)}) \\ &= -\nabla f\left((1.133) - t\nabla f(x^{1})\right)\nabla f(x^{(1)}) \\ &= -\nabla f\left((1.133) - 0.0074\cdot t\right) 0.016\end{aligned}$$

_ En este punto, sustituimos $(1.133 - 0.0074 \cdot t)$por x en la función a minimizar que derivamos previamente $f^{'}(x) = 0.57x^2 + 2x - 3$:

$$= -\left(0.57\cdot(1.133 - 0.0074t)^2 + 2\cdot(1.133 - 0.0074t) - 3\right)\cdot 0.0074$$

Aplicamos factoreo a la ecuación y calculamos las raíces:

In [60]:
```
# Ingresamos la funcion en sympy y buscamos las raices:
fp=-((0.57*(1.133-0.0074*x)**2+2*(1.133-0.0074*x)-3))
print(fp.expand())

print("Raices de la ecuacion:" ,solve(fp))
```

```
-3.12132e-5*x**2 + 0.024357988*x + 0.00229727000000002
Raices de la ecuacion: [-0.0943014024259826, 780.468886513853]
```

No realizamos la multiplicación por 0.0074 ya que luego se igualará a 0, con ello tenemos lo siguiente:

$$= -\left(-0.000003121x^2 + 0.02435x - 0.0022\right)\cdot 0.0074$$

Y las raíces de la ecuación representarán 2 posibles valores para t_1^*:

$$[0.0943, 780.47]$$

Con ello, calculamos los dos posibles puntos $x^{(1)}$ y determinamos con cuál de los 2 se minimiza de mejor forma la función:

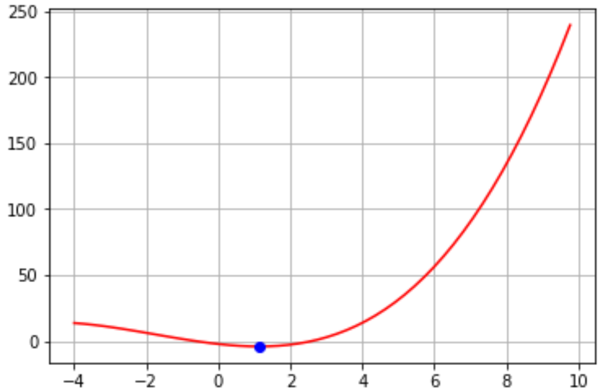
$$x^{(1)} = \begin{cases} 1.133 - (-0.094)\cdot 0.0074 \; = & \mathbf{1.1336956} \\ 5.3 - 780.47\cdot 0.0074 \; = & \mathbf{-4.642478}\end{cases}$$

De igual forma, evaluamos la función original con los dos nuevos puntos $x^{(1)}$ y en base a ello determinamos cuál es el que minimiza de mejor manera su valor:

In [62]:
```
v1=fx.subs(x,1.1336956).evalf()
v2=fx.subs(x,-4.642478).evalf()

print("Valores con de la funcion: [%d, %d]" % (v1,v2))
```

```
Valores con de la funcion: [-4, 14]
```

In [76]:
```
pp.plot(x2,y2,'r')
pp.plot(1.133,fx2(1.133),'bo')
pp.grid(True)
pp.show()
```



In [ ]: