Jorge Ortiz. IA2. Github: https://github.com/jorgeortizc05/ia2 (https://github.com/jorgeortizc05/ia2)

Boletín de prácticas 2

Objetivos:

- Familiarizarse con los principales aspectos y etapas del método de descenso por gradiente para funciones que dependen de dos variables $f(x, y)$.
- Conocer cómo aplicar el proceso de descenso por gradiente de forma automatizada con soporte de **sympy** y **Jupyter Notebook*.

Enunciado:

1. Seleccionar una función matemática $f(x, y)$ para realizar el proceso de minimización. Ejecutar al menos **3 pasos** del método de descenso por gradiente.
2. Diseñar y desarrollar un cuaderno en Jupyter Notebook donde se realicen todos los pasos correspondientes al proceso de minimización de la función a través del método de descenso por gradiente.
3. El cuaderno deberá incluir los siguientes puntos:
   A. Gráfica de la función y los puntos que se obtienen a medida que se ejecutan los pasos de cálculo (hasta $k = 3$).
   B. Aplicación de las funciones de derivación y evaluación de forma similar a la que se ha detallado en el presente cuaderno.
   C. Incluir un acápite sobre las funciones cóncavas y los puntos estacionarios (incluir gráficos).
   D. Emplear las funcionalidades que proveen los paquetes **matplotlib** y **sympy**.

Criterios de evaluación:

Los criterios o rúbrica de evaluación del Boletín de Prácticas 2 son los siguientes:

1. Adecuada complejidad de la función seleccionada para el proceso de minimización (procurar no usar funciones cóncavas).
2. Mejorar la gráfica en 3D presentada en este cuaderno.
3. Correcta explicación y detalle de cada paso ejecutado con el método de descenso por gradiente.
4. Verificación de la solución encontrada.
5. Elementos extra: incluye recta (flecha) con la dirección del gradiente, animaciones, etc.
6. Ejecutar los pasos indicados en el segundo video-tutorial.

Prerrequisitos:

A fin de poder realizar esta práctica, deberá contar con los siguientes prerrequisitos:

1. Haber leído de forma completa el presente cuaderno.
2. Tener instalados los siguientes paquetes en su computador:
   A. Python 2.7+ (de preferencia 3.6+)
   B. Sympy (http://www.sympy.org)
   C. matplotlib (https://matplotlib.org/)

Detalles de la entrega:

El cuaderno de Jupyter Notebook deberá ser cargado en el AVAC con todos los recursos necesarios (imágenes, enlaces, etc.) en un archivo comprimido, dentro de la tarea **Boletín de Prácticas 2: Descenso**

Ejemplo de aplicación:

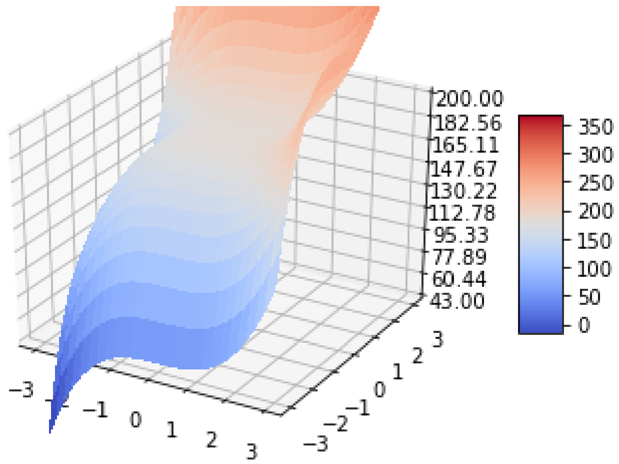
Punto de partida es $x^{(0)} = (3, 4)$:

$f(x, y) = 3x^3 + 2xy + 5y^3 + 8.9$

GRAFICA

In [1]:

```
import matplotlib.pyplot as pp
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import LinearLocator, FormatStrFormatter
import numpy as np

%matplotlib inline

def fxy(x,y):
    return (3*np.power(x,3.)+2*np.dot(x,y)+5*np.power(y,3.)+8.9)


fig=pp.figure()
#fig.set_size_inches(17.,10.)
axes=fig.gca(projection='3d')

x=np.arange(-3.,3.,0.23)
y=np.arange(-3.,3.,0.23)

x, y = np.meshgrid(x,y) # creamos la malla
z=fxy(x,y)

# Dibujamos la superficie
surface=axes.plot_surface(x,y,z,cmap=cm.coolwarm,linewidth=0,antialiased=False)

axes.set_zlim(43.,200.)
axes.zaxis.set_major_locator(LinearLocator(10))
axes.zaxis.set_major_formatter(FormatStrFormatter('%.02f'))

fig.colorbar(surface, shrink=0.5, aspect=5)
pp.show()
```



Resolución usando el método de Descenso por Gradiente [3]:

Dado que no conocemos el valor óptimo de x, hacemos $k \leftarrow 0$, como nos indica el algoritmo. A continuación procedemos a calcular los siguientes elementos:

- La derivada **parcial** de la función original $f(x, y) = 3x^3 + 2xy + 5y^3 + 8.9$.
- Evaluamos la función original en el punto $x^{(0)} = (3, 4)$.

In [2]:

```
from sympy import Function, Symbol, diff, solve

x=Symbol('x')
y=Symbol('y')
f=Function('f')(x)

fx=3*x**3+2*x*y+5*y**3+8.9

fpx=diff(fx,x)
fpy=diff(fx,y)
print("[",fpx,",",fpy,"]")

print("Valor en el punto (x^(0),y^(0)) => (3,4) = ",fx.subs(x,3.).subs(y,4.).evalf())
```

```
[ 9*x**2 + 2*y , 2*x + 15*y**2 ]
Valor en el punto (x^(0),y^(0)) => (3,4) =  433.900000000000
```

Lo que nos da como resultado los siguientes valores:

$$\nabla f(x,y) = \binom{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} = \binom{9x^2+2y}{2x+15y^2}$$

$$\nabla f\left((x^{(0)}, y^{(0)}) = (3,4)\right) = 433.9$$

1. Ahora buscaremos encontrar el siguiente punto con coordenadas $\left(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}\right)$, para ello debemos calcular:

$$\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) = (x^{(0)}, y^{(0)}) - t_0^* \nabla f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

2. Para encontrar el valor de t_0^*, debemos hallar el mínimo de la función $\theta(t) = f(x^{(0)}, y^{(0)}) - t\nabla f(x^{(0), y^{(0)}}$. Para realizar este paso, buscamos en el punto estacionario trabajando con la derivada de la función a minimizar. En este punto, usaremos una notación vectorial:

- Para esto, calculamos el valor de t_k^* empleando el punto $x^{(0)}$, y la función de t y en base a la derivada de la función a minimizar:

$$\theta'(t) = -\nabla f\left((x^{(0)}, y^{(0)}) - t\nabla f(x^{(0)}, y^{(0)})\right) \nabla f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

$$= -\nabla f\left((3,4) - t\nabla f(3,4)\right) \nabla f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

Para hallar $\nabla f(x^{(0)}, y^{(0)})$, simplemente sustituimos el punto $(3,4)$ en ambas partes de la función original que se derivó con respecto a x y con respecto a y:

$$\nabla f(x^{(0)}, y^{(0)}) = \binom{9x^2+2y}{2x+15y^2}$$

$$\nabla f(3,4) = \binom{9\cdot 3^2+2(4)}{2(3)+15\cdot 4^2}$$

$$\nabla f(3,4) = (89, 246)$$

Con ello, ahora volvemos a la función $\theta'(t)$ y reemplazamos el valor calculado:

$$= -\nabla f\left((3,4) - t(89,246)\right)(89,246)$$

$$= -\nabla f\left((3-89t), (4-246t)\right)(89,246)$$

Ahora, evaluamos la función que derivamos con los nuevos valores $x = (3-89t), y = (4-246t)$:

$$= -\left(9\cdot(3-89t)^2 + 2(4-246t), 2(3-89t) + 15\cdot(4-246t)^2\right)(89,246)$$

$$= -\{89\left(9\cdot(3-89t)^2 + 2(4-246t)\right) + 246\left(2(3-89t) + 15\cdot(4-246t)^2\right)\}$$

Factoramos con ayuda de **sympy** y buscamos las raíces:

In [3]:

```
t=Symbol('t')
ft=Function('ft')(t)

fnabla=-(89.*(9.*(3.-89.*t)**2+2.*(4.-246.*t))+246.*(2.*(3.-89.*t)+15*(4.-246.*t)**2))

print(fnabla.expand())

fnablap=fnabla.diff(t)


print("Derivada para buscar raices: ",fnablap)
print("Raices: [",solve(fnablap),"]")
```

```
-229648761.0*t**2 + 7777230.0*t - 68437.0
Derivada para buscar raices:  -459297522.0*t + 7777230.0
Raices: [ [0.0169328803824898] ]
```

Con ello, nuestra ecuación en función de t queda como sigue:

$$= -229648761t^2 + 7777230t - 68437$$

Y la raíz que encontramos luego de derivarla (ya que nos salen valores imaginarios) es $t_0 = 0.0169$.

3. Dado lo anterior, el siguiente punto $(x^{(1)}, y^{(1)})$ será:

$$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (x^{(0)}, y^{(0)}) - t_0^* \nabla f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

$$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (3, 4) - 0.0169 \cdot (15, 29)$$

$$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (2.7465, 3.5099)$$

Si ahora evaluamos la función original con el nuevo punto $(x^{(1)}, y^{(1)}) = (2.7465, 3.5099)$, obtenemos obtendremos lo siguiente:

In [11]:

```
print("Valor en el punto (x^(1),y^(1)) => (2.7465,3.5099) = ",fx.subs(x,2.7465).subs(y,
3.5099).evalf())
```

```
Valor en el punto (x^(1),y^(1)) => (2.7465,3.5099) =  306.531865385370
```

SEGUNDA INTERACCION

In [6]:

```
from sympy import Function, Symbol, diff, solve

x=Symbol('x')
y=Symbol('y')
f=Function('f')(x)

fx=3*x**3+2*x*y+5*y**3+8.9

fpx=diff(fx,x)
fpy=diff(fx,y)
print("[",fpx,",",fpy,"]")

print("Valor en el punto (x^(0),y^(0)) => (2.7465,3.5099) = ",fx.subs(x,2.7465).subs(y,
3.5099).evalf())
```

```
[ 9*x**2 + 2*y , 2*x + 15*y**2 ]
Valor en el punto (x^(0),y^(0)) => (2.7465,3.5099) =  306.531865385370
```

$\nabla f(x,y) = \binom{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} = \binom{9x^2+2y}{2x+15y^2}$

$\nabla f\left((x^{(1)}, y^{(1)}) = (2.7465, 3.5099)\right) = 306.531865$

$$\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) = (x^{(1)}, y^{(1)}) - t_1^* \nabla f(x^{(1)}, y^{(1)})$$

- Para esto, calculamos el valor de t_k^* empleando el punto $x^{(1)}$, y la función de t y en base a la derivada de la función a minimizar:

$$\theta^{'}(t) = -\nabla f\left((x^{(1)}, y^{(1)}) - t\nabla f(x^{(1)}, y^{(1)})\right) \nabla f(x^{(1)}, y^{(1)})$$

$$= -\nabla f\left((2.7465, 3.5099) - t\nabla f(2.7465, 3.5099)\right) \nabla f(x^{(1)}, y^{(1)})$$

Para hallar $\nabla f(x^{(1)}, y^{(1)})$, simplemente sustituimos el punto $(2.7465, 3.5099)$ en ambas partes de la función original que se derivó con respecto a x y con respecto a y:

$$\nabla f(x^{(1)}, y^{(1)}) = \binom{9x^2+2y}{2x+15y^2}$$

$$\nabla f(2.7465, 3.5099) = \binom{9 \cdot 2.7465^2 + 2(3.5099)}{2(2.7465) + 15 \cdot 3.5099^2}$$

$$\nabla f(2.7465, 3.5099) = (74.91, 190.28)$$

Con ello, ahora volvemos a la función $\theta^{'}(t)$ y reemplazamos el valor calculado:

$$= -\nabla f\left((2.75, 3.51) - t(74.91, 190.28)\right)(74.91, 190.28)$$

$$= -\nabla f\left((2.75 - 74.91t), (3.51 - 190.28t)\right)(74.91, 190.28)$$

Ahora, evaluamos la función que derivamos con los nuevos valores $x = (2.75 - 74.91t), y = (3.51 - 190.28t)$:

$$= -\left(9 \cdot (2.75 - 74.91t)^2 + 2(3.51 - 190.28t), 2(2.75 - 74.91t) + 15 \cdot (3.51 - 190.28t)^2\right)(74.91,$$

$$= -\{74.91\left(9 \cdot (2.75 - 74.91t)^2 + 2(3.51 - 190.28t)\right) + 190.28\left(2(2.75 - 74.91t) + 15 \cdot (3.51 -$$

Factoramos con ayuda de **sympy** y buscamos las raíces:

In [10]:

```
t=Symbol('t')
ft=Function('ft')(t)

fnabla=-(74.91*(9.*(2.75-74.91*t)**2+2.*(3.51-190.28*t))+190.28*(2.*(2.75-74.91*t)+15*(
3.51-190.28*t)**2))

print(fnabla.expand())

fnablap=fnabla.diff(t)


print("Derivada para buscar raices: ",fnablap)
print("Raices: [",solve(fnablap),"]")
```

```
-107123753.295219*t**2 + 4147327.32567*t - 41834.999495
Derivada para buscar raices:  -214247506.590438*t + 4147327.32567
Raices: [ [0.0193576457045923] ]
```

Con ello, nuestra ecuación en función de t queda como sigue:

$$= -107123753.295219t^2 + 4147327.32567t - 4147327.33$$

Y la raíz que encontramos luego de derivarla (ya que nos salen valores imaginarios) es $t_1 = 0.0193$.

3. Dado lo anterior, el siguiente punto $(x^{(2)}, y^{(2)})$ será:

$$(x^{(2)}, y^{(2)}) = (x^{(1)}, y^{(1)}) - t_1^* \nabla f(x^{(1)}, y^{(1)})$$

$$(x^{(2)}, y^{(2)}) = (2.75, 3.51) - 0.0193 \cdot (74.91, 190.28)$$

$$(x^{(2)}, y^{(2)}) = (1.3, 3.51)$$

Si ahora evaluamos la función original con el nuevo punto $(x^{(2)}, y^{(2)}) = (1.3, 3.51)$, obtenemos obtendremos lo siguiente:

In [12]:

```
print("Valor en el punto (x^(1),y^(1)) => (0.3155,-0.25669) = ",fx.subs(x,1.3).subs(y,
3.51).evalf())
```

```
Valor en el punto (x^(1),y^(1)) => (0.3155,-0.25669) =  240.834755000000
```

In [ ]: