Cálculo Numérico - Turma G - P1.1 - 18/05

Nome:____RA:____________

Questão 1. A *spline cúbica* dos pontos $(-2, 1)$, $(-1, 2)$ e $(1, -1)$ é uma função

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{se} \quad x \leq -1 \\ ex^3 + fx^2 + gx + h & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$$

que passa pelos pontos em questão, sua derivada f' se anula em $x = -2$ e $x = 1$, e sua derivada segunda f'' é contínua em $x = -1$. Determine o sistema de equações lineares nas variáveis a, b, c, d, e, f, g, h dessa *spline*, bem como sua matriz estendida.

Resolução.

Os coeficientes a, b, c, d, e, f, g, h da slpline cúbica em questão devem resolver o seguinte sistema linear de 8 equações a seguir:

- $f(-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 1$
- $f(-1) = 2 \quad \Rightarrow \quad a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 2$
- $f(-1) = 2 \quad \Rightarrow \quad e(-1)^3 + f(-1)^2 + g(-1) + h = 2$
- $f(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad e(1)^3 + f(1)^2 + g(1) + h = -1$
- $f'(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = 0$
- $f'(-1) = f'(-1) \quad \Rightarrow \quad 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 3e(-1)^2 + 2f(-1) + g$
- $f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3e(1)^2 + 2f(1) + g = 0$
- $f''(-1) = f''(-1) \quad \Rightarrow \quad 6a(-1) + 2b = 6e(-1) + 2f$

A matriz desse sistema é:

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 12 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ATENÇÃO: há uma questão no verso.

Questão 2. Discretize a equação do calor $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,y) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}T(x,y) = 0$ no quadrado $[0,1] \times [0,1]$ do plano cartesiano Oxy em pontos $T_1 = T(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $T_2 = T(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $T_3 = T(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $T_4 = T(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, com as condições de contorno dadas por $T(x,0) = 45x^2 + 21x + 30$, $T(x,1) = -36x^2 + 12x + 10$, $T(0,y) = -27y^2 + 9y$ e $T(1,y) = 18y^2 + 20$. Determine o sistema de equações lineares nas variáveis T_1, T_2, T_3 e T_4 que estima as temperaturas nesses pontos, bem como a matriz estendida desse sistema.

Resolução.

As temperaturas T_1, T_2, T_3, T_4 satisfazem o seguinte sistema de equações lineares

- $T_1 = \frac{1}{4}\big(T(0, \frac{2}{3}) + T_2 + T(\frac{1}{3}, 1) + T_3\big) \quad \Rightarrow \quad 4T_1 - T_2 - T_3 = T(0, \frac{2}{3}) + T(\frac{1}{3}, 1)$
- $T_2 = \frac{1}{4}\big(T_1 + T(1, \frac{2}{3}) + T(\frac{2}{3}, 1) + T_4\big) \quad \Rightarrow \quad -T_1 + 4T_2 - T_4 = T(1, \frac{2}{3}) + T(\frac{2}{3}, 1)$
- $T_3 = \frac{1}{4}\big(T(0, \frac{1}{3}) + T_4 + T_1 + T(\frac{1}{3}, 0)\big) \quad \Rightarrow \quad -T_1 + 4T_3 - T_4 = T(0, \frac{1}{3}) + T(\frac{1}{3}, 0)$
- $T_4 = \frac{1}{4}\big(T_3 + T(1, \frac{1}{3}) + T_2 + T(\frac{2}{3}, 0)\big) \quad \Rightarrow \quad -T_2 - T_3 + 4T_4 = T(1, \frac{1}{3}) + T(\frac{2}{3}, 0)$

em que

- $T(0, \frac{2}{3}) = -27(\frac{2}{3})^2 + 9(\frac{2}{3}) = -6;$
- $T(\frac{1}{3}, 1) = -36(\frac{1}{3})^2 + 12(\frac{1}{3}) + 10 = 10;$
- $T(1, \frac{2}{3}) = 18(\frac{2}{3})^2 + 20 = 28;$
- $T(\frac{2}{3}, 1) = -36(\frac{2}{3})^2 + 12(\frac{2}{3}) + 10 = 2;$
- $T(0, \frac{1}{3}) = -27(\frac{1}{3})^2 + 9(\frac{1}{3}) = 0;$
- $T(\frac{1}{3}, 0) = 45(\frac{1}{3})^2 + 21(\frac{1}{3}) + 30 = 42;$
- $T(1, \frac{1}{3}) = 18(\frac{1}{3})^2 + 20 = 22;$
- $T(\frac{2}{3}, 0) = 45(\frac{2}{3})^2 + 21(\frac{2}{3}) + 30 = 64.$

A matriz desse sistema é:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 30 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 42 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 86 \end{array}\right)$$