Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos

Cálculo Numérico - P2.1 - Turma G - 13/06

Nome:______________________________RA:__________

Questão. Um objeto perfeitamente esférico perde sua massa por sublimação a uma taxa proporcional à área de sua superfície, determinando um decréscimo em seu raio, ao longo do tempo, por uma função afim $r(t) = a\ t + b$, em que r é medido em centímetros e t é medido em dias. A densidade desse material é $\rho = 1.15$ gramas por centímetros cúbicos. A tabela abaixo mostra medições experimentais da diminuição da massa m, em gramas, do objeto em questão ao longo de quatro dias.

t (dias)	0	1	2	3	4
m (gramas)	350	275	212	159	116

a) [valor 2 pontos]. A partir da tabela acima, obtenha os valores experimentais para a diminuição do raio r do objeto em questão, em centímetros, ao longo dos quatro dias.

Observação. Assuma $\pi = 3.14$ e precisão em décimos de milímetro

t (dias)	0	1	2	3	4
r (centímetros)	4.17	3.85	3.53	3.21	2.89

b) [valor 4 pontos]. Encontre os parâmetros a e b que melhor ajustam o raio $r(t) = a\ t + b$ do objeto aos dados experimentais em questão.

Faça esse item no verso da folha

c) [valor 4 pontos]. Quantos dias leva para o objeto em questão ser totalmente sublimado pelo tempo?

Faça esse item no espaço abaixo

De acordo com o item a)

$$r(t) = -0.32\ t + 4.17$$

O objeto em questão será totalmente sublimado num tempo T em que $r(T) = 0$, ou seja

$$-0.32\ T + 4.17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{4.17}{0.32} = 13,0325$$

Logo a sublimação do objeto vai ocorrer em, aproximadamente, 13 dias.

Resolução.

Para determinarmos os parâmetros a e b da função $r(t) = a\,t + b$ que melhor ajustam o raio do objeto aos dados experimentais devemos minimizar o qui-quadrado

$$Q(a,b) = \sum_{i=0}^{4} (r_i - at_i - b)^2$$

Assim os melhores parâmetros a e b são, necessariamente, soluções do sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial Q}{\partial a}(a,b) & = & 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b}(a,b) & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=0}^{4} 2(r_i - at_i - b)(-t_i) & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{4} 2(r_i - at_i - b)(-1) & = & 0 \end{array} \right.$$

ou, equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=0}^{4} t_i t_i \cdot a + \sum_{i=0}^{4} t_i \cdot b & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{4} t_i r_i \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{4} t_i \cdot a + \sum_{i=0}^{4} 1 \cdot b & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{4} r_i \end{array} \right.$$

Calculando os somatórios a partir dos dados experimentais obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 30a & + & 10b & = & 32.1 \\ 10a & + & 5b & = & 17.65 \end{array} \right.$$

Resolvendo esse sistema vamos obter

$$a = \frac{\det \begin{pmatrix} 32.1 & 10 \\ 17.65 & 5 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{-16}{50} = -0.32 \quad , \quad b = \frac{\det \begin{pmatrix} 30 & 32.1 \\ 10 & 17.65 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{208.5}{50} = 4.17$$