Cálculo Numérico - Turma G - P1.3 - 30/05

Nome:____RA:_______________

Questão. Considere a sequência de iterados $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ obtida no método de Jacobi para resolver o sistema linear abaixo a partir do *chute inicial* $x^{(0)} = (0,0,0)$.

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ -2x_1 + 7x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Considere também a distância Δ_k entre a solução iterada $x^{(k)}$ e a solução exata $x = (x_1, x_2, x_3)$, bem como a distância δ_k entre as soluções iteradas $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$.

$$\Delta_k = \text{Máximo}\left\{\left|x_i^{(k)} - x_i\right| : i = 1,2,3\right\} \quad , \quad \delta_k = \text{Máximo}\left\{\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| : i = 1,2,3\right\}$$

item a) [2 pontos] Explique por que o o sistema em questão satisfaz o Critério das Linhas.

Responda este item no espaço abaixo.

Na primeira linha temos $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$, pois $9 > 2 + 3$

Na segunda linha temos $|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$, pois $7 > 2 + 1$

Na terceira linha temos $|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$, pois $5 > 1 + 3$

item b) [6 pontos] Mostre que Δ_k tende a zero à medida que k aumenta indefinidamente.

Responda este item no verso da folha.

item c) [2 pontos] Encontre um valor α para o qual é possível garantir que $\Delta_k \leq \alpha\, \delta_k$ para todo k.

Responda este item no espaço abaixo.

De acordo com o item b), $\Delta_k \leq \frac{4}{5}\Delta_{k-1}$ para todo $k = 1,2,3\ldots$. Assim

$$\begin{aligned}
\Delta_k &\leq \frac{4}{5}\Delta_{k-1} \\
&= \frac{4}{5}\text{Máximo}\left\{\left|x_i^{(k-1)} - x_i\right| : i = 1,2,3\right\} \\
&= \frac{4}{5}\text{Máximo}\left\{\left|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)} + x_i^{(k)} - x_i\right| : i = 1,2,3\right\} \\
&\leq \frac{4}{5}\text{Máximo}\left\{\left|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}\right| + \left|x_i^{(k)} - x_i\right| : i = 1,2,3\right\} \\
&\leq \frac{4}{5}\text{Máximo}\left\{\left|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}\right| : i = 1,2,3\right\} + \frac{4}{5}\text{Máximo}\left\{+\left|x_i^{(k)} - x_i\right| : i = 1,2,3\right\} \\
&= \frac{4}{5}\delta_k + \frac{4}{5}\Delta_k
\end{aligned}$$

Logo

$$\Delta_k \leq \frac{4}{5}\delta_k + \frac{4}{5}\Delta_k \quad \Rightarrow \quad \Delta_k\left(1 - \frac{4}{5}\right) \leq \frac{4}{5}\delta_k \quad \Rightarrow \quad \Delta_k \leq \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}}\delta_k \quad \Rightarrow \quad \Delta_k \leq 4\delta_k$$

Basta mostrar que existe λ entre 0 e 1 tal que, para todo k, tem-se

$$\Delta_k \leq \lambda \Delta_{k-1}$$

Isto garante a convergência geométrica de Δ_k para zero quando k aumenta indefinidamente, pois

$$\Delta_k \leq \lambda \Delta_{k-1} \leq \lambda^2 \Delta_{k-2} \leq \cdots \leq \lambda^k \Delta_0$$

e λ^k converge para zero à medida que k aumenta indefinidamente.

Temos

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1^{(k)} & = & \frac{1}{9}\left(5 + 2x_2^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}\right) & , & x_1 & = & \frac{1}{9}\left(5 + 2x_2 - 3x_3\right) \\ x_2^{(k)} & = & \frac{1}{7}\left(-2 + 2x_1^{(k-1)} + x_3^{(k-1)}\right) & , & x_2 & = & \frac{1}{7}\left(-2 + 2x_1 + x_3\right) \\ x_3^{(k)} & = & -\frac{1}{5}\left(4 - x_1^{(k-1)} + 3x_2^{(k-1)}\right) & , & x_3 & = & -\frac{1}{5}\left(4 - x_1 + 3x_2\right) \end{array}$$

Logo

$$\begin{array}{rcl} \left|x_1^{(k)} - x_1\right| & \leq & \dfrac{1}{9}\left(2\left|x_2^{(k-1)} - x_2\right| + 3\left|x_3^{(k-1)} - x_3\right|\right) \leq \dfrac{1}{9}\left(2\Delta_{k-1} + 3\Delta_{k-1}\right) = \dfrac{2+3}{9}\Delta_{k-1} = \dfrac{5}{9}\Delta_{k-1} \\ \left|x_2^{(k)} - x_2\right| & \leq & \dfrac{1}{7}\left(2\left|x_1^{(k-1)} - x_1\right| + \left|x_3^{(k-1)} - x_3\right|\right) \leq \dfrac{1}{7}\left(2\Delta_{k-1} + \Delta_{k-1}\right) = \dfrac{2+1}{7}\Delta_{k-1} = \dfrac{3}{7}\Delta_{k-1} \\ \left|x_3^{(k)} - x_3\right| & \leq & \dfrac{1}{5}\left(\left|x_1^{(k-1)} - x_1\right| + 3\left|x_2^{(k-1)} - x_2\right|\right) \leq \dfrac{1}{5}\left(\Delta_{k-1} + 3\Delta_{k-1}\right) = \dfrac{1+3}{5}\Delta_{k-1} = \dfrac{4}{5}\Delta_{k-1} \end{array}$$

Como $\dfrac{5}{9} < \dfrac{4}{5}$ e $\dfrac{3}{7} < \dfrac{4}{5}$ temos

$$\begin{array}{rcl} \left|x_1^{(k)} - x_1\right| & \leq & \dfrac{4}{5}\Delta_{k-1} \\ \left|x_2^{(k)} - x_2\right| & \leq & \dfrac{4}{5}\Delta_{k-1} \\ \left|x_3^{(k)} - x_3\right| & \leq & \dfrac{4}{5}\Delta_{k-1} \end{array}$$

Logo

$$\Delta_k = \text{Máximo}\left\{\left|x_i^{(k)} - x_i\right| : i = 1, 2, 3\right\} \leq \frac{4}{5}\Delta_{k-1}$$