

TRABALHO DE PROGRAMAÇÃO DA UNIDADE 2 - CÁLCULO NUMÉRICO - 2022/1

Este texto descreve o trabalho de programação da Unidade 2. É um trabalho sobre cálculo com juros compostos e a maioria dos problemas propostos vem de dados reais. Você irá criar pequenos programas que consigam calcular a taxa de juros mensal embutida em pagamentos e investimentos a prazo.

Instruções gerais para elaborar o relatório

O trabalho pode ser feito em dupla. É permitido fazer o exercício individualmente mas não é permitido fazer com mais de dois participantes.

Há duas opções de formato para entregar o trabalho. *Primeira opção*, ele pode ser entregue como um único arquivo do Colab/Jupyter (`arquivo.ipynb`), isto é, um único arquivo contendo os programas e o relatório. *Segunda opção*, ele pode ser entregue em dois arquivos: um arquivo do Colab/Jupyter contendo os códigos e um arquivo PDF contendo ambos os códigos e o relatório no mesmo PDF.

Tenha em mente que o relatório deve ser escrito almejando explicar ao leitor os passos de como os resultados numéricos foram obtidos, inclusive a formulação do problema e o método numérico utilizado. Mantenha estilo direto e sucinto. Em cada questão, siga o que é pedido como resposta e siga as instruções gerais de elaboração do relatório.

Aqui estão algumas instruções do que seu relatório deve conter.

1. Comece descrevendo o problema a ser resolvido. Coloque a resposta do problema proposto, por exemplo, seu valor numérico, seu gráfico, sua tabela de valores, etc... Ou seja, coloque tudo aquilo que descreve a resposta e as explicações que precisarem ser colocadas para que o leitor compreenda a resposta da questão.
2. Depois descreva sucintamente os métodos numéricos usados, possíveis dificuldades encontradas e como estas dificuldades foram solucionadas. Por exemplo, diga se você usou métodos para zero de funções, algum método para cálculo de derivadas, método para solução de sistemas lineares, etc...
3. Em seguida coloque o código que leva à resposta do problema. Os códigos tem que estar comentados e o nome das variáveis deve estar associado

a seu significado. Programe usando um estilo direto, específico para o exercício dado, não faça um programa “super geral.” Dados de entrada devem aparecer no início do código seguido de comentário dizendo o que eles são. Não une entrada de dados digitados pelo teclado (input), nem interface gráfica, isto tornaria seu código irreprodutível.

4. Gráficos devem ser gerados pelo próprio Python e código do gráfico deve estar no relatório. Isto é, você não pode fazer gráficos fora do Python e depois colar o gráfico no relatório. O mesmo se aplica às tabelas do relatório.
5. Os programas devem ser escrito usando apenas recursos elementares da linguagem Python conjuntamente com as bibliotecas Numpy e Matplotlib. Você precisará construir suas próprias rotinas para encontrar raízes de uma função, para fazer interpolação polinomial, ou para qualquer outro método que seja assunto da nossa disciplina. Portanto você não deve usar as rotinas numéricas do Numpy para raízes de função, interpolação, etc... As funções prontas que você pode usar são as do Matplotlib: `plt.plot`, `plt.grid`, etc...

Como funcionam os juros compostos

Esta parte contém explicações e exemplos sobre juros compostos. Juros compostos também são chamados de juros sobre juros. A primeiro conceito importante é a relação entre a taxa de juros mensal e a taxa juros anual, ambos compostos.

Considere um valor monetário inicial de V reais investido em uma aplicação com uma taxa de juros de $J\%$ ao mês. Como os juros são compostos, este investimento valerá $V \cdot (1 + J/100)$ reais no final do primeiro mês, e depois valerá $V \cdot (1 + J/100)^2$ no final do segundo mês. Desse modo, se o valor que permanece investido por 12 meses então o valor no final será $V \cdot (1 + J/100)^{12}$. Isto significa que o fator multiplicativo anual é $(1 + J/100)^{12}$. Portanto, a relação entre a taxa de juros anual de $A\%$ e a taxa de juros mensal de $J\%$ é dada pela fórmula

$$1 + \frac{A}{100} = \left(1 + \frac{J}{100}\right)^{12}.$$

Quando a taxa de juros é baixa, tem-se a seguinte aproximação $J \approx A/12$. Porém esta aproximação não é válida para juros altos nem no longo prazo,

ou seja, quando consideramos o investimento ao longo de vários anos. Aqui estamos supondo que V é um valor investido e que o investidor receberá um retorno para seu investimento. O mesmo raciocínio é válido quando V é um valor tomado como empréstimo e o empréstimo tem juros de $J\%$ ao mês.

Considere agora pagamentos periódicos/recebimentos de valores feitos ao longo do tempo. Podem ser pagamentos mensais para quitar uma dívida ou o recebimento de pagamentos mensais/semestrais de um investimento. As operações de pagamentos e recebimentos são conjuntamente chamadas de *fluxo de caixa*. Entre duas opções de empréstimo/investimentos, é necessário estabelecer um critério para decidir sobre qual alternativa é melhor. Um critério amplamente utilizado é aquele em que os valores dos pagamentos são “trazidos para um mesmo instante de tempo” através de uma taxa de juros. Por exemplo, todo o fluxo de caixa pode ser trazido para um valor equivalente no presente. Ou, alternativamente, pode-se levar todo o fluxo de caixa para um mesmo momento no futuro, como por exemplo o dia em que uma dívida é quitada.

Veja um exemplo de como trazer valores futuros a valor presente. Se hoje fosse o início do mês de julho, e considerando uma taxa de juros de $J\%$ ao mês, um pagamento de valor p a ser feito no início do mês de setembro vale no presente

$$q = \frac{p}{\left(1 + \frac{J}{100}\right)^2}.$$

Isto porque incidem 2 meses de juros. Esta fórmula funciona porque um valor de q reais em julho, quando aplicado à uma taxa de juros J , irá valer

$$p = q \left(1 + \frac{J}{100}\right)^2$$

em setembro. Ou seja, p e q são equivalentes no sentido em que havendo q reais no caixa em setembro eles servem para pagar p reais em novembro pois pode-se investir q reais a uma taxa de juros $J\%$ ao mês.

Para definir o momento em que cada pagamento é feito, usaremos os termos “a vista” e “entrada” para dizer que o pagamento é feito no mês 0, ou seja, no momento presente. Usaremos os termos “parcelas” ou “prestações” para dizer que os pagamentos serão feitos nos meses seguintes, daqui um, dois ou mais meses.

Veja o seguinte exemplo de juros compostos: Considere um fluxo de caixa (seja pagamento ou recebimento) com uma entrada de R\$ 100,00 e duas parcelas de R\$ 200,00 a juros mensais de 2.5%. O valor presente destes fluxo de

caixa é

$$100 + 200/(1.025) + 200/(1.025)^2 = 485.484830458 \dots$$

Ou seja, considerando juros mensais de 2.5%, este fluxo de caixa é igual a R\$ 485,48 a valor presente. Da mesma forma, podemos transportar este fluxo de caixa para um momento futuro. Por exemplo, podemos transportar este fluxo de caixa para o momento da última parcela. Neste caso o valor equivalente transportado para o mês 2 no futuro é

$$100 \times (1.025)^2 + 200 \times (1.025) + 200 = 510.0625.$$

Problemas com juros compostos

A Tarefa consiste em resolver cada um dos problemas abaixo. Faça um código para cada problema mesmo que sejam códigos parecidos. Veja as instruções para fazer o relatório.

1. Uma TV LED 32" Samsung vendida online nas Americanas custa, a vista, R\$ 1.305,00 (dados de julho de 2022, pagamento no boleto). Na opção a prazo são uma entrada de R\$ 139,65 e 11 parcelas mensais de R\$ 139,56. Qual a taxa de juros mensal e anual embutida no plano de pagamento a prazo?
2. Um empreendedor tem a opção de comprar um máquina pelo valor a vista de R\$129.000,00, mas para isso ele terá que emprestar dinheiro sob uma taxa de 2% ao mês. Outra opção é parcelar o valor da máquina em uma entrada de R\$27.000,00 mais quatro parcelas mensais de valores R\$24.000,00, R\$30.000,00, R\$32.000,00 e R\$22.000,00. Qual a taxa de juros embutida no pagamento parcelado? Qual dessas opções é melhor em termos do juros sendo cobrado?
3. No dia 6/9/2018 um investidor podia comprar um título do Tesouro Nacional (chamado de NTN-F 010129) por R\$ 889,18. Este título beneficia o investidor com a promessa dos seguintes pagamentos: O pagamento de parcelas semestrais de R\$ 48,81 a serem pagas nos meses de janeiro e de julho de 2019, de janeiro e de julho de 2020, etc ... prosseguindo com esses pagamentos semestrais até o ano 2028. Em janeiro de 2029 o investidor recebe mais uma parcela de R\$ 48,81 juntamente com o pagamento final de R\$ 1000,00. Qual a taxa de juros mensal e anual embutida neste título?

4. No dia 17/9/2019 um investidor podia comprar o mesmo título da questão anterior (chamado de NTN-F 010129) por R\$ 1207,52. Este título beneficia o investido com a promessa de pagamentos seguindo o mesmo esquema: parcelas semestrais de R\$ 48,81 a serem pagas nos meses de janeiro e de julho de 2020, de janeiro e de julho de 2021, etc . . . prosseguindo com esses pagamentos semestrais até o ano 2028. Em janeiro de 2029 o investidor recebe mais uma parcela de R\$ 48,81 juntamente com o pagamento final de R\$ 1000,00. Qual a taxa de juros mensal e anual embutida neste título?

Curiosidades: Você pode ver o valor desse título NTN-F 010129 hoje acessando a página do Tesouro direto¹ e selecionando a opção “Resgatar,” ele está na linha “Tesouro Prefixado com juros semestrais 2029.” Se você quiser investigar como fazer as questões 3 e 4 de forma realística, então você deve levar em conta o imposto de renda. É um tanto complicado porque os ganhos recebidos nos primeiros 6 meses são taxados a 22.5%, e a taxa de imposto fica menor a cada 6 meses até nivelar em 15%. Isto de fato é relevante se quisermos ser preciso na resposta.

¹<https://www.tesourodireto.com.br/titulos/precos-e-taxas.htm>