



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Material de apoyo

Unidad Curricular Resistencia de Materiales 2

Instituto de Estructuras y Transporte
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo, Uruguay
1 de noviembre de 2020

Sobre este material

Este documento integra los materiales de apoyo para *asistir* al estudiante en su proceso de aprendizaje de los contenidos de la Unidad Curricular *Resistencia de Materiales 2* de la Carrera Ingeniería Civil brindada por la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. El material no está editado y se encuentra en constante proceso de corrección y mejora. Se invita a estudiantes o lectores a colaborar publicando errores o contribuir realizando modificaciones a través del repositorio abierto gitlab.fing.edu.uy/ResMat2/libroResMat2. Este documento recibió contribuciones de los docentes que han formado parte de la Unidad Curricular, así como también de estudiantes que han contribuido a encontrar errores. Una lista de las contribuciones está disponible en [el archivo contributors.md](#) del repositorio. Se agradece el apoyo financiero de la Comisión Sectorial de Enseñanza de la Universidad de la República, cuyo financiamiento del proyecto de innovaciones educativas titulado *Rediseño de prácticas de enseñanza y evaluación en Resistencia de Materiales* permitió mejorar el presente material.

Jorge Pérez Zerpa
1 de noviembre de 2020

Sobre el estilo de redacción

A lo largo del documento se hace uso del género masculino para hacer referencia a una o varias personas ocupando el rol de: lector, estudiante, profesional, etc. La elección de este género busca simplificar la redacción y lectura del material, de todas formas, en todos los casos las referencias incluyen a cualquier persona que ocupe esos roles independientemente del género con el que se identifique.

El contenido de este documento es publicado bajo una licencia *Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License*. Ver detalles en creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0.

This work is published under a CC BY-SA license (Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License), which means that you can copy, redistribute, remix, transform, and build upon the content for any purpose, even commercially, as long as you give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. If you remix, transform, or build upon the material, you must distribute your contributions under the same license as the original. License details: creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0.

The use of general descriptive names, registered names, trademarks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

Documento producido usando software libre: [L^AT_EX](#), [TeXstudio](#), [Geany](#), [Paraview](#), [Inkscape](#) y [GNU-Octave](#).

Listado de contenidos

1. Introducción	1
1.1. Análisis y modelado estructural	1
1.1.1. Definición y clasificación de estructuras	1
1.1.2. Análisis de estructuras	5
1.1.3. Modelado estructural	7
1.1.4. Ejemplo: Análisis simplificado de puente metálico	8
1.2. Ecuaciones de la teoría de vigas	10
1.2.1. Ecuaciones de la teoría de vigas en flexión pura	10
1.3. Conceptos básicos de Elasticidad Lineal	13
1.3.1. Problema de Elasticidad Lineal	13
1.3.2. Principios energéticos en elasticidad lineal	15
1.3.3. Aplicación al desarrollo de teorías estructurales	17
1.4. Grados de indeterminación	18
1.4.1. Grado de indeterminación estática	18
1.4.2. Grado de indeterminación cinemática	22
1.5. Ejercicios	22
2. Métodos energéticos aplicados a reticulados	26
2.1. Método de los Desplazamientos	26
2.1.1. Interpolación lineal de desplazamientos	26
2.1.2. Energía potencial total	28
2.1.3. Desarrollo del método	30
2.1.4. Apoyos elásticos	31
2.2. Aplicaciones	31
2.2.1. Ejemplo	31
2.2.2. Implementación computacional	33
2.3. Método de las Fuerzas	34
2.3.1. Estados Canónicos	35
2.3.2. Principios energéticos	36
2.3.3. Método de las Fuerzas para análisis de reticulados	38
2.4. Aplicaciones	40
2.4.1. Ejemplo	40
2.4.2. Implementación computacional	41
2.5. Ejercicios	42

Lista de contenidos

III

3. Método de Desplazamientos en pórticos	45
3.1. Teoría de vigas sometidas a flexión compuesta	45
3.1.1. Hipótesis y definiciones fundamentales	45
3.1.2. Solicitaciones y convenciones de signo	47
3.1.3. Relaciones fuerzas-desplazamientos para vigas a flexión	49
3.2. Métodos de analíticos para pórticos	53
3.2.1. Ecuaciones para métodos analíticos	53
3.2.2. Cargas equivalentes	54
3.2.3. Expresiones para un extremo articulado	57
3.2.4. Apoyos elásticos	58
3.2.5. Método <i>Slope-deflection</i>	58
3.2.6. Ejemplo	58
3.3. Métodos de análisis matricial/computacional	62
3.3.1. Relaciones fuerzas-desplazamiento	62
3.3.2. Sistemas de coordenadas y análisis matricial	65
3.3.3. Apoyos elásticos	66
3.3.4. Comparación de energías de deformación	66
3.3.5. Método de Elementos Finitos	67
3.4. Ejercicios	67
4. Simetría y Líneas de Influencia en pórticos	71
4.1. Simetría en estructuras planas	71
4.1.1. Viga sometida a cargas externas simétricas	71
4.1.2. Pórticos planos simétricos con cargas simétricas	75
4.1.3. Viga simétrica con cargas externas antisimétricas	75
4.1.4. Pórticos planos simétricos con cargas antisimétricas	76
4.1.5. Descomposición simetría/antisimetría	77
4.2. Líneas de influencia	77
4.2.1. Líneas de influencia de reacciones	77
4.2.2. Líneas de influencia de cortantes	78
4.2.3. Líneas de influencia de momentos	79
4.3. Ejercicios	80
5. Estructuras tridimensionales de barras	85
5.1. Emparrillados	85
5.1.1. Torsión	85
5.1.2. Barras sometidas a flexo-torsión	86
5.1.3. Ejemplo	89
5.1.4. Implementación computacional	90
5.2. Estructuras tridimensionales de barras	90
5.2.1. Elemento de viga sometido a flexo compresión esviada	90
5.2.2. Elemento de pórtico tridimensional	91
5.3. Ejercicios	91

6. Análisis Seccional	97
6.1. Análisis Lineal de Secciones	97
6.1.1. Línea neutra	97
6.1.2. Núcleo central	99
6.1.3. Ejemplos	103
6.2. Análisis No Lineal de Secciones	105
6.2.1. Materiales que no soportan tracción	106
6.2.2. Ejemplo	107
6.3. Ejercicios	109
A. Soluciones de los ejercicios	116
A.1. Ejercicios de la UT1	116
A.2. Ejercicios de la UT2	118
A.3. Ejercicios de la UT3	120
A.4. Ejercicios de la UT4	128
A.5. Ejercicios de la UT5	135
A.6. Ejercicios de la UT6	140
B. Códigos	141
B.1. Unidad Temática 1	141
B.2. Unidad Temática 2	142
B.3. Unidad Temática 5	151
B.4. Unidad Temática 8	153
C. Fórmulas útiles	161

Unidad temática 1

Introducción

En esta unidad se presentan definiciones y conceptos básicos a ser utilizados en unidades posteriores. Algunos conceptos fueron vistos en cursos anteriores y otros son introducidos aquí. Se presentan criterios de clasificación de estructuras y definiciones de análisis y modelado estructural, para lo cual se tomó como referencia parcial el libro publicado por [Hibbeler \(2012\)](#). Se repasa el desarrollo de las principales ecuaciones de la teoría de vigas como lo hace [Timoshenko \(1940\)](#) y se recuerdan los conceptos más importantes de la teoría de Elasticidad Lineal, tomando como referencia los materiales de la Unidad Curricular dictada por [Canelas \(2018\)](#). Se presenta también, brevemente, la aplicación del principio de trabajos virtuales al desarrollo de las ecuaciones de elementos estructurales. Finalmente se recuerdan y reafirman los conceptos de indeterminación cinemática y estática adoptando una notación y enfoque similar al de ([Cervera Ruiz and Blanco Díaz, 2002a,b](#)).

1.1 Análisis y modelado estructural

Las estructuras construidas y diseñadas por el ser humano han sido utilizadas, desde la época de los imperios egipcio, romano y griego, para cumplir con diversos tipos de objetivos. En el renacimiento, entre los siglos XV y XVI, Da Vinci y Galileo comienzan a resolver problemas de estática de barras, poleas y vigas aplicando herramientas matemáticas y conceptos similares a los del principio de desplazamientos virtuales. Posteriormente entre los siglos XVII y XIX surgieron otros líderes científicos como Hooke, Euler, Bernoulli y Navier, quienes desarrollaron los métodos analíticos de análisis de estructuras de barras en las hipótesis que abordaremos en el curso. El estudiante interesado puede profundizar en la historia del análisis de estructuras en ([Timoshenko, 1953](#)).

En el siglo XX fueron desarrollados métodos prácticos útiles para el análisis de estructuras de gran tamaño como el Método de los Elementos Finitos (MEF) ([Zienkiewicz, 1972](#)). En el siglo XXI las herramientas de análisis numérico de estructuras están integradas al proceso de diseño a través de nuevos formatos de información como BIM.

1.1.1. Definición y clasificación de estructuras

Para poder utilizar un lenguaje común al referirse a las estructuras es necesario y útil establecer definiciones y criterios de clasificación de estructuras. En el curso se considerará la siguiente definición de *estructura*.

Sección 1.1. Análisis y modelado estructural

2

Definición: Estructura

Una estructura es un **sistema de componentes** o elementos estructurales, utilizado para soportar un conjunto de **cargas** con el objetivo de cumplir una **función**.

A continuación se presentan algunos posibles criterios de clasificación de estructuras según su función, cargas y componentes estructurales.

Clasificación según su función

Una estructura puede ser clasificada de acuerdo a su función, o la disciplina en la que se presenta, de la siguiente forma:

- **Civiles:** estructuras destinadas a cumplir funciones vinculadas a la población civil. Con geometrías restringidas por materiales y métodos constructivos disponibles. Las cargas principales consideradas son: peso propio, sobrecarga de uso y viento. Ejemplos: universidades, carreteras, puentes, sistemas de transmisión de energía eléctrica, vías férreas (ver Figura 1.1a), muelles, etc.
- **Mecánicas:** estructuras vinculadas a máquinas o algún componente de equipamientos mecánicos. Presentan gran diversidad de geometrías y tipos de cargas. Ejemplos: estructuras de automóviles (carrocería, motores, etc.), atracciones mecánicas (ver Figura 1.1b).
- **Aeroespaciales:** estructuras de vehículos aeroespaciales. Las cargas suelen estar vinculadas a condiciones extremas o exigentes como altas presiones o temperaturas, o cargas repetitivas que producen fatiga. Ejemplos: aviones, satélites (Yoshiaki et al., 1992)
- **Navales:** estructuras vinculadas a actividades navales, como por ejemplo, componentes de barcos. Las cargas tienen una componente dinámica importante, así como también una complejidad elevada debido a la interacción con fluidos.
- **Biomédicas:** estructuras de soporte de componentes biomédicos. Eventualmente sometidas a procesos químicos. Ejemplos: prótesis, *stents* (Frischkorn and Reese, 2015).

En este texto se presentan métodos de análisis aplicables principalmente a estructuras civiles.

Clasificación de componentes estructurales

Las estructuras civiles están formadas por *componentes estructurales*, los cuales son descritos de forma sintética a continuación:

- **barra:** elemento con una dimensión (eje) considerablemente mayor que las otras. Soporta tensiones de compresión o tracción según su eje.
- **viga** (de eje recto): elemento con geometría de barra en su configuración natural (sin cargas), que puede ser sometido a fuerzas según su eje (normales) o transversales (cortantes) así como también a momentos según su eje (torsores) o transversales (flectores).

Sección 1.1. Análisis y modelado estructural

3



(a) Ejemplo de estructura civil: vía férrea de tren de Corcovado en Río de Janeiro, Brasil. (b) Ejemplo de estructura mecánica: atracción mecánica en Montevideo, Uruguay.

Figura 1.1: Ejemplos de estructuras.

- **pilar:** elemento con geometría de barra que se encuentra sometido a flexión y compresión según su eje siendo la compresión preponderante.
- **cable:** también utilizado como **tensor**, son elementos de barra sometidos principalmente a tracción que no soportan considerable flexión o compresión según su eje.
- **losa y cáscara:** elementos con dos dimensiones (formando su plano o superficie media) mayores que la otra dimensión. Soportan flexión o tensión con vector contenido en el plano medio. Las losas tienen un plano medio plano, mientras que en las cáscaras este se encuentra dado por una superficie con curvatura no nula.
- **membrana:** elementos superficiales muy flexibles de pequeño espesor que no son capaces de soportar compresión o flexión. En la Figura 1.2 se observa la cubierta exterior, de la Terminal Madero de la Ciudad de Buenos Aires, formada y soportada por componentes de membrana, barras, vigas y cables.
- **otros:** existen otros elementos estructurales cuya geometría más compleja no asocia directamente a un estado tensional de los anteriores, por ejemplo: zapatas, cabezales, muros de contención (trabajando como losa o bajo estados planos de deformación) y arcos o vigas de eje curvo.

Un tipo de estructura frecuentemente analizada es el pórtico, o estructura aporticada, la cual está formada por pilares y vigas vinculados por al menos un nudos rígidos o uniones que transmiten momentos. A continuación se presentan criterios de clasificación de estructuras de acuerdo a los vínculos existentes entre sus componentes.

Clasificación según sus vínculos

Se considerarán dos tipos de estructuras de acuerdo a sus vínculos internos:

- **Estructura reticulada:** formada por barras unidas de forma tal que no se transmiten momentos en todos los nodos de la estructura, es decir que todos los nodos son articulaciones.

Sección 1.1. Análisis y modelado estructural

4



Figura 1.2: Foto exterior de las cubiertas de la Terminal Madero Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

- **Estructura aporticada:** formada por barras unidas donde al menos dos barras están conectadas por un nudo rígido o un vínculo que transmite momentos.

Clasificación según geometría y carga

De acuerdo a su geometría y cargas aplicadas una estructura puede ser clasificada de la siguiente forma.

- **Estructura Plana:** Una estructura será considerada **plana** si se cumplen todas las siguientes condiciones:

1. todos los ejes de sus barras (barras, vigas o pilares) pertenecen a un plano y este plano es plano de simetría de todas las barras de la estructura
2. todos los vectores de fuerza aplicados a la estructura son vectores contenidos en el plano de simetría de la estructura
3. todos los momentos aplicados son aplicados en puntos que pertenecen al plano medio de la estructura y están dados por un vector perpendicular al plano de simetría de la estructura
4. las restricciones cinemáticas son tales que las reacciones correspondientes cumplan con las condiciones anteriores de fuerza y momento.

- **Estructura Plano-espacial:** Una estructura será considerada **plano-espacial**, también llamada emparrillado, si se cumple:

1. todos los ejes de sus barras pertenecen a un plano,
2. todos los vectores de fuerza aplicados a la estructura son vectores perpendiculares a dicho plano
3. todos los momentos aplicados son aplicados en puntos que pertenecen al plano de las barras de la estructura y están dados por vectores contenidos en dicho plano
4. las restricciones cinemáticas son tales que las reacciones correspondientes cumplan con las condiciones anteriores de fuerza y momento.

Sección 1.1. Análisis y modelado estructural

5

- **Estructura tridimensional:** una estructura será considerada **tridimensional** si no es clasificada dentro de ninguna de las dos categorías anteriores.

Actividad

Considere un edificio de viviendas de tres pisos de altura con planta rectangular. Identificar los componentes estructurales de la estructura. Clasifique la estructura de acuerdo a los criterios vistos.

1.1.2. Análisis de estructuras

Luego de haber definido el término *estructura* se pasa a introducir el concepto de *análisis estructural*. El análisis es una etapa crucial en el proceso de diseño y verificación de cualquier estructura.

Definición: Análisis estructural

El *análisis* de una estructura consiste en la determinación de los **efectos** (solicitudes y movimientos) que un sistema de **cargas** dado produce sobre la **estructura** y cada uno de los elementos estructurales que la componen.

El proceso de analizar una estructura puede ser también llamado *resolver* una estructura.

Las fuerzas aplicadas a los elementos estructurales y la vinculación existente entre estos elementos determinan las deformaciones y solicitudes de la estructura. Para definir el tipo de análisis a realizar se deberá categorizar las cargas y vínculos entre componentes.

A continuación se definen distintos tipos de **cargas** que suelen ser aplicados a estructuras. Luego se enumeran algunos de los vínculos entre componentes estructurales más importantes.

Cargas

Las cargas o fuerzas externas que pueden ser aplicadas a estructuras pueden tener diversas causas, por lo que tendrán diferentes características respecto a: frecuencia de ocurrencia, magnitudes, confiabilidad, etc. Las normas o códigos establecen metodologías para considerar la distinta naturaleza de las acciones al diseñar estructuras.

En este material se considera que toda carga es de tipo *estática* o *permanente*, independientemente de su origen. Estas cargas son provocadas por acciones cuya magnitud o sentido no varía en el tiempo, como por ejemplo el peso propio de cada elemento estructural.

Las cargas o esfuerzos producidos por otras acciones como viento, sismos, impactos, etc., deben ser analizadas de forma diferente aplicando modelos numéricos o criterios de diseño específicos definidos por normativas correspondientes. En este texto se asume que, sea cual fuere su origen, toda carga podrá ser considerada como estática. Existe una importante rama del en la Ingeniería Estructural, enfocada al análisis dinámico de estructuras, en la cual se destacan referencias bibliográficas como ([Clough and Penzien, 1993](#)).

Condiciones de vínculo y apoyo en estructuras

Los **vínculos a tierra**, o condiciones de apoyo, de cada nodo de una estructura pueden ser clasificados de la siguiente forma:

- **libre**: un nodo o un extremo de una viga que no está vinculado a tierra o que no tiene desplazamiento ni giro impuesto ni restringido en ninguna dirección o ángulo,
- **desplazamiento impedido**: vínculo que impide el desplazamiento de un nodo en una o más direcciones,
- **giro impedido**: vínculo que impide el giro de un nodo según un cierto vector,
- **resorte de desplazamiento**: vínculo en el cual la fuerza externa aplicada es proporcional y de sentido contrario al desplazamiento desarrollado por el nodo en una cierta dirección,
- **resorte de giro**: vínculo en el cual el momento externo aplicado es proporcional y de sentido contrario al giro desarrollado por el nodo en una cierta dirección,
- **vínculo mixto**: vínculo con combinaciones que no pertenecen a ninguna de las categorías anteriores.

En la Figura 1.3a se muestra parte de la estructura de soporte de la cubierta de la terminal de Madero en Bs. As.. En la Figura 1.3b se puede ver una materialización de un vínculo que podría considerarse como un apoyo fijo que restringe el desplazamiento de un punto. El modelado estructural de este vínculo puede ser un problema interesante, donde es necesario estudiar el nivel de restricción real del giro en algunas direcciones.



(a) Elementos de transmisión de cargas y soporte.



(b) Elementos de transmisión de cargas y soporte.

Figura 1.3: Fotos de interior de terminal Madero, Ciudad de Buenos Aires. (izq.), vínculo a tierra articulado (der.).

Sección 1.1. Análisis y modelado estructural

7

Clasificación de vínculos entre elementos estructurales

El comportamiento de los elementos estructurales están limitado por los vínculos, que pueden ser clasificados como:

- **articulación:** nodo que transmite fuerzas y compatibiliza desplazamientos entre barras que llegan a el,
- **unión rígida:** nodo que transmite fuerzas y momentos y compatibiliza desplazamientos y giros entre barras que llegan a el,

Existen otros tipos de vínculos que pueden ser considerados entre elementos estructurales, pero no serán vistos en el curso.

Actividad

Enumere las cargas presentes durante la vida útil del edificio de tres pisos considerado en la actividad anterior. Analice qué tipo de apoyo puede tener la estructura sobre el suelo así como también qué vínculos pueden existir entre los elementos de la estructura.

1.1.3. Modelado estructural

El análisis estructural es la herramienta utilizada por profesionales responsables del diseño de estructuras. El diseño de una estructura consiste en un proceso iterativo en el cual se definen dimensiones de los componentes estructurales, se determinan sus solicitudes y se verifica que se cumpla con el criterio del profesional y las normativas correspondientes.

Para presentar de forma esquemática el proceso asociado al diseño de una estructura se definen los siguientes conceptos:

- Estructura Real (ER)
- Esquema Básico de Cálculo (EB)
- Modelo Numérico (MN)

Estructura Real El concepto de *Estructura Real* (ER), podrá ser utilizado para referirse a una estructura existente (ya construida), o a aquella que se desea construir y que es imaginada por los diseñadores. En toda ER se cuenta con una geometría con imperfecciones debidas al procedimiento constructivo. Asimismo, la ER está sometida a estados de cargas asociadas al uso efectivo que tiene a lo largo de su vida útil. Las condiciones de apoyo también son debidas a la interacción de la misma con otros elementos como, por ejemplo, el apoyo sobre un suelo no homogéneo, el cual tiene un comportamiento complejo de alta dificultad para predecir.

Esquema Básico de Cálculo El *Esquema Básico de cálculo* (EB), es considerado como el modelo simplificado de la estructura que se obtiene al considerar ciertas hipótesis sobre la estructura real. Como ejemplos se tiene: una geometría idealizada, condiciones de apoyos ideales (por ej. apoyos fijos) o estados de carga hipotéticos, establecidos por normas técnicas

Sección 1.1. Análisis y modelado estructural

8

y con cierta probabilidad de ocurrencia. También se pueden incluir aquí las hipótesis sobre el comportamiento constitutivo de los materiales que componen la estructura, frecuentemente estipulado por normas técnicas.

Modelo Numérico El *Modelo Numérico* (MN) de una estructura es la herramienta que se utiliza para obtener magnitudes solución de las ecuaciones asociadas al EB (es decir, desplazamientos, solicitudes, tensiones, etc). Para estas soluciones se debe utilizar algún método numérico para resolver un conjunto de ecuaciones lineales o en algunos casos no lineales ([Bazzano and Pérez Zerpa, 2017](#)).

El proceso de diseño estructural consiste en un procedimiento iterativo que puede ser sintetizado de forma simplificada a través de la siguiente lista de etapas:

1. establecer **condiciones** que la ER debe cumplir (arquitectónicas, normativas, etc.)
2. **realizar un EB** a partir de una primer estimación de secciones, materiales, vínculos entre componentes
3. a través del uso de un MN **obtener las solicitudes** a las que cada componente de la estructura estará sometido
4. **diseñar los componentes** de las estructuras para soportar las solicitudes (acero, secciones, tipo de hormigón, etc.)
5. **verificar** si se cumplen las condiciones definidas en (1): si se cumplen entonces se finalizó, si no se cumplen se debe proponer un nuevo EB recomendando desde el paso (2).

En este curso se abordará el estudio de métodos analíticos y numéricos para la determinación de solicitudes y desplazamientos (análisis) de estructuras. Esto corresponde a la etapa 3 del proceso de diseño descrito. En menor medida se realizará diseño de secciones considerando criterios simples de resistencia de materiales sin tomar en cuenta las consideraciones más complejas definidas por las normas técnicas necesarias para el ejercicio profesional.

1.1.4. Ejemplo: Análisis simplificado de puente metálico

Para fijar ideas se considera un ejemplo de modelado simple de una estructura compleja. Con esto, se pretende mostrar parte del proceso de modelado y análisis de una estructura para ilustrar los conceptos introducidos.

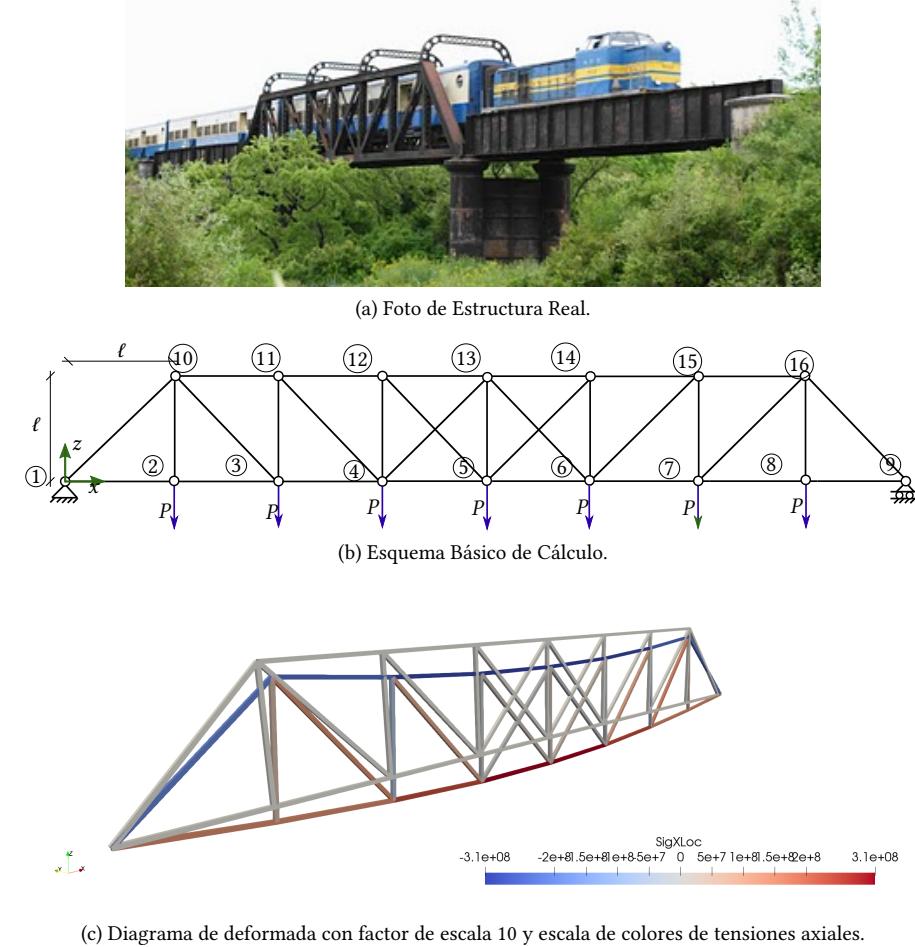
En la Figura 1.4a se muestra una foto de un puente metálico, que será considerado como la **estructura real**.

Para pasar al EB se consideran diversas hipótesis, entre las que se destacan:

- las uniones de los perfiles son consideradas como articulaciones,
- las cargas puntuales aplicadas en los nodos se consideran de igual magnitud,
- se consideran dos reticulados planos con todos sus nodos desplazándose en el plano que los contiene, en lugar de una estructura tridimensional (teniendo en cuenta el estado de cargas simétrico),

Sección 1.1. Análisis y modelado estructural

9



- se asume que el material es elástico lineal y que la estructura sufre pequeñas deformaciones y desplazamientos para las cargas aplicadas.

En la Figura 1.4b se muestra el EB obtenido para uno de los reticulados planos considerando las hipótesis mencionadas. Es importante destacar que otras hipótesis pueden ser consideradas, por ejemplo, el vínculo entre los perfiles puede no ser articulado.

Finalmente se utiliza el MEF para obtener las magnitudes deseadas resolviendo numéricamente las ecuaciones planteadas por el MN. Se modela cada barra con un elemento de barra plano de dos nodos, con funciones de interpolación lineales. Luego de resolver el sistema de ecuaciones lineales correspondiente, se obtienen los desplazamientos y luego de utilizar un factor de escala adecuado (10 en este caso) se obtiene una estructura deformada dada por la Figura 1.4c. La escala de colores representa los valores de tensiones axiales.

En este caso para resolver el Modelo Numérico se utilizó la herramienta de elementos finitos ONSAS¹. El archivo de entrada usado para resolver el reticulado es presentado en el

¹Código abierto disponible en: <https://github.com/onsas>

Código [B.1](#).

En este texto nos concentraremos en el estudio de métodos para la resolución del Esquema Básico de Cálculo, a través de la resolución del Modelo Numérico o del uso de soluciones analíticas. De aquí en adelante se podrá utilizar la palabra estructura para hacer referencia al Esquema Básico de Cálculo.

1.2 Ecuaciones de la teoría de vigas

En esta sección se repasan conceptos básicos de la teoría de vigas, ya presentada en cursos previos de la materia Resistencia de Materiales.

Se considera que la viga consiste en un sólido ocupando una región del espacio cuya dimensión longitudinal es considerablemente superior a las dimensiones transversales, y que está sometida a esfuerzos longitudinales y/o transversales. En la [Figura 1.4](#) se muestra un esquema de la geometría considerada.

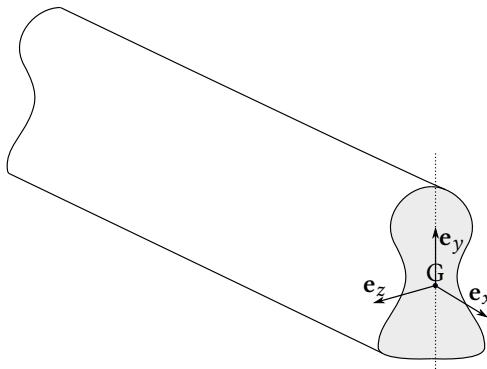


Figura 1.4: Esquema tridimensional de viga y sistema de coordenadas considerado.

En este material y en el curso se tendrán en cuenta las siguientes hipótesis/convenciones:

- la sección transversal es uniforme a lo largo de la dirección x ,
- el eje e_x pasa por los baricentros de las secciones transversales, denotados por G ,
- los ejes e_y y e_z son ejes principales de la sección transversal,
- y el plano $x - y$ es plano de simetría de la sección transversal y de la viga.

1.2.1. Ecuaciones de la teoría de vigas en flexión pura

Se pasa ahora a considerar el plano $x - y$ y que la viga está sometida a un estado de flexión pura. En esta sección se presentan esquemáticamente las ecuaciones más importantes de la teoría de vigas, la cual se puede ver de forma más extendida en ([Timoshenko, 1940](#)).

En la [Figura 1.5](#) se muestra el esquema plano de la viga deformada.

La función $v(x)$ representa el desplazamiento según e_y del baricentro de la sección transversal en la posición x y θ el ángulo que forma la tangente a la curva deformada con el eje x .

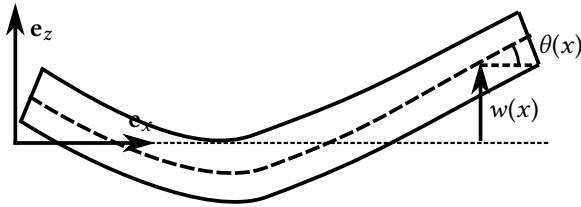
Sección 1.2. Ecuaciones de la teoría de vigas**11**

Figura 1.5: Esquema plano de viga deformada.

A partir de la hipótesis de que las secciones planas permanecen planas y perpendiculares a la curva de los baricentros en la deformada, se obtiene la expresión de la deformación axial en cualquier punto:

$$\varepsilon(x, y) = \frac{(\rho(x) - y)d\theta - \rho(x)d\theta}{\rho(x)d\theta} = \frac{-y}{\rho(x)}, \quad (1.1)$$

donde se omitió el subíndice x de la deformación axial y $\rho(x)$ es el radio de curvatura de la deformada y está dado por

$$\rho(x) = \frac{ds}{d\theta}(x). \quad (1.2)$$

donde $s(x)$ es la longitud de la curva deformada en la posición x . La curvatura de la curva deformada está dada por

$$\kappa(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}(x)}. \quad (1.3)$$

Se procede a buscar una forma de calcular la función $\frac{ds}{d\theta}$. Utilizando la regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{d\theta} \quad (1.4)$$

Para el primer factor del segundo miembro se tiene que la función de la longitud de curva deformada puede ser calculada fácilmente en función de x usando la definición de la longitud de curva considerando la parametrización $(x(t) = t, y(t) = v(t))$, obteniendo:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dt}(t) \right)^2} dt \quad (1.5)$$

por lo tanto se cumple:

$$\frac{ds}{dx}(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}(x) \right)^2}. \quad (1.6)$$

Por otra parte, para obtener una expresión del segundo factor del miembro derecho de la Ecuación (1.4), se sabe que se cumple:

$$\tan(\theta(x)) = \frac{dv}{dx}(x) \quad (1.7)$$

Sección 1.2. Ecuaciones de la teoría de vigas**12**

por lo que se puede obtener la función $\theta(x)$ como:

$$\theta(x) = \arctan\left(\frac{dv}{dx}(x)\right). \quad (1.8)$$

Usando la identidad:

$$\frac{d \arctan(u)}{du} = \frac{1}{1+u^2}, \quad (1.9)$$

y la regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{d\theta}{dx}(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{dv}{dx}(x)\right)^2} \frac{d^2v}{dx^2}(x). \quad (1.10)$$

Usando el teorema de la función inversa se tiene que

$$\frac{dx}{d\theta}(\theta(x)) = \frac{1}{\frac{d\theta}{dx}(x)},$$

por lo tanto se obtiene

$$\frac{dx}{d\theta}(\theta(x)) = \left(1 + \left(\frac{dv}{dx}(x)\right)^2\right) \frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}(x)} \quad (1.11)$$

sustituyendo las ecuaciones (1.6) y (1.11) en la Ecuación 1.4 y aplicando la definición de la curvatura se obtiene la expresión:

$$\kappa(x) = \frac{d^2v}{dx^2} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}. \quad (1.12)$$

En el caso de que la viga desarrolle pequeños giros $\theta \ll 1$, o que esa sea la hipótesis considerada, se consideran los siguientes desarrollos de Taylor respecto a cero:

$$\tan(\theta) \approx \theta \quad y \quad \left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right) = (1 + \tan(\theta)^2) \approx 1, \quad (1.13)$$

por lo que se obtiene una nueva expresión simplificada de la curvatura:

$$\kappa(x) = \frac{d\theta}{dx}(x) = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (1.14)$$

La deformación axial en la sección x y en la fibra ubicada en la posición y puede ser también aproximada como:

$$\epsilon(x, y) = -y \frac{d^2v}{dx^2}(x) = -y \frac{d\theta}{dx}(x),$$

(1.15)

aproximación que será útil para el desarrollo del elemento finito de viga.

1.3 Conceptos básicos de Elasticidad Lineal

La teoría de la mecánica del continuo permite formular y aplicar modelos numérico-matemáticos para estimar la deformación de cuerpos sólidos, al ser sometidos a esfuerzos conocidos considerando condiciones de apoyo adecuadas. En esta sección se presentan esquemáticamente algunos conceptos de la teoría de Elasticidad Lineal importantes para el posterior desarrollo de los conceptos del texto.

1.3.1. Problema de Elasticidad Lineal

En esta sección se presentan los conjuntos de ecuaciones fundamentales necesarios para formular el Problema de Elasticidad Lineal (PEL) con el objetivo de analizar cualquier estructura o sólido. Estas ecuaciones son:

- **Ecuaciones de equilibrio:** relaciones entre tensiones de elementos estructurales y fuerzas externas
- **Ecuación constitutiva:** relación entre tensiones y deformaciones de elementos
- **Relaciones cinemáticas:** relación entre deformaciones y desplazamientos
- **Condiciones de contorno:** valores conocidos de desplazamientos y fuerzas externas

Ecuaciones de equilibrio

Sea un sólido ocupando una región Ω del espacio, como el mostrado en la Figura 1.6, sometido a una fuerza de volumen b , cuya inercia puede ser despreciada, las ecuaciones puntuales de equilibrio están dadas por:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma(x) + b = 0 & \forall x \text{ en } \Omega \\ \sigma(x) = \sigma(x)^T & \forall x \text{ en } \Omega \end{cases} \quad (1.16)$$

donde $\sigma(x)$ es el tensor de tensiones en el punto x .

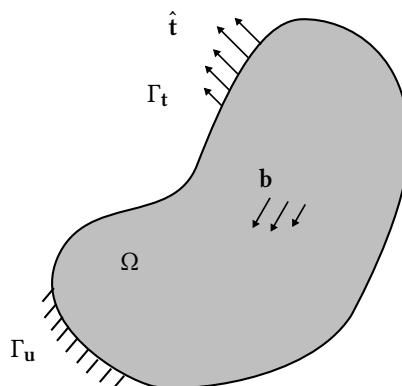


Figura 1.6: Esquema de cuerpo sólido sometido a fuerzas externas.

Sección 1.3. Conceptos básicos de Elasticidad Lineal**14**

Se asumirá de aquí en adelante que el tensor de tensiones es simétrico en todo punto \mathbf{x} de Ω aunque no sea aclarado. Por simplicidad de notación se omitirá el punto \mathbf{x} de aquí en adelante.

Ecuación constitutiva

Para materiales hiperelásticos, las tensiones están relacionadas de forma directa con el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ a través de la ecuación

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (1.17)$$

donde Ψ es la función de densidad de energía de deformación y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones infinitesimales.

Para materiales con comportamiento elástico lineal se tiene

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}], \quad (1.18)$$

donde \mathbb{C} es el tensor constitutivo. Usando la Ecuación (1.17) se obtiene la ecuación constitutiva en la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}], \quad (1.19)$$

es decir una relación lineal entre tensión y deformación.

En este texto se consideran materiales isótropos, los cuales tienen igual comportamiento constitutivo en todas las direcciones. Se puede mostrar que el tensor constitutivo está dado por dos parámetros (parámetros de Lamé), permitiendo obtener la siguiente expresión de la ecuación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.20)$$

donde Tr es la función traza y λ y μ son los parámetros de Lamé. Estos últimos están relacionados con el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν a través de las expresiones

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.21)$$

El parámetro μ es llamado módulo de corte y puede también ser denotado como G .

Existen diversos materiales, como por ejemplo la madera, para los cuales no se cumple la propiedad de isotropía y el tensor \mathbb{C} tiene una expresión dependiente de una mayor cantidad de parámetros. La madera es uno de los materiales con comportamiento anisótropo más utilizados en construcción (Pereira et al., 2014), siendo sus propiedades según la dirección de las fibras, aquellas de mayor relevancia e interés de estudio (Pérez Zerpa et al., 2017). Otro material con comportamiento anisótropo presente en la naturaleza es el tejido arterial (Holzapfel et al., 2000). En este texto se hará foco en materiales isotrópicos.

Relaciones cinemáticas

El tensor de deformaciones está relacionado con el campo de desplazamientos \mathbf{u} a través de la expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (1.22)$$

Sección 1.3. Conceptos básicos de Elasticidad Lineal**15****Condiciones de contorno**

Finalmente se presentan las condiciones de contorno en desplazamientos sobre Γ_u y en tensiones sobre Γ_t

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} & \text{en } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{n}] = \hat{\mathbf{t}} & \text{en } \Gamma_t \end{cases} \quad (1.23)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ es el campo vectorial de desplazamientos impuestos o conocidos, y $\hat{\mathbf{t}}$ es el campo vectorial de vectores tensión aplicados.

Problema de Elasticidad Lineal

El PEL consiste en encontrar las magnitudes: $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ y \mathbf{u} que verifican simultáneamente las condiciones establecidas por las ecuaciones: (1.23), (1.20), (1.16) y (1.22). Esta es usualmente llamada la formulación fuerte del problema de Elasticidad Lineal.

1.3.2. Principios energéticos en elasticidad lineal

A partir de las ecuaciones de la formulación fuerte del PEL es posible obtener formulaciones débiles o integrales, las cuales facilitan la posterior presentación de métodos numéricos de resolución.

Teorema de trabajo virtual

Si se considera un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}$ en equilibrio con las fuerzas externas y un campo de desplazamientos virtuales \mathbf{w} compatible con las condiciones cinemáticas de contorno, entonces se cumple que:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) dV = \int_{\Gamma_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dS, \quad (1.24)$$

donde el miembro izquierdo representa el trabajo de las fuerzas internas y el miembro derecho el trabajo de las fuerzas externas.

Esta relación permite plantear el problema de encontrar $\boldsymbol{\sigma}$ como el problema de encontrar cuál es el campo tensorial que verifica la igualdad anterior para cualquier campo de desplazamientos virtual.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) dV = \int_{\Gamma_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dS \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u \quad (1.25)$$

donde \mathcal{V}_u es el conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos de apoyo.

Esta relación puede ser obtenida a partir de las ecuaciones de equilibrio puntual y las condiciones de contorno mecánicas.

Formulación débil del problema de elasticidad lineal

Considerando la ecuación constitutiva del material elástico lineal se puede reescribir la ecuación anterior obteniendo una nueva formulación del PEL. Esta formulación consiste en hallar el campo de desplazamientos \mathbf{u} tal que se cumple:

$$\int_{\Omega} \mathbb{C}[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})] : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) dV = \int_{\Gamma_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dS \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u. \quad (1.26)$$

Sección 1.3. Conceptos básicos de Elasticidad Lineal**16**

Este es el tipo de expresiones que posibilitan el desarrollo, de forma directa, de métodos numéricos para la resolución eficiente del problema, en particular el Método de los Elementos Finitos ([Hughes, 1987](#)).

Principio de mínima energía potencial total

Es también posible obtener las expresiones anteriores a partir de un enfoque basado en principios energéticos.

Se define la energía potencial de las fuerzas externas como:

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dS. \quad (1.27)$$

Por otra parte, la energía potencial de deformación está dada por la integral de la densidad de energía de deformación:

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{u}) dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C[\epsilon(\mathbf{u})] : \epsilon(\mathbf{u}) dV. \quad (1.28)$$

Se define la energía potencial total del sistema para el campo de desplazamientos \mathbf{u} , denotada por $\Pi(\mathbf{u})$ y dada por la expresión:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi_{int}(\mathbf{u}) + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (1.29)$$

Principio de mínima energía potencial El principio establece que, dado un problema de elasticidad lineal con condiciones de contorno de tensión en Γ_t , condiciones de contorno en desplazamientos en Γ_u , un campo de desplazamientos \mathbf{u} es solución del problema si verifica

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \Pi(\mathbf{u}) \quad (1.30)$$

donde \mathcal{U} es el conjunto de los campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles, es decir que cumplen $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ en Γ_u .

Utilizando la definición de mínimo o las condiciones de optimalidad se puede mostrar la equivalencia entre el principio de mínima energía potencial y el teorema de trabajo virtual. En ([Canelas, 2018](#)) se presentan desarrollos de este tipo para el caso de sólidos, mientras que en este curso aplicará el principio en el contexto de cada teoría estructural particular.

Teorema de reciprocidad de Betti

El Teorema de Betti puede ser enunciado de la siguiente forma: Sea una estructura ocupando la región Ω , dado un conjunto de fuerzas externas aplicadas: \mathbf{b}_A y \mathbf{t}_A , las cuales producen desplazamientos \mathbf{u}_A y dado por otra parte un conjunto de fuerzas externas \mathbf{b}_B y \mathbf{t}_B que producen desplazamientos \mathbf{u}_B , entonces se cumple:

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_A \cdot \mathbf{u}_B dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_A \cdot \mathbf{u}_B dS = \int_{\Omega} \mathbf{b}_B \cdot \mathbf{u}_A dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_B \cdot \mathbf{u}_A dS. \quad (1.31)$$

Este teorema será aplicado en unidades temáticas posteriores al desarrollo de métodos de determinación de líneas de influencia en pórticos.

1.3.3. Aplicación al desarrollo de teorías estructurales

Los principios energéticos permiten obtener, a través del uso de ciertas simplificaciones o aproximaciones respecto al comportamiento de los sólidos, expresiones de las ecuaciones de mayor facilidad de resolución. En esta sección se presenta el desarrollo de la teoría de barras articuladas.

Las teorías de estructuras pueden ser desarrolladas tanto a partir de hipótesis respecto al movimiento que sufren los puntos del cuerpo sólido como a partir de los estados tensionales que el sólido es capaz de soportar. En este caso se consideran las hipótesis cinemáticas como punto de partida.

Teoría de barras articuladas

En el caso del elemento de barra sometido a esfuerzo según su eje, se considera que las tensiones axiales internas son uniformes en la sección transversal y el campo vectorial de desplazamientos corresponde a una deformación uniaxial. Se considera que no hay fuerzas de volumen aplicadas en la barra, por lo que solo se tendrán tensiones en los extremos. Si se considera que el eje e_x coincide con el eje de la barra entonces el tensor de deformaciones está dado por el correspondiente a un ensayo uniaxial es decir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_x \end{bmatrix} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.32)$$

lo que corresponde a un movimiento en el que las secciones perpendiculares al eje se mantienen planas y perpendiculares al eje y solamente modifican su área.

Sustituyendo en la ecuación constitutiva se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} E\varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

por lo que la única ecuación constitutiva relevante en los principios energéticos es $\sigma_x = E\varepsilon_x$.

A partir de la ecuación de equilibrio y considerando que no hay fuerzas de volumen aplicadas en el interior de la barra se tiene que

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 = E \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}, \quad (1.34)$$

por lo tanto la deformación es uniforme en la barra y además puede ser escrita en términos de los desplazamientos de los nodos de los extremos. Si u_2 es el desplazamiento del nodo del extremo derecho y u_1 el del extremo izquierdo, se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{\ell} \quad (1.35)$$

donde ℓ es el largo de la barra.

Sustituyendo estas expresiones en la definición de energía potencial se obtiene una ex-

Sección 1.4. Grados de indeterminación**18**

presión de Π en función de los desplazamientos nodales:

$$\Pi(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \frac{1}{\ell^2} (u_2 - u_1)^2 dV - F_1 u_1 - F_2 u_2 \quad (1.36)$$

calculando la integral y derivando respecto a u_1 y u_2 se obtiene:

$$\nabla \Pi(u_1, u_2) = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

por lo que la condición de punto crítico es

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Varios ejemplos de teorías estructurales de interés para el análisis de estructuras civiles se pueden encontrar en ([Oñate, 2013](#)). Durante el curso se abordarán las teorías de vigas y pórticos así como también se introducirá la teoría de losas.

1.4 Grados de indeterminación

Existen diversos métodos disponibles para el análisis de una estructura, por lo tanto, es útil identificar qué tipo de métodos son los más adecuados antes de iniciar el análisis estructural. En esta sección se presentan propiedades geométricas (valores numéricos) que pueden ser calculados antes del análisis para poder asistir en la decisión del método a utilizar.

Los grados de indeterminación estática y cinemática son valores dados por la geometría y los vínculos entre componentes de la estructura. Estos valores numéricos permiten estimar la complejidad de la resolución usando dos métodos analíticos presentados el curso: el *Método de las Fuerzas* y el *Método de los Desplazamientos*.

1.4.1. Grado de indeterminación estática

El grado de indeterminación estática (también llamado *grado de hiperestaticidad*) es un valor numérico definido por la diferencia entre: el número de incógnitas de fuerza y el número de ecuaciones de equilibrio. La metodología de cálculo presentada en esta sección está basada en ([Cervera Ruiz and Blanco Díaz, 2002b](#)).

Las **incógnitas de fuerza** son aquellas necesarias para determinar completamente el **estado tensional** de toda la estructura. En las estructuras consideradas en este texto, estas incógnitas son:

- n_S : solicitudes o fuerzas debidas a vínculos internos de la estructura,
- n_R : reacciones dadas por vínculos externos.

Por otra parte para calcular el número de ecuaciones con que se cuenta se define:

- n_C : es el número de componentes o partes en la que se separa la estructura para el cálculo,
- n_E : el número de ecuaciones de equilibrio para cada parte.

Sección 1.4. Grados de indeterminación

19

La expresión matemática del grado de indeterminación estática puede ser presentada como:

$$gh = n_R + n_S - n_C n_E. \quad (1.39)$$

Como ejemplo se presentan las estructuras de la Figura 1.7, formadas por un único componente y con diferente cantidad de reacciones externas. Dado que no se cortan o liberan vínculos internos de la estructura no hay n_S .

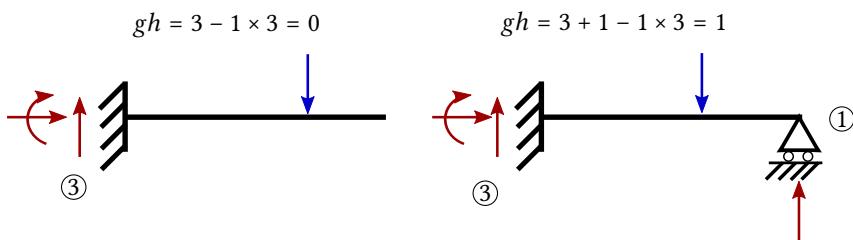


Figura 1.7: Ejemplos simples de cálculo de grado de hiperestaticidad.

En la Figura 1.8. se muestra un reticulado, donde nuevamente si se desacopla en $n_C = 3$ componentes una por barra, se tiene que cada articulación introduce dos vínculos a determinar. Por lo tanto $gh = 2 + 1 + 2 + 2 + 2 - 3 \times 3 = 0$.

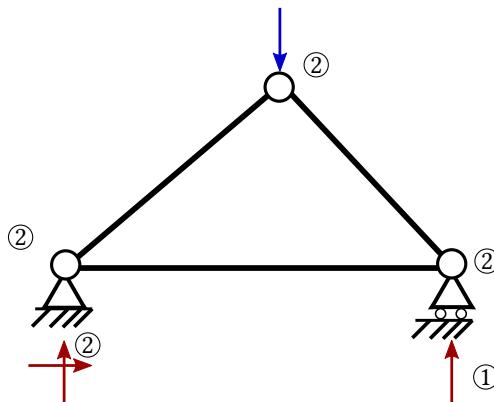


Figura 1.8: Ejemplo de cálculo de grado de hiperestaticidad en reticulado.

Analogía con cálculo a partir de grados de libertad El cálculo presentado es análogo al utilizado en otros cursos, en los cuales se considera el número de grados de libertad total de las estructuras (en el ejemplo 3×3) y se van restando los vínculos que restringen el movimiento entre barras y a tierra ($-2 - 1 - 2 - 2 - 2$) por lo que se obtiene un valor opuesto al gh .

Clasificación de estructuras según grado de hiperestaticidad Las estructuras pueden ser clasificadas según su grado de hiperestaticidad:

Sección 1.4. Grados de indeterminación**20**

- *estáticamente determinada* (o isostática): es aquella estructura cuyo estado tensional puede ser determinado usando únicamente ecuaciones de equilibrio, por lo tanto:

$$gh = 0$$

- *hiperestáticas*: es aquella estructura para la cual no es posible determinar el estado tensional usando únicamente equilibrio, es decir:

$$gh > 0.$$

En este caso deben ser utilizadas otras ecuaciones como por ejemplo compatibilidad de desplazamientos.

- *hipoestáticas* (o mecanismos): este último caso corresponde a estructuras en las cuales se tienen más ecuaciones que incógnitas por lo tanto

$$gh < 0.$$

Grado de hiperestaticidad externa

Si se considera a la estructura como un conjunto donde solamente se desea determinar las reacciones, es posible definir el grado de hiperestaticidad externa como

$$gh_E = n_R - 1 \times n_E \quad (1.40)$$

donde n_R es nuevamente el número de reacciones y n_E es el número de ecuaciones del conjunto de la estructura. En el ejemplo visto en la Figura 1.7 a la derecha, se tiene: $gh_E = 4 - 3 = 1$.

Finalmente, se puede usar los valores gh_E y gh para formular una condición **necesaria** que una estructura *isostática* debe cumplir. Se dice que:

Estructura isostática $\Rightarrow gh_E = 0$ y $gh = 0$.

Existen casos de particulares, de estructuras en las cuales aún siendo isostáticas el grado de hiperestaticidad externa es mayor que cero, como por ejemplo la mostrada en la Figura 2.5. Esto se debe a que la estructura está conformada por barras no conectadas entre sí como ocurre en la mostrada en las Figuras 1.8 o 1.10. Esta peculiaridad teórica no será relevante al momento de aplicación práctica del Método de las Fuerzas como se verá en la UT siguiente.

Cálculo general de grado de hiperestaticidad en pórticos/vigas/barras planos

En el caso de estructuras de pórticos planos, la determinación del estado tensional requiere conocer 3 solicitudes en todo punto: directa, cortante y momento. A modo de ejemplo se considera la estructura mostrada en la Figura 1.9: en la parte superior se muestra el esquema básico con la carga aplicada, mientras que en la parte inferior se muestra una de las formas en que la estructura puede ser separada en componentes.

La cantidad de solicitudes a determinar en cada vínculo es indicado con un círculo y

Sección 1.4. Grados de indeterminación

21

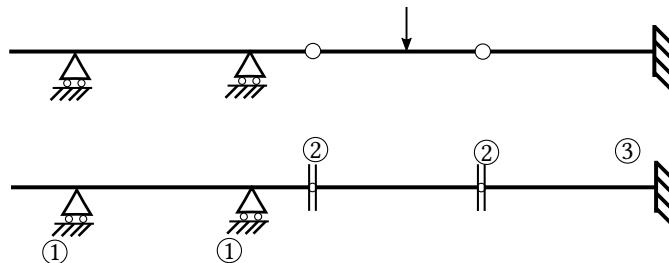


Figura 1.9: Ejemplo de grado de indeterminación estática: estructura con cargas aplicadas (superior) y estructura con componentes separadas y cantidad de reacciones incógnita (inferior).

el cálculo del grado de hiperestaticidad usando la Ecuación (1.39) está dado por:

$$n_R = 3 + 1 + 1 \quad n_S = 2 + 2 \quad n_C = 3 \quad n_E = 3 \quad \Rightarrow \quad gh = 0 \quad (1.41)$$

por lo tanto la estructura es isostática.

El gh es un parámetro útil para estimar la complejidad de la aplicación del Método de las Fuerzas. Dado que en este texto dicho método es desarrollado únicamente para reticulados, el cálculo del gh para pórticos no es abordado de forma extensiva. En la Sección 1.6 de ([Cervera Ruiz and Blanco Díaz, 2002b](#)) se presenta un desarrollo más extenso sobre la determinación del grado de hiperestaticidad así como también se muestran diversos ejemplos.

Cálculo simplificado de grado de hiperestaticidad para reticulados

En el caso particular de reticulados es posible considerar una forma alternativa y simplificada de cálculo. El estado tensional de estructuras formadas por barras articuladas queda definido a partir de los valores de tensiones axiales, como se ve en la Ecuación 1.33. Los valores de tensión axial están relacionados directamente con la directa de cada barra. Considerando esto, entonces cada barra bi-articulada introduce una única incógnita solicitudón n_S .

En la Figura 1.10 se muestra un reticulado formado por 6 barras con dos apoyos fijos, por lo tanto se tienen $n_S = 6$ solicitudes y $n_R = 4$ reacciones.

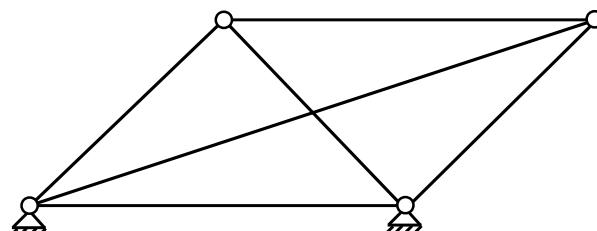


Figura 1.10: Ejemplo reticulado plano hiperestático.

Por otra parte, si se considera cada nodo de la estructura como un componente aislado se pueden plantear dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas a cada componente, por lo tanto se tiene $n_E = 2$ y $n_C = 4$. De esta forma, sustituyendo en la Ecuación 1.39 el grado de

Sección 1.5. Ejercicios**22**

hiperestaticidad queda determinado como:

$$gh = 4 + 6 - 2 \times 4 = 2. \quad (1.42)$$

Esto quiere decir que si se aplican las ecuaciones de equilibrio tendríamos un sistema compatible indeterminado. El subespacio de soluciones del sistema es de dimensión 2.

Para práctico

El cálculo simplificado de gh en reticulados está dado por:

$$gh = n_R + n_{Barras} - 2 \times n_{Nodos}$$

1.4.2. Grado de indeterminación cinemática

El grado de indeterminación cinemática permite establecer la cantidad de incógnitas cinemáticas que se deben determinar para conocer el desplazamiento de todos los puntos de la estructura. Una posible expresión matemática de este parámetro es:

$$gk = g_l n_n - c_a, \quad (1.43)$$

donde g_l es el número de grados de libertad por nodo, n_n es el número de nodos de la estructura y c_a el número de grados de libertad conocidos por las condiciones de apoyo o vínculo a tierra. En algunos casos es posible resolver sistemas de menor cantidad de incógnitas al utilizar información adicional como por ejemplo por simetría.

En estructuras articuladas planas g_l es 2, en estructuras aporticadas planas $g_l = 3$ y en aporticadas tridimensionales $g_l = 6$.

El grado de indeterminación cinemática permite conocer el número de incógnitas de los sistemas de ecuaciones planteados al usar el Método de los Desplazamientos o sus variantes computacionales como el Método de los Elementos Finitos.

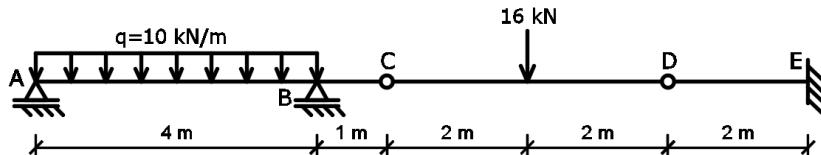
1.5 Ejercicios

En esta sección se incluyen ejercicios basados en los planteados en prácticos en años anteriores. Las letras y figuras fueron mayoritariamente desarrolladas por docentes de cursos anteriores.

Ejercicio 1.1 Considere la estructura mostrada en la figura. La misma está integrada por vigas de madera con sección transversal de dimensiones $b \times 2b$ y tensión admisible $\sigma_{adm} = 8$ MPa.

Sección 1.5. Ejercicios

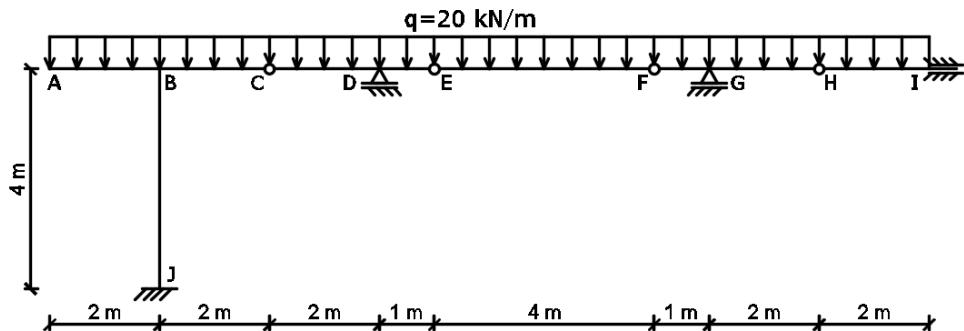
23



Se pide:

- demostrar que la estructura es isostática, calcular las reacciones, y trazar los diagramas de solicitudes;
- dimensionar la sección considerando que b debe ser múltiplo de 5;
- bosquejar la deformada de la estructura y calcular los giros en los apoyos A y B, junto con el desplazamiento vertical en C, suponiendo que la rigidez flexional EI es uniforme y que $E = 10 \text{ GPa}$.

Ejercicio 1.2 Considere la estructura mostrada en la figura.



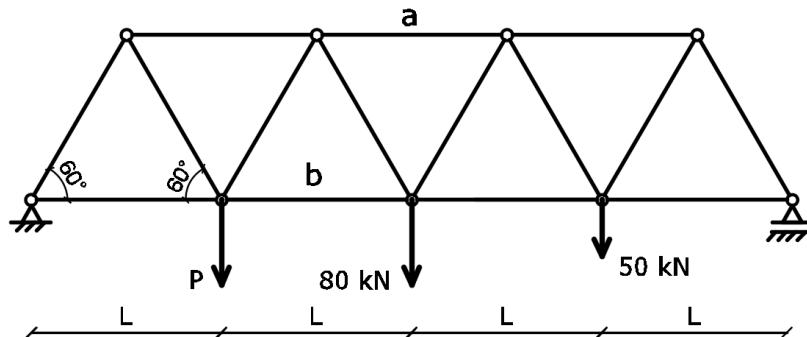
Se pide:

- Calcular las reacciones y trazar los diagramas de solicitudes.
- Bosquejar la deformada de la estructura.
- Calcular los giros sobre los apoyos y los desplazamientos de C y H considerando EI uniforme y despreciando la deformación por directa.

Ejercicio 1.3 Considere la estructura mostrada en la figura.

Sección 1.5. Ejercicios

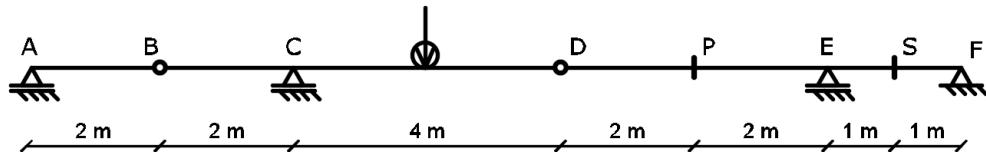
24



Se pide:

- Obtener analíticamente los valores de la carga P para los cuales la directa en la barra a es igual en valor absoluto a la directa en la barra b .
- Verificar el resultado de la parte anterior utilizando alguna herramienta informática.
- Para el valor de P positivo obtenido en a), dimensionar una sección transversal formada por 2 perfiles PNC a colocar en todas las barras de la estructura por igual, considerando que $\sigma_{adm} = 140$ MPa.

Ejercicio 1.4 Considere la estructura mostrada en la figura, donde la carga dibujada con un círculo representa una carga móvil unitaria.



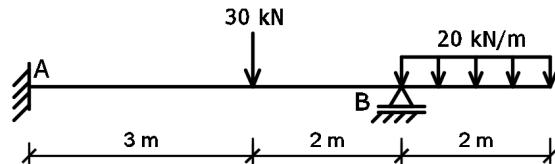
Se pide:

- Dibujar las líneas de influencia de la reacción en el apoyo C, del cortante en P y del momento flector en S para la estructura.
- Indicar dónde se debe colocar la carga uniforme $q = 20$ kN/m para que RC , VP y MS sean máximos y mínimos. Encontrar dichos valores.

Ejercicio 1.5 Considere la estructura mostrada en la figura.

Sección 1.5. Ejercicios

25



Se pide:

- Calcular las reacciones y trazar diagramas de solicitudes ($EI=cte$) aplicando el método de las ecuaciones angulares.
- Verificar el resultado de la parte a) utilizando alguna herramienta informática.

Unidad temática 2

Métodos energéticos aplicados a reticulados

En esta unidad temática se presentan los conceptos básicos necesarios para abordar el Método de los Desplazamientos (MD) y el Método de las Fuerzas (MF), en ambos casos, aplicados al análisis de estructuras reticuladas. Una de las referencias consideradas para el desarrollo de esta unidad temática es ([Reddy, 2002](#)).

2.1 Método de los Desplazamientos

El desarrollo presentado en esta sección está enfocado a la versión matricial del MD para elementos de barra de dos nodos sin fuerzas de volumen y de sección transversal uniforme.

Al desarrollar métodos de análisis de estructuras se utilizan hipótesis vinculadas al desplazamiento de los distintos elementos estructurales. De forma general se puede decir que los desplazamientos de todos los puntos de una estructura están dados por una suma de funciones de interpolación ϕ_i multiplicadas por los desplazamientos de los nodos de referencia de la estructura u_i :

$$u(P) = \sum_{i=1}^{n_d} u_i \phi_i(P), \quad (2.1)$$

donde P representa un punto cualquiera de la estructura y n_d es el número de desplazamientos de referencia de la estructura. El vector de todos los desplazamientos de referencia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_d}$ brinda toda la información necesaria para construir la función de desplazamiento de toda la estructura (con el grado de aproximación brindado por las funciones ϕ). Las funciones ϕ pueden ser tales que el desplazamiento de cada punto es una combinación lineal de los desplazamientos de los nodos extremos correspondientes.

Como ejemplo se considera el reticulado mostrado en la Figura 1.10 se puede considerar que el desplazamiento de cualquier punto de las barras puede ser interpolado a partir de los desplazamientos de los nodos, por lo que se tendrían 8 desplazamientos de referencia (dos por nodo).

Por otra parte, en cada nodo donde se definen desplazamientos de referencia u_i se pueden considerar fuerzas externas aplicadas f_i .

2.1.1. Interpolación lineal de desplazamientos

En el caso de estructuras de barras articuladas, las funciones de interpolación pueden ser consideradas lineales en el dominio correspondiente a cada barra, siendo los desplazamientos de los nodos articulados los desplazamientos de referencia. Esto puede ser escrito para cada

Sección 2.1. Método de los Desplazamientos

27

barra e de la estructura usando las funciones lineales de interpolación:

$$\mathbf{u}(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e)\mathbf{u}^e, \quad (2.2)$$

donde x^e es una coordenada local del elemento, \mathbf{N}^e es la matriz de funciones de interpolación de la barra y \mathbf{u}^e es el vector columna de los desplazamientos de los nodos de la barra.

Se considera ahora elementos de barra como el mostrado en la Figura 2.1 para los cuales sus movimientos están incluidos en un plano $x - y$.

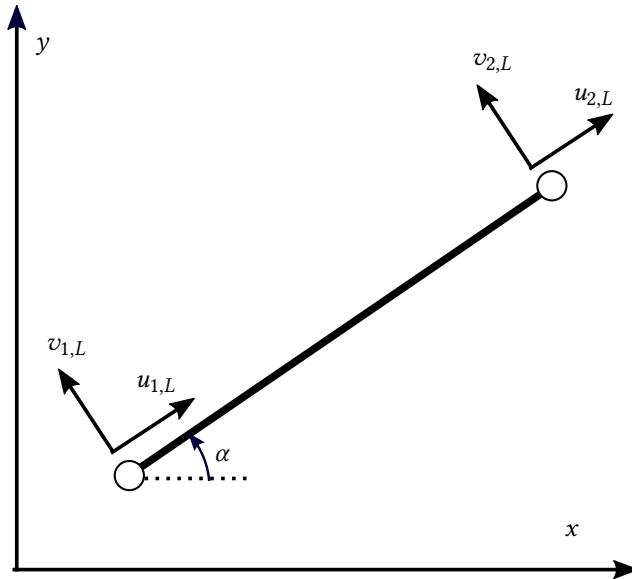


Figura 2.1: Esquema de sistemas de coordenadas de elemento de barra en el plano.

El desplazamiento según el eje axial de la barra, coincidente con el eje de coordenadas x local, está dado por:

$$u_L^e(x^e) = N_1^e(x^e)u_{1,L}^e + N_2^e(x^e)u_{2,L}^e, \quad (2.3)$$

donde las funciones de interpolación están dadas por

$$N_1^e(x^e) = \frac{\ell^e - x^e}{\ell^e} \quad \text{y} \quad N_2^e(x^e) = \frac{x^e}{\ell^e}, \quad (2.4)$$

siendo ℓ^e el largo de la barra e .

Usando la relación de deformación-desplazamiento y derivando (respecto a la coordenada local) se obtiene la expresión de la deformación en el dominio del elemento:

$$\varepsilon^e(x^e) = \frac{\partial u_L^e}{\partial x^e}(x^e) = B_{1,L}^e(x^e)u_{1,L}^e + B_{2,L}^e(x^e)u_{2,L}^e \quad (2.5)$$

donde

$$B_{1,L}^e(x^e) = \frac{-1}{\ell^e} \quad \text{y} \quad B_{2,L}^e(x^e) = \frac{1}{\ell^e}, \quad (2.6)$$

Sección 2.1. Método de los Desplazamientos**28**

son las derivadas de las funciones de interpolación respecto a la coordenada local. Se observa que para esta interpolación la deformación axial es uniforme en todo el elemento (es decir que no depende de x^e) y vale

$$\varepsilon^e = \frac{u_{2,L}^e - u_{1,L}^e}{\ell^e}. \quad (2.7)$$

Esto puede ser escrito en forma matricial como:

$$\varepsilon^e(\mathbf{u}_L^e) = \mathbf{B}_L^e \mathbf{u}_L^e, \quad (2.8)$$

donde,

$$\mathbf{B}_L^e = \frac{1}{\ell^e} [-1, 0, 1, 0] \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_L^e = [u_{1,L}, v_{1,L}, u_{2,L}, v_{2,L}]^T. \quad (2.9)$$

Usando la ecuación constitutiva lineal se obtiene la tensión de cada elemento como:

$$\sigma^e = E^e \varepsilon^e, \quad (2.10)$$

donde E^e es el módulo de Young del elemento o barra e y σ^e es la tensión axial, también uniforme en el elemento.

2.1.2. Energía potencial total

Para poder aplicar esta interpolación a los principios energéticos es necesario obtener una expresión de la energía potencial total de la estructura en función de los desplazamientos nodales. Para esto se sustituyen las expresiones obtenidas en las definiciones de la energía potencial de deformación elástica Π_{int} y la energía potencial de las fuerzas externas Π_{ext} .

La energía potencial de deformación de cada barra está dada únicamente por la componente axial. Usando la expresión general dada por la Ecuación (1.28) y la forma del tensor de deformación dada por la Ecuación (1.32), se obtiene:

$$\Pi_{int}^e(\mathbf{u}_L^e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} E^e (\varepsilon^e(\mathbf{u}_L^e))^2 dV, \quad (2.11)$$

donde Ω^e representa el volumen ocupado por la barra. Sustituyendo la relación de la Ecuación (2.8) y operando se obtiene:

$$\Pi_{int}^e(\mathbf{u}_L^e) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_L^e)^T \mathbf{K}_L^e \mathbf{u}_L^e, \quad (2.12)$$

donde \mathbf{K}_L^e es una matriz dada por:

$$\mathbf{K}_L^e = \int_0^{\ell^e} (\mathbf{B}_L^e)^T E^e A^e \mathbf{B}_L^e dx. \quad (2.13)$$

Sección 2.1. Método de los Desplazamientos**29**

La expresión desarrollada es:

$$\mathbf{K}_L^e = \frac{E^e A^e}{\ell^e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Para poder resolver problemas con varios elementos de barra, con sus ejes orientados en diferentes direcciones, es necesario trabajar con un sistema de coordenadas global. Considerando que el sistema de coordenadas local del elemento forma un ángulo α^e como se muestra en la Figura 2.1 (medido antihorario desde el sistema global), la matriz de cambio de base \mathbf{R}^e está dada por:

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{u}_L^e \quad (2.15)$$

donde $c = \cos(\alpha^e)$ y $s = \sin(\alpha^e)$ y \mathbf{u}^e es el vector de desplazamientos del elemento en coordenadas globales.

Actividad

Demostrar la identidad dada por la Ecuación 2.15 aplicando la relación de cambio de base vista en cursos de Álgebra Lineal:

$$\text{coord}_B(\mathbf{u}) =_B (\mathbf{I})_A \text{coord}_A(\mathbf{u}),$$

y la definición de matriz asociada de una transformación lineal.

Sustituyendo este cambio de coordenadas en la expresión de la energía potencial de deformación se tiene

$$\Pi_{int}^e(\mathbf{u}^e) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e, \quad (2.16)$$

donde la matriz \mathbf{K}^e en coordenadas globales está dada por:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}_L^e (\mathbf{R}^e)^T = \frac{E^e A^e}{\ell^e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

La energía potencial de deformación de toda la estructura puede ser calculada sumando las energías de las n_e barras que forman la estructura:

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}) = \sum_{e=1}^{n_e} \Pi_{int}^e(\mathbf{u}^e) = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{1}{2}(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (2.18)$$

donde \mathbf{K} es la versión *ensamblada* de las matrices \mathbf{K} y \mathbf{u} es el vector de todos los desplazamientos nodales de la estructura.

Las fuerzas externas aplicadas son representadas por el vector \mathbf{f}_{ext} o simplemente \mathbf{f} . La energía potencial de estas fuerzas es representada por Π_{ext} y está dada por:

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = - \sum_{i=1}^{n_d} u_i f_i = -\mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (2.19)$$

donde n_d es el número de desplazamientos nodales de referencia de la estructura.

2.1.3. Desarrollo del método

Los principios energéticos brevemente descritos en la Unidad Temática 1 pueden ser revisados nuevamente en el contexto de estructuras de barras articuladas.

Mínima energía potencial total

Dada una estructura con condiciones de desplazamiento impuesto en un cierto conjunto de nodos, se establece que \mathcal{U} es el conjunto de los desplazamientos compatibles con las condiciones de contorno.

Considerando un cierto conjunto de cargas externas nodales dadas por el vector \mathbf{f} , el Principio de mínima energía potencial establece que: entre todos los desplazamientos compatibles $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, los desplazamientos que están en equilibrio con las fuerzas externas son aquellos que verifican:

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} \Pi(\mathbf{v}). \quad (2.20)$$

Si las condiciones de contorno son tales que no se permiten movimientos rígidos de la estructura, entonces el desplazamiento solución será único.

Primer teorema de Castigliano

Utilizando la expresión de la energía potencial de las fuerzas externas y planteando las condiciones de optimalidad de primer orden del problema de minimización se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{int}}{\partial u_i}(\mathbf{u}) = f_i & \forall i = 1, \dots, n_d \\ \mathbf{u} \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (2.21)$$

Este conjunto de condiciones o ecuaciones representa el Primer Teorema de Castigliano.

Ecuación de rigidez

Sustituyendo la expresión matricial Π_{int} de la Ecuación (2.18) en las condiciones del Teorema de Castigliano dadas por la Ecuación (2.21), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\boxed{\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}}, \quad (2.22)$$

el cual acompañado de las condiciones de contorno representan el sistema a formar y resolver para aplicar el Método de los Desplazamientos en su forma matricial.

La matriz \mathbf{K} es llamada **matriz de rigidez** global de la estructura ya que vincula despla-

zamientos con fuerzas aplicadas. Es importante destacar que la cantidad de incógnitas del sistema es igual al grado de indeterminación cinemática gk introducido en la Unidad Temática 1.

Cálculo de solicitudes

Las solicitudes de interés en el análisis de reticulados son las fuerzas directa N^e en cada elemento de barra

$$N^e = \sigma^e A^e. \quad (2.23)$$

Para ello se pueden utilizar las ecuaciones (1.32), (2.10) y (2.15):

$$N^e = E^e A^e \mathbf{B}_L^e (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{u}^e. \quad (2.24)$$

2.1.4. Apoyos elásticos

Para incluir apoyos elásticos (resortes nodales) es posible adicionar a las ecuaciones los correspondientes términos de energía potencial elástica. En el caso de un resorte lineal de constante elástica k colocado en el grado de libertad j la energía potencial está dada por

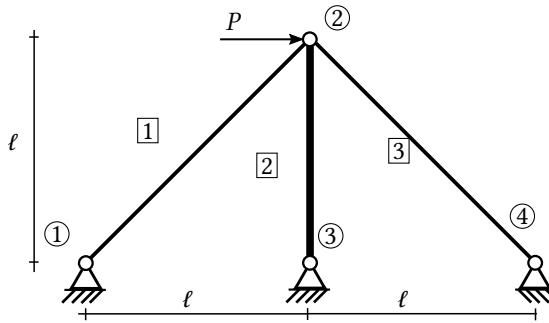
$$\Pi_{res}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} k u_j^2, \quad (2.25)$$

que puede ser sumada a la energía potencial de deformación Π_{int} .

2.2 Aplicaciones

2.2.1. Ejemplo

Sea la estructura mostrada en la figura, formada por barras de material con módulo de Young $E = 210$ GPa, con $\ell = 10$ m, y secciones transversales de áreas $A^1 = A^3 = 0.001$ m² y $A^2 = 0.01$ m². Para la fuerza aplicada $P = 10$ kN, se desea determinar desplazamientos y solicitudes de la estructura. Utilizando el método de los desplazamientos matricial.



El grado de indeterminación cinemática de la estructura es $gk = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 2$. Se continúa determinando los grados de libertad correspondientes a cada elemento de barra. Se define la matriz de conectividad y se calculan los ángulos α^e .

Sección 2.2. Aplicaciones

32

Elemento	nodo inicial → nodo final	grados de libertad	α^e
1	1 → 2	1 2 3 4	45°
2	2 → 3	3 4 5 6	-90°
3	2 → 4	3 4 7 8	-45°

Se calculan las matrices de rigidez en coordenadas globales:

$$\mathbf{K}^1 = \frac{210 \times 10^9 \cdot 1 \times 10^{-3}}{\sqrt{2} \cdot 10} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{N/m} \quad (2.26)$$

Operando se tiene

$$\mathbf{K}^1 = 7.425 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{N/m} \quad (2.27)$$

Para el elemento 2 se tiene

$$\mathbf{K}^2 = 210 \times 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{N/m} \quad (2.28)$$

Para el elemento 3 se tiene

$$\mathbf{K}^3 = 7.425 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{N/m} \quad (2.29)$$

Se observa que el elemento 2 tiene una rigidez mayor (dada por su sección transversal) aunque esta rigidez solamente vincula los desplazamientos verticales de los nodos 2 y 3.

Considerando que los grados de libertad fijos o de desplazamiento nulo son 1, 2, 5, 6, 7 y 8 y ensamblando las matrices en los grados de libertad restantes (3 y 4) se tiene.

$$\mathbf{K} = 7.425 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{N/m} + 210 \times 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{N/m} + 7.425 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{N/m} \quad (2.30)$$

Se obtiene entonces el sistema de ecuaciones a resolver

$$10^6 \begin{bmatrix} 14.84 & 0 \\ 0 & 224.84 \end{bmatrix} \text{N/m} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 10^4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{N.} \quad (2.31)$$

Cuya resolución brinda los desplazamientos solución:

$$u_2 = 6.74 \times 10^{-4} \text{m} \quad v_2 = 0. \quad (2.32)$$

Ahora que están determinados los desplazamientos de todos los nodos de la estructura es posible determinar la directa N^e en todas las barras usando la Ecuación (2.24):

$$N^1 = -N^3 = 7.07 \text{ kN} \quad \text{y} \quad N^2 = 0. \quad (2.33)$$

Las directas también pueden ser obtenidas usando la ecuación de rigidez para cada elemento de barra, dada por:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e.$$

Si se considera el ejemplo anterior, y un resorte horizontal de constante elástica k en el nodo 2 entonces se agrega el término de energía potencial de deformación: $\frac{1}{2}ku_2^2$. Luego de realizar las derivadas establecidas por Castiglano se obtiene ku_2 que es considerado en el sistema lineal reducido como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 14.84 \times 10^6 + k & 0 \\ 0 & 224.84 \times 10^6 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

lo cual resultará en un menor valor de desplazamiento nodal.

2.2.2. Implementación computacional

Este método puede ser fácilmente programado para resolver problemas de mayor dimensión de forma automática usando una herramienta numérica como por ejemplo GNU-Octave ([Eaton et al., 2015](#)).

En el Código B.2 se presenta un ejemplo de implementación del método y su aplicación para resolver el ejemplo de la Sección 2.2.1. En la Figura 2.2 se muestra el diagrama de deformada, y en la Figura 2.3 se muestra el diagrama de directas, ambas figuras generadas con ese código.

El código es llamado FEMTrusS y está disponible como parte del repositorio público gitlab.fing.edu.uy/jorgepz/codigosLibroR2. El objetivo del código es mostrar a los estudiantes la aplicación directa de los conceptos vistos, así como también permitir un espacio para el desarrollo propio incluyendo nuevas funcionalidades como por ejemplo la capacidad de resolver reticulados tridimensionales.

Este código está en proceso continuo de revisión por lo que, para la resolución de los ejercicios prácticos, se recomienda usar los otros programas recomendados en el curso. En caso de detectar errores en el FEMTrusS se agradece notificarlo creando un *issue* en el sitio del repositorio.

Actividad

Modifique el código para poder resolver un reticulado como el mostrado en la Figura 1.4b, eligiendo los valores de longitudes, cargas y materiales de los componentes estructurales.

Sección 2.3. Método de las Fuerzas

34

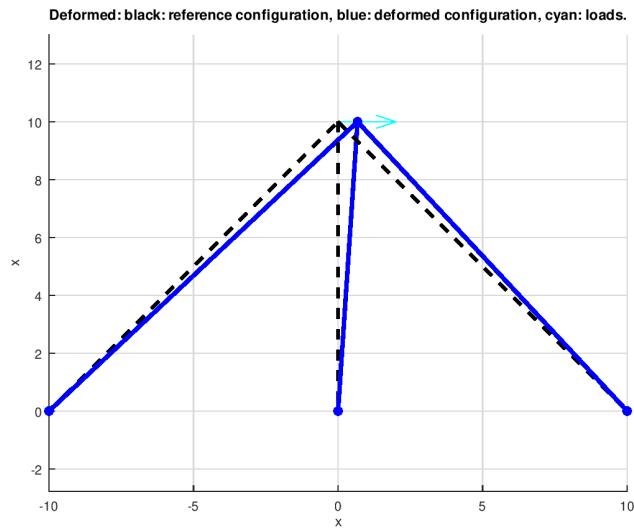


Figura 2.2: Gráficos de deformada generado por el código FEMTrusS para el ejemplo presentado.

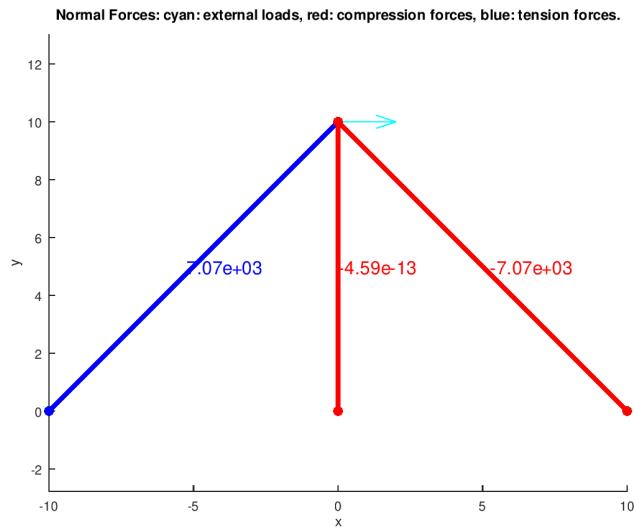


Figura 2.3: Gráficos de directas generado por el código FEMTrusS para el ejemplo presentado.

2.3 Método de las Fuerzas

El Método de las Fuerzas (MF) utiliza un enfoque de resolución complementario al MD. El MF considera las ecuaciones de equilibrio y tiene como objetivo primario determinar las incógnitas de fuerzas indeterminadas por esas ecuaciones. En el MD se utilizan principalmente ecuaciones constitutiva y de compatibilidad cinemática, con el objetivo de obtener los

Sección 2.3. Método de las Fuerzas

35

desplazamientos.

En esta sección (y en el curso) se presenta el método orientado únicamente al análisis de reticulados, utilizando un enfoque similar al usado en (Reddy, 2002). El MF puede ser aplicado al análisis de cualquier estructura hiperestática, los estudiantes interesados en la aplicación del MF a estructuras como pórticos pueden acudir a textos como (Krenk and Høgsberg, 2013; Fuchs, 2016) disponibles en la colección *Springer* en timbo.org.uy.

Tal como fue visto, los desplazamientos son la incógnita principal del MD. En el caso del MF los valores de las directas en las barras y las reacciones de los vínculos son la incógnita principal a determinar. Para ello se cuenta con las ecuaciones de equilibrio, condiciones de compatibilidad de desplazamientos y principios energéticos.

En el caso de estructuras isostáticas las ecuaciones de equilibrio permiten determinar el estado tensional y solicitudes de la estructura de forma única, por lo que el MF no puede ser aplicado de forma directa. Nos enfocaremos en estructuras con grado de hiperestaticidad gh positivo, para las cuales las directas N y las reacciones R que se encuentran en equilibrio con las fuerzas externas pueden ser calculadas como combinación de estados llamados canónicos.

Actividad

Enumerar las 9 incógnitas de fuerzas (solicitudes internas y reacciones) del Ejemplo de la Sección 2.2.1, aplicar las ecuaciones de equilibrio y despejar todas las incógnitas en función de la directa de la barra 3 (N^3). Escribir el conjunto de los vectores de \mathbb{R}^9 que cumplen el equilibrio como una suma de vectores dependientes de P y N^3 .

2.3.1. Estados Canónicos

Los estados canónicos serán considerados como: estados tensionales que pueden ser combinados para obtener el estado tensional real de una estructura hiperestática. Estos estados canónicos pueden ser obtenidos liberando vínculos internos y/o externos de una estructura hiperestática original, hasta obtener una estructura isostática.

En la Figura 2.4 se muestra un ejemplo de una estructura hiperestática con $gh = 2$, con un vínculo de hiperestaticidad interno y uno externo, por lo que se obtiene una estructura isostática "cortando" una barra y liberando un vínculo de uno de los apoyos.

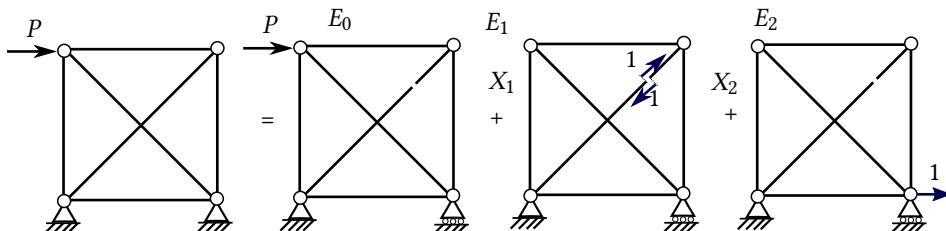


Figura 2.4: Ejemplo de descomposición de estados canónicos para aplicación del MF.

El estado fundamental E_0 corresponde a la estructura isostática resultante sometida a las fuerzas externas. El estado E_1 corresponde a la misma estructura isostática considerando dos

fuerzas aplicadas en los extremos intermedios obtenidos luego del corte de la barra. Estas fuerzas unitarias consideradas corresponden a una directa unitaria en la barra cortada. En el estado E_2 se considera una fuerza horizontal correspondiente al vínculo liberado.

Se puede considerar que las fuerzas externas consideradas en la estructura son una combinación de las fuerzas externas correspondientes a cada estado canónico

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_0 + \sum_{j=1}^{gh} X_j \mathbf{f}_j, \quad (2.35)$$

donde \mathbf{f}_0 representa el vector de fuerzas externas aplicadas a la estructura original, \mathbf{f}_j corresponde a las fuerzas de cada estado canónico y \mathbf{X} es el vector de multiplicadores de cada estado. En el ejemplo, \mathbf{f}_1 corresponde a un vector con dos fuerzas unitarias colocadas en puntos muy cercanos dados por el corte de la barra (o bien en los nodos extremos de la barra cortada) y \mathbf{f}_2 corresponde a un vector con la fuerza unitaria aplicada en el apoyo deslizante.

Por otra parte, las ecuaciones de equilibrio definen una relación entre directas y fuerzas externas. Esta relación entre directas de las barras y fuerzas externas aplicadas $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{f})$, donde las fuerzas externas de cada estado son conocidas. Usando la relación $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ se puede obtener una expresión de directas considerando los factores X_j como las incógnitas a determinar:

$$\mathbf{N}(\mathbf{X}) = \mathbf{N}_0 + \sum_{j=1}^{gh} X_j \mathbf{N}_j \quad (2.36)$$

donde el subíndice j representa los valores del estado j , X_j representa un factor a determinar, \mathbf{N}_0 corresponde a las directas para el estado de cargas \mathbf{f}_0 y \mathbf{N}_j corresponde a las directas para el estado de cargas unitarias \mathbf{f}_j .

Esto mismo también es realizado para calcular las reacciones de la estructura:

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{R}_0 + \sum_{j=1}^{gh} X_j \mathbf{R}_j \quad (2.37)$$

Si se considera que las directas \mathbf{N} y las reacciones \mathbf{R} son las incógnitas principales del método entonces, se puede decir que los estados canónicos permiten interpolar los posibles estados tensionales. Los estados canónicos en el MF cumplen el rol de las funciones de interpolación de desplazamientos en el MD, mientras que los valores de las incógnitas \mathbf{X} cumplen el rol de los desplazamientos nodales.

2.3.2. Principios energéticos

Hasta ahora se han presentado las fuerzas de los factores X_j asociados a incógnitas de fuerza de los vínculos liberados del problema. Los valores de directas usados para calcular la energía de deformación complementaria, son obtenidos a partir de las relaciones directas-fuerzas externas del equilibrio de fuerzas. Se destaca que no se han tomado en consideración las condiciones cinemáticas establecidas por las condiciones de apoyo de la estructura, el principio de mínima energía potencial complementaria permite obtener condiciones para esto.

Para presentar el método de las fuerzas se deben introducir los conceptos de energía de

Sección 2.3. Método de las Fuerzas

37

potencial complementaria.

Energía potencial de deformación complementaria

La energía potencial de deformación presentada Π_{int} puede ser escrita en términos de las tensiones en lugar de los desplazamientos. Consideremos la energía de deformación de un elemento de barra:

$$\Pi_{int}^e(\mathbf{u}^e) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell^e} \varepsilon^e(\mathbf{u}^e) E^e A^e \varepsilon^e(\mathbf{u}^e) dx \quad (2.38)$$

usando la ecuación constitutiva se obtiene una expresión en función de la tensión del elemento

$$\Pi_{int}^e(\mathbf{u}^e) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell^e} \sigma^e \sigma^e \frac{1}{E^e} A^e dx = (\Pi_{int}^*)^e(\sigma^e) \quad (2.39)$$

donde Π_{int}^* representa la energía de deformación complementaria de la barra. En el caso de materiales elástico-lineales, como los considerados en este documento, la energía complementaria Π_{int}^* coincide con la energía de deformación Π_{int} .

Usando que no hay fuerzas de volumen aplicadas a la barra y considerando la directa de la barra $N^e = \sigma^e A^e$ se obtiene una expresión de la energía en función de la directa:

$$(\Pi_{int}^*)^e(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \frac{(N^e(\mathbf{f}))^2}{E^e A^e} \ell^e. \quad (2.40)$$

donde las fuerzas externas \mathbf{f} están relacionadas con la directas a través de las ecuaciones de equilibrio. La energía de deformación complementaria de la estructura completa está dada por la suma:

$$\Pi_{int}^*(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{(N^e(\mathbf{f}))^2}{E^e A^e} \ell^e. \quad (2.41)$$

Para estructuras hiperestáticas, se puede considerar la relación entre \mathbf{f} y \mathbf{X} y considerar el vector \mathbf{X} como variable:

$$(\Pi_{int}^*)^e(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \frac{(N^e(\mathbf{X}))^2}{E^e A^e} \ell^e. \quad (2.42)$$

Energía potencial complementaria de cargas externas

La energía potencial de las cargas externas Π_{ext} puede ser considerada también como una función de las fuerzas externas aplicadas, de la forma:

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}^T \mathbf{f} = \Pi_{ext}^*(\mathbf{f}). \quad (2.43)$$

Energía potencial complementaria total

La energía potencial complementaria total puede también ser escrita en función de las variables \mathbf{X} . Sustituyendo la Ecuación (2.36) en la definición de Π_{int}^* (Ecuación (2.41)) y la Ecuación (2.35) en la definición de Π_{ext}^* (Ecuación (2.43)) se obtiene:

$$\Pi^*(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{(N_0^e + \sum_{j=1}^{g^h} X_j N_j^e)^2}{E^e A^e} \ell^e - \mathbf{u}^T \mathbf{f}_0 - \mathbf{u}^T \left(\sum_{j=1}^{g^h} X_j \mathbf{f}_j \right). \quad (2.44)$$

Mínima energía potencial complementaria total

El principio de mínima energía potencial complementaria total establece que dada una estructura con ciertas condiciones de apoyos y un conjunto de fuerzas externas aplicadas, la distribución de fuerzas internas en equilibrio compatible con los vínculos de los desplazamientos es aquella que minimiza la energía potencial complementaria total de la estructura. Esto puede ser escrito en función de los factores X_j , de la forma:

$$\mathbf{X} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{gh}} \Pi^*(\mathbf{X}). \quad (2.45)$$

Segundo teorema de Castigiano

El segundo Teorema de Castigiano consiste básicamente en las condiciones de optimidad del problema de mínimo de energía potencial complementaria total, las cuales consisten en plantear gradiente nulo:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial X_i}(\mathbf{X}) = 0 \quad i = 1, \dots, gh \Rightarrow \frac{\partial \Pi_{int}^*}{\partial X_i}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}^T \mathbf{f}_i \quad i = 1, \dots, gh. \quad (2.46)$$

Considerando que los valores de fuerzas externas de los estados canónicos distintos al fundamental son unitarios se tiene:

$$\frac{\partial \Pi_{int}^*}{\partial X_i}(\mathbf{X}) = \delta_i \quad i = 1, \dots, gh \quad (2.47)$$

donde δ_i representa el desplazamiento nodal (o la suma de varios desplazamientos) de la estructura como resultado de las cargas externas aplicadas en los puntos donde hay fuerzas unitarias aplicadas en el estado canónico i . Este desplazamiento deberá tomar un valor compatible con el vínculo que fue liberado.

En los casos en los que el vínculo liberado está asociado a un desplazamiento nulo (continuidad o apoyos fijos) se tiene

$$\frac{\partial \Pi_{int}^*}{\partial X_i}(\mathbf{X}) = 0 \quad i = 1, \dots, gh. \quad (2.48)$$

En el ejemplo mostrado en la Figura 2.4, para el estado 1 el desplazamiento corresponde a la resta de los desplazamientos de los nodos obtenidos luego del corte, lo cual, dado que hay continuidad, debe ser cero. Para el estado 2 el desplazamiento corresponde a cero ya que el vínculo liberado corresponde a un apoyo fijo.

2.3.3. Método de las Fuerzas para análisis de reticulados

En esta sección se presentan esquemáticamente las ecuaciones del MF para el análisis de reticulados.

El método consiste en liberar gh vínculos de la estructura para obtener una estructura isostática y aplicar las ecuaciones del segundo teorema de Castigiano, imponiendo el desplazamiento correspondiente a los vínculos liberados.

En el caso de estructuras de barras articuladas donde los vínculos liberados tienen des-

Sección 2.3. Método de las Fuerzas**39**

plazamiento nulo, y aplicando el segundo teorema de Castigiano se tiene:

$$\frac{\partial \Pi_{int}^*}{\partial X_i}(\mathbf{X}) = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{N_i^e(N_0^e + \sum_{j=1}^{gh} X_j N_j^e)}{E^e A^e} \ell^e = 0 \quad i = 1, \dots, gh \quad (2.49)$$

donde se consideró que el desplazamiento de cada estado corresponde a un valor nulo.

Desarrollando el producto se obtienen gh condiciones

$$\sum_{j=1}^{gh} X_j \left(\sum_{e=1}^{n_e} \frac{N_j^e N_i^e}{E^e A^e} \ell^e \right) = - \sum_{e=1}^{n_e} \frac{N_i^e N_0^e}{E^e A^e} \ell^e \quad i = 1, \dots, gh, \quad (2.50)$$

lo que representa un sistema lineal de ecuaciones de gh incógnitas y ecuaciones.

Escrito en forma matricial esto es:

$$\mathbf{M}_f \mathbf{X} = \mathbf{b}_f \quad (2.51)$$

donde \mathbf{M}_f es llamada matriz de flexibilidad y sus entradas están dadas por:

$$(\mathbf{M}_f)_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{N_i^e N_j^e}{E^e A^e} \ell^e, \quad (2.52)$$

y el término independiente \mathbf{b}_f está dado por:

$$(\mathbf{b}_f)_i = - \sum_{e=1}^{n_e} \frac{N_0^e N_i^e}{E^e A^e} \ell^e. \quad (2.53)$$

La Ecuación (2.51) es llamada ecuación de flexibilidad.

Procedimiento práctico de aplicación

1. calcular el grado de hiperestaticidad de la estructura gh ,
2. si gh es positivo entonces liberar gh vínculos de la estructura obteniendo $gh + 1$ esquemas básicos de estructuras isostáticas (estados canónicos),
3. calcular las directas y reacciones para cada uno de los estados canónicos,
4. calcular la matriz de flexibilidad y el término independiente,
5. calcular los factores de cada estado X_j resolviendo la ecuación de flexibilidad,
6. calcular los valores de directa y reacciones solución sustituyendo los valores X_j .

Cálculo de desplazamiento

El segundo teorema de Castigiano puede ser aplicado también para calcular el desplazamiento de cualquier punto de la estructura. Dado un vector de fuerza \mathbf{X}_{sol} obtenido como solución de la ecuación de flexibilidad, se considera un estado canónico adicional E_{gh+1} con una fuerza externa unitaria según el desplazamiento deseado. Se aplica Castigiano y a través

de la derivada de la energía respecto el valor correspondiente de X y considerando que este valor X debe ser nulo se obtiene el desplazamiento deseado.

$$\delta_{gh+1} = \frac{\partial \Pi_{int}^*}{\partial X_{gh+1}} (\mathbf{X} = \mathbf{X}_{sol}, X_{gh+1} = 0) \quad (2.54)$$

Existe un caso particular destacable. Si en el estado canónico E_0 existe una única fuerza aplicada de magnitud P , y además el estado canónico E_{gh+1} , necesario para calcular el desplazamiento, cumple que $E_0 = PE_{gh+1}$, entonces se puede probar que

$$\delta_{gh+1} = \frac{\partial \Pi_{int}^*}{\partial P}(\mathbf{X} = \mathbf{X}_{sol}, X_{gh+1} = 0). \quad (2.55)$$

2.4 Aplicaciones

2.4.1. Ejemplo

Se presenta la resolución del ejemplo que de la sección anterior, en este caso usando el MF. Se comienza calculando el grado de hiperestaticidad de la estructura. Aplicando las definiciones vistas en la UT1 se obtiene que $gh = 3 + 6 - 2 \times 4 = 1$.

En la Figura 2.5 se muestran los estados canónicos correspondientes al ejemplo considerando un corte en la barra 2-4.

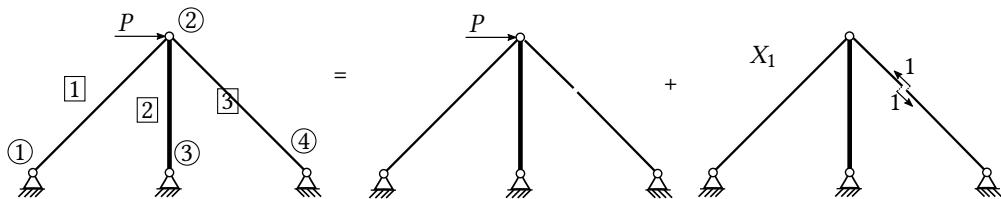


Figura 2.5: Estados canónicos de ejemplo.

Las directas en las barras para cada uno de los estados están dadas por la siguiente tabla.

Element	N_0	N_1	ℓ/EA
1	$\sqrt{2}P$	1	6.73×10^{-8}
2	$-P$	$-\sqrt{2}$	4.76×10^{-9}
3	0	1	6.73×10^{-8}

Usando las ecuaciones del segundo teorema de Castiglano se obtiene:

$$X_1 \cdot 1.44 \times 10^{-7} = -1.02 \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{X_1 = -7071 \text{ N}}. \quad (2.56)$$

La directa en las barras son calculadas usando la ecuación Ecuación (2.36):

$$N^1 = -N^3 = 7.07 \text{ kN} \quad \text{and} \quad N^2 = 0. \quad (2.57)$$

obteniendo un resultado que coincide con el obtenido usando el MD.

Para determinar los desplazamientos usando el teorema de Castigiano es posible considerar un estado canónico adicional auxiliar con una fuerza aplicada según la dirección y

sentido del desplazamiento deseado. Este estado adicional agrega una fuerza que no existe en la estructura y que por lo tanto debe ser nula. Se calcula la energía de deformación correspondiente a todos los estados, se calcula la derivada y en ese momento se impone que el valor de el factor correspondiente a este estado es cero.

A modo de ejemplo se determinará el desplazamiento horizontal del nodo 2 en el ejemplo. Para esto se considera un estado E_2 vinculado a una fuerza unitaria hacia la derecha aplicada en el nodo 2 multiplicada por un factor X_2 . En este estado las directas son $N_2^1 = \sqrt{2}$, $N_2^2 = -1$, $N_2^3 = 0$.

La energía de deformación complementaria está dada por

$$\Pi_{int}^*(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{(N_0^e + \sum_{j=1}^{g+1} X_j N_j^e)^2}{E^e A^e} \ell^e \quad (2.58)$$

Calculando la derivada y evaluando en $X_2 = 0$ (debido a que la fuerza agregada debe ser nula) y X_1 igual al valor obtenido anteriormente, se obtiene:

$$\frac{\partial \Pi_{int}^*}{\partial X_2}(X_1 = -7071, X_2 = 0) = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{N_2(N_0^e + X_1 N_1^e + 0 N_2^e)}{E^e A^e} \ell^e = 6.74 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (2.59)$$

resultado que también coincide con el obtenido usando el MD.

En el caso de desear determinar otro desplazamiento se debe considerar un estado de fuerzas correspondiente siempre considerados sobre la estructura isostática fundamental.

2.4.2. Implementación computacional

La implementación computacional del procedimiento del Método de las Fuerzas no es tan directa como la del Método de los Desplazamientos. A pesar de esto, a continuación se presentan los archivos de código de un ejemplo de implementación que puede ser también estudiado por los estudiantes interesados en entender el procedimiento planteado por el método.

El archivo principal se muestra en el Código B.3, el archivo de entrada de datos (editable para resolver otros problemas) se muestra en el Código B.4, en los Códigos B.5 y B.6 se muestran las operaciones del método y en el Código B.7 se muestran los gráficos para mostrar los resultados al usuario.

Se reitera que el código es una versión minimal, en proceso de revisión, que aspira simplemente a mostrar una posible forma de automatizar el proceso del Método. No forma parte de los contenidos centrales del curso y no será evaluado directamente. Cualquier consulta o comentario puede ser planteado a través del repositorio del código¹.

¹Sitio web: <https://gitlab.fing.edu.uy/jorgepz/codigosLibroR2>

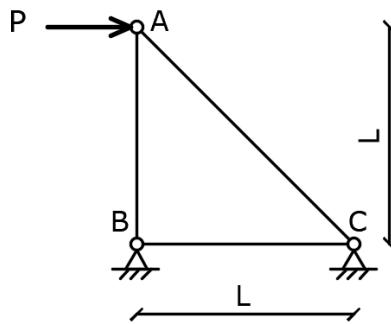
Sección 2.5. Ejercicios

42

2.5 Ejercicios

Ejercicio 2.1

Considerese el reticulado de la figura donde todas las barras están construidas con barras de acero ($E = 210 \text{ GPa}$) de sección tubular con $\phi_{ext} = 100 \text{ mm}$ y espesor $t = 5 \text{ mm}$.

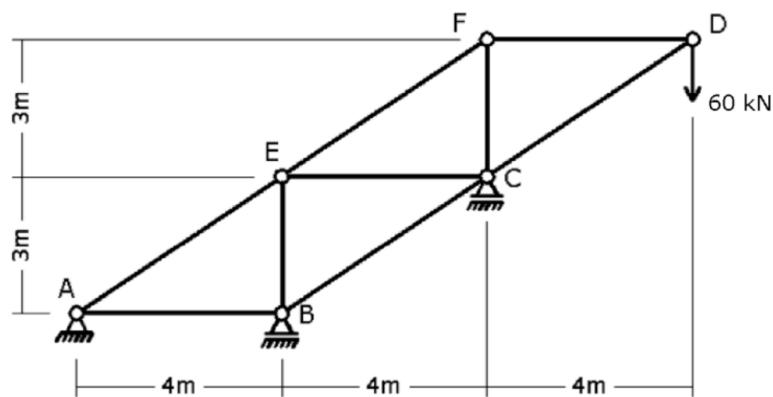


Considerando que $P = 50 \text{ kN}$ y $L = 4.0 \text{ m}$, se pide:

- Calcular las reacciones, los esfuerzos en todas las barras y el desplazamiento del nodo A mediante el Método de los Desplazamientos y el Método de las Fuerzas.
- Verificar lo hallado en la parte anterior mediante el empleo de alguna herramienta computacional.

Ejercicio 2.2

En la estructura reticulada mostrada en la figura cada barra está formada por 2 perfiles PNC10 de acero ($E = 210 \text{ GPa}$).



Se pide:

- Calcular las reacciones, los esfuerzos en todas las barras y el desplazamiento del nodo D mediante el método de las fuerzas.

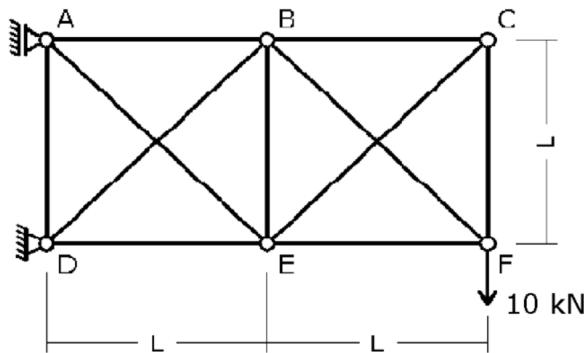
Sección 2.5. Ejercicios

43

- b) Verificar lo hallado en la parte a) mediante el empleo de alguna herramienta computacional.

Ejercicio 2.3

En la estructura reticulada mostrada en la figura todas las barras tienen la misma sección y están formadas por el mismo material.

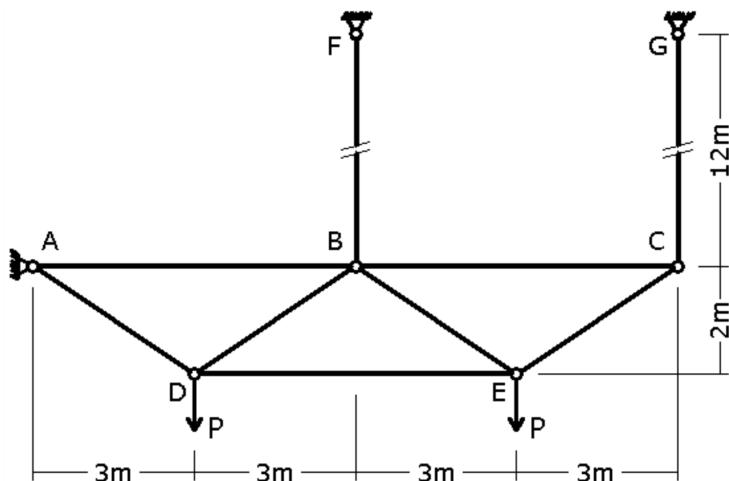


Aplicando el Método de las Fuerzas, se pide:

- Calcular las reacciones y los esfuerzos en todas las barras.
- Si $L = 1 \text{ m}$, el área de cada barra $\Omega = 4 \text{ cm}^2$ y $E = 210 \text{ GPa}$, calcular el desplazamiento del nodo F.
- Verificar lo hallado en la parte a) y b) mediante alguna herramienta computacional.

Ejercicio 2.4

En la estructura reticulada mostrada en la figura, todas las barras tienen la misma sección y el mismo material.



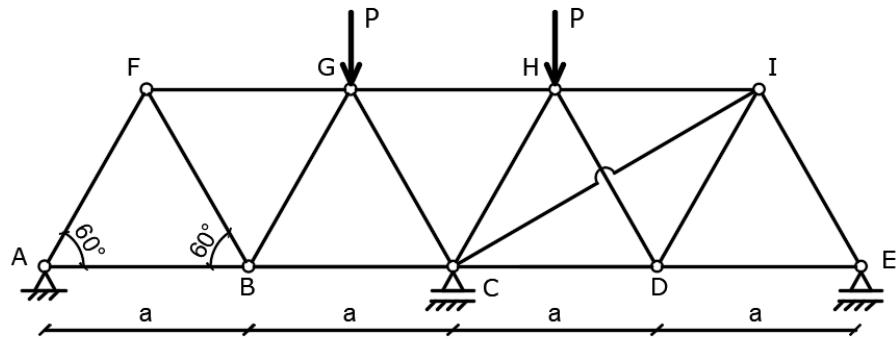
Sección 2.5. Ejercicios

44

Considerando $P = 10 \text{ kN}$, $E = 210 \text{ GPa}$ y $\Omega = 1 \text{ cm}^2$, se pide:

- Mediante el método de las fuerzas calcular las reacciones, los esfuerzos en todas las barras y el desplazamiento vertical de los nodos B y C.
- Verificar lo hallado en la parte a) mediante alguna herramienta computacional.

Ejercicio 2.5 Sea el reticulado y las cargas que se muestran en la figura, donde todos los triángulos son equiláteros y las barras tienen todas mismo módulo de elasticidad y área.



Se pide:

- Calcular la solicitación de cada barra utilizando el método de las fuerzas.
- Dimensionar la estructura con perfiles PNI, suponiendo que todas las barras son iguales, para $P = 300 \text{ kN}$, $a = 3 \text{ m}$ y $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$.

Unidad temática 3

Método de Desplazamientos en pórticos

En esta Unidad Temática se presentan métodos de análisis de estructuras planas de barras en base a desplazamientos como incógnita principal. El enfoque adoptado para presentar el tema es similar al utilizado en (Pilkey, 2002; Wunderlich and Pilkey, 2002), utilizando los principios energéticos ya vistos en la Unidad Temática 2 de forma similar a como es realizado en (Reddy, 2002).

3.1 Teoría de vigas sometidas a flexión compuesta

3.1.1. Hipótesis y definiciones fundamentales

Para el análisis de pórticos es necesario abordar el estudio de vigas sometidas a cargas transversales y axiales, esto será llamado *flexión compuesta*. Para esto, un posible camino es agregar el efecto de la directa a las ecuaciones de la teoría de vigas a flexión pura, presentadas en la sección 1.2. Sin embargo se optará por otro camino orientado a deducir las ecuaciones a partir de algunas hipótesis de la teoría de vigas integradas con la Teoría de la Elasticidad. Este enfoque es utilizado en literatura de referencia (Wunderlich and Pilkey, 2002; Oñate, 2013) y permite llegar a los mismos resultados.

Hipótesis

Sea el campo de desplazamientos de los puntos de la viga, dados por el vector formado por las funciones: $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$, representando desplazamientos en x , y y z respectivamente. Asumiendo que la flexión se produce en el plano $x - y$, se consideran las siguientes hipótesis:

1. Los desplazamientos transversales (flecha) de todos los puntos en una sección transversal (ubicada en la coordenada x) son pequeños e iguales al desplazamiento del eje de la viga.

$$v(x, y, z) = v(x).$$

2. Las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje deformado durante la deformación y los giros θ son pequeños. Los desplazamientos axiales por tanto están dados por:

$$u(x, y, z) = u_G(x) - y\theta(x), \quad (3.1)$$

donde θ es el ángulo que forma el vector tangente de la curva de la deformada del eje con la horizontal y $u_G(x)$ es la función del desplazamiento axial del baricentro de la sección ubicada en x .

Sección 3.1. Teoría de vigas sometidas a flexión compuesta**46**

3. Todos los desplazamientos perpendiculares al plano de deformación de la viga son nulos

$$w(x, y, z) = 0$$

4. Se asume que no existen esfuerzos aplicados perpendiculares al plano de deformación de la viga

5. Se desprecia la energía de deformación por cortante es decir, la distorsión angular.

Respecto a la hipótesis de desplazamientos perpendiculares al plano, esta hipótesis representa una simplificación del comportamiento real de la estructura y el efecto de Poisson, sin embargo simplifica la aplicación de la ecuación constitutiva y el cálculo del tensor de deformaciones y permite llegar a las ecuaciones de la teoría de vigas de forma directa.

Respecto a la no consideración de energía de deformación por cortante, se recomienda al estudiante interesado libros como ([Oñate, 2013](#)) donde se describen los elementos de viga de Timoshenko o artículos recientes en los que se muestra la utilidad de este tipo de enfoques para simular el comportamiento real de estructuras ([Bui et al., 2014](#)). En este curso no se considerará deformación por cortante, hipótesis que puede ser razonable para vigas cuya relación entre largo y altura de sección transversal sea superior a 10: $L/h > 10$ (este número es adoptado como criterio para este curso, otros estudios numérico/experimentales pueden sugerir otros valores).

Tensor de deformaciones

Se comienza calculando las componentes del tensor de deformaciones aplicando la relación desplazamientos-deformación al campo de desplazamientos considerado (ver Ecuación (3.1)). La tensión axial ε_x está dada por:

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_G(x) - y \frac{\partial \theta}{\partial x}(x). \quad (3.2)$$

donde ε_G es la deformación axial del eje de la viga, y está dada por

$$\varepsilon_G(x) = \frac{\partial u_G}{\partial x}(x). \quad (3.3)$$

La distorsión angular γ_{xy} está dada por:

$$\gamma_{xy}(x, y) = -\theta(x) + \frac{\partial v}{\partial x}(x). \quad (3.4)$$

La no dependencia de γ_{xy} respecto a y implica que la cara permanece plana. Al imponer que la distorsión angular (asociada a la deformación por cortante) sea nula, se aporta la condición:

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x},$$

(3.5)

lo que es equivalente a que la normal a la sección transversal deformada coincida con la tangente a la curva deformada.

Sección 3.1. Teoría de vigas sometidas a flexión compuesta

47

Finalmente la expresión de la deformación axial está dada por:

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_G(x) - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x). \quad (3.6)$$

lo que representa una extensión de la expresión obtenida en la Ecuación (1.15) para el caso de deformación axial.

Actividad

Demostrar que, considerando las hipótesis de desplazamiento mencionadas, la única componente del tensor de deformaciones no nula, es ε_{xx} .

Tensor de tensiones

Se considera que el material es elástico lineal e isótropo. Se utiliza la correspondiente ecuación constitutiva y el tensor de deformaciones obtenido, teniendo la relación:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (3.7)$$

Esta componente de σ es la única que produce trabajo interno en la expresión de la energía interna de deformación dada por la Ecuación (1.28).

3.1.2. Solicitaciones y convenciones de signo**Solicitaciones internas**

Se definen las solicitudes internas correspondientes a la tensión axial: directa y momento. Para la directa se tiene

$$N(x) = \int_{A(x)} \sigma_x(x, y) dA \quad (3.8)$$

usando que la sección transversal es uniforme, la ecuación constitutiva y la expresión de la deformación axial se tiene:

$$N(x) = \int_{A(x)} \left(E \frac{\partial u_G}{\partial x} - E y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dA. \quad (3.9)$$

Usando que el vector \mathbf{e}_x pasa por el punto G , baricentro de la sección transversal, se tiene

$$N(x) = EA\varepsilon_G(x). \quad (3.10)$$

Se puede destacar que la convención de signo de directa positiva a tracción es coherente con el resultado obtenido ya que en dicho caso $\varepsilon_G > 0$.

Para el cálculo del momento según el eje \mathbf{e}_z se considera la suma (integral) del momento de diferenciales de área por su brazo respectivo:

$$M_z(x) = \int_{A(x)} (y \mathbf{e}_y \wedge \sigma_x(x, y) \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_z dA. \quad (3.11)$$

Sección 3.1. Teoría de vigas sometidas a flexión compuesta

48

Sustituyendo las expresiones de las tensiones y la deformación dada por la Ecuación (3.2) se obtiene:

$$M_z(x) = \int_{A(x)} y E \varepsilon_G (\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_z dA + \int_{A(x)} -y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) (\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_z dA. \quad (3.12)$$

Calculando el producto mixto y usando que el primer momento de inercia respecto al baricentro es nulo, se obtiene:

$$M_z(x) = E \int_{A(x)} y^2 dA \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) \quad (3.13)$$

usando que el material tiene sección transversal uniforme y definiendo el segundo momento de inercia respecto de z como $I_z(x) = \int_A y^2 dA$ se obtiene:

$M_z(x) = EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x).$

(3.14)

Por simplicidad de notación, a continuación se omitirán los subíndices z y el argumento x . Esta notación con subíndices volverá a ser utilizada al considerar problemas de flexión esviada.

La relación obtenida entre momento y curvatura es muy relevante para la caracterización del comportamiento de estructuras de vigas incluso cuando el comportamiento incluye fenómenos complejos como fisuración y otras no linealidades.

Expresión de tensión axial en función de solicitudes

A partir de la expresión de la directa, dada por la Ecuación (3.10), y del momento, dado por la Ecuación (3.14), se obtiene:

$$\varepsilon_G(x) = \frac{N(x)}{EA} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (3.15)$$

Sustituyendo en la expresión de la deformación axial dada por la Ecuación (3.6) se obtiene:

$\varepsilon_x(x, y) = \frac{N(x)}{EA} - y \frac{M_z(x)}{EI_z},$

(3.16)

y multiplicando por E ambos miembros y usando la ecuación constitutiva se tiene

$\sigma(x, y) = \frac{N(x)}{A} - y \frac{M_z(x)}{I_z}$

(3.17)

Convenciones de signo

Para el desarrollo de métodos de análisis de pórticos es útil y necesario definir una convención de signos diferente a la usada para las solicitudes internas. En la Figura 3.1 se muestran dos convenciones de signo a ser utilizadas en este documento y en todo el curso.

Las **solicitudes internas** definidas con la convención de signos usual para σ (positivo

Sección 3.1. Teoría de vigas sometidas a flexión compuesta

49

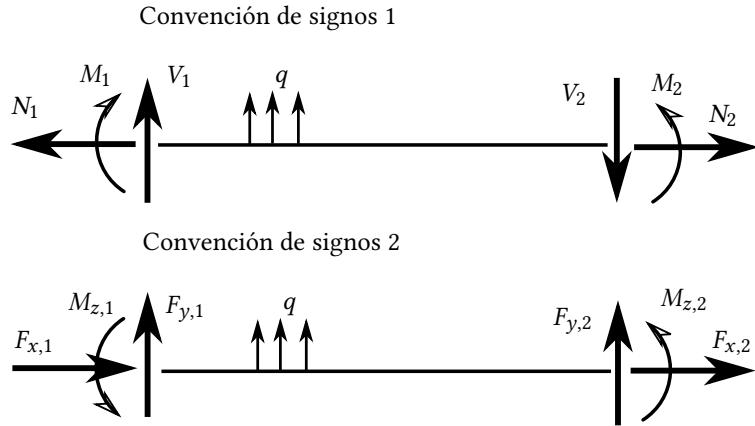


Figura 3.1: Convenciones de signo para momentos nodales y cargas externas en coordenadas locales.

tracción) corresponden a la convención de signos 1 de la figura. Esta convención corresponde a aquella en la cual momentos positivos representan una tracción de fibras inferiores.

Por otra parte, la convención 2 es útil para el desarrollo de métodos matriciales o computacionales, asociada a las **fuerzas externas** aplicadas.

Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones para vigas sometidas a cargas transversales q y axiales b distribuidas por unidad de longitud están dadas por:

$$\frac{dN}{dx}(x) = -b(x) \quad (3.18)$$

$$\frac{dV}{dx}(x) = q(x) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x) = V(x) \quad (3.20)$$

La deducción de estas ecuaciones a partir del equilibrio de un segmento diferencial fue realizado en cursos anteriores. Por otra parte, este desarrollo también puede ser realizado a partir del teorema de trabajo virtual, de forma similar a como es hecho en la sección 5.4.5 de ([Hughes, 1987](#)).

3.1.3. Relaciones fuerzas-desplazamientos para vigas a flexión

Se considera una viga de largo L , formada por un material de módulo de Young E y con sección transversal uniforme de inercia I sometida a fuerzas aplicadas en los extremos de **cortante y momento** de acuerdo a la convención 2 de la [Figura 3.1](#). Se asume que no hay cargas aplicadas en el tramo intermedio de la viga, ni distribuidas ni puntuales.

Se considera que no hay deformación axial o esta es despreciable ($\epsilon_G \approx 0$). También se omitirá el sub-índice z en M_z y θ_z .

Ecuación de la elástica

A partir de las ecuaciones de equilibrio y la ecuación de la elástica se obtiene que la flecha es una función de tercer grado, por lo que se considera la siguiente expresión polinómica general:

$$v(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \forall x \in [0, L]. \quad (3.21)$$

En lugar de trabajar con los parámetros a_i se desea representar la función v en función de los valores nodales de flecha y giro, es decir, v_1, θ_1, v_2 y θ_2 . Para esto, se plantean las siguientes relaciones entre la flecha v evaluada en ciertos puntos en particular y los desplazamientos nodales:

$$v_1 = v(0), \quad \theta_1 = \frac{dv}{dx}(0), \quad v_2 = v(L), \quad \theta_2 = \frac{dv}{dx}(L). \quad (3.22)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales se obtiene:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{L^3} (\theta_1 L + \theta_2 L + 2v_1 - 2v_2) \\ a_2 &= \frac{1}{L^2} (-2\theta_1 L - \theta_2 L - 3v_1 + 3v_2) \\ a_1 &= \theta_1 \\ a_0 &= v_1, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la Ecuación (3.21) se obtiene la expresión:

$$v(x) = \varphi_{v_1}(x)v_1 + \varphi_{\theta_1}(x)\theta_1 + \varphi_{v_2}(x)v_2 + \varphi_{\theta_2}(x)\theta_2, \quad (3.23)$$

donde las funciones φ son funciones de interpolación dadas por:

$$\varphi_{v_1}(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) \quad (3.24)$$

$$\varphi_{\theta_1}(x) = \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \quad (3.25)$$

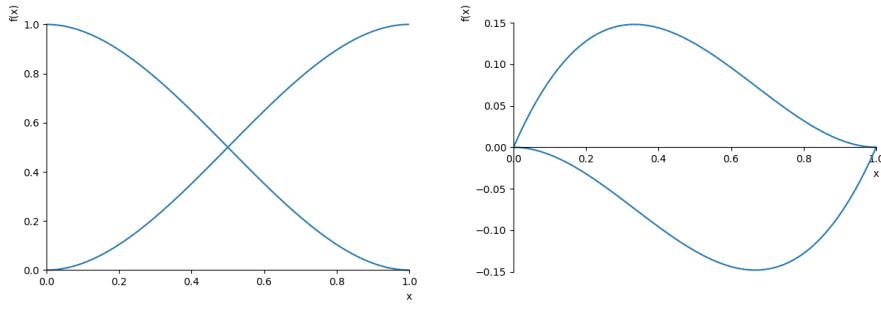
$$\varphi_{v_2}(x) = \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \quad (3.26)$$

$$\varphi_{\theta_2}(x) = \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right). \quad (3.27)$$

En la Figura 3.2 se muestran los gráficos de las funciones de interpolación, los cuales corresponden a las funciones de las elásticas para desplazamientos o giros unitarios de cada grado de libertad correspondiente.

Mínima energía potencial y teorema de Castigliano

Se tiene entonces definidas las funciones de interpolación ϕ definidas al inicio de la UT2, correspondientes al caso de vigas a flexión pura. Se tiene también las expresiones de la deformación axial y la ecuación constitutiva por lo que se está en condiciones de aplicar el principio de mínima energía potencial. Aplicando el principio se obtendrán las relaciones entre fuerzas y desplazamientos para las cuales se cumplen con ecuaciones de compatibilidad de

Sección 3.1. Teoría de vigas sometidas a flexión compuesta**51**(a) Funciones de interpolación φ_{v_1} y φ_{v_2} .(b) Funciones de interpolación φ_{θ_1} y φ_{θ_2} .Figura 3.2: Gráfico de funciones de interpolación para $L = 1$.

desplazamientos y equilibrio con fuerzas externas.

Dado que se desprecia la energía de deformación por cortante (asociada al producto $\tau_{xy} \gamma_{xy}$), la energía potencial de deformación de la viga está dada por:

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_x \epsilon_x dV. \quad (3.28)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.20) y (3.2) y usando que se desprecia la deformación axial ϵ_G se tiene:

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{A(x)} E y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dA dx = EI \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (3.29)$$

Se destaca que fue despreciada la energía de deformación axial por directas (en caso de que fueran aplicadas) es decir que el término $EA\epsilon_G^2$ se consideró mucho menor que $EI\kappa^2$.

Usando la Ecuación (3.23) se obtiene la energía de deformación en función de los desplazamientos y giros nodales $\Pi_{int}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2)$.

Para este desarrollo se considera la convención de signos 2 tanto para fuerzas y momentos como para desplazamientos. De esta forma la energía potencial de las fuerzas externas está dada por:

$$\Pi_{ext}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) = -F_{y,1}v_1 - M_1\theta_1 - F_{y,2}v_2 - M_2\theta_2, \quad (3.30)$$

y por lo tanto, la energía potencial total está dada por:

$$\Pi(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) = \Pi_{int}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) - F_{y,1}v_1 - M_1\theta_1 - F_{y,2}v_2 - M_2\theta_2, \quad (3.31)$$

Sección 3.1. Teoría de vigas sometidas a flexión compuesta**52**

Las condiciones de mínima energía potencial total pueden por lo tanto ser escritas como:

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial v_1}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) = F_{y,1} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial \theta_1}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) = M_1 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial v_2}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) = F_{y,2} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial \theta_2}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) = M_2 \quad (3.35)$$

A modo de ejemplo se presenta el desarrollo para la condición del momento del nodo izquierdo, es decir, la Ecuación (3.33). Usando la interpolación de la flecha en la Ecuación (3.29) y calculando la derivada, se tiene:

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} EI \int_0^L 2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) \varphi''_{\theta_1} \right) dx \quad (3.36)$$

para evaluar la derivada de v se utilizan las expresiones de las derivadas de las funciones de interpolación dadas por:

$$\varphi''_{v_1}(x) = \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \quad \varphi''_{\theta_1}(x) = \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \quad (3.37)$$

$$\varphi''_{v_2}(x) = \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \quad \varphi''_{\theta_2}(x) = \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right). \quad (3.38)$$

sustituyendo v por la expresión dada por las funciones de interpolación se obtiene:

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial \theta_1} = K_{v_1, \theta_1} v_1 + K_{\theta_1, \theta_1} \theta_1 + K_{v_2, \theta_1} v_2 + K_{\theta_2, \theta_1} \theta_2 \quad (3.39)$$

donde los coeficientes K están dados por las integrales:

$$K_{v_1, \theta_1} = EI \int_0^L \varphi''_{v_1} \varphi''_{\theta_1} dx \quad K_{\theta_1, \theta_1} = EI \int_0^L \varphi''_{\theta_1} \varphi''_{\theta_1} dx \quad (3.40)$$

$$K_{v_2, \theta_1} = EI \int_0^L \varphi''_{v_2} \varphi''_{\theta_1} dx \quad K_{\theta_2, \theta_1} = EI \int_0^L \varphi''_{\theta_2} \varphi''_{\theta_1} dx \quad (3.41)$$

Calculando las integrales se tiene:

$$K_{v_1, \theta_1} = EI \left(\frac{24}{L^2} - \frac{84}{2} \frac{1}{L^2} + \frac{72}{3} \frac{1}{L^2} \right) = EI \frac{6}{L^2} \quad (3.42)$$

$$K_{\theta_1, \theta_1} = EI \left(\frac{16}{L^2} - \frac{48}{2} \frac{1}{L^2} + \frac{36}{3} \frac{1}{L^2} \right) L = EI \frac{4}{L} \quad (3.43)$$

$$K_{v_2, \theta_1} = EI \left(-\frac{24}{L^2} + \frac{84}{2} \frac{1}{L^2} - \frac{72}{3} \frac{1}{L^2} \right) = -EI \frac{6}{L^2} \quad (3.44)$$

$$K_{\theta_2, \theta_1} = EI \left(\frac{8}{L^2} - \frac{36}{2} \frac{1}{L^2} + \frac{36}{3} \frac{1}{L^2} \right) L = EI \frac{2}{L} \quad (3.45)$$

Sección 3.2. Métodos de analíticos para pórticos

53

Se obtiene por lo tanto que la ecuación de Castigliano para el giro del primer nodo, dada por la Ecuación (3.33), puede ser escrita como:

$$EI \frac{6}{L^2} v_1 + EI \frac{4}{L} \theta_1 - EI \frac{6}{L^2} v_2 + EI \frac{2}{L} \theta_2 = M_1. \quad (3.46)$$

Repetiendo el procedimiento para las otras condiciones de Castigliano se llega a:

$$EI \left(\frac{12}{L^3} v_1 + \frac{6}{L^2} \theta_1 - \frac{12}{L^3} v_2 + \frac{6}{L^2} \theta_2 \right) = F_{y,1} \quad (3.47)$$

$$EI \left(\frac{6}{L^2} v_1 + \frac{4}{L} \theta_1 - \frac{6}{L^2} v_2 + \frac{2}{L} \theta_2 \right) = M_1 \quad (3.48)$$

$$EI \left(-\frac{12}{L^3} v_1 - \frac{6}{L^2} \theta_1 + \frac{12}{L^3} v_2 - \frac{6}{L^2} \theta_2 \right) = F_{y,2} \quad (3.49)$$

$$EI \left(\frac{6}{L^2} v_1 + \frac{2}{L} \theta_1 - \frac{6}{L^2} v_2 + \frac{4}{L} \theta_2 \right) = M_2, \quad (3.50)$$

Estas ecuaciones representan un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los desplazamientos y giros y el dato o término independiente son las fuerzas. Estas relaciones pueden ser escritas en forma matricial como

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \quad (3.51)$$

donde

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & 2 \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_{y,1} \\ M_1 \\ F_{y,2} \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Es importante destacar qué condiciones de contorno (en los desplazamientos) deben ser aplicadas para poder obtener una solución única, es decir, eliminar los posibles movimientos de cuerpo rígido que tenga la viga.

Actividad

Calcular la flecha máxima de una viga de largo ℓ , biempotrada, con rigidez flexional uniforme EI y una carga puntual P aplicada en la mitad de su longitud, usando el método de los desplazamientos en su forma matricial, utilizando dos elementos.

3.2 Métodos de analíticos para pórticos**3.2.1. Ecuaciones para métodos analíticos**

Los métodos analíticos de resolución se basan en el planteo de las ecuaciones para cada elemento de la estructura independientemente e imponer condiciones de equilibrio en los

Sección 3.2. Métodos de analíticos para pórticos

54

nodos de unión correspondientes. Para aplicar estos métodos es conveniente definir variables auxiliares como ψ , dada por la expresión:

$$\psi = \frac{v_2 - v_1}{L}. \quad (3.53)$$

ψ puede ser interpretado geométricamente como el giro antihorario (en pequeños giros) de la recta que une los dos nodos (cuerda). Se puede ver un diagrama en la Figura 3.3.

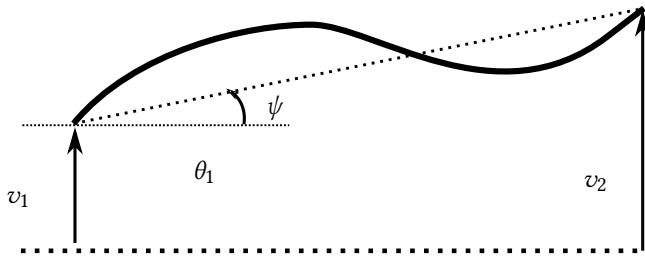


Figura 3.3: Diagrama para interpretación geométrica de ψ .

Las ecuaciones de Castigiano asociadas a los momentos pasan a ser:

$$\begin{cases} \frac{2EI}{L} (2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) = M_1 \\ \frac{2EI}{L} (\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) = M_2 \end{cases} \quad (3.54)$$

Por otra parte a partir de combinaciones lineales de las ecuaciones de momento y cortante se obtiene las relaciones:

$$\begin{cases} F_{y,1} = \frac{M_1 + M_2}{L} \\ F_{y,2} = -\frac{M_1 + M_2}{L} \end{cases} \quad (3.55)$$

Estas ecuaciones son planteadas para cada elemento de barra y los momentos que actúan sobre cada nodo son considerados en ecuaciones de equilibrio nodal, obteniendo así el número de ecuaciones necesarias para obtener todos los desplazamientos y giros.

3.2.2. Cargas equivalentes

En el caso en que la barra tenga cargas aplicadas entre los nodos se puede considerar fuerzas y momentos aplicados en los nodos con la misma energía potencial externa. Estas fuerzas nódulas son llamadas cargas equivalentes. Este método permite obtener valores exactos de giros y flechas nódulas, sin embargo, es necesario integrar las ecuaciones de equilibrio para obtener los diagramas de solicitudes y elástica en el tramo.

A continuación se consideran dos casos importantes de cargas en el tramo, con un enfoque como el presentado en ([Oñate, 2013](#)) donde se puede encontrar un desarrollo más completo.

Sección 3.2. Métodos de analíticos para pórticos**55****Carga distribuida**

En el caso de carga distribuida $q(x)$ (de acuerdo a la convención 2), se tiene que la energía potencial de las fuerzas Π_{ext}^{tr} está dada por:

$$\Pi_{ext}^{tr} = - \int_0^L q(x)v(x)dx. \quad (3.56)$$

El objetivo es entonces encontrar las fuerzas nodales equivalentes que tengan la misma energía potencial. Para esto se sustituye la expresión de $v(x)$ dada por la Ecuación (3.23), obteniendo:

$$\Pi_{ext}^{tr} = -F_{y,1}^{tr}v_1 - M_1^{tr}\theta_1 - F_{y,2}^{tr}v_2 - M_2^{tr}\theta_2 \quad (3.57)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{y,1}^{tr} &= \int_0^L q(x)\varphi_{v_1}(x)dx & M_1^{tr} &= \int_0^L q(x)\varphi_{\theta_1}(x)dx \\ F_{y,2}^{tr} &= \int_0^L q(x)\varphi_{v_2}(x)dx & M_2^{tr} &= \int_0^L q(x)\varphi_{\theta_2}(x)dx \end{aligned}$$

En el caso particular de carga distribuida uniforme $q(x) = q$ se tiene:

$$F_{y,1}^{tr} = \frac{qL}{2} \quad (3.58)$$

$$M_1^{tr} = \frac{qL^2}{12} \quad (3.59)$$

$$F_{y,2}^{tr} = \frac{qL}{2} \quad (3.60)$$

$$M_2^{tr} = -\frac{qL^2}{12} \quad (3.61)$$

Empotramiento perfecto

Es importante ver que estas fuerzas nodales corresponden a los valores opuestos a las reacciones de una viga biempotrada, también llamadas momentos de *empotramiento perfecto* M^{emp} y sus respectivas fuerzas verticales o de cortante F_y^{emp} . Los cortantes y momentos de empotramiento perfecto son opuestos a sus correspondientes fuerzas de tramo, es decir: $F_y^{emp} = -F_y^{tr}$ y $M^{emp} = -M^{tr}$.

Carga puntual

Se considera ahora que la carga puntual P es aplicada (según la convención 2) en el punto de coordenada $x = x_P$ con $x_P \in (0, L)$ y que $q(x) = 0$.

La energía potencial de la fuerza en el tramo está dada por:

$$\Pi_{ext}^{tr} = -Pv(x_P) = -P\varphi_{v_1}(x_P)v_1 - P\varphi_{\theta_1}(x_P)\theta_1 - P\varphi_{v_2}(x_P)v_2 - P\varphi_{\theta_2}(x_P)\theta_2, \quad (3.62)$$

Sección 3.2. Métodos de analíticos para pórticos**56**

por lo tanto las fuerzas nodales equivalentes a la carga puntual en x_P son calculadas evaluando las funciones φ . Por ejemplo el momento nodal en 1 es

$$M_1^{tr} = P\varphi_{\theta_1}(x_P) = P \left(x_P - \frac{2x_P^2}{L} + \frac{x_P^3}{L^2} \right) \quad (3.63)$$

expresión que, factorizando, puede ser reescrita como:

$$M_1^{tr} = Px_P(L - x_P)^2 \frac{1}{L^2}. \quad (3.64)$$

Se verifica nuevamente que el momento equivalente es el opuesto del momento de empotramiento perfecto.

Para el otro momento se tiene

$$M_2^{tr} = -Px_P^2(L - x_P) \frac{1}{L^2}. \quad (3.65)$$

Expresión de ecuaciones

Las ecuaciones de relación fuerza-desplazamiento de la Ecuación (3.54) pasan a ser entonces:

$$\begin{cases} \frac{2EI}{L} (2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + M_1^{emp} = M_1 \\ \frac{2EI}{L} (\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + M_2^{emp} = M_2 \end{cases} \quad (3.66)$$

Al considerar las fuerzas de tramo en las ecuaciones de fuerzas verticales y operar se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} F_{y,1} + F_{y,1}^{tr} = \frac{M_1 + M_2}{L} + \frac{M_1^{tr} + M_2^{tr}}{L} \\ F_{y,2} + F_{y,2}^{tr} = -\frac{M_1 + M_2}{L} - \frac{M_1^{tr} + M_2^{tr}}{L} \end{cases} \quad (3.67)$$

Agrupando se puede obtener que esto es equivalente a las ecuaciones:

$$\begin{cases} F_{y,1} = \frac{M_1 + M_2}{L} + F_{y,1}^{tr-iso} \\ F_{y,2} = -\frac{M_1 + M_2}{L} + F_{y,2}^{tr-iso} \end{cases} \quad (3.68)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{y,1}^{tr-iso} &= -F_{y,1}^{tr} + \frac{M_1^{tr} + M_2^{tr}}{L} \\ F_{y,2}^{tr-iso} &= -F_{y,2}^{tr} - \frac{M_1^{tr} + M_2^{tr}}{L} \end{aligned}$$

Sección 3.2. Métodos de analíticos para pórticos**57**

donde $F_{y,1}^{tr-iso}$ y $F_{y,2}^{tr-iso}$ son las cargas equivalentes correspondientes a las reacciones de una viga simplemente apoyada (cargas de tramo isostáticas). Esto se desarrollará con mayor detalle en el momento de aplicación en práctico.

Actividad

Repetir el cálculo de la flecha máxima de la viga bi-empotrada, mencionado anteriormente, utilizando cargas equivalentes para la carga puntual P .

3.2.3. Expresiones para un extremo articulado

En el caso de articulaciones en un extremo de la viga se puede obtener una expresión simplificada de la Ecuación (3.54). Se considera una articulación en el nodo 2, entonces se puede imponer que $M_2 = 0$ obteniendo

$$\frac{2EI}{L} (\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) = 0 + M_2^{tr} \quad (3.69)$$

por lo que despejando θ_2 se tiene

$$\theta_2 = -\frac{\theta_1}{2} + \frac{3}{2}\psi + \frac{M_2^{tr}L}{4EI}. \quad (3.70)$$

Sustituyendo en la ecuación del momento M_1 se tiene

$$\frac{2EI}{L} \left(2\theta_1 + \left(-\frac{\theta_1}{2} + \frac{3}{2}\psi + \frac{M_2^{tr}L}{4EI} \right) - 3\psi \right) = M_1 + M_1^{tr}. \quad (3.71)$$

Finalmente operando se obtiene:

$$\frac{3EI}{L} (\theta_1 - \psi) = M_1 + M_1^{tr} - \frac{M_2^{tr}}{2} \quad (3.72)$$

que puede ser escrita como

$$\boxed{\frac{3EI}{L} (\theta_1 - \psi) + M_1^{emp'} = M_1} \quad (3.73)$$

donde $M_1^{emp'} = -M_1^{tr} + \frac{M_2^{tr}}{2}$ es el momento de empotramiento perfecto (reacción) de una viga empotrada-articulada. Fácilmente obtenible utilizando tablas.

De forma análoga, si se tiene una articulación en el nodo 1, se impone $M_1 = 0$ y se tiene por lo que despejando θ_2 se tiene

$$\theta_1 = -\frac{\theta_2}{2} + \frac{3}{2}\psi + \frac{M_1^{tr}L}{4EI}. \quad (3.74)$$

obteniendo la expresión de momento:

$$\frac{3EI}{L} (\theta_2 - \psi) + M_2^{emp'} = M_2 \quad (3.75)$$

3.2.4. Apoyos elásticos

La consideración de apoyos elásticos en las ecuaciones de equilibrio nodal es equivalente a la vista en la UT2. En este caso se consideran para resortes de desplazamiento como resortes de giro. En ambos casos se adiciona un término de energía de deformación elástica Π_{res} tal que las fuerzas correspondan con:

$$F_{res,x} = -k_u u, \quad F_{res,y} = -k_v v, \quad M_{res,\theta} = -k_\theta \theta. \quad (3.76)$$

3.2.5. Método *Slope-deflection*

El método *Slope-deflection* (MSD) consiste en la aplicación de las ecuaciones de MD de vigas para pórticos despreciando la energía de deformación dada por esfuerzos de directa. Esto hace que cada elemento de viga tiene deformación ϵ_G nula, sin embargo obviamente sigue siendo capaz de transmitir o soportar esfuerzos de directa.

Para resolver problemas de pórticos es de utilidad aplicar la clasificación de estructura según sus grados de libertad. Se dice que una estructura es *indesplazable* si las incógnitas a determinar por el MSD son únicamente giros nodales, en cambio es *desplazable* si existe al menos una incógnita de desplazamiento.

En práctico se aplicarán metódicamente los pasos principales del método los cuales son:

1. Ecuaciones de momentos nodales por barra: dadas por las Ecuaciones (3.66) para barras con nodos rígidos en ambos extremos y la Ecuación (3.72) para barras con un extremo articulado.
2. Ecuaciones de cortantes por barra: dadas por las Ecuaciones (3.67).
3. Ecuaciones de **equilibrio de momentos** en nodos rígidos. Sea el nodo i , conectado a través de vínculo rígido al conjunto de nodos R_i , y sea un momento externo aplicado en i M_i también según la convención 2, entonces la ecuación de equilibrio de momento en dicho nodo está dada por:

$$M_i - \sum_{j \in R_i} M_{ij} = 0$$

donde M_{ij} representa el momento nodal en i de la barra $i - j$.

4. Equilibrios de **equilibrio de pisos**. Para cada *piso* del pórtico se debe verificar el equilibrio de fuerzas horizontales o cortantes. Esto se realiza aislando el elemento o conjunto de elementos horizontales correspondiente de la estructura, considerando las acciones realizadas por las otras barras y planteando el equilibrio de fuerzas.

3.2.6. Ejemplo

Sea la estructura mostrada en la [Figura 3.4](#) donde las barras tienen módulo de Young E y sección transversal de Inercia I . Se desea determinar desplazamientos y giros nodales. El

Sección 3.2. Métodos de analíticos para pórticos

59

procedimiento de resolución es presentado de forma esquemática a continuación.

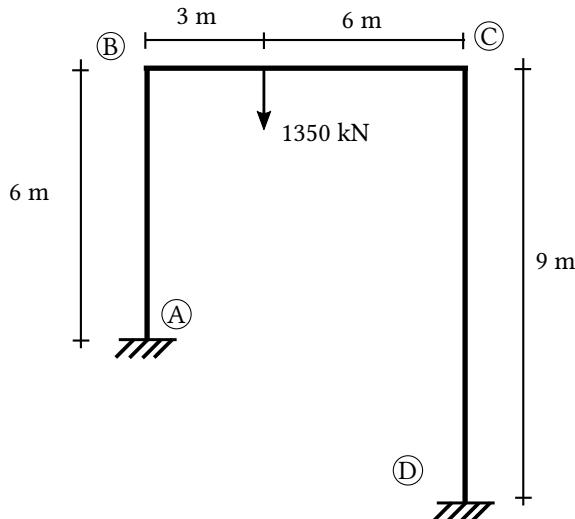


Figura 3.4: Pórtico de ejemplo.

La estructura es desplazable y el desplazamiento horizontal de B es una incógnita a determinar. Se utilizará como variable el desplazamiento del piso $B - C$, dado por $\Delta_{BC} = \psi_{AB}L_{AB}$, por lo que de acuerdo con la convención utilizada Δ_{BC} es positivo para desplazamientos del piso hacia la izquierda. Las otras variables a determinar son los giros θ_B y θ_C . Se utilizarán en todas las ecuaciones las condiciones de contorno: desplazamientos y giros nulos en A y D.

Usando la ecuación de momento en B en la barra BA se tiene:

$$M_{BA} = \frac{2EI}{6} (2\theta_B - 3\frac{\Delta_{BC}}{6}). \quad (3.77)$$

Usando la ecuación de momento en B en la barra BC se tiene:

$$M_{BC} = \frac{2EI}{9} (2\theta_B + \theta_C) + \frac{P \cdot 3 \cdot 6^2}{9^2} \quad (3.78)$$

Usando el equilibrio de momentos en B ($M_{BA} + M_{BC} = 0$) y simplificando se tiene

$$2EI \left(2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) \theta_B + \frac{1}{9} \theta_C - \frac{3}{6^2} \Delta_{BC} \right) = -\frac{4}{3} P. \quad (3.79)$$

Esta consiste en la primer ecuación que relaciona las tres incógnitas a determinar.

Por otra parte se realiza el mismo procedimiento para el nodo C. Para la barra BC se tiene

$$M_{CB} = \frac{2EI}{9} (2\theta_C + \theta_B) - \frac{P \cdot 3^2 \cdot 6}{9^2} \quad (3.80)$$

y para la barra CD

$$M_{CD} = \frac{2EI}{9} (2\theta_C - \frac{3}{9} \Delta_{BC}) \quad (3.81)$$

Sección 3.2. Métodos de analíticos para pórticos**60**

Usando el equilibrio de momentos en C y simplificando se tiene:

$$\boxed{2EI \left(\frac{1}{9} \theta_B + \frac{4}{9} \theta_C - \frac{3}{9^2} \Delta_{BC} \right) = \frac{2}{3} P.} \quad (3.82)$$

Finalmente la ecuación de equilibrio de cortantes del piso es equivalente a la ecuación:

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{CD}} = 0 \quad (3.83)$$

Calculando la expresiones de los momentos M_{CD} y M_{AB} , sustituyendo y simplificando se obtiene:

$$\boxed{2EI \left(-\frac{3}{6^2} \theta_B - \frac{3}{9^2} \theta_C + 6 \left(\frac{1}{6^3} + \frac{1}{9^3} \right) \Delta_{BC} \right) = 0.} \quad (3.84)$$

El sistema de ecuaciones lineales a resolver es entonces

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_{BC} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

donde \mathbf{K} es la matriz del sistema dada por:

$$\mathbf{K} = 2EI \begin{bmatrix} 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) & \frac{1}{9} & -\frac{3}{6^2} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{3}{9^2} \\ -\frac{3}{6^2} & -\frac{3}{9^2} & 6 \left(\frac{1}{6^3} + \frac{1}{9^3} \right) \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Esta matriz es la llamada matriz de rigidez. Previo a la resolución del sistema es importante verificar que la misma es simétrica. Para resolver se pueden ejecutar los siguientes comandos en Octave:

```
K = 2 * [ 2 * (1/6+1/9) 1/9 -3/6^2 ; ...
           1/9 4/9 -3/9^2 ; ...
           -3/6^2 -3/9^2 6 * (1/6^3+1/9^3) ] ;
u = K \ [-4/3; 2/3; 0]
```

Obteniendo la solución:

$$\theta_B = \frac{-1.90385P}{EI}, \theta_C = \frac{0.93930P}{EI} \text{ y } \Delta_{BC} = \frac{-3.43990P}{EI} \quad (3.87)$$

Usando Ftool se verifican los resultados. En la [Figura 3.5](#) se muestran los diagramas de momento y cortante.

En la [Figura 3.6](#) se muestran los diagramas de deformada y directas.

Sección 3.2. Métodos de analíticos para pórticos

61

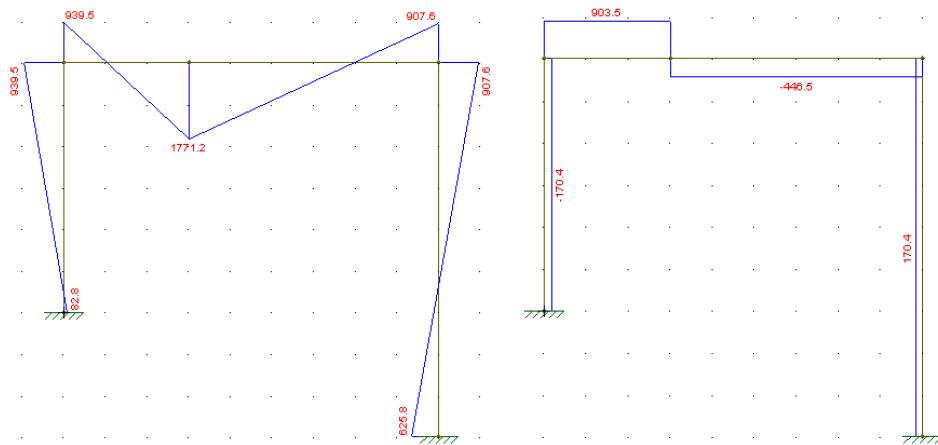


Figura 3.5: Diagramas de momentos (izquierda) y cortante (derecha).

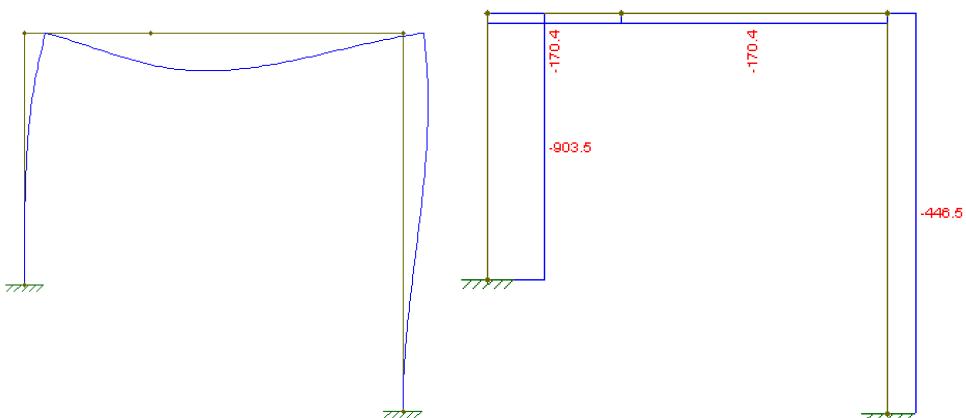


Figura 3.6: Diagramas de deformada (izquierda) y directas (derecha).

3.3 Métodos de análisis matricial/computacional

En esta sección se presentan algunos desarrollos y métodos útiles para comprender el funcionamiento de las herramientas computacionales para el análisis de pórticos planos considerando deformación axial. Se utiliza un enfoque usualmente utilizado tanto en libros de resistencia de materiales (Pilkey, 2002) como en libros orientados a métodos computacionales (Oñate, 2013).

Se considera una viga bajo las mismas hipótesis establecidas previamente, formada por un material elástico lineal de módulo de Young E sometida a esfuerzos de directa y momento tales que se produce una extensión y flexión. La expresión de la función de la deformación axial para un punto en (x, y) es:

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_G(x) - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x), \quad (3.88)$$

considerando los ejes tal como se muestra en la Figura 1.4. Por otra parte, la tensión axial está dada por:

$$\sigma_x(x, y) = E\varepsilon_x(x, y) = E\varepsilon_G(x) - E y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x). \quad (3.89)$$

Utilizando estas expresiones y realizando un procedimiento similar al de la Unidad Temática anterior se obtendrán las relaciones entre fuerzas y desplazamientos dadas por el Método de los Desplazamientos en flexión compuesta.

3.3.1. Relaciones fuerzas-desplazamiento

Se considera un elemento de viga con sección transversal uniforme de área A e inercia I de largo ℓ . Se considera sometido a fuerzas nodales axiales y transversales y momentos nodales como es mostrado en la Figura 3.7. En dicha figura se muestra el eje de la viga en la configuración de referencia con las fuerzas aplicadas y la configuración deformada con los desplazamientos y giros nodales indicados de acuerdo a la convención de signos 2 (ver Figura 3.1).

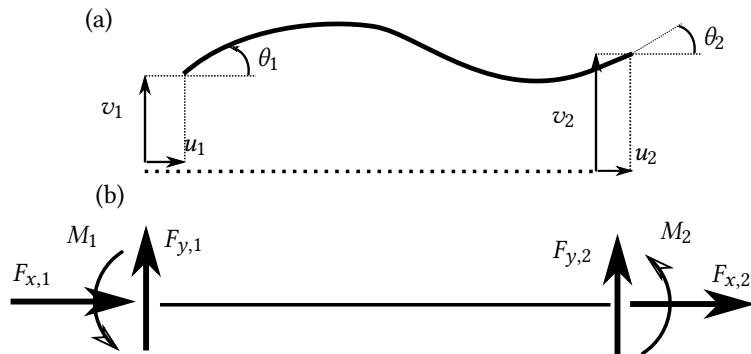


Figura 3.7: Esquemas de viga: (a) eje de viga en configuración de referencia (línea punteada) y eje de viga deformada (línea continua), (b) eje de viga de referencia con fuerzas aplicadas.

El desplazamiento de cada nodo de la viga es interpolado a partir de sus desplazamientos

Sección 3.3. Métodos de análisis matricial/computacional**63**

y giros nodales, representados en forma vectorial como:

$$\mathbf{u} = [u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2]^T. \quad (3.90)$$

La energía potencial de deformación de la viga está dada por la expresión:

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \varepsilon_x(x)^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\ell} \int_A E \left(\varepsilon_G(x) - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) \right)^2 dAdx. \quad (3.91)$$

Desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} \Pi_{int}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\ell} \int_A E (\varepsilon_G(x))^2 dAdx \\ &\dots - \int_{\ell} \int_A E y \varepsilon_G(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) dAdx \\ &\dots + \frac{1}{2} \int_{\ell} \int_A E y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) \right)^2 dAdx, \end{aligned} \quad (3.92)$$

y usando que el origen del sistema de coordenadas es el baricentro de la sección y siendo que la sección transversal es uniforme, se tiene:

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\ell} \int_A E (\varepsilon_G(x))^2 dAdx}_{\text{axial}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\ell} \int_A E y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) \right)^2 dAdx}_{\text{flexión}}. \quad (3.93)$$

En esta expresión fueron definidos los términos de energía de deformación por esfuerzo axial y por esfuerzo de flexión. Considerando que no existen cargas axiales aplicadas en el tramo del elemento se tiene que la deformación axial del baricentro está dada por:

$$\varepsilon_G(x) = \frac{u_2 - u_1}{\ell}, \quad (3.94)$$

a lo largo de todo el elemento. Esto permite expresar las energías en función de los desplazamientos nodales:

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}) = \Pi_{int,\text{axial}}(u_1, u_2) + \Pi_{int,\text{flexión}}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) \quad (3.95)$$

donde la energía de deformación por esfuerzos axiales está dada por:

$$\Pi_{int,\text{axial}}(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \frac{EA}{\ell} (u_2 - u_1)^2 \quad (3.96)$$

y la energía de deformación por esfuerzos de flexión está dada por:

$$\Pi_{int,\text{flexión}}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) = \frac{1}{2} EI \int_{\ell} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) \right)^2 dx. \quad (3.97)$$

Nuevamente se recuerda que se está usando que la sección transversal es uniforme.

Sección 3.3. Métodos de análisis matricial/computacional**64**

La energía potencial de las fuerzas externas puede escribirse como:

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (3.98)$$

donde \mathbf{f} es el vector columna de las fuerzas nodales, dado por:

$$\mathbf{f} = [F_{x,1}, F_{y,1}, M_1, F_{x,2}, F_{y,2}, M_2]^T. \quad (3.99)$$

Se puede obtener por lo tanto la expresión de la energía potencial total:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi_{int,axial}(u_1, u_2) + \Pi_{int,flexión}(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (3.100)$$

y aplicar las condiciones dadas por el primer teorema de Castigliano:

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial u_1} = \frac{EA}{\ell} (u_1 - u_2) = F_{x,1} \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial v_1} = EI \left(\frac{12}{\ell^3} v_1 + \frac{6}{\ell^2} \theta_1 - \frac{12}{\ell^3} v_2 + \frac{6}{\ell^2} \theta_2 \right) = F_{y,1} \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial \theta_1} = EI \left(\frac{6}{\ell^2} v_1 + \frac{4}{\ell} \theta_1 - \frac{6}{\ell^2} v_2 + \frac{2}{\ell} \theta_2 \right) = M_1 \quad (3.103)$$

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial u_2} = \frac{EA}{\ell} (-u_1 + u_2) = F_{x,2} \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial v_2} = EI \left(-\frac{12}{\ell^3} v_1 - \frac{6}{\ell^2} \theta_1 + \frac{12}{\ell^3} v_2 - \frac{6}{\ell^2} \theta_2 \right) = F_{y,2} \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial \Pi_{int}}{\partial \theta_2} = EI \left(\frac{6}{\ell^2} v_1 + \frac{2}{\ell} \theta_1 - \frac{6}{\ell^2} v_2 + \frac{4}{\ell} \theta_2 \right) = M_2. \quad (3.106)$$

Estas condiciones representan la consideración conjunta de las condiciones vistas para la flexión en la Unidad Temática 3 y la deformación axial en la Unidad Temática 2. Esta relación entre desplazamientos nodales y fuerzas puede ser planteada en forma matricial como:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.107)$$

donde la matriz \mathbf{K} es la llamada matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{\ell^3} & 6\frac{EI}{\ell^2} & 0 & -12\frac{EI}{\ell^3} & 6\frac{EI}{\ell^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{\ell^2} & 4\frac{EI}{\ell} & 0 & -6\frac{EI}{\ell^2} & 2\frac{EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{\ell^3} & -6\frac{EI}{\ell^2} & 0 & 12\frac{EI}{\ell^3} & -6\frac{EI}{\ell^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{\ell^2} & 2\frac{EI}{\ell} & 0 & -6\frac{EI}{\ell^2} & 4\frac{EI}{\ell} \end{bmatrix}. \quad (3.108)$$

Sección 3.3. Métodos de análisis matricial/computacional**65**

Es importante destacar que la matriz de rigidez es simétrica, lo que puede ser justificado por el hecho de que la función de energía potencial total es una función de tipo C^2 y que la matriz \mathbf{K} es la hesiana de dicha función.

Por otra parte también se destaca que la matriz \mathbf{K} tiene valores propios nulos con sus correspondientes vectores propios asociados. (pertenecientes al subespacio asociado al valor propio cero S_0). Esto quiere decir que existen movimientos (dados por los vectores de desplazamientos en dicho subespacio) que se corresponden con fuerzas nodales nulas, por lo tanto estos movimientos no introducen deformaciones o tensiones en el elemento. Dicho de otra forma, estos movimientos serán los movimientos de cuerpo rígido de la viga. Estos movimientos son 3 por lo que es necesario eliminar tres grados de libertad (a través de las condiciones de contorno) para obtener una matriz reducida con valores propios positivos y por lo tanto invertible. De esta forma la solución del sistema es única.

3.3.2. Sistemas de coordenadas y análisis matricial

Para encontrar la relación entre desplazamientos y fuerzas nodales en problemas de pórticos donde los ejes de los elementos que concurren a un nodo no coinciden, es útil definir un sistema de coordenadas global de la misma forma en que fue realizado para reticulados planos.

En el caso de pórticos el cambio de base se aplica a los desplazamientos nodales, mientras que los giros se mantienen en el mismo versor de referencia. La matriz de cambio de base esta dada por

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{u}_L^e \quad (3.109)$$

donde $c = \cos(\alpha^e)$ y $s = \sin(\alpha^e)$ y α^e es el ángulo medido positivo antihorario desde el eje global al local. La Ecuación (3.107) fue desarrollada en coordenadas locales utilizando la notación \mathbf{u} , la cual en el caso de sistemas coordenadas locales y globales correspondería a los ejes locales, por lo que debería ser escrita como

$$\mathbf{K}_L \mathbf{u}_L = \mathbf{F}_L. \quad (3.110)$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales está dada por:

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}_L^e (\mathbf{R}^e)^T \quad (3.111)$$

El sistema global obtenido luego de realizado el ensamblado es denotado por:

$$\mathbf{K}_G \mathbf{u} = \mathbf{F}_G. \quad (3.112)$$

donde \mathbf{F}_G es el vector de fuerzas externas nodales en coordenadas globales.

La determinación de desplazamientos a través del ensamblado de un sistema de ecuaciones lineales es llamado Análisis Matricial dado que se realiza a través del ensamblado e

Sección 3.3. Métodos de análisis matricial/computacional**66**

inversión de matrices de dimensiones considerables. La aplicación de este método para estructuras con cargas nodales es equivalente al MEF utilizando elementos de pórtico (*frame* en inglés) (Oñate, 2013), procedimiento utilizado por la mayoría de los programas computacionales de determinación de solicitudes.

3.3.3. Apoyos elásticos

Para la resolución mediante análisis matricial o de forma computacional, las fuerzas introducidas por los resortes pueden ser consideradas a través de una matriz de rigidez para cada elemento (en coordenadas globales):

$$\mathbf{K}_S^e = \begin{bmatrix} k_{u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{v1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{u2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{v2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta 2} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

que puede ser ensamblada y sumada a la matriz de rigidez global, obteniendo un sistema dado por

$$(\mathbf{K}_G + \mathbf{K}_S) \mathbf{u} = \mathbf{F}_G. \quad (3.114)$$

3.3.4. Comparación de energías de deformación

Tal como fue visto en la Unidad Temática 3, para la aplicación de métodos analíticos como el método de Slope-deflection, es usual considerar que la energía de deformación por directa es despreciable respecto a la de flexión. Esto permite eliminar algunas incógnitas cinemáticas.

Esta hipótesis es adecuada si se cumple:

$$\Pi_{int,axial} \ll \Pi_{int,flexión} \quad (3.115)$$

lo que es equivalente a:

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell EA\varepsilon_G^2 dx \ll \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.116)$$

usando las expresiones obtenidas en la unidad temática 3:

$$\varepsilon_G(x) = \frac{N(x)}{EA} \quad y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) = \frac{M(x)}{EI}, \quad (3.117)$$

se tiene que esa condición es equivalente a

$$\int_0^\ell \frac{N(x)^2}{EA} dx \ll \int_0^\ell \frac{M(x)^2}{EI} dx. \quad (3.118)$$

3.3.5. Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos (MEF) puede también ser considerado un método de desplazamientos ya que las incógnitas principales son desplazamientos y giros. Por otra parte, el enfoque del método permite obtener las ecuaciones que gobiernan la deformación de diversos elementos estructurales (Oñate, 2013).

Se pueden enumerar algunas diferencias centrales respecto a los métodos analíticos.

- Para cargas puntuales aplicadas en el tramo, en el MEF se suele dividir el elemento de viga en dos elementos, agregando un nodo en el punto de aplicación de la carga. Esto aumenta la cantidad de variables, lo cual no es relevante dado que el sistema lineal es resuelto numéricamente, y también simplifica la implementación del método.
- Las cargas distribuidas suelen ser consideradas discretizando el elemento en un número apropiado de elementos finitos agregando nodos intermedios y por lo tanto más incógnitas del problema. De esta forma se pueden calcular los diagramas de solicitudes aproximados de forma directa. Se debe también tener en cuenta que las solicitudes no necesariamente serán exactas dentro del dominio de cada elemento, dado que existen aproximaciones por la interpolación considerada.
- En el MEF es posible automatizar la verificación de estabilidad del esquema básico estructural considerado, a través del análisis de los valores propios de la matriz de rigidez ensamblada y con las condiciones de contorno aplicadas. Esto permite automatizar esa verificación, considerada muy importante al obtener solicitudes de estructuras de grandes dimensiones (Kannan et al., 2014).

En este curso no se mencionan aspectos sobre la convergencia de las soluciones al aumentar la cantidad de elementos finitos, el estudiante interesado puede consultar (Hughes, 1987).

El ONSAS es un ejemplo de herramienta numérica basada en el método de los elementos finitos.

3.4 Ejercicios

En cada ejercicio o estructura descrita a continuación, se pide:

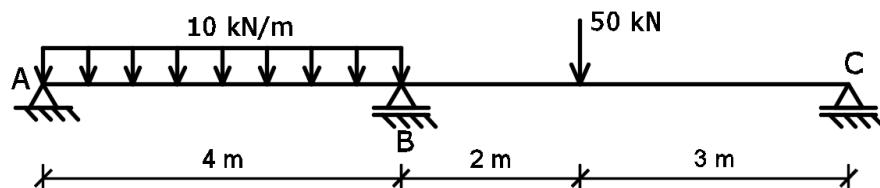
1. Identificar la mínima cantidad de incógnitas a hallar para obtener las solicitudes de la estructura mediante el método de Slope Deflection.
2. Encontrar las ecuaciones que permiten resolver dichas incógnitas.
3. Calcular reacciones y trazar diagramas de solicitudes.
4. Modelar las estructuras en un programa computacional y comparar resultados.

Ejercicio 3.1

La viga de madera de la figura ($E = 10 \text{ GPa}$), compuesta por una escuadria de $20 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$.

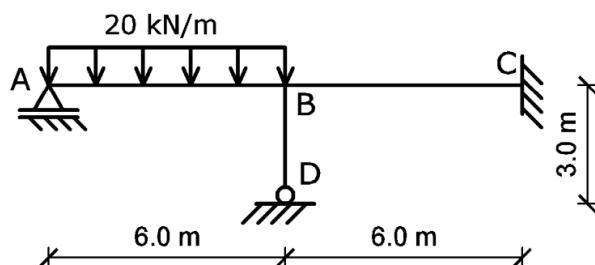
Sección 3.4. Ejercicios

68



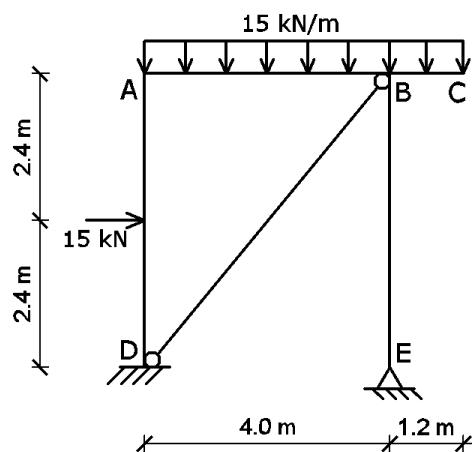
Ejercicio 3.2

La estructura de acero de la figura ($E = 210 \text{ GPa}$), compuesta por una viga (ABC) formada por 1 PNI28 y un pilar (BD) formada por un perfil PNI22.



Ejercicio 3.3

La estructura de acero ($E = 210 \text{ GPa}$) compuesta por una viga (ABC), dos pilares (AD y BE) y un tensor (BD), cuya sección es 1PNI18.

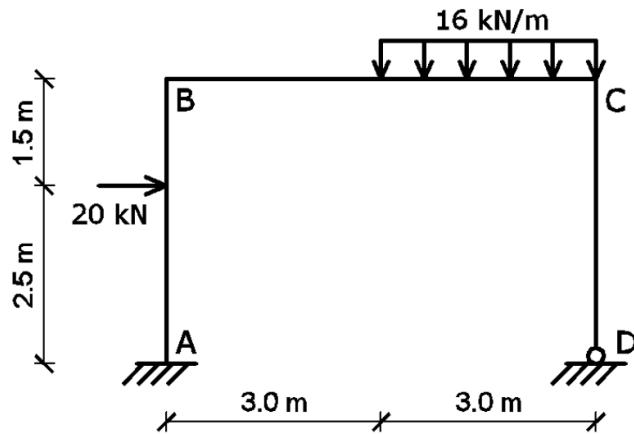


Ejercicio 3.4

En la estructura de hormigón de la figura ($E=25 \text{ GPa}$) los pilares son de 20x30 cm mientras que la viga es de 15x40 cm.

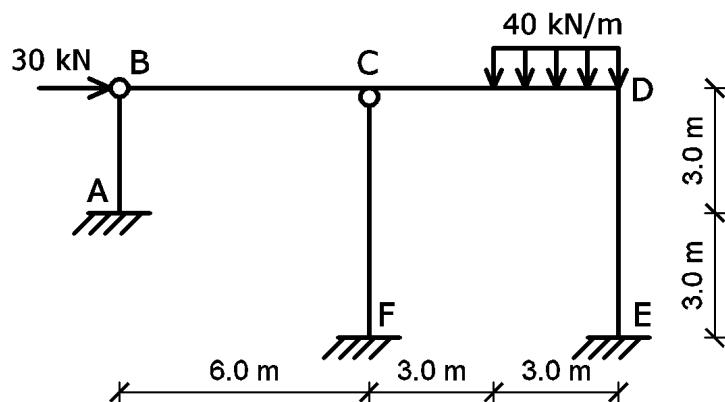
Sección 3.4. Ejercicios

69



Ejercicio 3.5

En la estructura de acero de la figura ($E=210 \text{ GPa}$), las barras BD, CF y DE están conformadas por 2PNC24 soldados ([]), mientras que la barra AB está compuesta por 1PNI20.

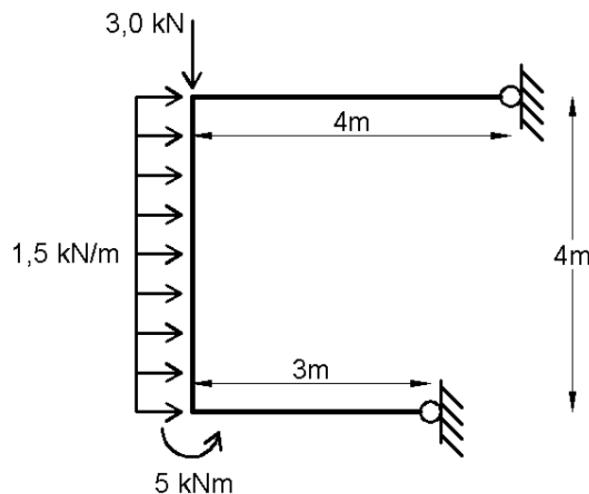


Ejercicio 3.6

En la estructura de hormigón de la figura ($E=30 \text{ GPa}$) las secciones son rectangulares de 12x30 cm.

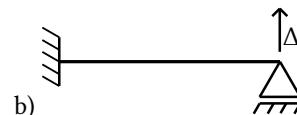
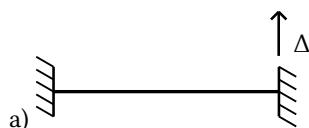
Sección 3.4. Ejercicios

70



Ejercicio 3.7

Sean las siguientes estructuras conformadas por barras de $EI=cte$ y de longitud L sometidas a un desplazamiento impuesto Δ . Se pide calcular los momentos flectores en los empotramientos.



Unidad temática 4

Simetría y Líneas de Influencia en pórticos

En esta unidad se presentan dos conceptos o métodos específicos del análisis de pórticos planos. Por una parte simetría y antisimetría, con su aplicación al análisis simplificado de pórticos planos. Por otra parte se presenta una introducción a la aplicación de líneas de influencia en pórticos hiperestáticos. Para la sección de simetría se utiliza un enfoque basado en las ecuaciones de equilibrio para obtener las condiciones mecánicas y cinemáticas dadas por la simetría, aplicándolas luego en pórticos de forma similar a como es realizado en (Cervera Ruiz and Blanco Díaz, 2002b). La sección de Líneas de Influencia está basada en (Celigüeta, 2003).

4.1 Simetría en estructuras planas

En esta sección se desarrollan los puntos más importantes para la consideración de simetría en el análisis de pórticos. Para la presentación se consideran pórticos planos cuya geometría tiene un eje de simetría axial. Los conceptos vistos pueden ser generalizados a estructuras tridimensionales.

4.1.1. Viga sometida a cargas externas simétricas

En la Figura 4.1 se muestra un elemento de viga con sección transversal con inercia I y área A , módulo de Young E y largo ℓ , el cual está sometido a cargas distribuidas y nodales simétricas respecto al punto medio de la viga (punto considerado como origen de la coordenada x).

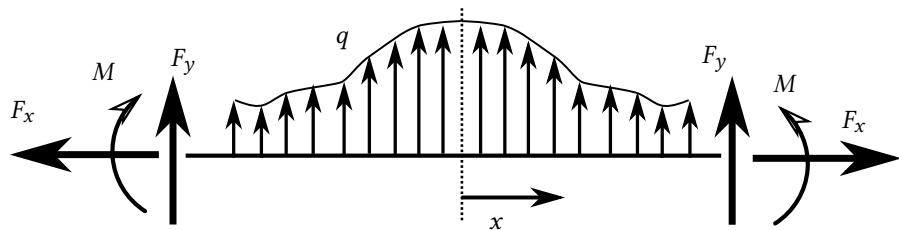


Figura 4.1: Esquema de viga sometida a cargas simétricas.

Las cargas nodales pueden ser provocadas por agentes externos o bien deberse a reacciones asociadas a vínculos que restringen desplazamientos nodales. Si las cargas y las restricciones en desplazamiento (vínculos a tierra) son simétricos entonces las reacciones asociadas a dichos vínculos también lo serán.

Sección 4.1. Simetría en estructuras planas

72

Se desea obtener cuales son las propiedades que cumplen las solicitudes y los desplazamientos para este caso. Para esto se plantean las expresiones matemáticas de cada una de las hipótesis y ecuaciones disponibles y se procede a realizar el desarrollo.

Simetría de cargas externas Observando en la figura la simetría de las fuerzas nodales y recordando la convención de signos de la UT3 para solicitudes internas, se tiene que la simetría es equivalente a las siguientes condiciones en las solicitudes en los extremos:

$$V\left(-\frac{\ell}{2}\right) = F_y \quad V\left(\frac{\ell}{2}\right) = -F_y \quad (4.1)$$

$$M\left(-\frac{\ell}{2}\right) = M_n \quad M\left(\frac{\ell}{2}\right) = M_n. \quad (4.2)$$

Por otra parte, la simetría de la carga distribuida es equivalente a decir que la función de la carga $q(x) : [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función par. La definición de función par establece que:

$$q(x) = q(-x) \quad \forall x \in \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right]. \quad (4.3)$$

Estas relaciones representan condiciones de contorno para obtener relaciones particulares a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Equilibrio puntual y relación con desplazamientos Se pasa a analizar la forma de las ecuaciones de equilibrio puntual, dadas por:

$$\frac{dV}{dx} = q \quad (4.4)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (4.5)$$

donde nuevamente se recuerda que se utiliza la convención de signos 1 de la UT3. También se cuenta con las relaciones fuerza desplazamiento obtenidas en la UT3 a partir de la ecuación constitutiva y las hipótesis cinemáticas:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (4.6)$$

$$\frac{dv}{dx} = \theta \quad (4.7)$$

Equilibrio global Finalmente se establece la condición del equilibrio global para cualquier segmento de viga considerado. En particular se consideran las dos mitades de la viga por lo que se realiza un corte en $x = 0$. El equilibrio de fuerzas verticales de la mitad derecha está dado por:

$$V(0) + \int_0^{\ell/2} q(u)du + F_y = 0 \quad (4.8)$$

Sección 4.1. Simetría en estructuras planas

73

donde $V(0)$ es el cortante en la sección del plano de simetría., Por otra parte también se tiene la ecuación del equilibrio de fuerzas de la mitad izquierda, dado por:

$$-V(0) + \int_{-\ell/2}^0 q(u)du + F_y = 0. \quad (4.9)$$

Considerando el cambio de variable $s = -u$ y usando que q es par se tiene:

$$-V(0) - \int_{\ell/2}^0 q(s)ds + F_y = 0 \quad (4.10)$$

invirtiendo los límites de integración se obtiene

$$-V(0) + \int_0^{\ell/2} q(s)ds + F_y = 0 \quad (4.11)$$

Restando miembro a miembro la Ecuación (4.8) se tiene

$$-V(0) - V(0) = 0 \Rightarrow \boxed{V(0) = 0}. \quad (4.12)$$

Desarrollo de cortante Se pasa a buscar cual es la forma del cortante $V(x)$ bajo las hipótesis consideradas. El cortante puede ser calculado integrando la primer ecuación puntual de equilibrio:

$$V(x) = \int_0^x q(u)du + V(0). \quad (4.13)$$

Es importante destacar que esta ecuación es equivalente a considerar el equilibrio de fuerzas verticales del segmento de viga $[0, x]$.

Usando el resultado de la Ecuación (4.12) se tiene:

$$V(x) = \int_0^x q(u)du. \quad (4.14)$$

Considerando el cambio de variable $s = -u$ se obtiene:

$$V(x) = \int_0^{-x} -q(-s)ds, \quad (4.15)$$

donde se puede nuevamente ver que esto es equivalente a una ecuación de equilibrio del segmento $[-x, 0]$. Usando que q es par se tiene

$$V(x) = - \int_0^{-x} q(s)ds. \quad (4.16)$$

A partir de las ecuaciones (4.14) y (4.16) se puede ver que:

$$V(x) = - \int_0^{-x} q(s)ds = -V(-x) \Rightarrow \boxed{V(x) = -V(-x)} \quad (4.17)$$

por lo que queda demostrado que V es una función impar y el cortante es nulo en el eje de

Sección 4.1. Simetría en estructuras planas

74

simetría.

Desarrollo de momento El momento interno en una sección cualquiera x puede ser obtenido a partir de la segunda ecuación puntual de equilibrio:

$$M(x) = \int_0^x V(u)du + M(0). \quad (4.18)$$

Realizando el cambio de variable $s = -u$ se obtiene

$$M(x) = \int_0^{-x} -V(-s)ds + M(0) \quad (4.19)$$

y usando que V es impar se tiene

$$M(x) = \int_0^{-x} V(s)ds + M(0) = M(-x) \Rightarrow \boxed{M(x) = M(-x)} \quad (4.20)$$

por lo que se demostró que M es par.

Desarrollo de giro El giro puede ser calculado integrando la ecuación de momento curvatura:

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{M(u)}{EI} du + \theta(0). \quad (4.21)$$

Haciendo cambio de variable $s = -u$ y usando que el momento es par se obtiene:

$$\theta(x) = - \int_0^{-x} \frac{M(s)}{EI} ds + \theta(0). \quad (4.22)$$

Si se considera cada mitad de la viga por separado se puede ver que el giro del punto en el eje de simetría debería tener valores opuestos debido a la simetría de las cargas. Por otra parte por continuidad de la viga en dicho punto se cumple que los giros de ambos extremos deben ser iguales por lo que se concluye que dicho giro debe de ser nulo, por lo tanto $\theta(0) = 0$.

Se tiene por lo tanto que:

$$\theta(x) = - \int_0^{-x} \frac{M(s)}{EI} ds = -\theta(-x) \Rightarrow \boxed{\theta(x) = -\theta(-x)}. \quad (4.23)$$

por lo que se demostró que el giro es impar y tiene valor nulo en el eje de simetría.

Desarrollo de flecha La flecha se obtiene integrando la ecuación diferencial que la relaciona con el giro:

$$v(x) = \int_0^x \theta(u)du + v(0). \quad (4.24)$$

Realizando el cambio de variable $s = -u$ se obtiene

$$v(x) = \int_0^{-x} -\theta(-s)ds + v(0) \quad (4.25)$$

Sección 4.1. Simetría en estructuras planas

75

y usando que el giro es impar se tiene

$$v(x) = \int_0^{-x} \theta(s)ds + v(0) = v(-x) \Rightarrow \boxed{v(x) = v(-x)} \quad (4.26)$$

por lo que se demostró que v es par.

En resumen se probó que para las hipótesis establecidas, si la **carga** distribuida par $q(x) = q(-x)$ se cumple que:

- el **cortante** impar $V(x) = -V(-x)$,
- el **momento** par $M(x) = M(-x)$,
- el **giro** impar $\theta(x) = -\theta(-x)$,
- y la **flecha** par $v(x) = v(-x)$.

Carga puntual o articulación en eje de simetría

De forma análoga se pueden desarrollar las variantes de las ecuaciones para los casos en los que existe una carga puntual o una articulación en el eje de simetría de la viga.

En el caso de carga puntual existe una discontinuidad antisimétrica en el cortante de valor igual a la carga aplicada y en el caso de la articulación existen también una discontinuidad impar del valor del giro a cada lado de la articulación.

4.1.2. Pórticos planos simétricos con cargas simétricas

El mismo razonamiento realizado para vigas puede ser extendido a pórticos, donde se debe considerar un sistema de coordenadas local x continuo a lo largo de los pilares y vias que se deseen analizar en cada etapa. El estudiante interesado en comprender en mayor profundidad el enfoque utilizado puede consultar ([Cervera Ruiz and Blanco Díaz, 2002b](#)).

En caso de existir una barra en el eje de simetría se obtiene un resultado equivalente al obtenido considerando una barra con la mitad de rigidez a directa, es decir con una sección transversal con la *mitad de área*.

En la [Figura 4.2](#) se muestra a la izquierda un pórtico simétrico con cargas simétricas aplicadas y a la derecha un pórtico equivalente obtenido a partir de las consideraciones de simetría y los resultados obtenidos.

Es importante destacar en este caso que el empotramiento deslizante considerado en el eje de simetría está asociado al hecho de que el giro es nulo por la simetría de las cargas y no necesariamente a la rigidez a flexión del pilar del eje de simetría.

4.1.3. Viga simétrica con cargas externas antisimétricas

En esta sección se presentan de forma sintética las condiciones correspondientes a estructuras **simétricas** con cargas antisimétricas (es decir impares).

De forma análoga al caso de la viga con cargas simétricas, si las cargas son antisimétricas se cumple que:

- **carga** distribuida impar $q(x) = -q(-x)$
- **cortante** par $V(x) = V(-x)$

Sección 4.1. Simetría en estructuras planas

76

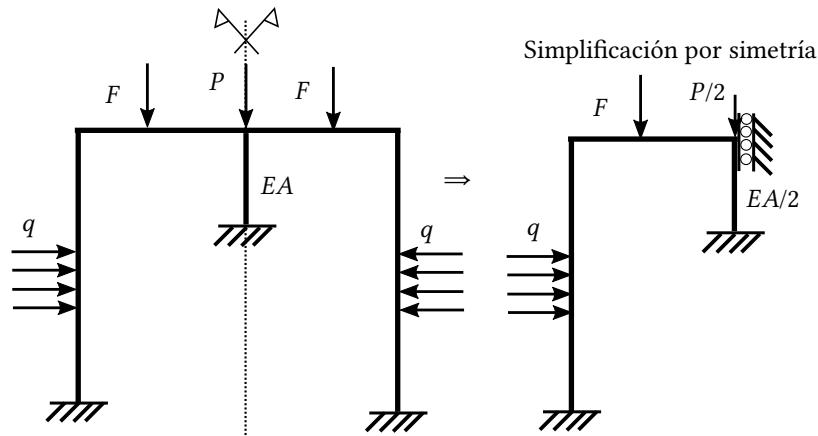


Figura 4.2: Esquema de simplificación por consideraciones de simetría de pórtico.

- **momento** impar $M(x) = -M(-x)$
- **giro** par $\theta(x) = \theta(-x)$
- **flecha** impar $v(x) = -v(-x)$

Se puede mostrar que el momento es nulo en el eje de simetría.

4.1.4. Pórticos planos simétricos con cargas antisimétricas

En la Figura 4.3 se muestra a la izquierda un pórtico con cargas antisimétricas y a la derecha un pórtico obtenido a partir de las simplificaciones de antisimetría consideradas.

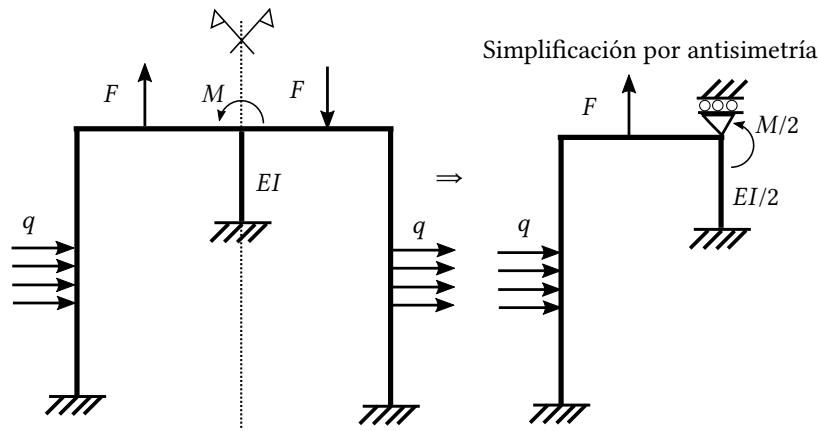


Figura 4.3: Esquema de simplificación por consideraciones de antisimetría de pórtico.

Es importante destacar en este caso que el apoyo deslizante considerado en el eje de simetría está asociado al hecho de que la flecha es nula por la antisimetría de las cargas y no necesariamente a la rigidez a directa del pilar del eje de simetría.

4.1.5. Descomposición simetría/antisimetría

En práctico se mostrará que, para una estructura simétrica, es posible descomponer cualquier estado de carga en suma de uno simétrico y otro antisimétrico, permitiendo simplificar el análisis de cualquier estructura simétrica.

4.2 Líneas de influencia

En esta sección se presenta un método para la determinación de líneas de influencia de reacciones y solicitudes en estructuras hiperestáticas. El enfoque utilizado se basa en la aplicación de superposición y el Teorema de Betti (enunciado en la Sección 1.3.2). El texto de referencia utilizado es ([Celigüeta, 2003](#)).

Se asume que los conceptos de línea de influencia son conocidos y que se conocen los métodos utilizados para determinar las líneas de influencia en reticulados y vigas isostáticas. En caso de no contar con estos conceptos, se sugiere consultar el capítulo 10 del texto referenciado previo a leer esta sección.

Para presentar los métodos para determinación de las distintas solicitudes se utilizará un ejemplo mostrado en la Figura 4.4. El esquema básico considerado consiste en un pórtico formado por elementos de pórtico de rigidez a flexión uniforme EI con cuatro nodos como se muestra en la figura.

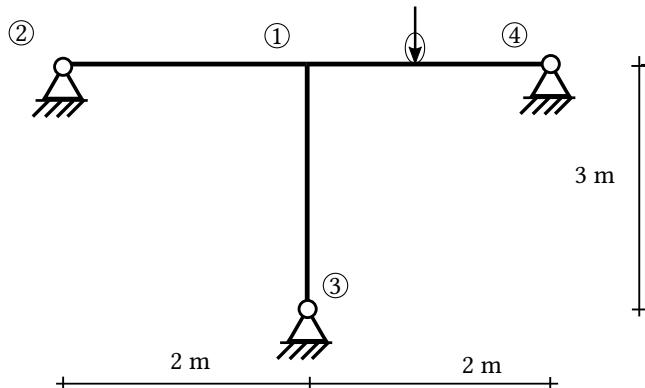


Figura 4.4: Esquema básico de cálculo de ejemplo de líneas de influencia.

La flecha con un círculo representa la carga aplicada considerada móvil, en todo el tramo horizontal de la estructura y de módulo unitario.

4.2.1. Líneas de influencia de reacciones

Si se desea calcular por ejemplo la reacción vertical del nodo 3, se debe liberar el grado de libertad cinemático correspondiente. Esto es, modificar el apoyo fijo del nodo 3 por un apoyo deslizante vertical, como se muestra en la Figura 4.5.

Los desplazamientos de cada estado son representado como $\Delta_{y,3}^I$ y $\Delta_{y,3}^{II}$ y el desplazamiento de la estructura real es calculado como

$$\Delta_{y,3} = \Delta_{y,3}^I + R_{y,3} \Delta_{y,3}^{II}. \quad (4.27)$$

Sección 4.2. Líneas de influencia

78

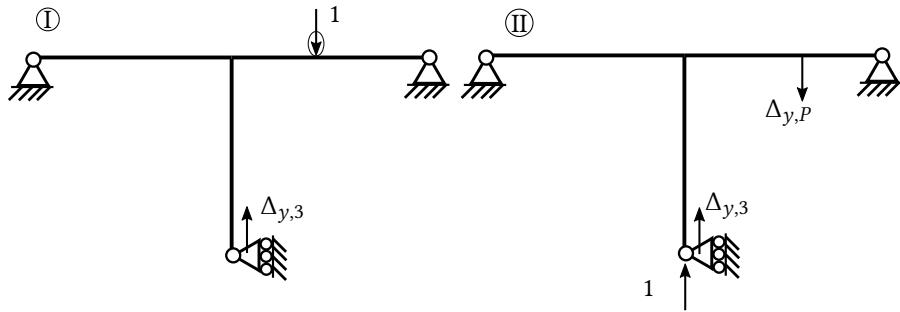


Figura 4.5: Esquemas de estados para determinación de línea de influencia de reacción.

La condición de apoyo fijo en 3 es $\Delta_{y,3} = 0$, por lo que imponiendo esto, se puede obtener el valor de la reacción deseada:

$$R_{y,3} = -\frac{\Delta_{y,3}^I}{\Delta_{y,3}^{II}}. \quad (4.28)$$

Para poder obtener un método simple de cálculo, se debe poder calcular el desplazamiento del estado I de otra forma. Para esto, se utiliza el Teorema de Betti, el cual permite establecer una relación entre el trabajo de las cargas del estado I con los desplazamientos del estado II y las cargas del estado II y los desplazamientos del estado I.

La relación establecida por el Teorema de Betti es:

$$1\Delta_{y,P}^{II} = 1\Delta_{y,3}^I, \quad (4.29)$$

donde P es el punto variable de aplicación de la carga. Sustituyendo en la Ecuación (4.28) se tiene:

$R_{y,3} = -\frac{\Delta_{y,P}^{II}}{\Delta_{y,3}^{II}}, \quad (4.30)$

expresión que permite calcular la línea de influencia realizando el análisis de un único EBC con un único estado de cargas estáticas. En los materiales complementarios audiovisuales se mostrarán los diagramas utilizando herramientas computacionales y los desarrollos analíticos correspondientes.

4.2.2. Líneas de influencia de cortantes

Para calcular líneas de influencia de cortantes se debe liberar el vínculo cinemático correspondiente, es decir la continuidad de desplazamiento transversal.

Se considera que se desea calcular la línea de influencia del cortante (solicitud interna), en el punto medio del tramo ① – ②, llamado M. Para esto se libera la continuidad y se consideran los estados o esquemas básicos de cálculo mostrado en la Figura 4.6.

$\Delta_{y,Mi}$ y $\Delta_{y,Md}$ representan los desplazamientos transversales a la izquierda y derecha del empotramiento deslizante considerado. La condición de continuidad del desplazamiento transversal está dada por:

$$\Delta_{y,Mi} = -\Delta_{y,Md} \quad (4.31)$$

Sección 4.2. Líneas de influencia

79

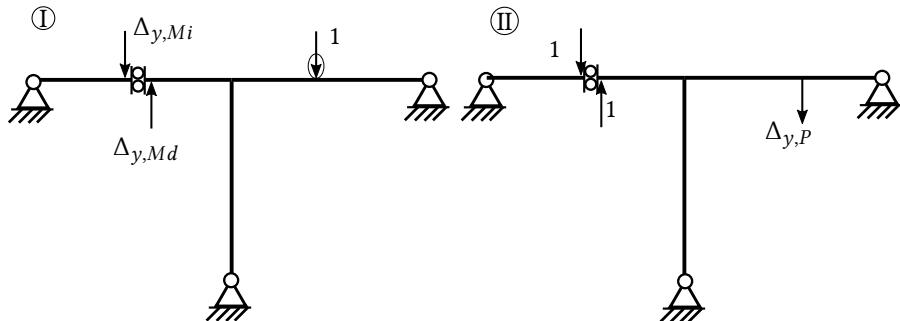


Figura 4.6: Esquemas de estados para determinación de línea de influencia de cortantes.

Por otra parte, utilizando superposición, los desplazamientos en la estructura *real* (con el valor de cortante V_M a determinar), pueden ser escritos como:

$$\Delta_{y,Mi} = \Delta_{y,Mi}^I + V_M \Delta_{y,Mi}^{II} \quad (4.32)$$

$$\Delta_{y,Md} = \Delta_{y,Md}^I + V_M \Delta_{y,Md}^{II} \quad (4.33)$$

Sustituyendo en la condición de continuidad de la Ecuación (4.31), se tiene:

$$\Delta_{y,Mi}^I + V_M \Delta_{y,Mi}^{II} = -(\Delta_{y,Md}^I + V_M \Delta_{y,Md}^{II}) \quad (4.34)$$

Por lo tanto, el cortante que garantiza la continuidad está dado por:

$$V_M = -\frac{\Delta_{y,Mi}^I + \Delta_{y,Md}^I}{\Delta_{y,Mi}^{II} + \Delta_{y,Md}^{II}} \quad (4.35)$$

Usando el Teorema de Betti se tiene:

$$1 \cdot \Delta_{y,Mi}^I + 1 \cdot \Delta_{y,Md}^I = 1 \cdot \Delta_{y,P}^{II} \quad (4.36)$$

por lo tanto el cortante puede ser calculado como:

$$V_M = -\frac{\Delta_{y,P}^{II}}{\Delta_{y,Mi}^{II} + \Delta_{y,Md}^{II}} \quad (4.37)$$

En los videos complementarios se presentarán ejemplos del cálculo de líneas de influencia de cortantes.

4.2.3. Líneas de influencia de momentos

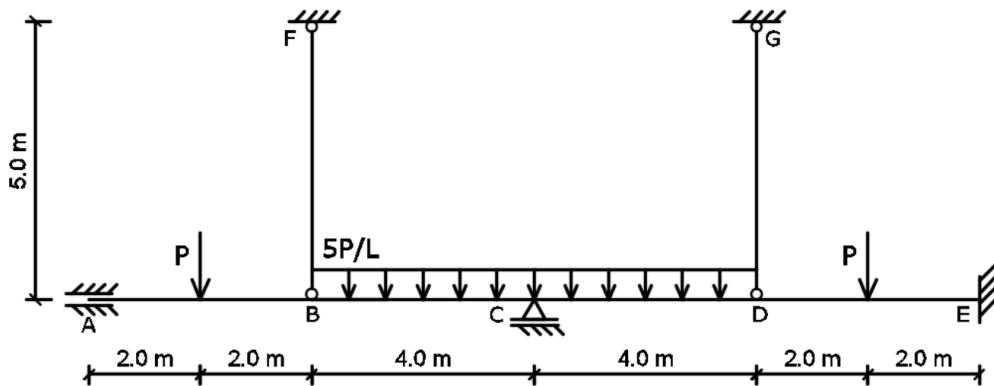
En el material complementario audiovisual se presentará el procedimiento de aplicación de *Betti* para el cálculo de líneas de influencia de momentos flectores, así como también ejemplos.

4.3 Ejercicios

En todos los ejercicios presentados a continuación se deberá trabajar con estructuras simplificadas a través del uso de la simetría o antisimetría cuando corresponda, así como también, resortes equivalentes para algunas componentes estructurales.

Ejercicio 4.1

En la estructura de acero ($E = 210 \text{ GPa}$) de la figura, la viga continua AE está conformada por 2 PNC 18 soldados ([]) y cada uno de los tensores BF y DG tiene una sección transversal constituida por 2 barras $\phi 16$.

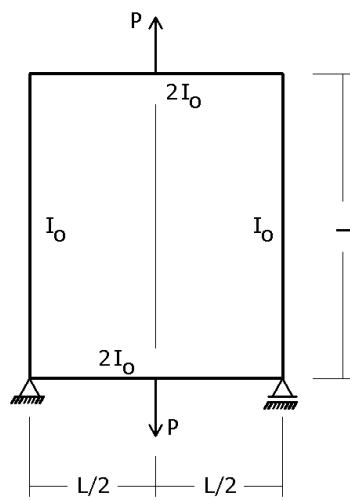


- Definir la estructura análoga más simplificada para la resolución analítica.
- Obtener el diagrama de solicitudes. Considerar $P = 15 \text{ kN}$ y $L = 4 \text{ m}$.
- Bosquejar la deformada de la estructura.

Ejercicio 4.2

Para el marco (formado por cuatro nudos con uniones rígidas) de hormigón ($E = 30 \text{ GPa}$) mostrado en la figura, conformado por secciones de dimensiones $15 \times 30 \text{ cm}$ (inerzia I_0) y $30 \times 30 \text{ cm}$ (inerzia $2I_0$):

- Calcular las reacciones y trazar diagramas de solicitudes.
- Bosquejar la deformada de la estructura.

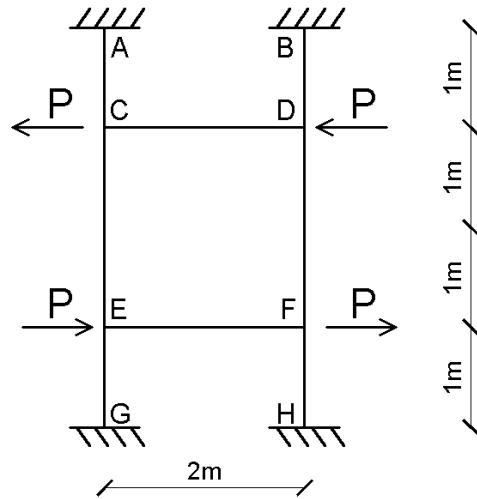


Sección 4.3. Ejercicios

81

Ejercicio 4.3

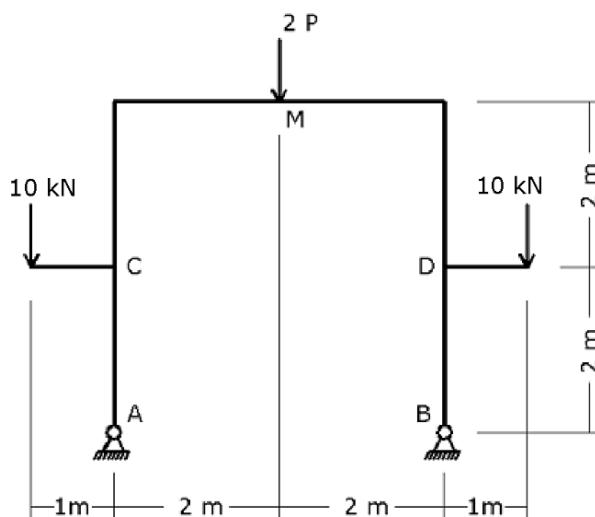
Sea la estructura de la figura, conformada por barras de acero ($E=210$ GPa) de sección tubular de diámetro exterior $\phi = 125$ mm y espesor $t = 5$ mm. Considerando $P = 10$ kN, se pide:



- Resolver la estructura y trazar diagramas de solicitudes correspondientes.
- Hallar el giro de los puntos C, D, E y F. Bosquejar la deformada de la estructura.

Ejercicio 4.4

El pórtico de acero ($E = 210$ GPa) mostrado en la figura está construido con perfiles con sección dada por un perfil PNI 24.



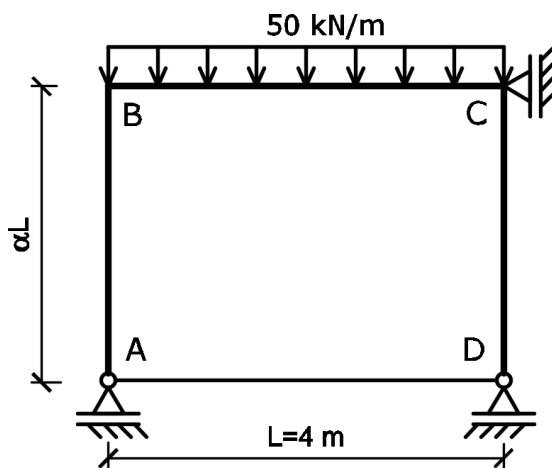
Sección 4.3. Ejercicios

82

- Determinar el valor de P para el cual las reacciones en A y B son verticales.
- Para ese valor de P , calcular el descenso de la sección M y los giros en las secciones C y D.

Ejercicio 4.5

La estructura de acero ($E = 210$ GPa) mostrada en la figura recibe la descarga distribuida de un entrepiso sobre el travesaño BC. El marco ABCD consiste en 2 perfiles PNC 20 apareados (J[]), mientras que el tensor AD se compone de 2 $\phi 16$.



Se pide:

- Hallar los valores de α para los cuales el máximo momento que tracciona las fibras superiores y el máximo momento que tracciona fibras inferiores en el travesaño BC, son iguales en módulo.
- Para el mayor valor de α , trazar los diagramas de solicitudes.

Ejercicio 4.6

Considere la estructura de la Figura 4.7, con EI uniforme, sometida a las cargas que se indican. Se sabe que $L = 2 \text{ m}$ y $H = 100 \text{ kN}$.

Los pilares (barras BE y CF) están formados por tubulares de acero de diámetro exterior $\phi_{ext} = 45 \text{ cm}$. La sección transversal del piso superior (barras AB, BC y CD) es una sección compuesta mostrada en la Figura 4.8. Se considera $E_{ACERO} = 210 \text{ GPa}$ y $E_{MADERA} = 10.5 \text{ GPa}$.

Se pide:

- Determinar el espesor t de los tubulares de forma tal que se cumpla la hipótesis de $EI=cte$.
- Determinar el valor de la constante k de los resortes de forma que el desplazamiento horizontal del piso superior sea $\delta = 2.6 \text{ mm}$ hacia la derecha.
- Trazar diagramas de solicitudes y bosquejar la deformada de la estructura.

Sección 4.3. Ejercicios

83

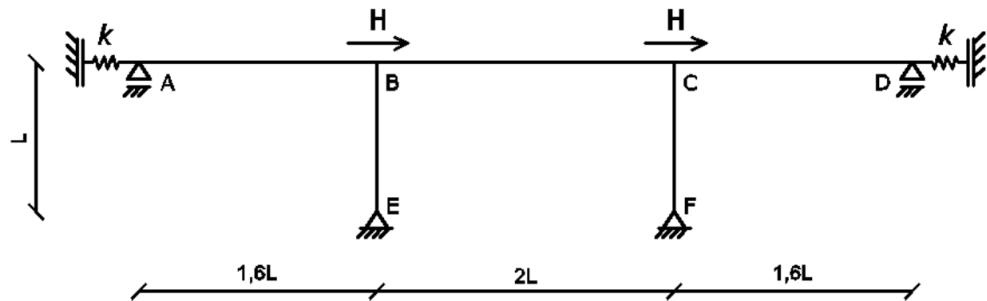


Figura 4.7: Esquema de estructura.

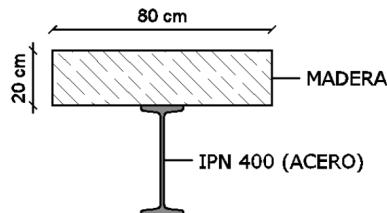
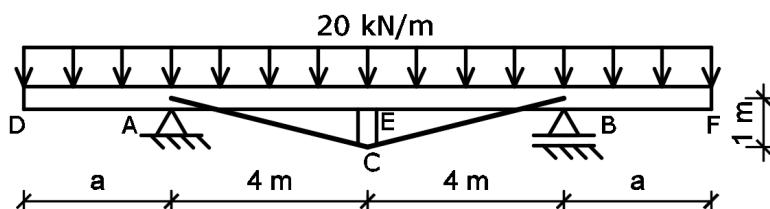


Figura 4.8: Esquema de sección transversal de piso superior.

Ejercicio 4.7

La figura muestra una viga atensorada. La viga DAEBF consiste en una escuadría de madera de sección 20×60 cm, y el tensor ACB en una barra redonda de acero ($E = 210$ GPa) de $\phi 16$. El puntal CE se considera infinitamente rígido. Se considera que $E_{MADERA} = E_{ACERO} \frac{1}{30}$.



- Encontrar un resorte vertical en E equivalente al conjunto conformado por el tensor ACB y el puntal CE.
- Hallar a tal que los tensores estén sometidos a una tensión de 140 MPa.
- Para ese valor de a, calcular la máxima tensión normal en la viga y diagramas de solicitudes en la estructura.

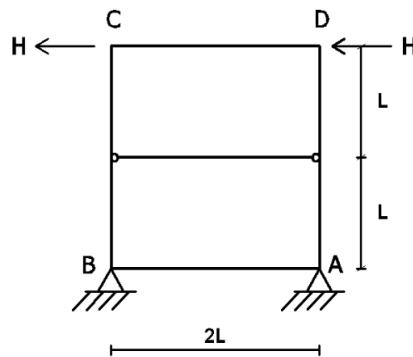
Ejercicio 4.8 (adicional)

La estructura de la figura está compuesta por un marco rígido ABCD de madera ($E = 10$ GPa), cuya sección es una escuadría de 15×30 cm. A su vez existe una barra bi-articulada de

Sección 4.3. Ejercicios

84

acero ($E = 210 \text{ GPa}$) que vincula la barra BC con AD en sus puntos medios, compuesta por $1\phi 20$.

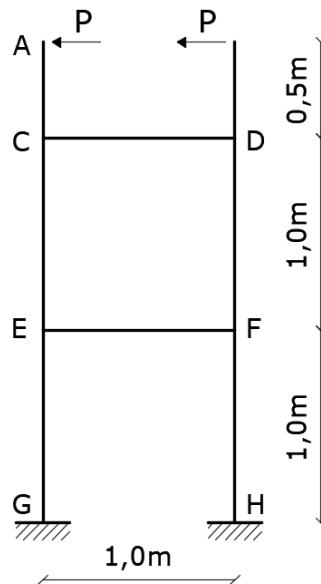


Considerando Si $H = 8 \text{ kN}$ y $L = 2 \text{ m}$, se pide:

- Calcular el desplazamiento del punto C.
- Obtener los diagramas de solicitudes de la estructura.
- Bosquejar la deformada de la estructura.

Ejercicio 4.9 (adicional)

La estructura de acero de la figura ($E=210 \text{ GPa}$) está conformada por perfiles PNI 18.



- Hallar reacciones y diagramas de solicitudes si $P = 15 \text{ kN}$.
- Bosquejar la deformada de la estructura.

Unidad temática 5

Estructuras tridimensionales de barras

5.1 Emparrillados

En esta sección se presentan de forma esquemática los conceptos más importantes para la determinación de desplazamientos y solicitudes en estructuras planas de barras, sometidas a fuerzas perpendiculares al plano de la estructura. Estas estructuras, tal como fue visto en la Sección 1.1.1, son llamadas estructuras planoespaciales o emparrillados.

5.1.1. Torsión

En cursos anteriores se abordó la teoría de torsión de Saint-Venant para vigas de sección transversal con doble eje de simetría. A continuación se enumeran algunas de las magnitudes y conceptos más importantes, utilizando el enfoque utilizado en (Wunderlich and Pilkey, 2002).

Sea una barra con un extremo empotrado sometida a un momento torsor M_t se verifica:

$$M_t = GJ\Theta \quad (5.1)$$

donde G es el módulo de corte, dado por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (5.2)$$

Θ es el barrenado dado por el cociente entre el ángulo de giro del extremo libre y el largo $\Theta = \theta/\ell$, y J es la inercia torsional de la sección dada por:

$$J = \int_A \psi_P dA. \quad (5.3)$$

En esta última expresión ψ_P representa la función de Prandtl, dada por la solución del siguiente problema en derivadas parciales:

$$\begin{cases} \Delta \psi_P = -2 & \text{en } A \\ \psi_P = 0 & \text{en } \partial A \end{cases} \quad (5.4)$$

Si se considera un elemento con giros nodales θ_1 y θ_2 se tiene:

$$M_t = GJ \frac{\theta_2 - \theta_1}{\ell} \quad (5.5)$$

Sección 5.1. Emparrillados**86**

Por otra parte la energía de deformación torsional está dada por:

$$\Pi_{int,torsión}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \frac{GJ}{\ell} (\theta_2 - \theta_1)^2. \quad (5.6)$$

A partir de la relación entre ψ_P y las tensiones rasantes se puede calcular también el valor de la tensión rasante máxima debida a torsión, dado por:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (5.7)$$

donde W_t es el módulo resistente torsional.

5.1.2. Barras sometidas a flexo-torsión

En esta sección se presentan las ecuaciones que relacionan los desplazamientos y fuerzas para barras sometidas a flexión y torsión. Esto puede ser considerado como una extensión de lo que se vió en la Sección 3.1.3.

Se considera un elemento de barra de largo ℓ con inercia flexional I_z e inercia torsional J . Las fuerzas nodales consideradas son: por una parte fuerzas y flectores tales que la flexión se produce en el plano formado por los vectores \mathbf{e}_x y \mathbf{e}_y , y por otra parte momentos torsionales tales que el vector director (regla de mano derecha) está orientado según el eje \mathbf{e}_x .

En general se considera que existe un sistema de coordenadas global x, y, z y el eje del elemento forma un ángulo α_y con el eje \mathbf{e}_x global tal como se muestra en la Figura 5.1. El ángulo α_y es medido positivo desde el eje \mathbf{e}_x global al local con la regla de la mano derecha según el eje $-\mathbf{e}_y$.

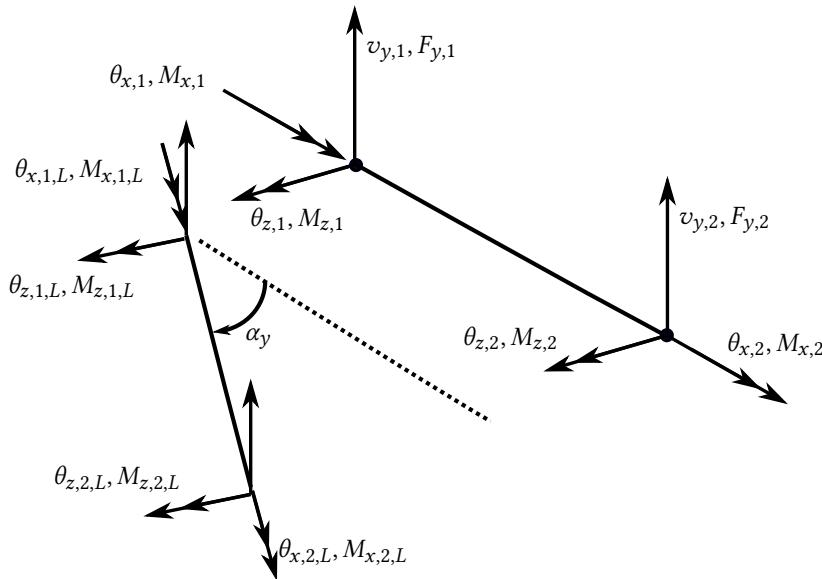


Figura 5.1: Esquema de elemento de barra a flexo-torsión. Sistemas de coordenadas locales (L) y coordenadas globales representados.

Sección 5.1. Emparrillados**87**

En la figura se encuentran representados tanto momentos como giros nodales, donde se considera que los giros y momentos se representan con la misma convención de signo.

Considerando que la barra pertenece al plano x, z se puede descomponer los vectores de momentos y giros en coordenadas locales en una base de coordenadas globales, de la forma:

$$M_{x,1,L} = \cos(\alpha_y)M_{x,1} + \sin(\alpha_y)M_{z,1} \quad (5.8)$$

$$M_{z,1,L} = -\sin(\alpha_y)M_{z,1} + \cos(\alpha_y)M_{x,1} \quad (5.9)$$

Considerando también la fuerza según y se tiene:

$$M_{x,1,L} = \cos(\alpha_y)M_{x,1} + \sin(\alpha_y)M_{z,1} \quad (5.10)$$

$$F_{y,1,L} = F_{y,1} \quad (5.11)$$

$$M_{z,1,L} = -\sin(\alpha_y)M_{z,1} + \cos(\alpha_y)M_{x,1} \quad (5.12)$$

De forma equivalente para los desplazamientos y giros se tiene:

$$\theta_{x,1,L} = \cos(\alpha_y)\theta_{x,1} + \sin(\alpha_y)\theta_{z,1} \quad (5.13)$$

$$v_{y,1,L} = v_{y,1} \quad (5.14)$$

$$\theta_{z,1,L} = -\sin(\alpha_y)\theta_{z,1} + \cos(\alpha_y)\theta_{x,1} \quad (5.15)$$

y expresiones equivalentes para el nodo 2.

Definiendo el vector de desplazamientos nodales en coordenadas globales:

$$\mathbf{u} = [\theta_{x,1} \quad v_{y,1} \quad \theta_{z,1} \quad \theta_{x,2} \quad v_{y,2} \quad \theta_{z,2}]^T \quad (5.16)$$

y el vector de desplazamientos nodales en coordenadas locales:

$$\mathbf{u}_L = [\theta_{x,1,L} \quad v_{y,1,L} \quad \theta_{z,1,L} \quad \theta_{x,2,L} \quad v_{y,2,L} \quad \theta_{z,2,L}]^T \quad (5.17)$$

se puede representar la relación entre desplazamientos en diferentes sistemas de coordenadas como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{u}_L \quad (5.18)$$

donde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_y) & 0 & -\sin(\alpha_y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_y) & 0 & -\sin(\alpha_y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Esta matriz de rotación puede ser obtenida también aplicando los conceptos de álgebra lineal de matriz de cambio de base.

La energía potencial de deformación total está dada por la suma de las energías potenciales debidas a torsión y flexión, las cuales pueden ser representadas en coordenadas locales

Sección 5.1. Emparrillados**88**

como:

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}_L) = \Pi_{int,\text{torsión}}(\theta_{x,1,L}, \theta_{x,2,L}) + \Pi_{int,\text{flexión}}(v_{y,1,L}, \theta_{z,1,L}, v_{y,2,L}, \theta_{z,2,L}) \quad (5.20)$$

donde $\Pi_{int,\text{flexión}}$ está dada por la Ecuación (3.97). La energía potencial de las fuerzas externas está dada por $\Pi_{ext}(\mathbf{u}_L) = -\mathbf{u}_L^T \mathbf{f}_L$ donde \mathbf{f}_L está dado por:

$$\mathbf{f}_L = [M_{x,1,L} \quad F_{y,1,L} \quad M_{z,1,L} \quad M_{x,2,L} \quad F_{y,2,L} \quad M_{z,2,L}]^T. \quad (5.21)$$

Utilizando el principio de mínima energía potencial total y aplicando las condiciones del primer teorema de Castiglano se tienen las siguientes cuatro condiciones para flexión:

$$\frac{\partial \Pi_{int,\text{flexión}}}{\partial v_{y,1,L}} = F_{y,1,L} \quad \frac{\partial \Pi_{int,\text{flexión}}}{\partial \theta_{z,1,L}} = M_{z,1,L} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \Pi_{int,\text{flexión}}}{\partial v_{y,2,L}} = F_{y,2,L} \quad \frac{\partial \Pi_{int,\text{flexión}}}{\partial \theta_{z,2,L}} = M_{z,2,L} \quad (5.23)$$

y las siguientes condiciones para torsión:

$$\frac{\partial \Pi_{int,\text{torsión}}}{\partial \theta_{x,1,L}} = M_{x,1,L} \quad \frac{\partial \Pi_{int,\text{torsión}}}{\partial \theta_{x,2,L}} = M_{x,2,L} \quad (5.24)$$

Sustituyendo las expresiones de las energías de deformación se obtiene que las condiciones de Castiglano son equivalentes al sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{K}_L \mathbf{u}_L = \mathbf{f}_L \quad (5.25)$$

donde la matriz \mathbf{K}_L es la matriz de rigidez en coordenadas locales, dada por:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_z}{\ell^3} & 6\frac{EI_z}{\ell^2} & 0 & -12\frac{EI_z}{\ell^3} & 6\frac{EI_z}{\ell^2} \\ 0 & 6\frac{EI_z}{\ell^2} & 4\frac{EI_z}{\ell} & 0 & -6\frac{EI_z}{\ell^2} & 2\frac{EI_z}{\ell} \\ -\frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_z}{\ell^3} & -6\frac{EI_z}{\ell^2} & 0 & 12\frac{EI_z}{\ell^3} & -6\frac{EI_z}{\ell^2} \\ 0 & 6\frac{EI_z}{\ell^2} & 2\frac{EI_z}{\ell} & 0 & -6\frac{EI_z}{\ell^2} & 4\frac{EI_z}{\ell} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Utilizando que $\mathbf{u}_L = \mathbf{R}^T \mathbf{u}$ y que $\mathbf{f}_L = \mathbf{R}^T \mathbf{f}$ se obtiene el sistema en coordenadas globales:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (5.27)$$

donde la matriz de rigidez \mathbf{K} es la matriz de rigidez en coordenadas globales dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{K}_L\mathbf{R}^T. \quad (5.28)$$

Para un emparrillado formado por n elementos de barra se debe calcular cada matriz en coordenadas globales y realizar el ensamblado de forma similar a como es realizado para elementos de reticulados o póticos.

5.1.3. Ejemplo

Sea la estructura mostrada en la Figura 5.2, donde todas las barras tienen inercia flexional I e inercia torsional J a determinar y están formadas por un material de módulo de Young E . Se considera que $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$, $\ell = 2$ m, la sección transversal es cuadrada de lado 5 cm. Se desea calcular los desplazamientos nodales para una carga puntual $P = 4$ kN.

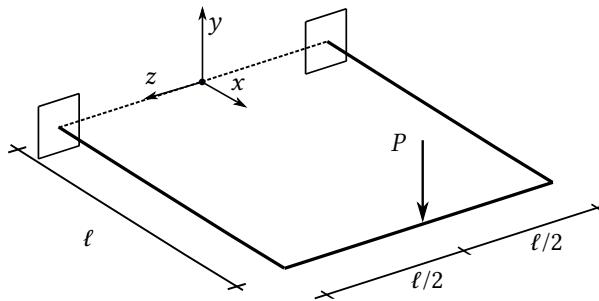


Figura 5.2: Esquema básico de cálculo de ejemplo de emparrillado.

La barra con la carga puntual aplicada tiene una geometría y condiciones de vínculo simétricos por lo que el giro θ_x debe ser nulo. Considerando esta condición de simetría y dividiendo la estructura en dos mitades, se obtiene el esquema básico simplificado que se muestra en la Figura 5.3.

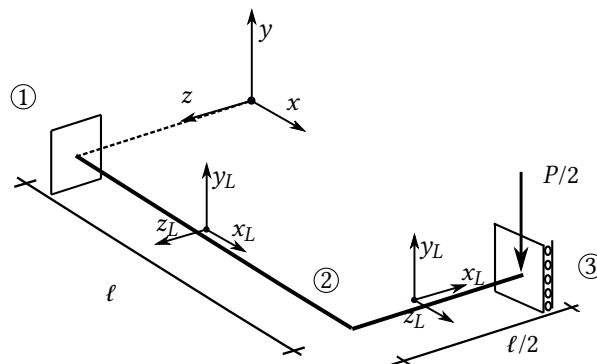


Figura 5.3: Esquema de mitad de estructura de ejemplo de emparrillado.

Utilizando la numeración definida, se establece la conectividad de los elementos como Elemento 1: del nodo 1 al 2 y Elemento 2: del nodos 2 al 3. Los sistemas de coordenadas

locales considerados se muestran en la figura.

Para el cálculo de las matrices de rigidez cada elemento se usa la expresión de la Ecuación (5.28).

Para el elemento 1, \mathbf{K}_L está dada por la expresión de la ecuación (5.26) y \mathbf{R} es la matriz identidad de tamaño 6×6 .

Para el elemento 2, \mathbf{K}_L es calculada considerando el largo $\ell/2$ en la ecuación (5.26) y para la matriz de rotación se considera $\alpha_y = -\pi/2$ en la ecuación (5.18) por lo tanto

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

El módulo de corte es $G = 80.7$ GPa. La inercia flexional es $I = 5.208 \times 10^{-7}$ m⁴, la inercia flexional $J = 0.141(0.05)^4 = 8.81 \times 10^{-7}$ m⁴.

Los desplazamientos para el nodo 2 son:

$$\theta_{x,2} = -0.022154 \quad v_2 = -0.048762 \quad \theta_{z,2} = -0.036571$$

Y para el nodo 3 son

$$v_3 = -0.083107 \quad \theta_{z,3} = -0.036571$$

5.1.4. Implementación computacional

En el Código B.8 en la Sección B.3 se presenta una implementación en GNU-Octave del método descrito y su aplicación para la resolución del ejemplo visto. El código ha recibido aportes y modificaciones de estudiantes del curso 2019, los nombres de los autores de los aportes fueron agregados al código y los cambios están visibles en el repositorio¹

5.2 Estructuras tridimensionales de barras

En el caso de estructuras tridimensionales, los elementos de barra pueden estar sometidos a esfuerzos de fuerzas y momentos que producen 6 solicitudes internas: directa, torsión, 2 flectores y 2 cortantes (correspondientes a la flexión en los dos planos definidos por los ejes de coordenadas locales transversales).

5.2.1. Elemento de viga sometido a flexo compresión esviada

El caso de flexión esviada corresponde a vigas sometidas a momentos flectores con componentes no nulas en los dos ejes de coordenadas locales transversales (siendo estos los ejes de los momentos de inercia principales).

El desarrollo de las ecuaciones para vigas sometidas a esfuerzos axiales y transversales es equivalente al presentado en la Sección 3.1, considerando que los giros de las secciones son

¹<https://gitlab.fing.edu.uy/jorgepz/emparrillados/commits/master>.

Sección 5.3. Ejercicios**91**

no nulos tanto en el eje y como el eje z , esto es $\theta_z \neq 0$ y $\theta_y \neq 0$. Al mismo tiempo se tiene que ambos desplazamientos transversales v y w son no nulos.

También se mantiene la hipótesis de que caras planas permanecen planas, por lo que el desplazamiento de un punto ubicado en un punto con coordenadas x, y, z puede ser escrito como:

$$u(x, y, z) = u_G(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x). \quad (5.30)$$

Realizando un desarrollo equivalente al del caso plano se puede obtener las relaciones

$$\theta_z(x) = \frac{\partial v}{\partial x}(x), \quad \theta_y(x) = -\frac{\partial w}{\partial x}(x), \quad (5.31)$$

y la expresión de la tensión axial:

$$\sigma(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} - y \frac{M_z(x)}{I_z} + z \frac{M_y(x)}{I_y}$$

(5.32)

En clase se presentará el razonamiento utilizado en este desarrollo así como también se verán ejemplos prácticos.

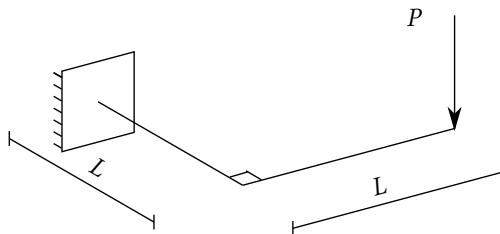
5.2.2. Elemento de pórtico tridimensional

En clase se presentará brevemente el elemento de barra tridimensional, el cual es considerado sometido a torsión, flexión en ambos planos (es decir *flexión esviada*) y directa. Este es el elemento de viga que se encuentra implementado en el código ONSAS, utilizado en clases de teórico para resolver problemas de pórtico 3D.

5.3 Ejercicios

Ejercicio 5.1

Sea la estructura mostrada en la figura, construida con caños de acero ($E = 210$ GPa y $\nu = 0.3$) de $\phi_{ext} = 100$ mm y $t = 8$ mm.



Considerando $P = 4$ kN y $L = 1.0$ m, se pide:

- Calcular los desplazamientos y giros nodales y trazar diagramas de solicitudes usando:
 - Equilibrios y valores de deflexiones y giros en ménsulas.
 - Ánalysis matricial.

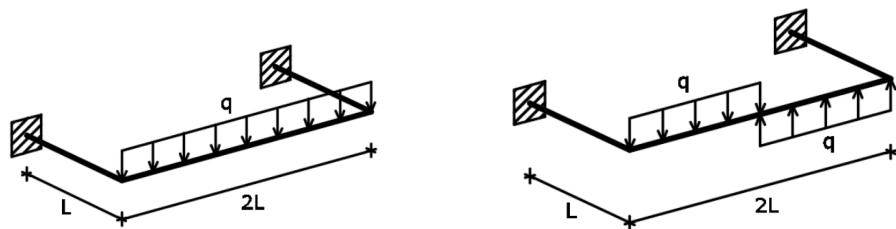
Sección 5.3. Ejercicios

92

- b) Comparar los resultados hallados en a) con los obtenidos mediante:
1. una versión modificada del código [B.8](#)
 2. alguna de las herramientas computacionales presentadas en el curso

Ejercicio 5.2

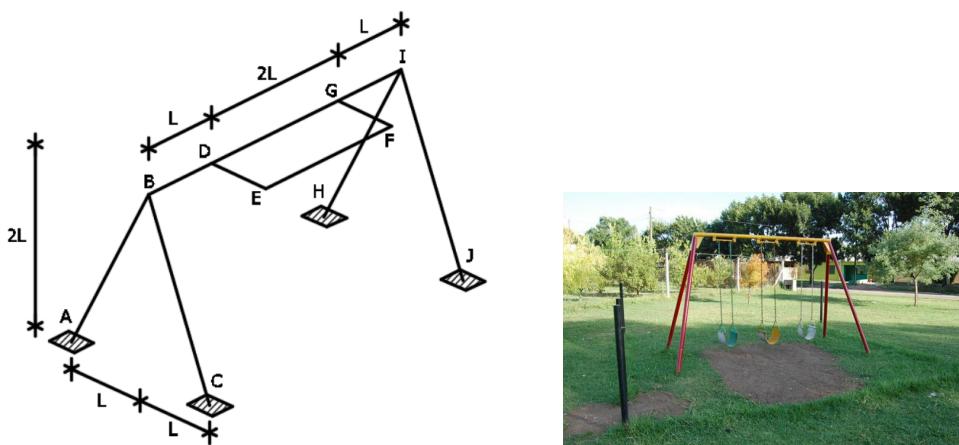
Se construye un emparrillado con caños de acero ($E=210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) de $\phi_{ext} = 100 \text{ mm}$ y $t = 8 \text{ mm}$, sometido a dos estados de carga mostrados en las figuras.



Considerando $q = 2 \text{ kN/m}$ y $L = 1 \text{ m}$, se pide:

- a) Resolver mediante el método de análisis matricial, considerando la simetría o antisimetría del problema para trabajar con una cantidad de barras reducida.
- b) Trazar diagramas de solicitudes y comparar con los obtenidos con un modelo computacional de la estructura.

El emparrillado analizado es ahora usado como parte de la estructura de una hamaca con su respectivo esquema básico de cálculo como se muestra en las figuras. Las cargas q consideradas en las partes anteriores se aplican únicamente en la barra EF.



Sección 5.3. Ejercicios

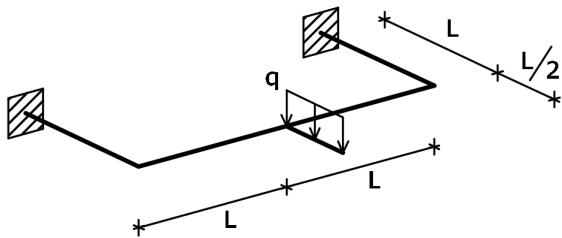
93

Considerando que todas las barras están compuestas por el mismo tubular que el emparrillado, se pide:

- c) Modelar la estructura con un programa computacional y comparar los resultados con los obtenidos en las partes anteriores en la zona del emparrillado.

Ejercicio 5.3

Sea un emparrillado modificado con respecto al del Ejercicio 2, en el cual se agrega una barra adicional, que está sometida a una carga $q = 2 \text{ kN/m}$, como se muestra en la figura.

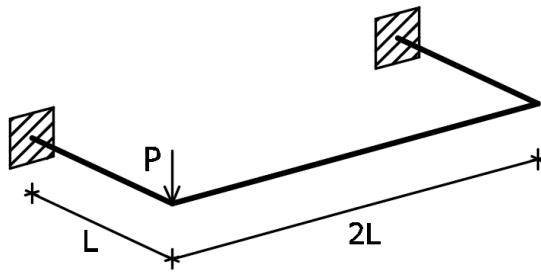


Se pide:

- Resolver mediante análisis matricial. Trazar diagramas de solicitudes.
- Comparar resultados obtenidos en a) con los obtenidos utilizando alguna herramienta computacional.

Ejercicio 5.4

Sea la estructura mostrada en la figura, construida con barras de acero ($E=210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) de sección circular maciza de diámetro $\phi_{ext} = 105 \text{ mm}$.



Considerando $P=4 \text{ kN}$ y $L=3.0 \text{ m}$, se pide:

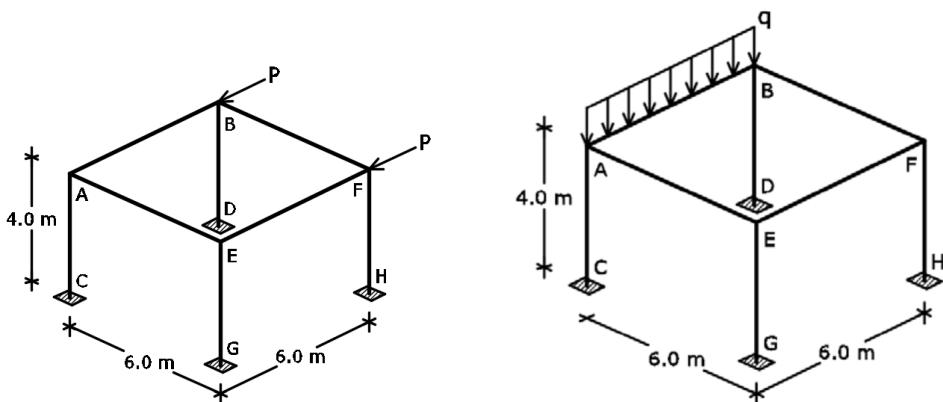
- Modificar el código presentado en clase para resolución de emparrillados y obtener desplazamientos y giros nodales. Con los resultados obtenidos trazar diagramas de solicitudes.
- Utilizar algún programa computacional para resolver el problema y verificar los resultados.
- Repetir b) descomponiendo en una estructura simétrica y otra antisimétrica.

Sección 5.3. Ejercicios

94

Ejercicio 5.5

La estructura tridimensional de hormigón ($E = 30 \text{ GPa}$ y $\nu = 0.2$) mostrada en las está conformada por pilares de sección cuadrada $30 \times 30 \text{ cm}$ y vigas de $b = 20 \text{ cm}$ y $h = 50 \text{ cm}$.



Para el caso de la estructura a la izquierda se considera $P = 20 \text{ kN}$ y se pide:

- Estudiar los pórticos planos ABCD y EFGH independientes del resto de la estructura en forma analítica.
- Modelar la estructura completa en un programa computacional y comparar los resultados con los hallados en a).

Para el caso de la estructura a la derecha se considera $q = 10 \text{ kN/m}$ sobre la viga AB y se pide:

- Indicar qué modelo plano realizaría para estudiar el pórtico ABCD considerando que los puntos E y F están fijos. Obtener computacionalmente resultados de ese modelo.
- Analizar los resultados de modelar la estructura tridimensional y comparar con los obtenidos en c).

Ejercicio 5.6

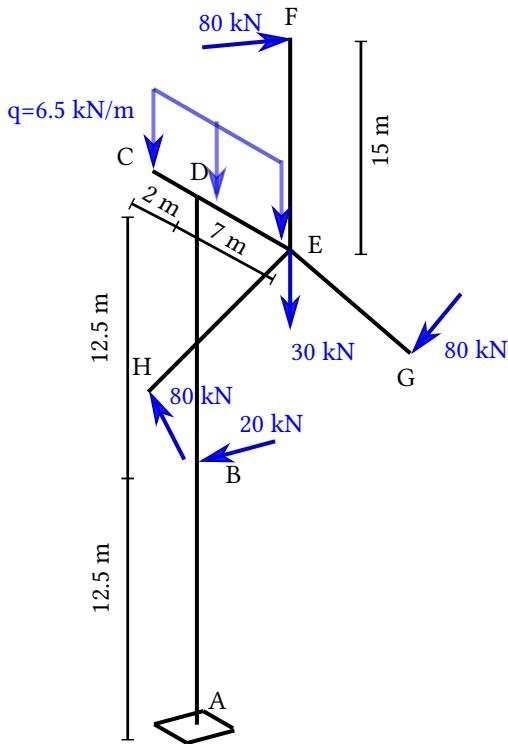
Se desea estudiar un aerogenerador cuyas dimensiones se muestran en la figura a la izquierda. Todas las palas (o aspas) tienen el mismo largo y tienen mismo ángulo de apertura 120° . En la figura a la derecha se muestra un estado de cargas estáticas idealizado, de interés para el diseño. Las fuerzas actuantes son:

- Una fuerza puntual de 80 kN sobre cada punto: F, G y H, representando la fuerza del viento sobre las aspas.
- Una fuerza del viento sobre la torre que se ha simplificado como una fuerza en B horizontal de 20 kN .
- El peso de las aspas de 30 kN que se aplica como una carga puntual en el punto E.
- La carga distribuida de 6.5 kN/m que representa el peso de la turbina.

Sección 5.3. Ejercicios

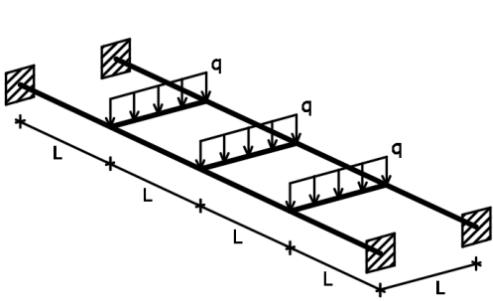
95

Se pide: calcular las reacciones en A y los diagramas de solicitudes.



Ejercicio 5.7

Se desea analizar la estructura de un pasamanos considerando un correspondiente Esquema Básico de Cálculo como se muestra en las figuras.



La estructura está compuesta por tubulares de acero ($E = 210 \text{ GPa}$ y $\nu = 0.3$) de $\phi_{ext} = 80 \text{ mm}$ y $t = 6 \text{ mm}$. Sobre las barras transversales actúa una carga $q=3 \text{ kN/m}$ y $L=1.0 \text{ m}$. Se pide:

- Considerar que las barras no presentan rigidez a torsión y calcular analíticamente las solicitudes en cada una de las barras.

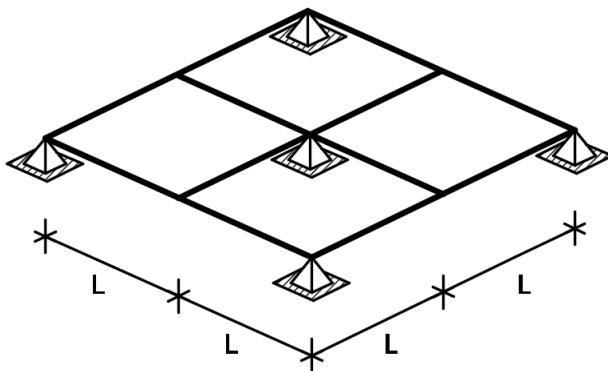
Sección 5.3. Ejercicios

96

- b) Considerar la rigidez a torsión en las barras y obtener resultados de modelar computacionalmente la estructura.
- c) Comparar resultados obtenidos en a) y b).

Ejercicio 5.8 (adicional)

El emparrillado de la figura simula el entrepiso de una edificación.

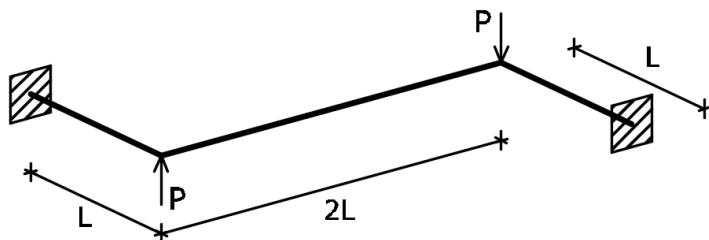


Considerar que todas las vigas son de hormigón ($E=30 \text{ GPa}$, $\nu = 0.2$) y su sección es $30 \times 80 \text{ cm}$. Las mismas están cargadas con una carga $q=15 \text{ kN/m}$ y $L=5.0 \text{ m}$.

- a) Modelar la estructura computacionalmente. Analizar el comportamiento de las solicitudes y la deformada.
- b) Si se desprecia la rigidez a torsión de las vigas, ¿cómo se ven afectadas las solicitudes y deformaciones de las vigas? Analizar.

Ejercicio 5.9 (adicional)

La estructura planoespacial mostrada en la figura está formada por barras de misma sección y longitud que el emparrillado del Ejercicio 2.



Se pide: trazar diagramas de solicitudes para $P = 10 \text{ kN}$.

Unidad temática 6

Análisis Seccional

En esta unidad se presentan conceptos vinculados al análisis de tensiones en secciones transversales en vigas y/o columnas.

En la Sección 6.1 se desarrolla y aplica un método práctico para el cálculo del Núcleo Central en secciones de cualquier forma. Parte del desarrollo es similar al usado en ([Mofid et al., 2001](#)) mientras que otra parte fue desarrollada por los autores. Un desarrollo anterior se puede encontrar en el capítulo VIII de ([Timoshenko, 1953](#)). En la Sección 6.1.2 se presenta el análisis seccional para materiales que no soportan tracción, basado principalmente en el apartado 52 de ([Timoshenko, 1953](#)) con una notación similar a la utilizada en los materiales de *Resistencia de Materiales II* elaborados principalmente por el Prof. Atilio Morquio.

6.1 Análisis Lineal de Secciones

En esta sección se presentan dos conceptos básicos en el análisis lineal de tensiones en secciones de elementos de viga: Línea Neutra (presentado en la Sección 6.1.1) y Núcleo Central (presentado en la Sección 6.1.2).

6.1.1. Línea neutra

Se presenta a continuación una definición conceptual de Línea Neutra (LN).

Definición: Línea Neutra

Sea una sección transversal de una viga sometida a esfuerzos de flexión, se define la **Línea Neutra** como el conjunto de puntos con **tensión axial nula**.

La definición en términos de la función tensión puede ser enunciada como, que dada una sección transversal ubicada en un punto de coordenada x , la Línea Neutra es el conjunto de puntos (y, z) que verifican: $\sigma(x, y, z) = 0$.

Existe una correspondencia biunívoca entre cada línea neutra y un punto de aplicación de la carga. A continuación se muestran los desarrollos para obtener la LN a partir del punto de aplicación y luego el desarrollo inverso.

Determinación de la Línea Neutra a partir del punto de aplicación

Se considera una viga con un corte en una sección transversal en la posición x , y una carga N aplicada en un punto de coordenadas (y_A, z_A) como se muestra en la [Figura 6.1](#).

Sección 6.1. Análisis Lineal de Secciones

98

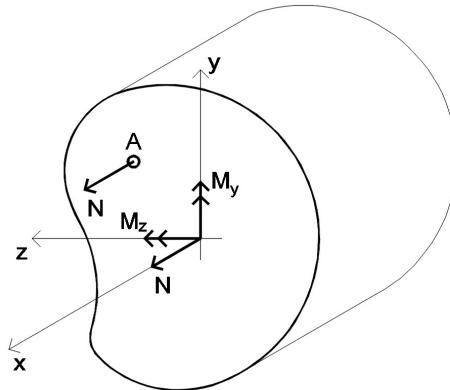


Figura 6.1: Esquema de sección y sistema de coordenadas considerado.

Esta carga puede estar asociada tanto a cargas externas como a cargas internas producidas por el resto del elemento de viga. Se calcula el torsor equivalente en el baricentro de la sección, esto es, fuerza y momentos equivalentes:

$$N(x) = N, \quad M_z(x) = -Ny_A \quad \text{y} \quad M_y(x) = Nz_A. \quad (6.1)$$

Estas tres solicitudes representan las solicitudes internas correspondientes.

Sustituyendo las expresiones de las solicitudes en la Ecuación (5.32) y desarrollando se obtiene:

$$\sigma(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} \left(1 + \frac{y_A}{\rho_z^2} y + \frac{z_A}{\rho_y^2} z \right), \quad (6.2)$$

donde fueron introducidas dos propiedades geométricas, llamadas radio de giro: $\rho_y = \sqrt{I_y/A}$ y $\rho_z = \sqrt{I_z/A}$. El desarrollo completo de este paso será visto en clase.

La condición de pertenencia a la LN es equivalente a anular la expresión de tensión axial. Por lo tanto, dado un punto de aplicación (y_A, z_A), se demuestra que la ecuación de la LN es:

$$\boxed{1 + \frac{y_A}{\rho_z^2} y + \frac{z_A}{\rho_y^2} z = 0} \quad (6.3)$$

Se observa que la recta está contenida en el *plano yz* y no pasa por el origen, esto se debe a la existencia de una fuerza de directa aplicada. En clase se discutirá con mayor detalle sobre esto.

Determinación de punto de aplicación a partir de la Línea Neutra

En esta sección se considera el caso en el cual se tiene una LN y se desea encontrar el punto de aplicación de la carga. Dada la ecuación de una recta genérica que no pasa por el origen:

$$ay + bz + c = 0,$$

y usando que ($c \neq 0$) se obtiene la expresión:

$$\frac{a}{c}y + \frac{b}{c}z + 1 = 0. \quad (6.4)$$

Igualando los coeficientes de los polinomios de las expresión de las Ecuaciones (6.3) y (6.4) se tiene:

$$\boxed{y_A = \frac{a}{c}\rho_z^2 \quad z_A = \frac{b}{c}\rho_y^2} \quad (6.5)$$

Dado que hay directa aplicada la recta que define la LN no pasa por el origen, por lo tanto se cumple que $c \neq 0$.

6.1.2. Núcleo central

Considerando una sección transversal cualquiera, se presenta una definición conceptual de Núcleo Central.

Definición: Núcleo central

Se denomina Núcleo Central (NC) al lugar geométrico de los puntos del plano de la sección en los cuales una fuerza puntual de tracción (o compresión) aplicada generaría que toda la sección sea traccionada (o comprimida).

Esto es equivalente a decir que, para cualquier punto de aplicación perteneciente al NC, la línea neutra correspondiente no corta a la sección.

Cálculo de NC para secciones con borde suave

El enfoque utilizado para el cálculo del NC es similar al utilizado en (Mofid et al., 2001).

Se considera que el contorno de la sección transversal está dado por una curva paramétrica *regular y suave*.

$$C \left\{ \begin{array}{l} y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right. \quad (6.6)$$

donde las coordenadas y y z están medidas en el sistema de coordenadas locales.

La condición de regularidad implica que para todo parámetro t se tiene que o bien $\dot{z}(t) \neq 0$ o $\dot{y}(t) \neq 0$, pero en ningún caso se cumple que $\dot{y}(t) = \dot{z}(t) = 0$. La condición de suavidad implica que tanto $y(t)$ como $z(t)$ con funciones con derivada primera continua, es decir: de tipo C^1 .

En la Figura 6.2 se muestra un esquema de la sección transversal. En cada punto del contorno se puede definir una LN tangente, la cual se corresponderá con un punto de aplicación.

Se desea obtener la curva paramétrica de los puntos de aplicación $(y_A(t), z_A(t))$, asociadas a las líneas neutras tangentes a la sección transversal en cada punto $y(t), z(t)$ y que no cortan a la sección. Por lo tanto, para dichos puntos de aplicación, existe al menos un punto del contorno de la sección correspondiente a la LN en que $\sigma(x, y(t), z(t)) = 0$. Utilizando la

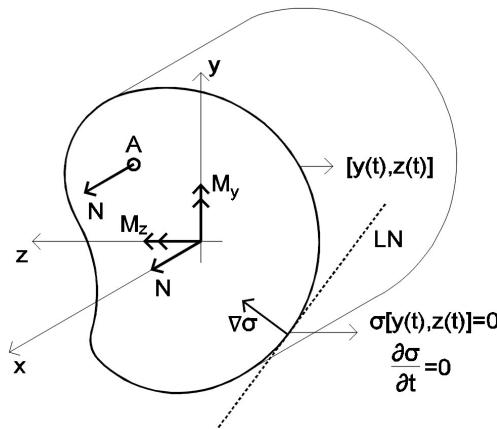


Figura 6.2: Esquema de sección y sistema de coordenadas considerado.

expresión de la Ecuación (6.3) se tiene:

$$1 + \frac{y_A(t)}{\rho_z^2} y(t) + \frac{z_A(t)}{\rho_y^2} z(t) = 0 \quad (6.7)$$

Se ha encontrado entonces un punto de aplicación ($y_A(t)$, $z_A(t)$) en el que la expresión de tensión axial para los distintos puntos del contorno es,

$$\sigma(x, y(\hat{t}), z(\hat{t})) = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_A(t)}{\rho_z^2} y(\hat{t}) + \frac{z_A(t)}{\rho_y^2} z(\hat{t}) \right) = 0 \quad (6.8)$$

Donde \hat{t} es la variable que permite recorrer el contorno de la sección.

Los puntos del contorno de la sección, pertenecientes a la LN tangente a la sección y que no cortan a la misma, donde $\sigma(x, y(\hat{t}), z(\hat{t})) = 0$, cumplen además que son puntos críticos, mínimo si $N(x) > 0$ y máximo si $N(x) < 0$. Imponiendo esta condición se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}}(x, y(\hat{t} = t), z(\hat{t} = t)) = 0 = \frac{y_A(t)}{\rho_z^2} \dot{y}(t) + \frac{z_A(t)}{\rho_y^2} \dot{z}(t) \quad (6.9)$$

Combinando la Ecuación (6.8) con la Ecuación (6.9) y usando que C es regular y no pasa por el origen, se obtiene la curva paramétrica del borde del núcleo central:

$$y_A(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{\dot{z}(t)y(t) - \dot{y}(t)z(t)} \rho_z^2 \quad (6.10)$$

$$z_A(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{z}(t)y(t) - \dot{y}(t)z(t)} \rho_y^2 \quad (6.11)$$

Este planteo será desarrollado con mayor detalle en clase.

Cálculo de NC para secciones con borde no suave

En la Figura 6.3 se muestra el esquema, en el *plano yz*, de una sección con borde no suave para la cual, en el punto *R* existe una discontinuidad en el vector tangente al borde. Esto provoca que las Ecuaciones (6.10) y (6.11) pierdan su validez.

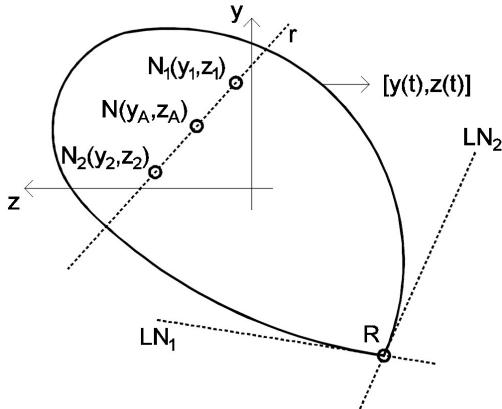


Figura 6.3: Esquema de sección en el plano.

Se conoce que los puntos de aplicación (y_1, z_1) y (y_2, z_2) pertenecen al NC y tienen asociadas las líneas neutras LN_1 y LN_2 respectivamente. La unión de los puntos de aplicación de las fuerzas de directa N_1 y N_2 forman una recta r , que se puede expresar como:

$$r : z - z_1 = \frac{(z_1 - z_2)}{(y_1 - y_2)}(y - y_1).$$

Desarrollando, factorizando y normalizando el término independiente, se obtiene:

$$\frac{y(z_1 - z_2) - z(y_1 - y_2)}{z_1 y_2 - y_1 z_2} = 1 \quad (6.12)$$

Se considera un nuevo punto de aplicación (y_A, z_A) perteneciente a la recta r , por lo tanto para dicho punto se cumple que,

$$\frac{y_A(z_1 - z_2) - z_A(y_1 - y_2)}{z_1 y_2 - y_1 z_2} = 1, \quad (6.13)$$

o también

$$\frac{z_A y_2 - y_A z_2}{z_1 y_2 - y_1 z_2} + \frac{y_A z_1 - z_A y_1}{z_1 y_2 - y_1 z_2} = 1, \quad (6.14)$$

Por otra parte, la fuerza de directa N actuando en este punto puede ser descompuesta en dos fuerzas de directa aplicadas simultáneamente en (y_1, z_1) y (y_2, z_2) respectivamente, se proponen las siguientes expresiones para dichas fuerzas,

$$N_1 = N \frac{z_A y_2 - y_A z_2}{z_1 y_2 - y_1 z_2} \quad N_2 = N \frac{y_A z_1 - z_A y_1}{z_1 y_2 - y_1 z_2} \quad (6.15)$$

Sección 6.1. Análisis Lineal de Secciones**102**

Se demuestra que estas dos fuerzas de directa actuando simultáneamente tienen un torsor equivalente al de la fuerza N aplicada en (y_A, z_A) .

La equivalencia en el momento M_y es

$$M_y = N_1 z_1 + N_2 z_2 = Nz_A, \quad (6.16)$$

sustituyendo las expresiones de N_1 y N_2 y desarrollando se obtiene el resultado esperado. La equivalencia del momento M_z es,

$$M_z = -(N_1 y_1 + N_2 y_2) = -Ny_A, \quad (6.17)$$

que es demostrada de forma análoga a la de M_y . Y finalmente la equivalencia de directas es:

$$N_1 + N_2 = N \frac{y_A(z_1 - z_2) - z_A(y_1 - y_2)}{z_1 y_2 - y_1 z_2} = N, \quad (6.18)$$

que es demostrada usando directamente la Ecuación 6.14.

Se tiene entonces que la fuerza de directa N se puede escribir como una combinación lineal de las fuerzas de directa N_1 y N_2 de la forma:

$$N = N_1 + N_2 = N(\lambda_1 + \lambda_2)$$

donde λ_1 y λ_2 son multiplicadores, que determinan la LN para la fuerza de directa N como una combinación de las LN de las fuerzas de directa N_1 y N_2 , de la siguiente manera:

$$\lambda_1 = \frac{z_A y_2 - y_A z_2}{z_1 y_2 - y_1 z_2} \quad \lambda_2 = \frac{y_A z_1 - z_A y_1}{z_1 y_2 - y_1 z_2} \quad (6.19)$$

Tanto N_1 aplicada en (y_1, z_1) como N_2 aplicada en (y_2, z_2) producen tensiones axiales nulas en R ($\sigma = 0$), por lo tanto la combinación lineal de ambas fuerzas de directa también produce tensiones axiales nulas en R . Lo anterior implica que si N es aplicada en (y_A, z_A) la LN correspondiente pasa por R .

Para terminar de confirmar que los puntos A en el segmento pertenecen al NC, es necesario mostrar que el haz de rectas LN definidas por toda carga aplicada en el segmento 1-2 es un haz que no corta la sección y es en particular el haz de rectas mostrado en la Figura 6.4.

Para mostrar esto se considera la función de tensiones correspondiente a la aplicación de N en A :

$$\sigma = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_A}{\rho_z^2} y + \frac{z_A}{\rho_y^2} z \right). \quad (6.20)$$

El vector gradiente es perpendicular a la LN y está dado por

$$\nabla \sigma = \frac{N}{A} \begin{bmatrix} \frac{y_A}{\rho_z^2} \\ \frac{z_A}{\rho_y^2} \end{bmatrix}$$

Usando que

$$y_A = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \quad y \quad z_A = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2,$$

Sección 6.1. Análisis Lineal de Secciones

103

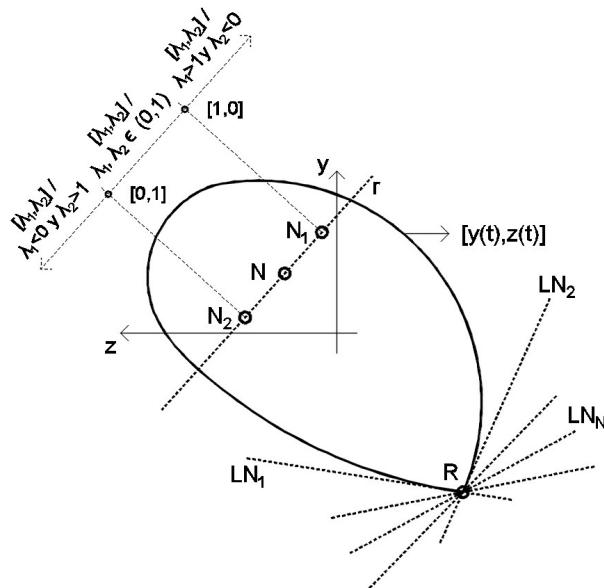


Figura 6.4: Esquema de sección en el plano.

y sustituyendo en la expresión del gradiente de σ se tiene

$$\nabla\sigma = \frac{N}{A} \left(\lambda_1 \begin{bmatrix} \frac{y_1}{\rho_z^2} \\ \frac{z_1}{\rho_y^2} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \frac{y_2}{\rho_z^2} \\ \frac{z_2}{\rho_y^2} \end{bmatrix} \right) = \lambda_1 \frac{N}{A} \begin{bmatrix} \frac{y_1}{\rho_z^2} \\ \frac{z_1}{\rho_y^2} \end{bmatrix} + \lambda_2 \frac{N}{A} \begin{bmatrix} \frac{y_2}{\rho_z^2} \\ \frac{z_2}{\rho_y^2} \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Por otra parte, se puede demostrar que si el punto A está en el segmento 1-2, los valores λ_1 y λ_2 son ambos positivos. Usando esto en la Ecuación (6.21), se ve que los vectores gradiente de tensión (perpendiculares a las LN_N de la Figura 6.4), pueden ser escritos como combinación de los vectores fijos

$$\frac{N}{A} \begin{bmatrix} \frac{y_1}{\rho_z^2} \\ \frac{z_1}{\rho_y^2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{N}{A} \begin{bmatrix} \frac{y_2}{\rho_z^2} \\ \frac{z_2}{\rho_y^2} \end{bmatrix}.$$

con multiplicadores positivos λ_1 y λ_2 . Esto permite asegurar que todos los vectores gradiente estarán dentro de lo que se llama cono convexo¹, y por lo tanto, dada la convexidad de la sección, se garantiza de que el haz de rectas no corta a la sección.

6.1.3. Ejemplos

Sección elíptica

En la Figura 6.5a se tiene una sección regular de forma elíptica cuyo contorno responde a la siguiente curva paramétrica:

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_cone

$$C \begin{cases} y(t) = A \cos(t) & \dot{y}(t) = -A \sin(t) \\ z(t) = B \sin(t) & \dot{z}(t) = B \cos(t) \end{cases} \quad (6.22)$$

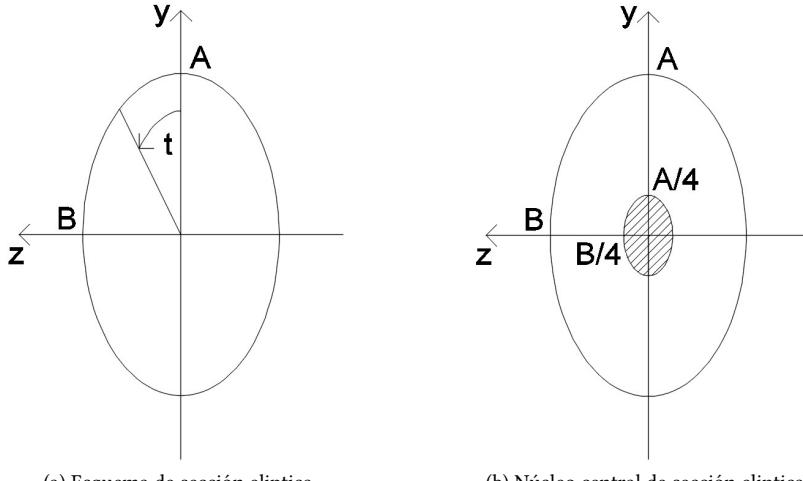


Figura 6.5: Núcleo Central Sección Elíptica.

Utilizando la Ecuación (6.10) y la Ecuación (6.11) se obtiene la curva paramétrica que describe al NC y que se indica en la Figura 6.5b.

$$y_A(t) = -\frac{A}{4} \cos(t) \quad (6.23)$$

$$z_A(t) = -\frac{B}{4} \sin(t) \quad (6.24)$$

Para el caso particular de una sección circular de radio R se tiene que $A = B = R$, por lo tanto la curva paramétrica que describe al NC de una sección circular es:

$$y_A(t) = -\frac{R}{4} \cos(t) \quad (6.25)$$

$$z_A(t) = -\frac{R}{4} \sin(t) \quad (6.26)$$

Sección rectangular

En la Figura 6.6a se tiene una sección de forma rectangular de ancho a y alto b . Se plantea la curva paramétrica correspondiente al lado superior de la sección como:

$$C \begin{cases} y(t) = b/2 & \dot{y}(t) = 0 \\ z(t) = t & \dot{z}(t) = 1 \end{cases} \quad (6.27)$$

Utilizando la Ecuación (6.10) y la Ecuación (6.11) se obtiene la curva paramétrica que

Sección 6.2. Análisis No Lineal de Secciones

105

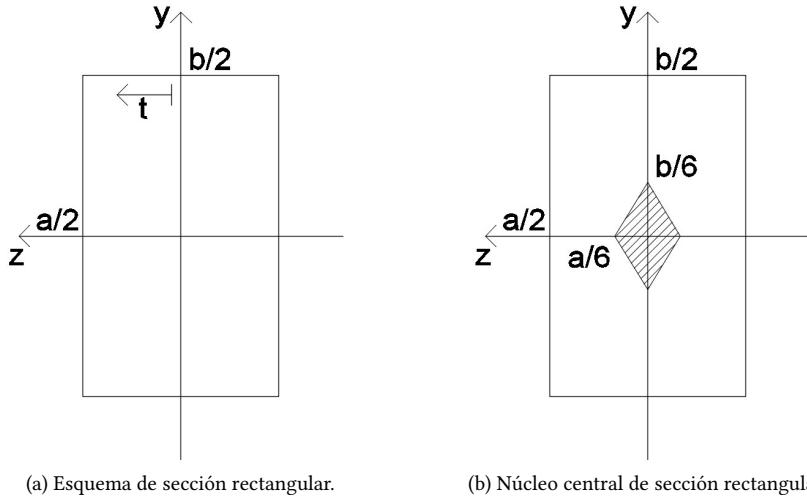


Figura 6.6: Núcleo Central Sección Rectangular.

describe al NC para el lado analizado,

$$y_A(t) = -b/6 \quad (6.28)$$

$$z_A(t) = 0 \quad (6.29)$$

Se observa que para el lado de la sección analizado, según lo esperado, se obtuvo un único punto de aplicación que describe dicho lado y que corresponde con la línea neutra para dicho punto de aplicación. Realizando un estudio análogo para cada lado, se obtienen los correspondientes puntos de aplicación que coinciden con los vértices del rombo indicado en la Figura 6.6b.

Por otra parte, utilizando la propiedad demostrada para secciones no regulares, se tiene que los tramos de rectas que unen los puntos antes determinados pertenecen al NC. Por lo tanto, para una sección rectangular se obtiene el NC que se indica en la Figura 6.6b.

Se observa que para determinar el NC en secciones no suaves, puede resultar conveniente determinar los puntos de aplicación que generan LN tangentes a la sección, en los puntos de discontinuidad de la misma, y utilizando la propiedad demostrada unir estos puntos mediante una recta.

6.2 Análisis No Lineal de Secciones

En esta sección se presentan los conceptos básicos en el análisis no lineal de tensiones en secciones, con particular interés en aquellos materiales que no soportan tracciones.

A partir de lo visto en la Sección 6.1.2 se conoce que, si se tiene una fuerza de directa en un punto de aplicación fuera del núcleo central, la línea neutra corta a la sección, teniendo una zona comprimida y otra traccionada. En el caso de materiales sin resistencia a tracción, como hormigón, mampostería o fundaciones directas, el análisis no lineal de tensiones adquiere

relevancia.

6.2.1. Materiales que no soportan tracción

Se considera el caso, muy frecuente en la práctica, de sección simétrica y con el punto de aplicación de la fuerza de directa perteneciente al eje de simetría ($M_z = 0$). Por otra parte se supondrá nula la tensión en la zona traccionada, y una relación lineal entre tensiones y deformaciones para la zona comprimida como muestra la Figura 6.7. Lo anterior implica que para la determinación del eje neutro no son válidas las ecuaciones obtenidas en la Sección 6.1.1.

En la Figura 6.7, se define un sistema de coordenadas de forma tal que el origen del mismo es la intersección de la línea neutra con el eje de simetría de la sección y está orientado hacia la zona de mayores compresiones.

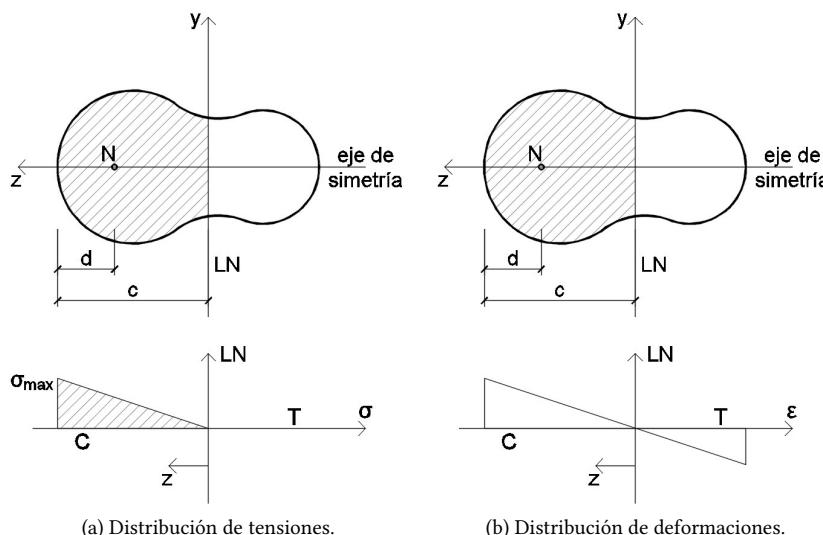


Figura 6.7: Esquema de sección.

Se plantea el equilibrio de fuerzas en la dirección normal a la sección por lo que la resultante de las tensiones normales tendrá que ser igual a N ,

$$N = \int_A \sigma(z) dA, \quad (6.30)$$

donde A representa la región de la sección que está comprimida, es decir donde σ es no nula.

En la Figura 6.7a se observa que la distribución de tensiones es lineal y que σ se puede escribir como,

$$\sigma(z) = kz = -\frac{\sigma_{max}}{c}z \quad (6.31)$$

Sustituyendo en la Ecuación (6.30) se obtiene,

$$N = \int_A \sigma(z) dA = -\frac{\sigma_{max}}{c} \int_A zdA \quad (6.32)$$

Sección 6.2. Análisis No Lineal de Secciones**107**

Por otra parte se plantea el equilibrio de momentos respecto del origen de coordenadas definido,

$$N(c - d) = \int_A \sigma(z) z dA = -\frac{\sigma_{max}}{c} \int_A z^2 dA \quad (6.33)$$

Se define la inercia de primer orden (o momento estático) referida a la línea neutra, que será función de la posición de la línea neutra c , como:

$$\int_A z dA = \mu_{LN}(c) \quad (6.34)$$

Se define también la inercia de segundo orden (o momento de inercia) referida a la línea neutra, que será función de la posición de la línea neutra c , como:

$$\int_A z^2 dA = I_{LN}(c) \quad (6.35)$$

Utilizando las Ecuaciones (6.34) y (6.35) en la Ecuación (6.32) y (6.33) respectivamente se tiene que,

$$N = -\frac{\sigma_{max}}{c} \mu_{LN}(c) \quad (6.36)$$

$$N(c - d) = -\frac{\sigma_{max}}{c} I_{LN}(c) \quad (6.37)$$

Finalmente se realiza el cociente entre la Ecuación (6.36) y la Ecuación (6.37) y se obtiene que,

$$c - d = \frac{I_{LN}(c)}{\mu_{LN}(c)} \quad (6.38)$$

En donde c es la única incógnita a determinar.

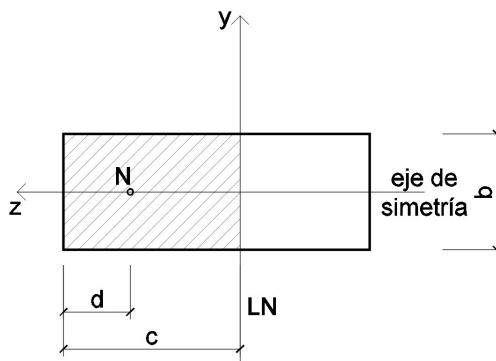
6.2.2. Ejemplo**Sección rectangular**

Figura 6.8: Sección rectangular.

Sección 6.2. Análisis No Lineal de Secciones**108**

En primer instancia se determinan $I_{LN}(c)$ y $\mu_{LN}(c)$ de la siguiente manera,

$$I_{LN}(c) = \int_A z^2 dA = b \int_0^c z^2 dz = \frac{bc^3}{3} \quad (6.39)$$

$$\mu_{LN}(c) = \int_A zdA = b \int_0^c zdz = \frac{bc^2}{2} \quad (6.40)$$

Se tiene entonces que la relación entre el momento de segundo orden y el momento de primer orden es,

$$\frac{I_{LN}(c)}{\mu_{LN}(c)} = \frac{2}{3}c \quad (6.41)$$

Utilizando la Ecuación (6.38) se tiene que,

$$c - d = \frac{2}{3}c \quad (6.42)$$

Obteniendo que,

$$c = 3d \quad (6.43)$$

Por otra parte utilizando la Ecuación (6.36) se tiene que,

$$N = -\frac{\sigma_{max}}{c} \frac{bc^2}{2} \quad (6.44)$$

Obteniendo que la tensión máxima de compresión es,

$$\sigma_{max} = -\frac{2N}{bc}$$

(6.45)

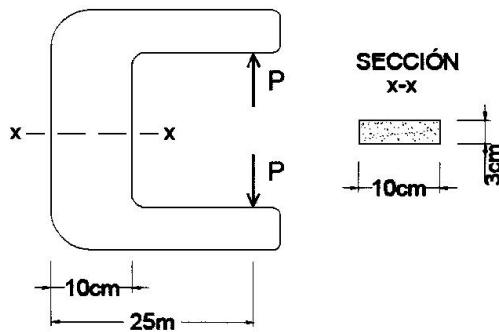
Sección 6.3. Ejercicios

109

6.3 Ejercicios

Ejercicio 6.1

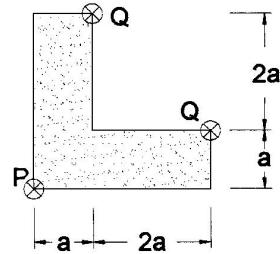
La pieza de la figura soporta las cargas $P = 30 \text{ kN}$ indicadas. Obtener el diagrama de tensiones normales en la sección $x - x$.



Ejercicio 6.2

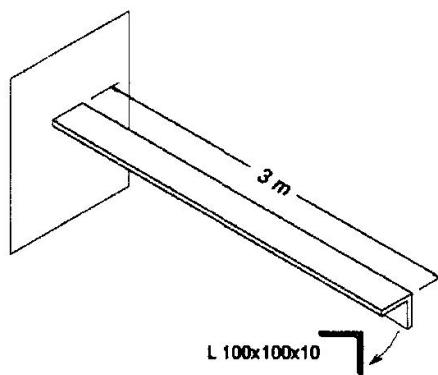
Sobre la sección de la figura se aplican las cargas P y Q de compresión.

- Determinar los valores que deben tener los coeficientes α y β , tal que $\alpha P < Q < \beta P$, para que toda la sección esté comprimida.
- Para $Q = \alpha P$, determinar P_{adm} si $a = 20\text{cm}$ y $\sigma_{adm} = 6\text{MPa}$. Obtener el diagrama de tensiones normales para ese valor hallado.



Ejercicio 6.3

Una barra recta, formada por un perfil normalizado L 100x100x10, de 3m de longitud, está empotrada en uno de sus extremos y sometida a su peso propio ($g = 10\text{m/s}^2$), como se muestra en la figura.



Sección 6.3. Ejercicios

110

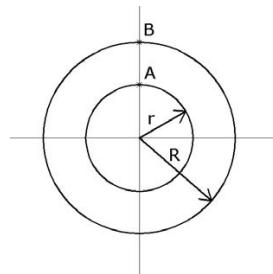
Se pide: determinar las máximas tensiones normales de tracción y compresión que se producen en la pieza.

Ejercicio 6.4

Para la generación de columnas de iluminación se suelen emplear elementos prefabricados como los de la Figura 6.9a. Se considera una de esas columnas de sección tubular de radio externo R y radio interno $r = \alpha R$, como indica la Figura 6.9b.



(a) Elementos prefabricados



(b) Esquema de sección

Figura 6.9

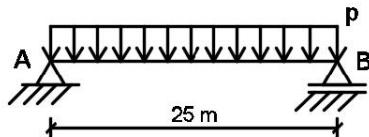
- Determinar α para que el perímetro interior sea el contorno del núcleo central de la sección.
- Si se aplica una directa de compresión P que varía de ubicación entre A y B, y el material es tal que $\sigma_{adm,trac} = 9MPa$ y $\sigma_{adm,comp} = 40MPa$, calcular P_{adm} para $R = 50cm$ y el α determinado.

Ejercicio 6.5

En la Figura 6.10a se presenta una viga pretensada de largo $L = 25m$. El esquema básico de cálculo de la viga se presenta en la Figura 6.10b y su sección se muestra en la Figura 6.11. Pretensar un elemento estructural implica introducirle esfuerzos previamente a su puesta en funcionamiento con el propósito de contrarrestar aquellos que serán ocasionados por la aplicación de las cargas que actuarán cuando ella entre en servicio. El pretensado de esta viga se puede representar mediante una fuerza concentrada F de compresión en el eje vertical, a una cierta distancia e del borde inferior.



(a) Elementos prefabricados



(b) Esquema básico de cálculo

Figura 6.10

Sección 6.3. Ejercicios

111

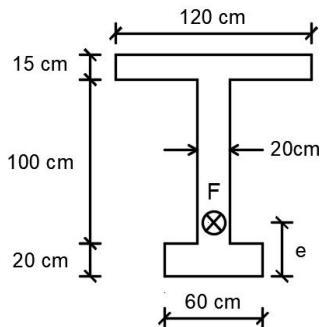
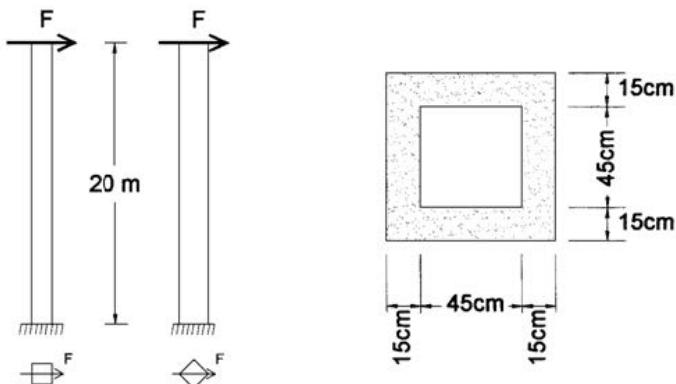


Figura 6.11: Esquema de sección.

- Determinar el núcleo central de la sección.
- Si $p = 16kN/m$ (incluido el peso propio), calcular la fuerza F a aplicar y la excentricidad e , de manera que para la sección central de la viga se cumpla $\sigma_{sup} = 0MPa$ y $\sigma_{inf} = 18MPa$.

Ejercicio 6.6

El esquema de un mástil se representa en la Figura. Dicho mástil está construido en hormigón ($\rho = 25kN/m^3$), empotrado en su base y soporta en su extremo libre una fuerza horizontal F . Su sección transversal es constante y se indica en la Figura.



- Determinar el núcleo central de la sección.
- Si la dirección de F es paralela a una de las caras de la sección transversal, determinar su valor admisible para que no existan tensiones de tracción en el empotramiento. Trazar el diagrama de tensiones normales.
- Si la dirección de F es paralela a una de las diagonales de la sección transversal, determinar su valor admisible para que no existan tensiones de tracción en el empotramiento. Trazar el diagrama de tensiones normales.

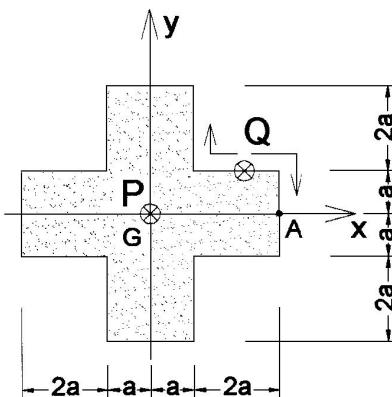
Sección 6.3. Ejercicios

112

- d) Si la dirección de F es paralela a una de las caras de la sección transversal, determinar su valor de modo que $\sigma_{trac,max} = -1/4\sigma_{comp,max}$. Trazar el diagrama de tensiones normales.

Ejercicio 6.7

Sobre la sección de la figura se aplican las cargas P y Q de igual valor y signo. El punto de aplicación de P es fijo y coincide con el baricentro G , mientras que el de Q se desplaza sobre el perímetro de la sección.

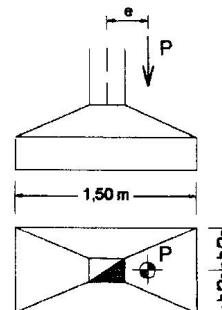


- Determinar el núcleo central de la sección.
- Demostrar si existen o no posiciones de Q para la cual las tensiones en la sección son todas de igual signo.
- Si $Q = \alpha P$ se aplica en A, determinar el máximo valor que puede tomar α para que el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas esté dentro del núcleo central.

Ejercicio 6.8

La zapata de la figura transmite al terreno la descarga vertical de un pilar, siendo $P = 40kN$. Calcular el lado menor (b) de la zapata, si $\sigma_{terreno} = 0,15MPa$.

- $e = 0$.
- $e = 0,25m$.
- $e = 0,50m$.



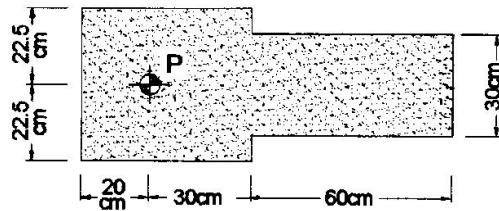
Ejercicio 6.9

La zapata de la figura transmite al terreno la descarga vertical P cuyo punto de aplicación es el indicado en la figura.

Calcular P_{adm} si $\sigma_{terreno} = 0,6MPa$.

Sección 6.3. Ejercicios

113

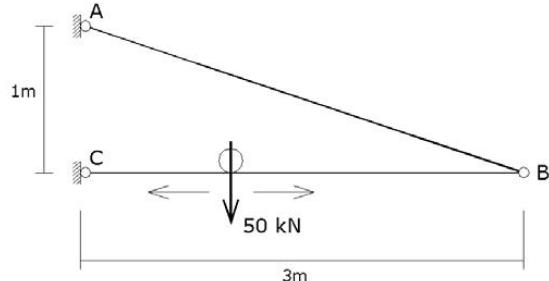


Ejercicio 6.10 (Adicional)

Se quiere construir un alero como el de la Figura 6.12a según el esquema básico de cálculo de la Figura 6.12b. Si $\sigma_{adm} = 125 MPa$, dimensionar en PNI el travesaño BC.



(a) Alero

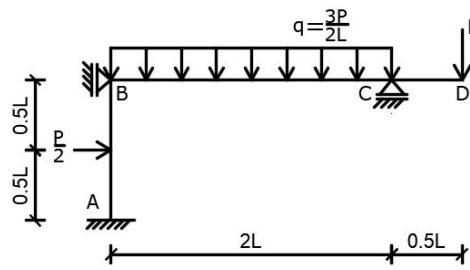


(b) Esquema básico de cálculo

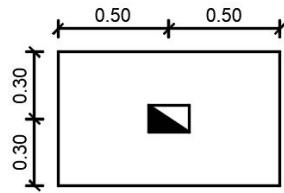
Figura 6.12

Ejercicio 6.11 (Adicional)

En la estructura de la Figura 6.13a ($EI = cte$) el pilar AB descarga centrado en la zapata de hormigón de la Figura 6.13b. Considerar $P = 20 kN$ y $L = 2m$.



(a) Esquema básico de cálculo



(b) Zapata

Figura 6.13

- Obtener las reacciones de la estructura en el punto A.
- Determinar la máxima tensión en el terreno.

Bibliografía

- Bazzano, J. B. and Pérez Zerpa, J. (2017). *Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras*. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- Brady, S. (2014). The quebec bridge collapse: A preventable failure (part 1). *The Structural Engineer*, 92:20–21.
- Bui, N. N., Ngo, M., Nikolic, M., Brancherie, D., and Ibrahimbegovic, A. (2014). Enriched Timoshenko beam finite element for modeling bending and shear failure of reinforced concrete frames. *Computers and Structures*, 143:9–18.
- Canelas, A. (2018). *Apuntes de curso de Elasticidad*. Instituto de Estructuras y Transporte Prof. Julio Ricaldoni.
- Celigüeta, J. T. (2003). *Curso de Análisis Estructural*. EUNSA. EDICIONES UNIVERSIDAD DE NAVARRA, S.A, 2 edition.
- Cervera Ruiz, M. and Blanco Díaz, E. (2002a). *Mecánica de estructuras Libro 1 Resistencia de materiales*. Edicions UPC, 2 edition.
- Cervera Ruiz, M. and Blanco Díaz, E. (2002b). *Mecánica de estructuras Libro 2 Métodos de Análisis*. Edicions UPC, Barcelona, 2 edition.
- Clough, R. and Penzien, J. (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill.
- Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., and Wehbring, R. (2015). *GNU Octave: a high-level interactive language for numerical computations*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 4 edition.
- Firth, I. (2010). Lessons from history - the steel box girder story. *The Structural Engineer*, 88:18–24.
- Frischkorn, J. and Reese, S. (2015). Solid-beam finite element analysis of nitinol stents. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 291:42 – 63.
- Fuchs, M. B. (2016). The Force Method. In *Structures and Their Analysis*, pages 195–233. Springer International Publishing, Cham.
- Hibbeler, R. C. (2012). *Structural Analysis*. Prentice-Hall, 8 edition.
- Holzapfel, G. A., Gasser, T. C., and Ogden, R. W. (2000). A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of Elasticity*, 61(1-3):1–48.

- Hughes, T. J. R. (1987). *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1 edition.
- Kannan, R., Hendry, S., Higham, N. J., and Tisseur, F. (2014). Detecting the causes of ill-conditioning in structural finite element models. *Computers & Structures*, 133:79–89.
- Krenk, S. and Høgsberg, J. (2013). The Force Method. In *Statics and Mechanics of Structures*, pages 227–265. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Mofid, M., Shadnam, M. R., and McCabe, S. L. (2001). On a new approach for finding the kern of a beam section. *Engineering Structures*, 23(9):1080 – 1084.
- Oñate, E. (2013). *Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics*, volume 2 of *Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences*. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Pereira, J., Xavier, J., Morais, J., and Lousada, J. (2014). Assessing wood quality by spatial variation of elastic properties within the stem: Case study of Pinus pinaster in the transverse plane 1. *Canadian Journal of Forest Research*, 44(2):107–117.
- Pérez Zerpa, J., Castrillo, P., and Baño, V. (2017). Development of a method for the identification of elastoplastic properties of timber and its application to the mechanical characterisation of Pinus taeda. *Construction and Building Materials*, 139:308–319.
- Pilkey, W. D. (2002). *Analysis and Design of Elastic Beams*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Reddy, J. N. (2002). *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. Wiley.
- Timoshenko, S. (1940). *Strength of Materials, Part I: Elementary theory and problems*. D. Van Nostrand, 2 edition.
- Timoshenko, S. P. (1953). *History of Strength of Materials*. Dover Publications.
- Wunderlich, W. and Pilkey, W. (2002). *Mechanics of Structures*. CRC Press, 2 edition.
- Yoo, C. H. and Lee, S. C., editors (2011). Butterworth-Heinemann, Boston.
- Yoshiaki, G., Yasuhito, W., Toshihiro, K., and Makoto, O. (1992). Elastic buckling phenomenon applicable to deployable rings. *International Journal of Solids and Structures*, 29(7):893 – 909.
- Zienkiewicz, O. C. (1972). *Introductory Lectures on the Finite Element Method*. Springer Vienna, Vienna.

Apéndice A

Soluciones de los ejercicios

A.1 Ejercicios de la UT1

1.1 a) Diagrama de cortantes en kN

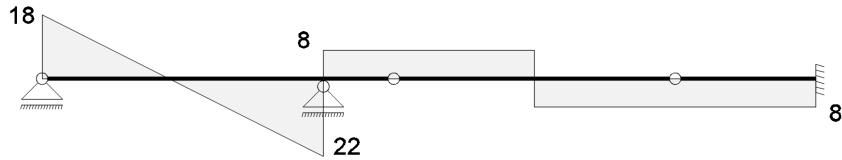
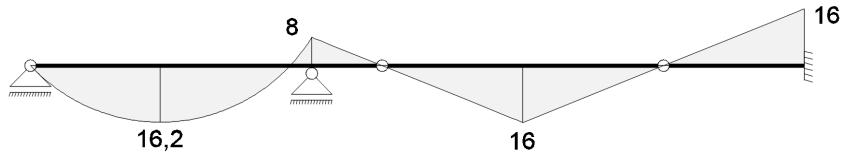


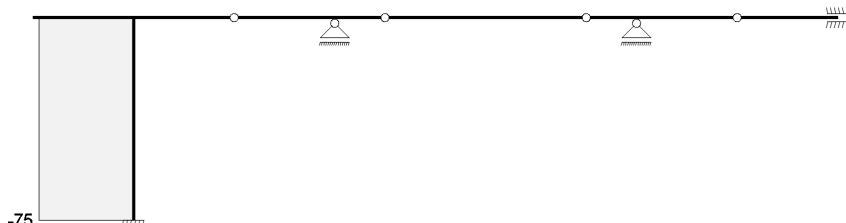
Diagrama de momentos en kNm



b) $b = 15 \text{ cm}$.

- c)
- $\theta_A = 6.32 \times 10^{-3} \text{ rad horario}$,
 - $\theta_B = 4.74 \times 10^{-3} \text{ rad antihorario}$,
 - $\delta_C = 3.95 \times 10^{-3} \text{ m hacia arriba}$.

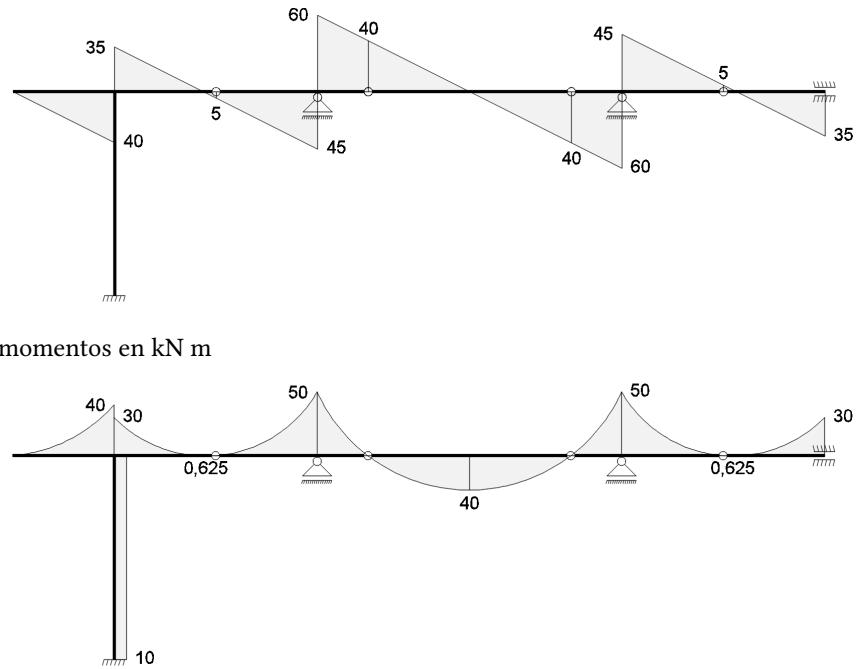
1.2 a) Directas en kN



cortantes en kN

Sección A.1. Ejercicios de la UT1

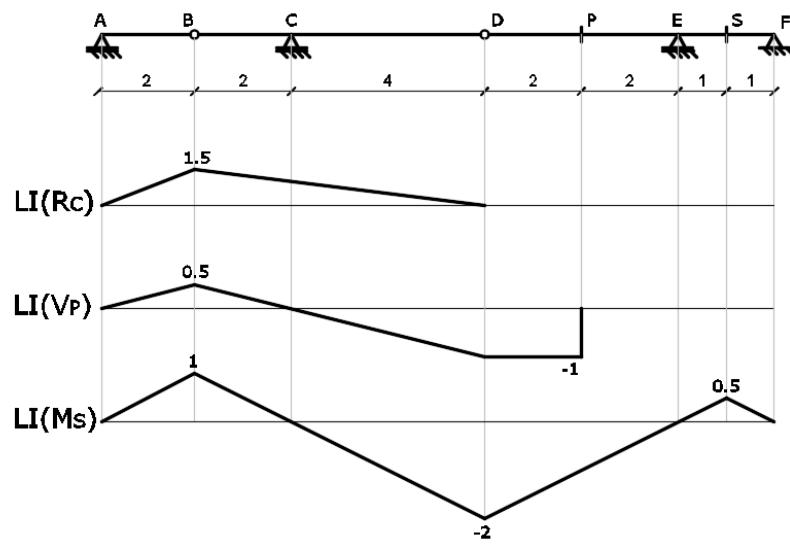
117



- c) ■ $\theta_D = (53.33 \text{ kN m}^2)/\text{EI}$ horario.
 ■ $\theta_G = (13.33 \text{ kN m}^2)/\text{EI}$ antihorario.
 ■ $\delta_C = (53.33 \text{ kN m}^3)/\text{EI}$ hacia arriba y $(80 \text{ kN m}^3)/\text{EI}$ hacia la izquierda.
 ■ $\delta_H = (26.67 \text{ kN m}^3)/\text{EI}$ hacia abajo y $(80 \text{ kN m}^3)/\text{EI}$ hacia la izquierda.

1.3 a) $P = +210 \text{ kN} / -163.3 \text{ kN}$.

b) 2 PNC 6.5.



1.4 a)

Sección A.2. Ejercicios de la UT2

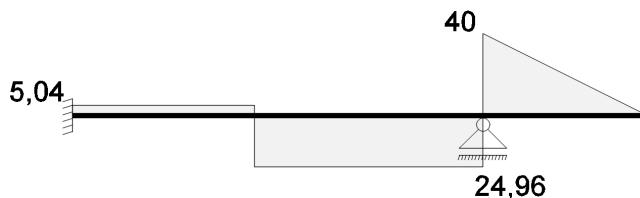
118

- b) ■ RC
- Máximo: De A a D → $RC_{MAX} = 120 \text{ kN}$.
 - Mínimo: Sin carga → $RC_{MIN} = 0 \text{ kN}$.
- VP
- Máximo: De A a C → $VC_{MAX} = 20 \text{ kN}$.
 - Mínimo: De C a P → $VC_{MIN} = -80 \text{ kN}$.
- MS
- Máximo: De A a C y de E a F → $MC_{MAX} = 50 \text{ kN m}$.
 - Mínimo: De C a E → $MC_{MIN} = -160 \text{ kN m}$.

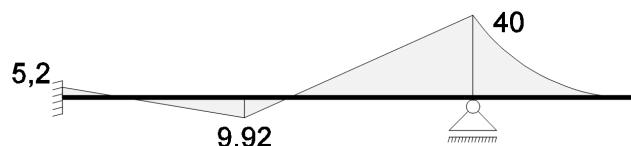
1.5 Reacciones,

- $MA = -5.2 \text{ kN m}$.
- $RA = 5.04 \text{ kN}$.
- $RB = 24.96 \text{ kN} + 40 \text{ kN} = 64.96 \text{ kN}$.

Cortante en kN



Momentos en kN m



A.2 Ejercicios de la UT2

2.1 Reacciones

- $RB = 50 \text{ kN}$ hacia la izquierda y 50 kN hacia abajo.
- $RC = 50 \text{ kN}$ hacia arriba.

Directas en barras

Barra	$N [\text{kN}]$
AB	50
BC	0
AC	-70.7

Sección A.2. Ejercicios de la UT2**119**

Desplazamiento de A: 2.44×10^{-3} m hacia la derecha y 6.38×10^{-4} m hacia arriba.

2.2 Reacciones

- RA = 13,48 kN hacia abajo (reacción horizontal en A nula).
- RB = 33,04 kN hacia abajo.
- RC = 106,52 kN hacia arriba.

Directas en barras

Barra	N [kN]
AB	-18.0
AE	22.5
BE	46.5
BC	-22.5
EC	-62.0
EF	100.0
CF	-60.0
CD	-100.0
FD	80.0

Desplazamiento de D: 2.15×10^{-3} m hacia la derecha y 4.8×10^{-3} m hacia abajo.

2.3 Reacciones

- RA = 20 kN hacia la izquierda.
- RD = 20 kN hacia la derecha y 10 kN hacia arriba.

Barra	N [kN]
AB	15.68
BC	4.42
AD	-4.42
BE	0.00
CF	4.42
AE	6.25
DB	-7.89
BF	7.89
CE	-6.25
DE	-14.42
EF	-5.58

Desplazamiento de F: 2.38×10^{-4} m hacia la izquierda y 9.84×10^{-4} m hacia abajo.

2.4 Reacciones

- RA = 5.24 kN (reacción horizontal en A nula).

Sección A.3. Ejercicios de la UT3**120**

- RF = 9.52 kN.
- RG = 5.24 kN.

Directas en barras

Barra	N [kN]
AB	-7.86
BC	-7.86
AD	9.45
DE	0.72
EC	9.45
BD	8.58
BE	8.58
FB	9.52
GC	5.24

Desplazamiento vertical de B: 5.44×10^{-3} m hacia abajo. Desplazamiento vertical de C 2.99×10^{-3} m hacia abajo

2.5 a) Directas en barras

Barra	N [kN]
AB	0.086 P
AF	-0.172 P
BC	0.259 P
BF	0.172 P
BG	-0.172 P
CD	0.313 P
CG	-0.982 P
CH	-0.928 P
CI	-0.094 P
DE	0.086 P
DH	-0.226 P
DI	0.226 P
EI	-0.172 P
FG	-0.172 P
GH	0.233 P
HI	-0.118 P

b) PNI 16

A.3 Ejercicios de la UT3

3.1 Mínima cantidad de incógnitas: 1, $\theta_B = -1.94 \times 10^{-3}$ rad.

Diagrama de cortantes (kN)

Sección A.3. Ejercicios de la UT3

121

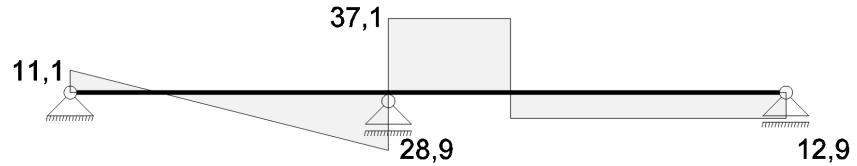
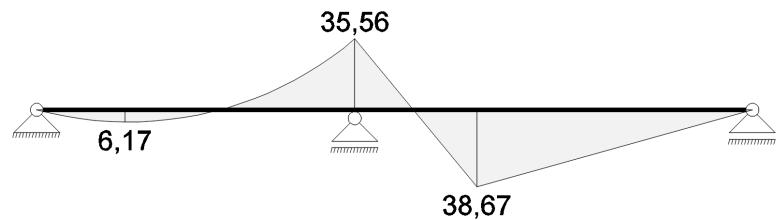


Diagrama de momentos (kN.m)



3.2 Mínima cantidad de incógnitas: 1 $\theta_B = 3.60 \times 10^{-3}$ rad.

Diagrama de directas (kN)

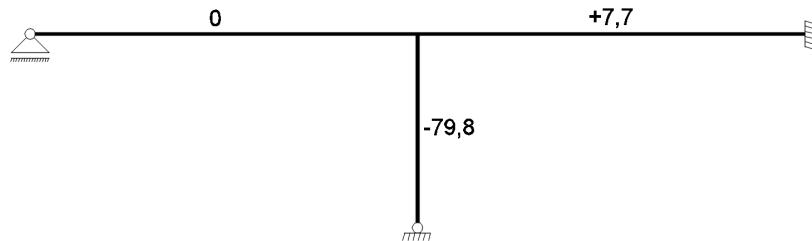


Diagrama de cortantes (kN)

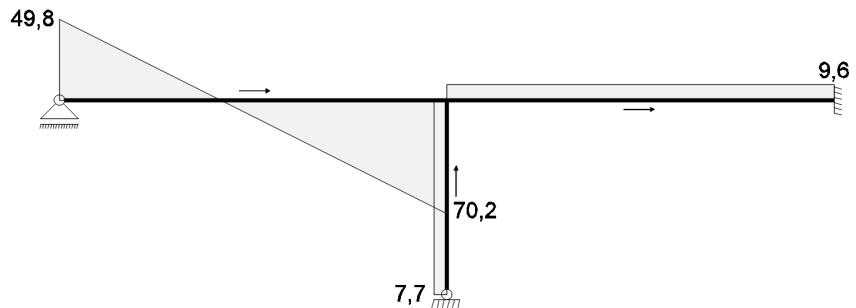
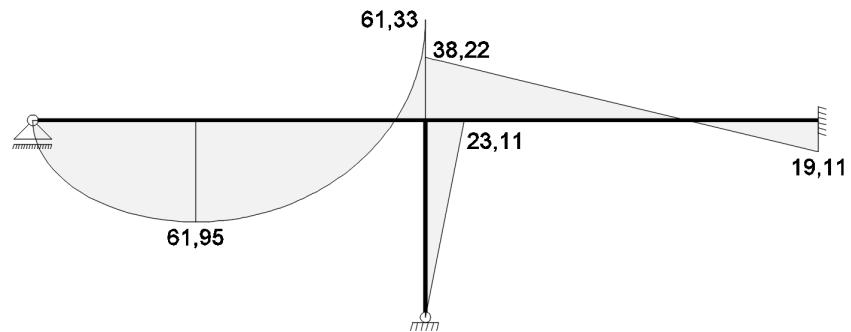


Diagrama de momentos (kN.m)

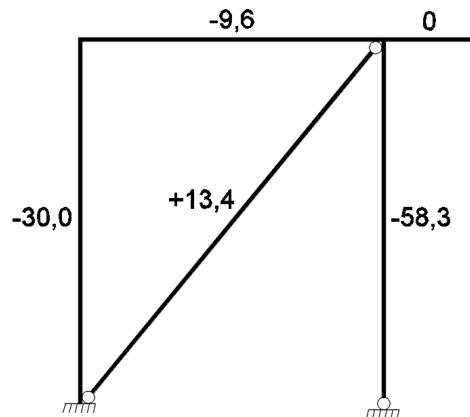
Sección A.3. Ejercicios de la UT3

122



3.3 Mínima cantidad de incógnitas: 2, $\theta_A = -2.70 \times 10^{-3}$ rad y $\theta_B = 2.69 \times 10^{-3}$ rad.

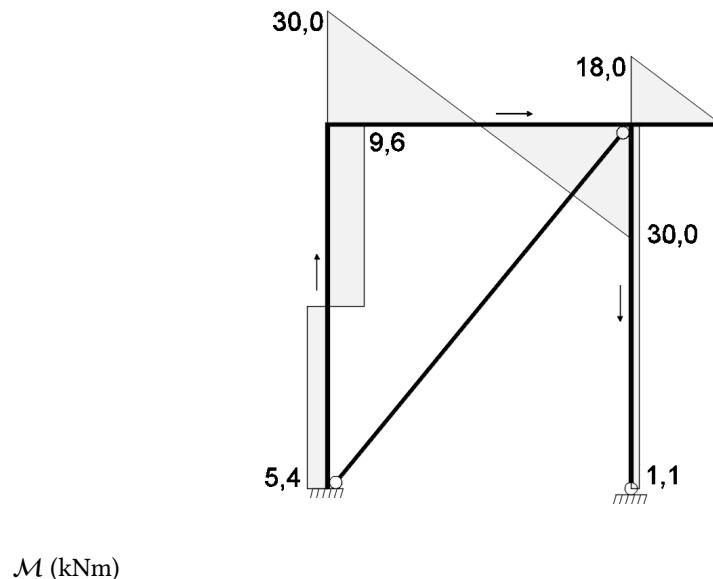
\mathcal{N} (kN)



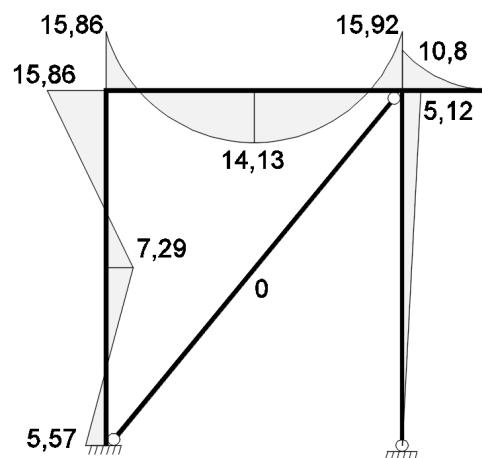
\mathcal{V} (kN)

Sección A.3. Ejercicios de la UT3

123



\mathcal{M} (kNm)



3.4 Mínima cantidad de incógnitas: 3, $\theta_B = -1.66 \times 10^{-3}$ rad, $\theta_C = 1.37 \times 10^{-3}$ rad y $\Delta = 6.75 \times 10^{-3}$ m (hacia la derecha).

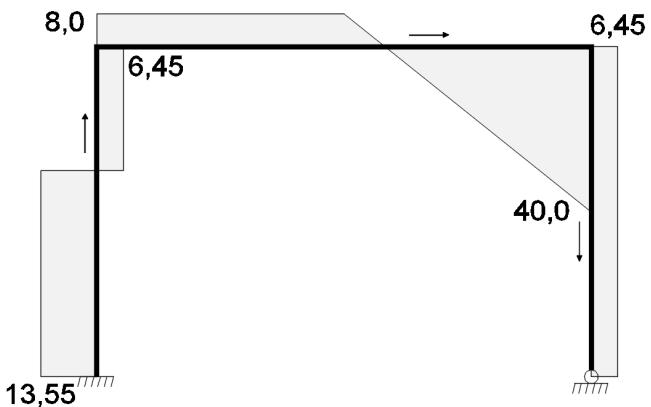
\mathcal{N} (kN)

Sección A.3. Ejercicios de la UT3

124



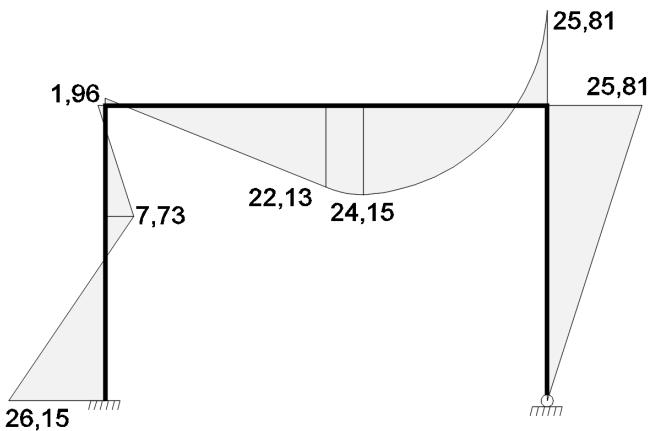
\mathcal{V} (kN)



\mathcal{M} (kNm)

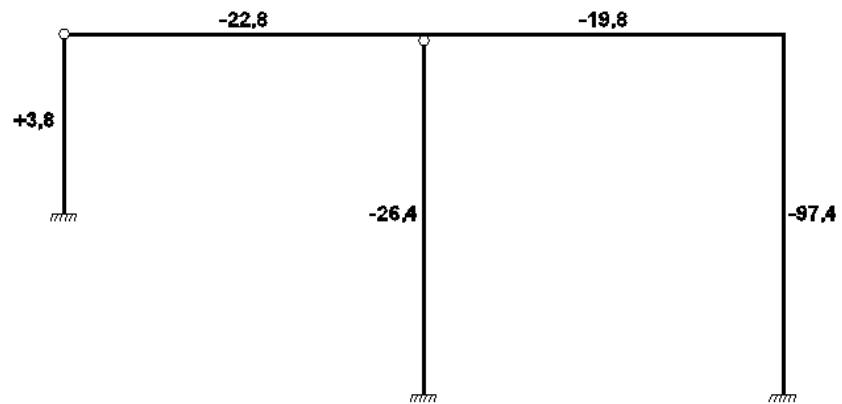
Sección A.3. Ejercicios de la UT3

125



3.5 Mínima cantidad de incógnitas: 3, $\theta_C = -2.99 \times 10^{-3}$ rad, $\theta_D = 3.04 \times 10^{-3}$ rad y $\Delta = 14.42 \times 10^{-3}$ m (hacia la derecha).

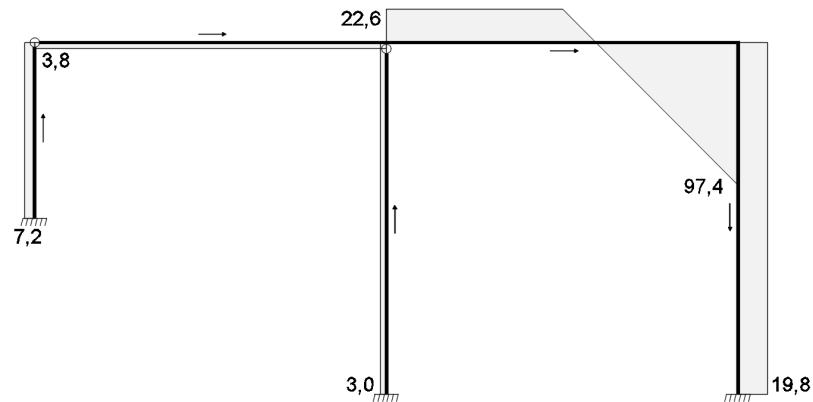
\mathcal{N} (kN)



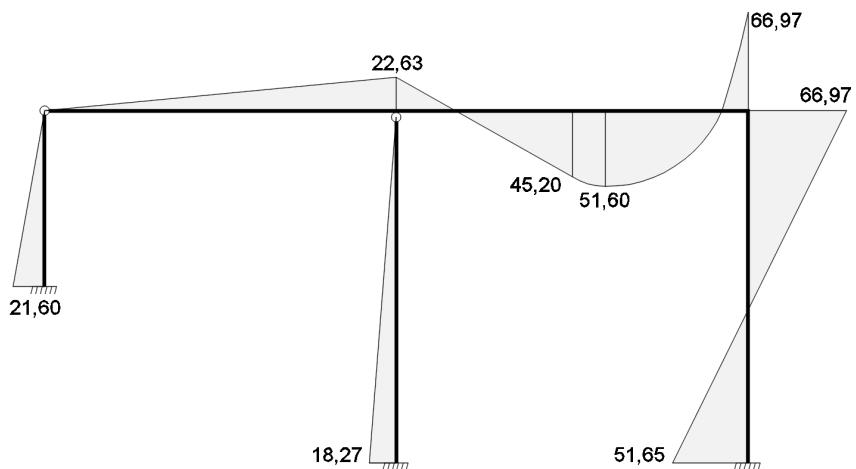
\mathcal{V} (kN)

Sección A.3. Ejercicios de la UT3

126



\mathcal{M} (kNm)

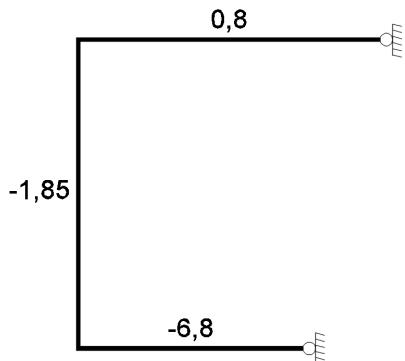


- 3.6** Mínima cantidad de incógnitas: 3, $\theta_B = 8.57 \times 10^{-4}$ rad, $\theta_C = 3.91 \times 10^{-4}$ rad y $\Delta = 4.62 \times 10^{-3}$ m (hacia abajo).

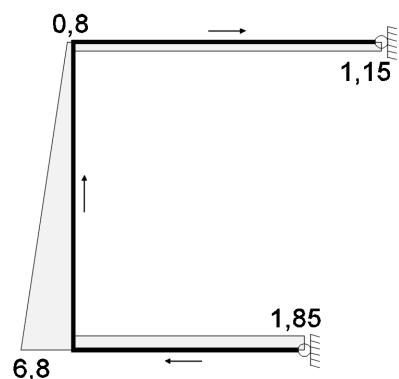
\mathcal{N} (kN)

Sección A.3. Ejercicios de la UT3

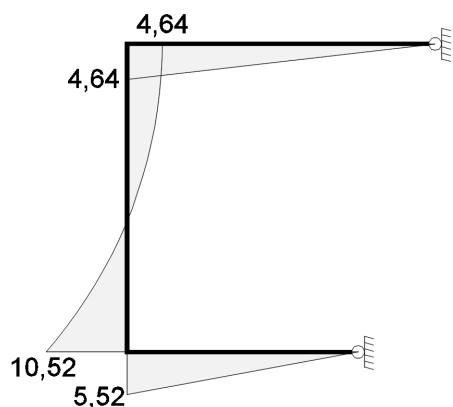
127



\mathcal{V} (kN)



\mathcal{M} (kNm)

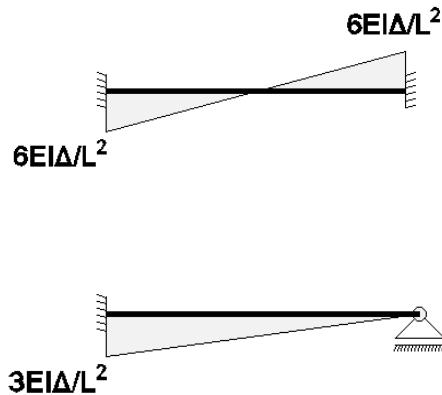


3.7 a)

Sección A.4. Ejercicios de la UT4

128

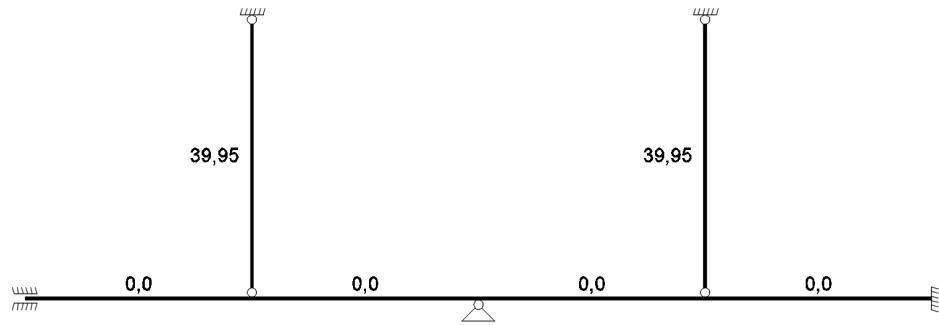
b)



A.4 Ejercicios de la UT4

Las soluciones de los ejercicios están planteadas en base a la hipótesis de indeformabilidad directa de aquellas barras que presentan flexión. Dicha hipótesis deberá ser corroborada para los distintos casos.

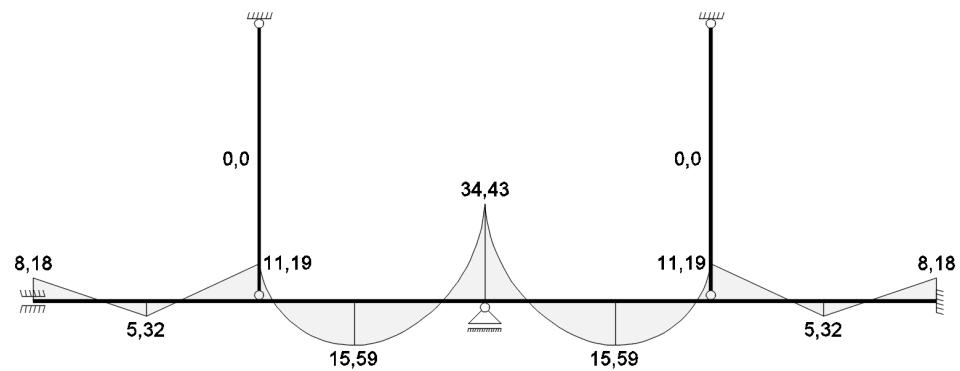
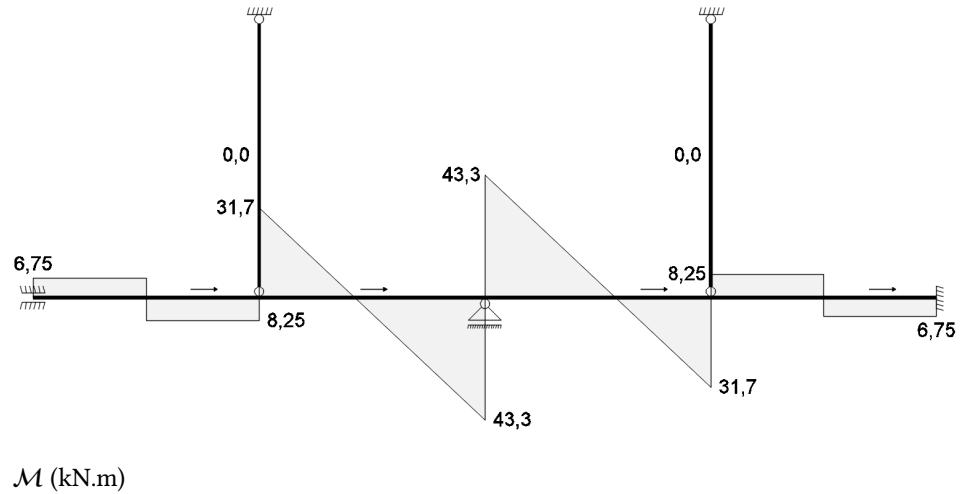
4.1 \mathcal{N} (kN)



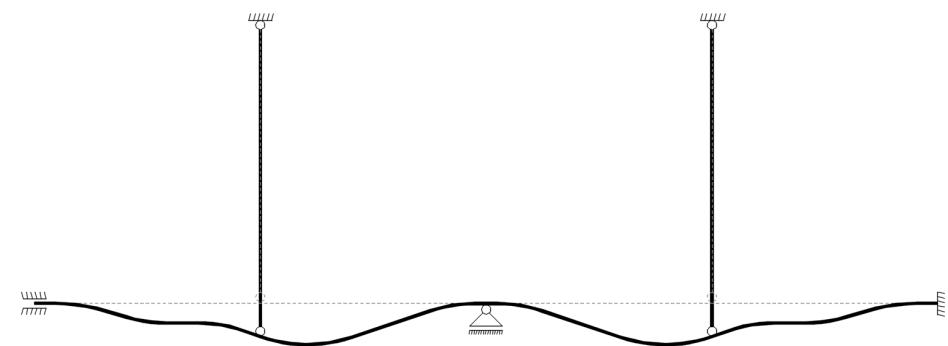
\mathcal{V} (kN)

Sección A.4. Ejercicios de la UT4

129



Deformada



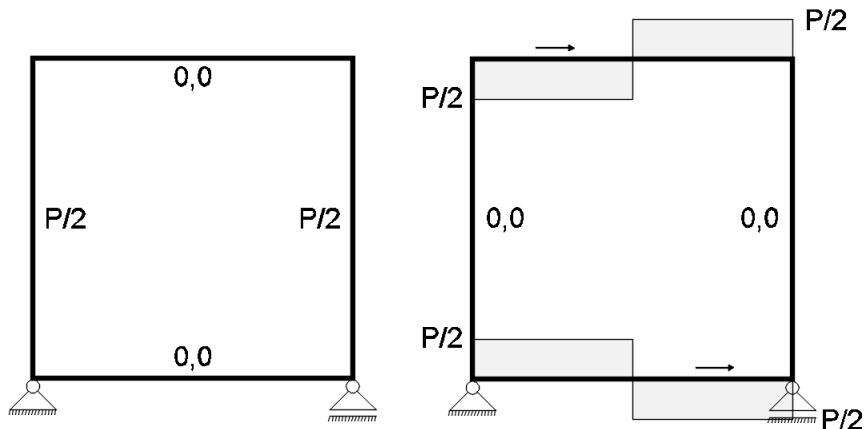
Sección A.4. Ejercicios de la UT4

130

4.2

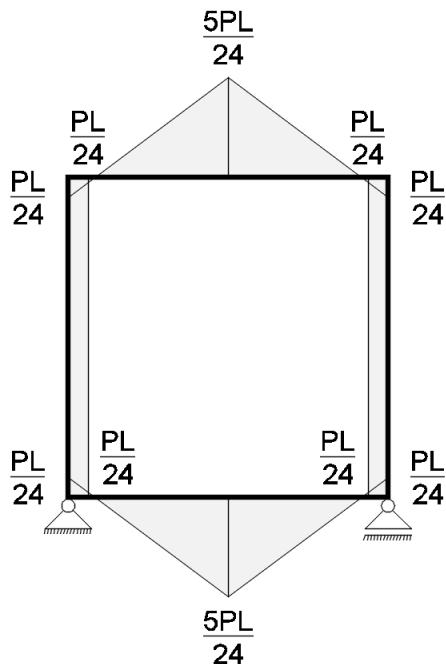
\mathcal{N} (kN)

\mathcal{V} (kN)



\mathcal{M} (kN.m)

Deformada

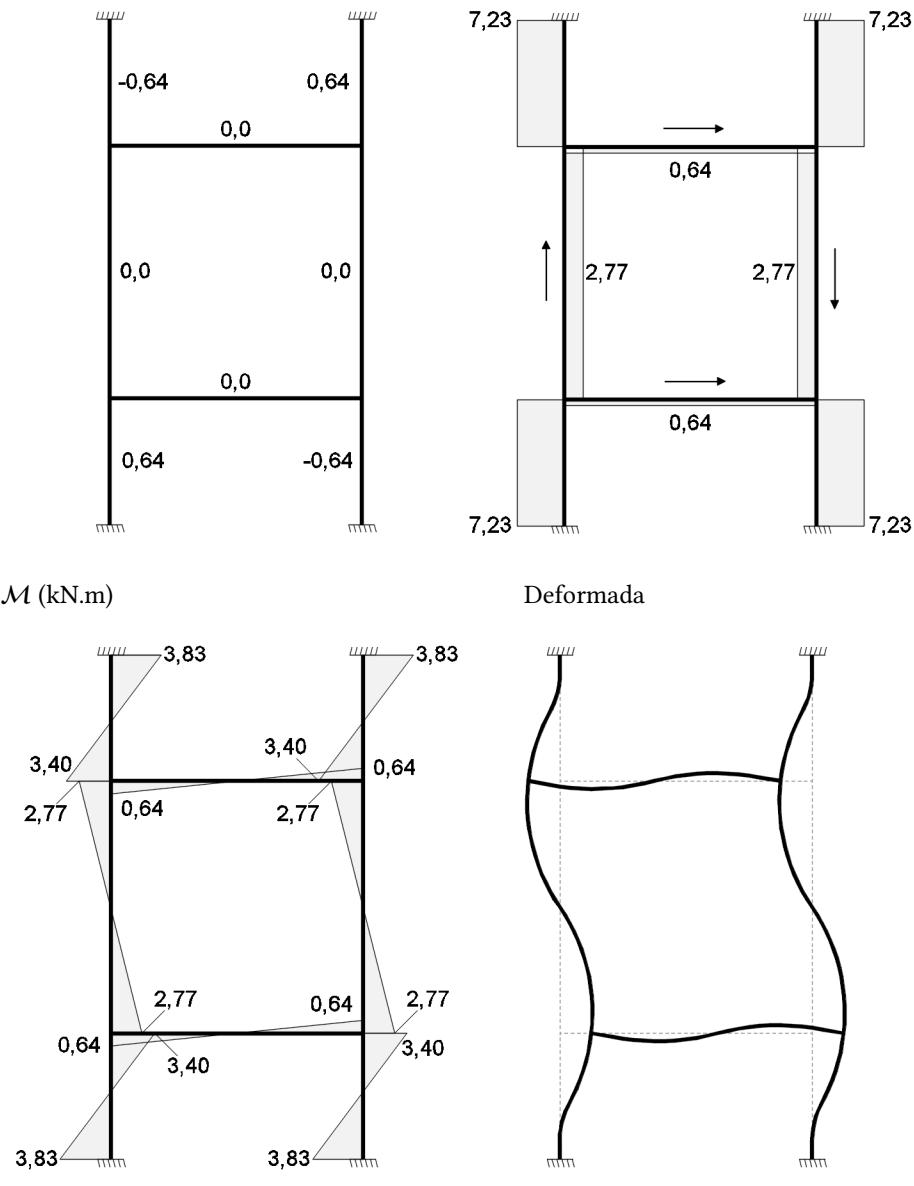


4.3 \mathcal{N} (kN)

\mathcal{V} (kN)

Sección A.4. Ejercicios de la UT4

131



Giro de los puntos C, D, E y F, -2.98×10^{-4} rad.

4.4 a) $P = 17.5$ kN

b)

Giro en C: $\theta_C = 5.6 \times 10^{-4}$ rad.

Giro en D: $\theta_D = -5.6 \times 10^{-4}$ rad.

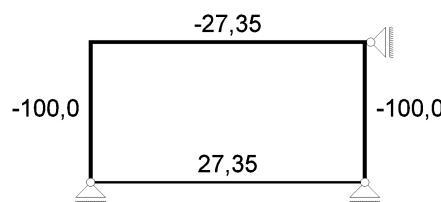
Desplazamiento de M: $\Delta_M = 2.99 \times 10^{-3}$ m (hacia abajo).

Sección A.4. Ejercicios de la UT4

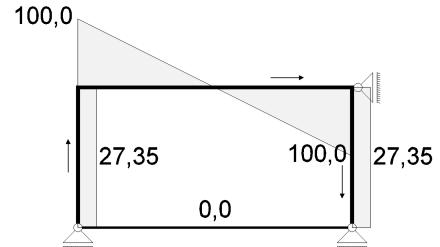
132

4.5 a) $\alpha_1 = 0.457$, $\alpha_2 = 0.163$, $\alpha_3 = -0.120$.

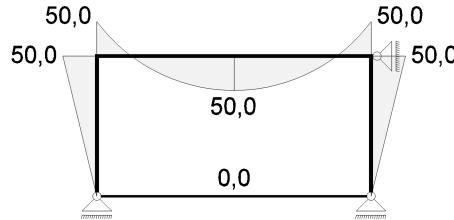
\mathcal{N} (kN)



\mathcal{V} (kN)



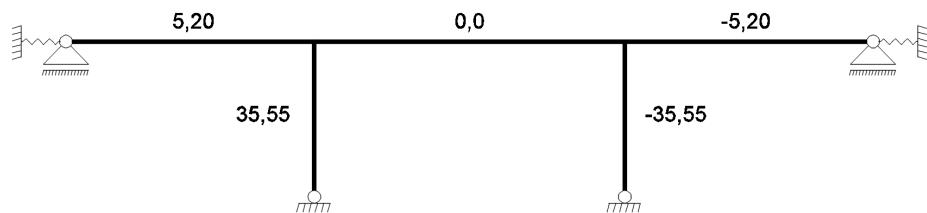
\mathcal{M} (kN.m)



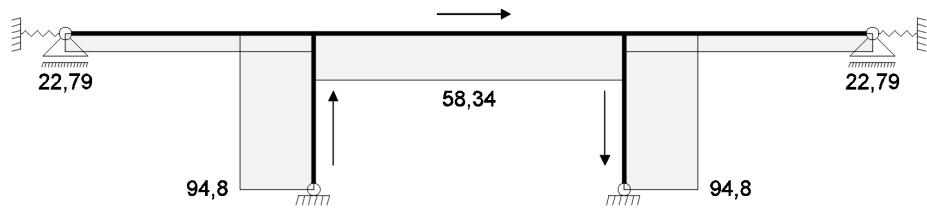
4.6 a) $t = 2.5$ cm

b) $k = 2000$ kN/m

\mathcal{N} (kN)



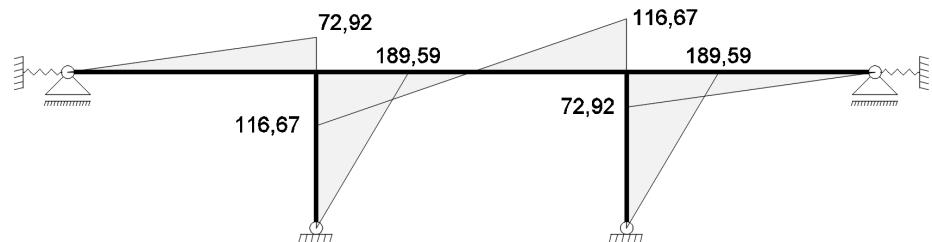
\mathcal{V} (kN)



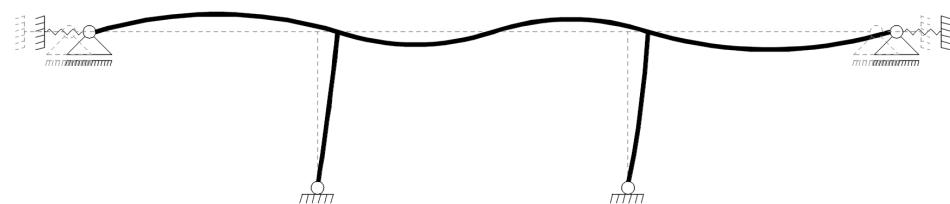
Sección A.4. Ejercicios de la UT4

133

\mathcal{M} (kNmm)



Deformada

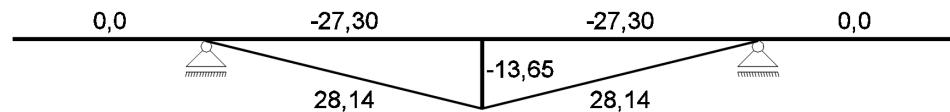


4.7 a) $k = 1200 \text{ kN/m}$

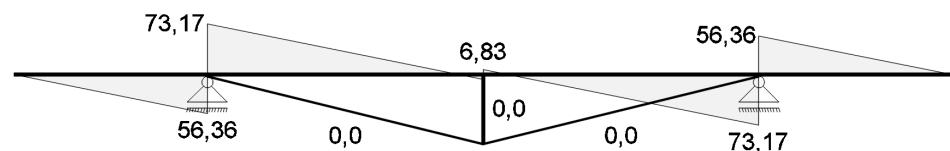
b) $a = 2.82 \text{ m}$

c) $\sigma_{m\wedge x} = 6.85 \text{ MPa}$

\mathcal{N} (kN)



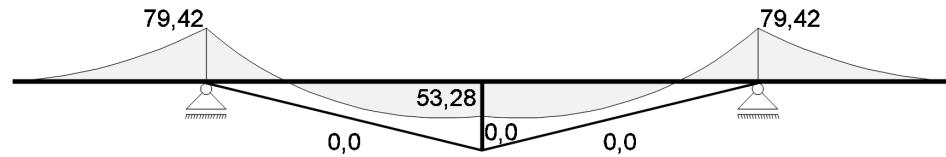
\mathcal{V} (kN)



\mathcal{M} (kN.m)

Sección A.4. Ejercicios de la UT4

134



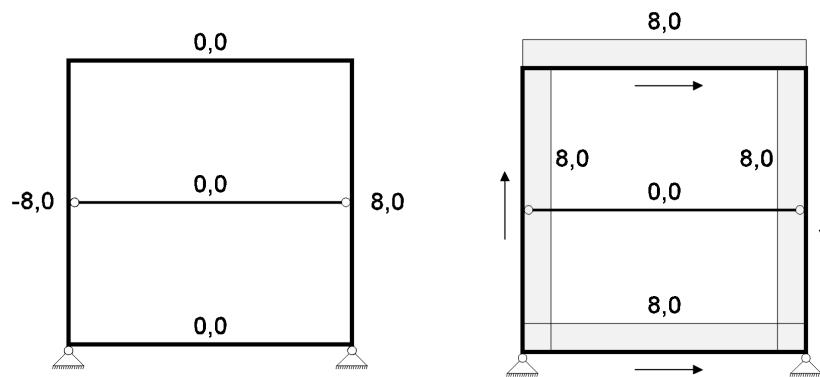
4.8 a)

$$\text{Giro en C: } \theta_C = 3.16 \times 10^{-3}.$$

Desplazamiento de C: $\Delta_C = 2.53 \times 10^{-2}$ m (hacia la izquierda).

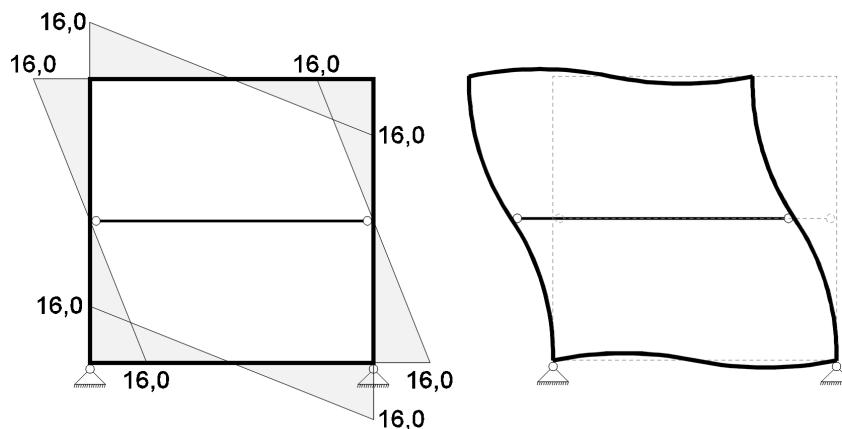
\mathcal{N} (kN)

\mathcal{V} (kN)



\mathcal{M} (kN.m)

deformada

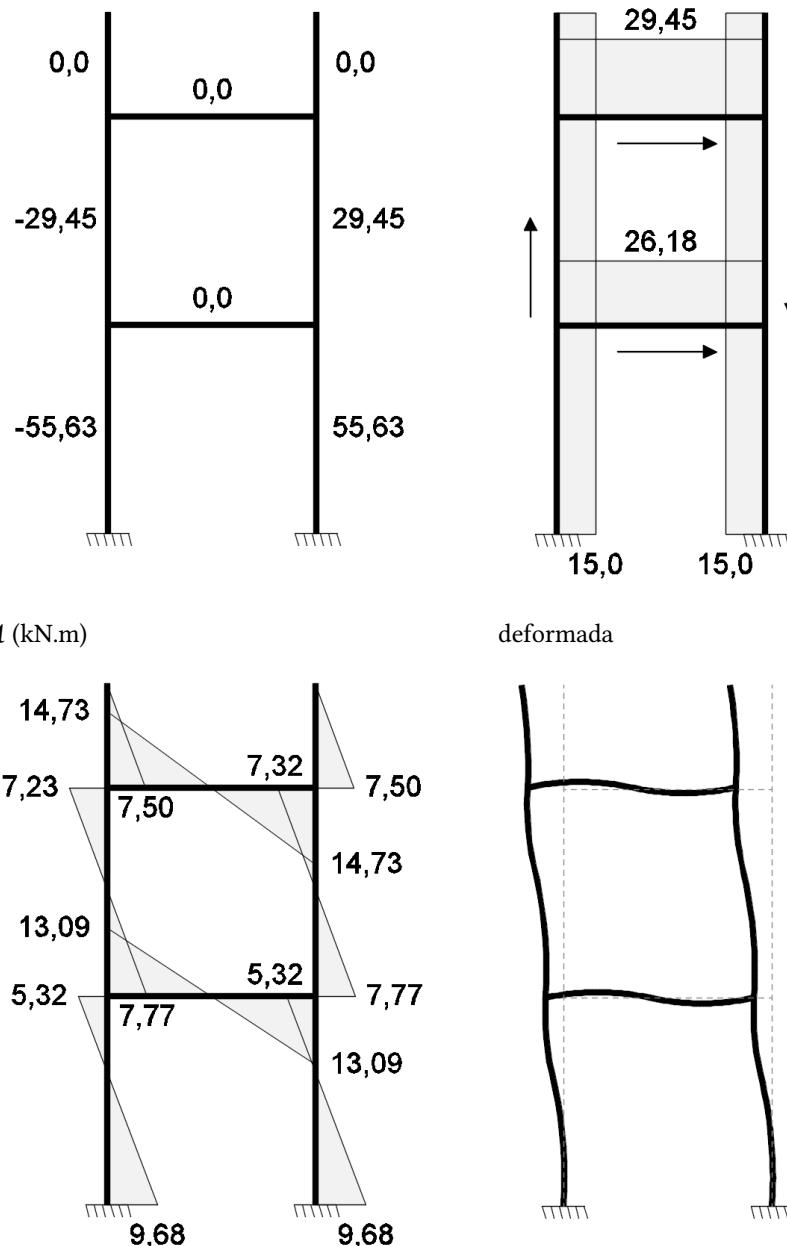


4.9 \mathcal{N} (kN)

\mathcal{V} (kN)

Sección A.5. Ejercicios de la UT5

135



A.5 Ejercicios de la UT5

5.1 Incógnitas cinemáticas,

Cortante - V_y, local (kN)

Flexión - M_z, local (kN.m)

Torsor - M_x, local (kN.m)

Sección A.5. Ejercicios de la UT5

136

Ejercicio 5.2

Estructura Figura 1.a Incógnitas cinemáticas,

Cortante - Vy,local (kN)

Flexión - Mz,local (kN.m)

Torsor - Mx,local (kN.m)

Estructura Figura 1.b Incógnitas cinemáticas,

Cortante - Vy,local (kN)

Flexión - Mz,local (kN.m)

Torsor - Mx,local (kN.m)

Ejercicio 5.3

Incógnitas cinemáticas,

Cortante - Vy,local (kN)

Flexión - Mz,local (kN.m)

Torsor - Mx,local (kN.m)

Ejercicio 5.4 Nodos, sistema de ejes globales y locales ídem Ejercicio 5.2. Incógnitas cinemáticas,

Cortante - Vy,local (kN)

Flexión - Mz,local (kN.m)

Torsor - Mx,local (kN.m)

Ejercicio 5.5 b) Directa (kN)

Cortante - Vy,local (kN)

Flexión - Mz,local (kN.m)

Torsor - Mx,local (kN.m)

d) Directa (kN)

Cortante - Vy,local (kN)

Flexión - Mz,local (kN.m)

Torsor - Mx,local (kN.m)

El cortante según z y el momento flector según y son despreciables y no figuran.

Ejercicio 5.6

En cada aspa,

Cortante (kN)

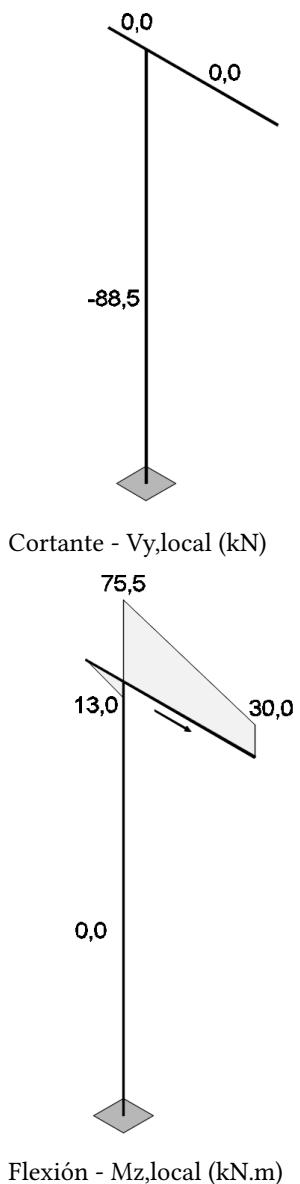
Flexión (kN.m)

En la torre,

Directa (kN)

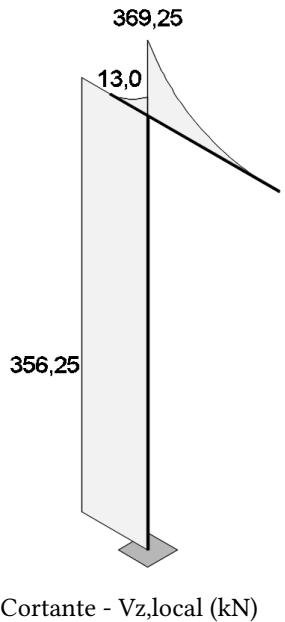
Sección A.5. Ejercicios de la UT5

137

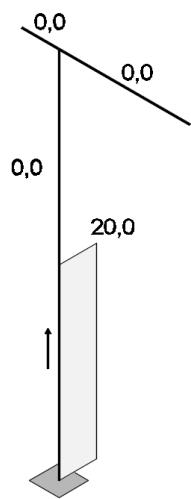


Sección A.5. Ejercicios de la UT5

138



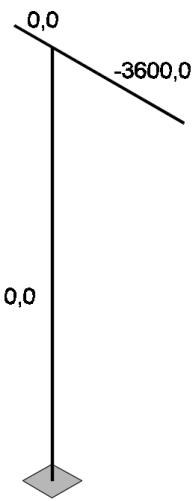
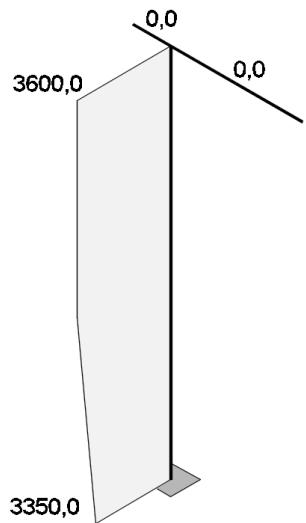
Cortante - V_z, local (kN)



Flexión - M_y, local (kN.m)

Sección A.5. Ejercicios de la UT5

139



Torsor - M_x ,local (kN.m)

Ejercicio 5.7

Despreciando rigidez torsional en las vigas Cortante - V_y ,local (kN)

Flexión - M_z ,local (kN.m)

Considerando rigidez torsional en las vigas Cortante - V_y ,local (kN)

Flexión - M_z ,local (kN.m)

Torsor - M_x ,local (kN.m)

Ejercicio 5.8 (Adicional)

Despreciando rigidez torsional en las vigas Cortante - V_y ,local (kN)

Sección A.5. Ejercicios de la UT5

140

Flexión - Mz,local (kN.m)

Considerando rigidez torsional en las vigas Cortante - Vy,local (kN)

Flexión - Mz,local (kN.m)

Torsor - Mx,local (kN.m)

Ejercicio 5.9 (Adicional)

Incógnitas cinemáticas,

Cortante - Vy,local (kN)

Flexión - Mz,local (kN.m)

Torsor - Mx,local (kN.m)

Apéndice B

Códigos

Todos los códigos presentados en esta sección están también disponibles en el repositorio público: gitlab.fing.edu.uy/jorgepz/codigoFuenteLibroR2. Todos los usuarios @fing pueden tener acceso a realizar modificaciones y mejoras de los códigos.

B.1 Unidad Temática 1

Código B.1: Archivo de entrada de ONSAS para análisis de reticulado de ejemplo.

```
1 % -----
2 % Ejemplo: archivo de modelo numerico de reticulado plano en ONSAS.
3 % -----
4
5 clear all, close all
6 dirOnsas = [ pwd '/../../../../onsas/codigo_onsas_repo/' ];
7 problemName = 'rail' ; addpath( dirOnsas )
8
9 E = 210e9 ; nu = 0.3 ;
10 l = 3 ; b = 0.1 ;
11 P = 40e4 ;
12
13 % MELCS parameters
14 materialsParams = { [ 0 1 E nu ] } ;
15 elementsParams = { [1] ; [2] } ;
16 crossSecsParams = { [ 2 b b ] } ;
17 loadsParams = { [ 1 1 0 0 0 0 -P 0 ] } ;
18 springsParams = { [ inf 0 inf 0 inf 0 ] ; ...
19           [ 0 0 inf 0 inf 0 ] ; ...
20           [ 0 0 inf 0 0 0 ] } ;
21 Nodes = [ 0 0 0 ; ...
22           l 0 0 ; ...
23           2*l 0 0 ; ...
24           3*l 0 0 ; ...
25           4*l 0 0 ; ...
26           5*l 0 0 ; ...
27           6*l 0 0 ; ...
28           7*l 0 0 ; ...
29           8*l 0 0 ; ...
30           1*l 0 l ; ...
31           2*l 0 l ; ...
32           3*l 0 l ; ...
33           4*l 0 l ; ...
34           5*l 0 l ; ...
35           6*l 0 l ; ...
36           7*l 0 l ] ;
```

Sección B.2. Unidad Temática 2

142

```

37 Conec = { [ 0 1 0 0 1   1    ] ; ...
38   [ 0 1 1 0 3   2    ] ; ...
39   [ 0 1 1 0 3   3    ] ; ...
40   [ 0 1 1 0 3   4    ] ; ...
41   [ 0 1 1 0 3   5    ] ; ...
42   [ 0 1 1 0 3   6    ] ; ...
43   [ 0 1 1 0 3   7    ] ; ...
44   [ 0 1 1 0 3   8    ] ; ...
45   [ 0 1 0 0 2   9    ] ; ...
46   [ 1 2 0 1 3   1  2 ] ; ...
47   [ 1 2 0 1 3   1 10 ] ; ...
48   [ 1 2 0 1 3   2 10 ] ; ...
49   [ 1 2 0 1 3   11 10] ; ...
50   [ 1 2 0 1 3   2  3 ] ; ...
51   [ 1 2 0 1 3   3 11 ] ; ...
52   [ 1 2 0 1 3   3 10 ] ; ...
53   [ 1 2 0 1 3   3  4 ] ; ...
54   [ 1 2 0 1 3   11 4 ] ; ...
55   [ 1 2 0 1 3   11 12 ] ; ...
56   [ 1 2 0 1 3   4 12 ] ; ...
57   [ 1 2 0 1 3   4 13 ] ; ...
58   [ 1 2 0 1 3   5 12 ] ; ...
59   [ 1 2 0 1 3   13 12 ] ; ...
60   [ 1 2 0 1 3   5  4 ] ; ...
61   [ 1 2 0 1 3   5 13 ] ; ...
62   [ 1 2 0 1 3   6 13 ] ; ...
63   [ 1 2 0 1 3   5 14 ] ; ...
64   [ 1 2 0 1 3   6 14 ] ; ...
65   [ 1 2 0 1 3   6  5 ] ; ...
66   [ 1 2 0 1 3   13 14 ] ; ...
67   [ 1 2 0 1 3   6 15 ] ; ...
68   [ 1 2 0 1 3   14 15 ] ; ...
69   [ 1 2 0 1 3   6  7 ] ; ...
70   [ 1 2 0 1 3   15 7 ] ; ...
71   [ 1 2 0 1 3   16 7 ] ; ...
72   [ 1 2 0 1 3   8  7 ] ; ...
73   [ 1 2 0 1 3   15 16 ] ; ...
74   [ 1 2 0 1 3   8 16 ] ; ...
75   [ 1 2 0 1 3   8  9 ] ; ...
76   [ 1 2 0 1 3   9 16 ] } ;
77
78 plotParamsVector = [ 3 ] ;
79
80 ONSAS

```

B.2 Unidad Temática 2

Código B.2: Archivo principal de código FEMTrusS.

```

1 %> FEMTrusS - Finite Element Method 2D Truss Solver
2 %
3 % The FEMTrusS is a minimal GNU-Octave script that allows to solve
4 % 2D truss analysis problems using the Finite Element Method.
5 % The code was developed for educational purposes and there is

```

Sección B.2. Unidad Temática 2**143**

```

6 % NO WARRANTY at all regarding the quality of its results.
7 %
8 % The code is distributed under the GPLv3 Free Software license and it was
9 % developed for GNU Octave 4.4 by J.M. Perez Zerpa in August 2017, Facultad
10 % de Ingenieria at Universidad de la Republica.
11 %%
12
13 %% 1- Input data
14 % Input parameters of geometry and material of the truss.
15 % Applied loads and fixed degrees of freedom (supports)
16 %%
17
18 clear all, close all, format compact g
19
20 % cross section properties vector (areas)
21 As = [ 0.001 0.01 ]' ;
22
23 % material properties
24 Es = [ 210e9 ] ;
25
26 % nodes coordinates, each row: x y
27 NodsCoord = [ -10 0 ;
28             0 10 ;
29             0 0 ;
30             10 0 ] ;
31
32 % elements conectivity, each row: inode jnode material section
33 ElemConec = [ ...
34 1 2 1 1 ;
35 2 3 1 2 ; ...
36 2 4 1 1 ] ;
37
38 % fixed degrees of freedom
39 fixedddofs = [ 1 2      5 6 7 8 ] ;
40
41 % nodal loads, each row: node fx fy
42 NodalLoads = [ 2 10000 0 ];
43
44 % Deformed scale factor
45 scalefactor = 1e3;
46 %
47
48 %% 2- Previous calculations and stiffness matrix assembly
49 % Assembles the global stiffness matrix KG and computes the matrix for each element.
50 % The resulting global displacements vector is stored in UG.
51 %%
52
53 % --- compute lengths and inclination of undeformed elements ---
54 Lengths = sqrt( sum( ( NodsCoord( ElemConec(:,2),:) ...
55                         - NodsCoord( ElemConec(:,1),:) ).^2 , 2 ) ) ;
56
57 Angles = atan2( ( NodsCoord( ElemConec(:,2),2 ) - NodsCoord( ElemConec(:,1),2 ) ) , ...
58                 ( NodsCoord( ElemConec(:,2),1 ) - NodsCoord( ElemConec(:,1),1 ) ) ) ;
59
60 nnodes = size( NodsCoord,1);      nelems = size( ElemConec,1);
61

```

Sección B.2. Unidad Temática 2**144**

```

62 nfixeddofs      = length(fixeddofs) ;
63 freedofs        = 1:(2*nnodes);
64 freedofs(fixeddofs) = [];
65
66 KG = sparse( 2*nnodes,2*nnodes ) ;
67 for i=1:nelems
68
69   l  = Lengths(i) ;    ang = Angles(i);
70
71   nodi = ElemConec(i,1);    nodj = ElemConec(i,2);
72
73   Eele = Es( ElemConec(i,3) ) ;    Aele = As( ElemConec(i,4) ) ;
74
75   elemdofs = nodes2dofs ( [ nodi nodj ]' ,2) ;
76
77   ca = cos(ang);  sa = sin(ang);
78
79   R = [ ca -sa  0  0 ;
80         sa  ca  0  0 ;
81         0   0  ca -sa ;
82         0   0  sa  ca ];
83
84   KL = Eele*Aele/l * [  1  0 -1  0 ;
85                           0  0  0  0 ;
86                           -1 0  1  0 ;
87                           0  0  0  0 ] ;
88
89   KGelem = R * KL * R'
90
91   KG(elemdofs,elemdofs) = KG(elemdofs,elemdofs) + KGelem ;
92 end
93
94 FG = zeros(2*nnodes,1);
95 for i=1:size(NodalLoads,1)
96   aux = nodes2dofs ( NodalLoads(i,1), 2 ) ;
97   FG( aux ) = FG( aux ) + NodalLoads(i,2:3)' ;
98 end
99
100 %% 3- Process
101 %% Linear system resolution.
102 %%
103
104 K      = KG;
105 FGred = FG;
106
107 K ( fixeddofs , : )    = [];
108 K ( : , fixeddofs )    = [];
109 FGred ( fixeddofs )   = [];
110
111 U = K \ FGred ;
112
113 UG = zeros(2*nnodes,1);  UG( freedofs ) = U ;
114
115 UG
116
117 %% 4- Posprocess

```

Sección B.2. Unidad Temática 2**145**

```

118 % Computation of:
119 % * *ElemStrains*: vector of strains per element
120 % * *ElemStresses*: vector of stress per element
121 % * *NormalForces*: vector of Normal force per element
122 %%
123
124 ElemStrains = zeros(nelems,1);
125 ElemStresses = zeros(nelems,1);
126 NormalForces = zeros(nelems,1);
127
128 for i=1:nelems
129
130 l = Lengths(i) ;
131 ang = Angles(i);
132
133 nodi = ElemConec(i,1);
134 nodj = ElemConec(i,2);
135
136 Eele = Es( ElemConec(i,3) ) ;
137 Aele = As( ElemConec(i,4) ) ;
138
139 elemdofs = nodes2dofs ( [ nodi nodj ]' ,2) ;
140
141 ca = cos(ang);
142 sa = sin(ang);
143
144 R = [ ca -sa 0 0 ;
145         sa ca 0 0 ;
146         0 0 ca -sa ;
147         0 0 sa ca ];
148
149 KL = ...
150 Eele*Aele/l * [ 1 0 -1 0 ;
151             0 0 0 0 ;
152             -1 0 1 0 ;
153             0 0 0 0 ] ;
154
155 Belemloc = 1/ Lengths(i) * [ -1 0 1 0] ;
156
157 LocalDispl = ( R' * UG( elemdofs ) ) ;
158 ElemStrains (i) = Belemloc * LocalDispl ;
159 ElemStresses (i) = Eele * ElemStrains(i) ;
160 NormalForces (i) = Aele * ElemStresses(i) ;
161
162 end
163
164 NormalForces
165
166 %% 5- Plots
167 % Plots normal forces diagram and deformed structure.
168 %%
169
170 % line width (LW) and markersize (MS)
171 LW = 3; MS = 4;
172 loadscfactor = max( max(NodsCoord(:,1)) - min(NodsCoord(:,1)) , ...
173                     max(NodsCoord(:,2)) - min(NodsCoord(:,2)) ) ...

```

Sección B.2. Unidad Temática 2**146**

```

174           / max( abs( FG ) ) * 0.1 ;
175
176 UGmat = reshape(UG,[2,nnodes])' ;
177 NodsCoordDef = NodsCoord + scalefactor*UGmat(:,1:2);
178
179 figure, grid on, hold on, axis equal
180 quiver( NodsCoord(:,1), NodsCoord(:,2), FG(1:2:end)*loadscfactor ...
181                         , FG(2:2:end)*loadscfactor ,0,'c',filled)
182 for i=1:nelems
183     xselem = NodsCoord( ElemConec(i,1:2) , 1 );
184     yselem = NodsCoord( ElemConec(i,1:2) , 2 ) ;
185
186 plot( xselem, yselem, 'k--', 'linewidth', LW*0.75, 'markersize', MS );
187
188 elemdofs = nodes2dofs( ElemConec(i,1:2),3 );
189
190 xselem = NodsCoordDef ( ElemConec(i,1:2) , 1 ) ;
191 yselem = NodsCoordDef ( ElemConec(i,1:2) , 2 ) ;
192
193 plot( xselem, yselem, 'b-o', 'linewidth', LW, 'markersize', MS );
194 end
195 title('Deformed: black: reference configuration, blue: deformed configuration, cyan: loads.
196 ')
197 xlabel('x'); ylabel('y'); print('deformed.png','-dpng');
198
199 figure, hold on
200 quiver( NodsCoord(:,1), NodsCoord(:,2) , FG(1:2:end)*loadscfactor ...
201                         , FG(2:2:end)*loadscfactor ,0,'c',filled)
202
203 for i=1:nelems
204
205     xselem = NodsCoord( ElemConec(i,1:2) , 1 ) ;
206     yselem = NodsCoord( ElemConec(i,1:2) , 2 ) ;
207
208     elemdofs = nodes2dofs( ElemConec(i,1:2), 2 ) ;
209
210     if      NormalForces(i) >0, colornormalforce='b';
211     elseif NormalForces(i) <0, colornormalforce='r';
212     else
213         colornormalforce='k'; end
214
215     plot( xselem, yselem, [colornormalforce '-o'], 'linewidth', LW, 'markersize', MS );
216
217     text( sum(xselem)*0.5*(1.05), sum(yselem)*0.5, sprintf( '%8.2e', NormalForces(i) ) ...
218           , 'color',colornormalforce, 'fontsize', 14);
219
220     axis equal, xlabel('x'), ylabel('y')
221     title('Normal Forces: cyan: external loads, red: compression forces, blue: tension forces.')
222     print('normalforces.png','-dpng');

```

Código B.3: Archivo principal de código FMTrusS.

```

1  %% FMTrusS - Force's Method 2D Truss Solver
2  % The FMTrusS is a simple GNU-Octave script that allows to solve 2D truss
3  % analysis problems using the Force's Method. The current version
4  % was generated for educational purposes. NO WARRANTY is provided and

```

Sección B.2. Unidad Temática 2**147**

```

5 % all errors and/or suggestions are welcome https://www.fing.edu.uy/~jorgepz/ .
6 addpath( [ pwd '/sources' ] );
7
8 %% 1- Input data
9 % Input parameters for geometry and material definition of all the trusses.
10 % Applied loads and fixed degrees of freedom (supports) are also set here.
11 FMTrusSInput
12
13 %% 2- Pre-process
14 % Computation and storage of length, angle, E and A of all truss elements.
15 % Static indetermination computation. Equilibrium matrix assembly and
16 % virtual states definition.
17 FMTrusSPreprocess
18
19 %% 3- Process
20 % Equilibrium equations solved, flexibility matrix assembly and
21 % virtual forces determined.
22 FMTrusSProcess
23
24 %% 4- Output
25 % Plot of truss structure with reactions, normal forces and external loads.
26 FMTrusSPlots

```

Código B.4: Archivo de entrada de datos: FMTrusSInput.m.

```

1 clear all, close all, format compact g
2
3 % section properties: vector with the cross-section areas
4 As = [ 0.001 0.01 ]';
5
6 % material properties: vector with young moduli values
7 Es = [ 210e9 ];
8
9 % --- definitions ---
10 NodsCoord = [ ...
11 -10 0 ;
12 0 10 ;
13 0 0 ;
14 10 0 ] ;
15
16 % inode jnode material section
17 ElecConec = [ ...
18 1 2 1 1 ;
19 2 3 1 2 ; ...
20 2 4 1 1 ...
21 ] ;
22
23 fixeddofs = [ 1 2 5 6 7 8 ] ;
24
25 NodalLoads = [ 2 10000 0 ];
26
27 # Deformed scale factor
28 scalefactor = 1e3;
29
30 # row vector with the dofs related to supports which are replaced by virtual forces
31 virtualforcesupports = [ 7 ] ;

```

Sección B.2. Unidad Temática 2**148**

```

32 # row vector with the truss elements which are replaced by virtual forces
33 virtualforceelements = [ ] ;
34
35 # degree of freedom whose displacement must be determined (leave empty if none)
36 unkndispdof = 3 ;
37 % -----
38

```

Código B.5: Archivo: FMTrusSPreprocess.m.

```

1 % --- compute lengths and inclination of undeformed elements ---
2 Lengths = sqrt( sum( ( NodsCoord( ElemConec(:,2),:) - ...
3 NodsCoord( ElemConec(:,1),:) ).^2 , 2 ) ) ;
4
5 Angles = atan2( ( NodsCoord( ElemConec(:,2),2 ) - NodsCoord( ElemConec(:,1),2 ) ) , ...
6 ( NodsCoord( ElemConec(:,2),1 ) - NodsCoord( ElemConec(:,1),1 ) ) ) ;
7
8 Areas = As( ElemConec(:,4) ) ;
9 Youngs = Es( ElemConec(:,3) ) ;
10
11 nnodes = size( NodsCoord,1 );
12 nelems = size( ElemConec,1 );
13
14 nfixeddofs = length(fixeddofs) ;
15
16 hiperdegree = ( nfixeddofs + nelems ) - 1.0*(2*nnodes) ;
17
18 freedofs = 1:(2*nnodes);
19 freedofs(fixeddofs)=[] ;
20
21 # calculates the total number of force unknowns (element stress and reactions)
22 nforceunknowns = nfixeddofs + nelems ;
23
24 # assembles the vector of virtual force states
25 if length(virtualforceelements)>0
26   virtualforces = [ find( fixeddofs == virtualforceelements ) ...
27   virtualforceelements+nfixeddofs ] ;
28 else
29   virtualforces = [ virtualforceelements+nfixeddofs ] ;
30 end
31
32 # row vector with the indexes of the dofs of the supports left in the isostatic structure
33 isostaticsupports = 1:nfixeddofs ;
34
35 if length(virtualforceelements)>0
36   # deletes the entries corresponding to the supports which are replaced by virtual forces
37   isostaticsupports( find( fixeddofs == virtualforceelements ) ) = [] ;
38 end
39
40 isostaticforceelem = (1:nelems) ;
41 isostaticforceelem(virtualforceelements) = [] ;
42 isostaticforceelem = isostaticforceelem + nfixeddofs ;
43
44 # row vector with the dofs and elements present in the isostatic structure
45 isostaticforces = [ isostaticsupports isostaticforceelem ] ;
46

```

Sección B.2. Unidad Temática 2**149**

```

47 # Equilibrium matrix assembly
48 # each row contains the coefficients of each equilibrium equation for the nodes
49 # each column contains the coefficients corresponding to an unknown reaction
50 # or normal force
51 Meq = zeros( 2*nnodes , nforceunknowns ) ;
52
53 for i=1:nfixeddofs
54   Meq(fixeddofs(i),i) = 1.0 ;
55 end
56
57 # stress
58 for i=1:nelems
59
60   l   = Lengths(i) ;
61   ang = Angles(i);
62
63   nodi = ElemConec(i,1);
64   nodj = ElemConec(i,2);
65
66   elemdofs = nodes2dofs ( [ nodi nodj ]' ,2) ;
67
68   ca = cos(ang); sa = sin(ang);
69   auxproj = [ -ca; -sa; ca; sa] ;
70
71   Meq( elemdofs , i+nfixeddofs ) = - auxproj ;
72 end
73
74 # assemble the external nodal loads vector
75 Fext = zeros(2*nnodes,1);
76
77 for i=1:size(NodalLoads,1)
78   aux = nodes2dofs ( NodalLoads(i,1), 2 ) ;
79   Fext( aux ) = Fext( aux ) + NodalLoads(i,2:3)' ;
80 end

```

Código B.6: Archivo: FMTrusSProcess.m.

```

1 # force states independent terms
2 ForceIndepTerm      = zeros( 2*nnodes,1+hiperdegree);
3 ForceIndepTerm(:,1) = - Fext ;
4
5 Meqred = Meq;
6
7 for j=1:hiperdegree
8   ForceIndepTerm(:,1+j) = -Meq(:,virtualforces(j)) ;
9   Meqred(:,virtualforces(j) ) = [] ;
10 end
11
12
13 x = Meqred \ ForceIndepTerm ;
14
15
16 supportreactions = zeros(nfixeddofs, hiperdegree+1) ;
17
18 supportreactions( isostaticssupports , : ) = x( 1:length(isostaticssupports) ,:) ;
19 if length(virtualforcessupports)>0

```

Sección B.2. Unidad Temática 2**150**

```

20 aux = find( fixeddofs == virtualforcesupports) ;
21 for j=1:hiperdegree
22     supportreactions( aux(j),1+j ) = 1 ;
23 end
24 end
25
26 fprintf('The support reactions in the real and virtual states are:\n');
27 supportreactions
28
29 Ns = zeros(nelems,hiperdegree+1) ;
30
31 % Ns( isostaticforceselem-length(isostaticsupports) , : ) = x( isostaticforceselem, : ) ;
32 Ns( isostaticforceselem- nfixeddofs , : ) = x( (length(isostaticsupports)+1):end, : ) ;
33 if length( virtualforceelements ) > 0
34     for i=1:length(virtualforceelements)
35         Ns(virtualforceelements,i+1) = 1 ;
36     end
37 end
38
39 fprintf('The normal forces of the bars in the real and virtual states are:\n');
40 Ns
41
42 Kf = zeros( hiperdegree, hiperdegree) ;
43 Ff = zeros( hiperdegree, 1) ;
44
45 for i=1:hiperdegree
46     for j = 1:hiperdegree
47         Kf(i,j) = sum( Ns(:,1+i).*Ns(:,1+j) ./ ( Youngs .* Areas ) .* Lengths ) ;
48     end
49     %
50     Ff(i) = - sum( Ns(:,1) .* Ns(:,1+i) ./ ( Youngs .* Areas ) .* Lengths ) ;
51 end
52
53 X = Kf \ Ff
54
55
56 ResultReactions = supportreactions * [ 1; X]
57 ResultNormalForces = Ns * [ 1 ; X ]
58
59 Rext = zeros( 2*nnodes,1) ;
60 Rext(fixeddofs) = ResultReactions ;
61
62
63 Fextaux = zeros(2*nnodes,1);
64 Fextaux(unkndispdof) = 1 ;
65 xaux = Meqred \ - Fextaux ;
66 Nsaux = zeros( nelems ,1) ;
67 Nsaux( isostaticforceselem- nfixeddofs ) = xaux ( (length(isostaticsupports)+1):end )
68
69 disp = sum( ResultNormalForces .* Nsaux ./ ( Youngs .* Areas ) .* Lengths )

```

Código B.7: Archivo: FMTrusSPlots.m.

```

1 LW = 2;
2 MS = 5;
3 loadscfactor = max( max(NodsCoord(:,1)) - min(NodsCoord(:,1)) , ...

```

Sección B.3. Unidad Temática 5**151**

```

4           max(NodsCoord(:,2)) - min(NodsCoord(:,2)) ) ...
5           / max( abs(Fext) ) * 0.2 ;
6
7 figure, hold on
8 quiver( NodsCoord(:,1), NodsCoord(:,2) , Fext(1:2:end)*loadscfactor ...
9         , Fext(2:2:end)*loadscfactor ,0,'g',filled)
10 quiver( NodsCoord(:,1), NodsCoord(:,2) , Rext(1:2:end)*loadscfactor ...
11         , Rext(2:2:end)*loadscfactor ,0,'r',filled)
12
13 for i=1:nelems
14
15 xselem = NodsCoord( ElemConec(i,1:2) , 1 ) ;
16 yselem = NodsCoord( ElemConec(i,1:2) , 2 ) ;
17
18 plot( xselem, yselem, 'k--o', 'linewidth', LW, 'markersize', MS );
19
20 elemdofs = nodes2dofs( ElemConec(i,1:2), 2 ) ;
21
22 if      ResultNormalForces(i) >0, colornormalforce='b';
23 elseif ResultNormalForces(i) <0, colornormalforce='r';
24 else                           colornormalforce='k'; end
25
26 text( sum(xselem)*0.5, sum(yselem)*0.5, sprintf( '%8.2e', ResultNormalForces(i) ) ...
27       , 'color',colornormalforce, 'fontsize', 14);
28 end
29 axis equal, xlabel('x'), ylabel('y')
30 title('Forces results: green: external loads, red: support reactions and blue normal forces
.')
```

B.3 Unidad Temática 5

Código B.8: Archivo: emparrillados.m.

```

1 % -----
2 % ejemplo de codigo para analisis de emparrillados usando a metodo matricial
3 % Ejecucion en GNU-Octave – Octubre 2019 – Jorge Perez Zerpa, Ignacio Suarez, Bruno
4 % ----- Bouchard
5
6 close all, clear all
7
8 l = 2      ;
9 E = 210e9 ;
10 nu = 0.3   ;
11 P = 4e3    ;
12
13 G = 80.7e9
14 J = 0.141*0.05^4
15
16 I = .05^4/12 ;
17 A = .05^2    ;
18
19 %      x      z
20 Nodes = [ 0    l/2   ; ...
21           l    l/2   ; ...
```

Sección B.3. Unidad Temática 5**152**

```

22      l    0 ] ;
23
24 %     n1 n2 mat sec
25 Conec = [ 1 2 ; ...
26      2 3 ] ;
27
28 Angles = [ 0 -pi/2 ]' ;
29
30 fixeddofs = [ 1 2 3 7 ];
31
32 nelems = size( Conec,1);
33 nnodes = size( Nodes,1);
34
35
36 freedofs = (1:(3*nnodes));
37 freedofs(fixeddofs) = [] ;
38
39
40 KG      = sparse( 3*nnodes, 3*nnodes ) ;
41
42 for i = 1:nelems
43
44 alphay = Angles(i); ca = cos(alphay); sa = sin(alphay);
45
46 R = [ ca 0 -sa 0 0 0 ; ...
47      0 1 0 0 0 0 ; ...
48      sa 0 ca 0 0 0 ; ...
49      0 0 0 ca 0 -sa ; ...
50      0 0 0 0 1 0 ; ...
51      0 0 0 sa 0 ca ] ;
52
53 elemNodes = Conec( i,:);
54 lelem     = norm( Nodes( elemNodes(2),:) - Nodes( elemNodes(1),:) ) ;
55
56 KL = zeros(6,6);
57
58 KL([1 4], [1 4])      = G*I/lelem * [ 1 -1 ; ...
59                                -1 1 ] ;
60
61 KL([2 3 5 6], [2 3 5 6]) = E*I * [ 12/(lelem^3)  6/(lelem^2) -12/(lelem^3)  6/(lelem^2)
62      ; ...
63                                6/(lelem^2)  4/(lelem ) -6/(lelem^2)  2/(lelem ) ;
64                                ...
65                                -12/(lelem^3) -6/(lelem^2)  12/(lelem^3) -6/(lelem^2) ;
66                                ...
67                                6/(lelem^2)  2/(lelem ) -6/(lelem^2)  4/(lelem ) ] ;
68
69
70 dofsElem = [ (elemNodes(1)*3-2):(elemNodes(1)*3) (elemNodes(2)*3-2):(elemNodes(2)*3) ] ;
71
72 KG( dofsElem, dofsElem ) += R * KL * R' ;
73 end
74
75 FG      = zeros ( 3*nnodes, 1 ) ;
76 FG(8) = -P/2 ;

```

Sección B.4. Unidad Temática 8

153

```

74 % imposicion de condiciones de contorno
75 KG(fixeddofs, :) = [] ; KG(:, fixeddofs) = [] ;
76 FG( fixeddofs ) = [] ;
77
78 % resolucion de sistema
79 u = KG\FG ;
80 UG = zeros( 3*nnodes,1);
81 UG(freedofs ) = u
82
83
84
85 %ploteo de parrillado
86 figure
87 hold on, grid on
88 diameterStructure = max(max( Nodes)) - min(min(Nodes)) ;
89 margen = 0.1 * diameterStructure ;
90
91 for i=1:nelems
92 nodesElem = Conec(i,:)
93 p1 = Nodes( nodesElem(1,:))
94 p2 = Nodes( nodesElem(2,:))
95 plot3( [p1(1) p2(1)], [p1(2) p2(2)], [0 0] , 'b')
96 end
97 view(3)

```

B.4 Unidad Temática 8

Código B.9: Archivo principal de código femplateexample.

```

1 % =====
2 % --- Example of Finite Element Method for a thin plate ---
3 % Solves a rectangular plate with vertical normal load
4 % using quadrilateral plate elements.
5 % working on GNU Octave v. 3.6.4
6 % @ Copyleft, license - Feb-2014 - J.M. Perez Zerpa, P. Castrillo
7 %
8 % Instituto de Estructuras y Transporte
9 % Universidad de la Republica
10 % Montevideo, Uruguay
11 %
12
13 clc, clear all, close all,
14
15 % ===== Parameters =====
16
17
18 % --- Material parameters -----
19 E = 3004160 ; % Young modulus
20 nu = 0.0 ; % Poisson coefficient
21
22
23 % --- Geometrical parameters ---
24 L = [ 4 4 ]' ; % L = [ length in dimension x, length dimension y]
25 t = 0.1 ; % thickness

```

Sección B.4. Unidad Temática 8**154**

```

26
27
28 % --- Mesh parameters ---
29 nx = 20 ; % # divisions in direction x
30
31 ny = ceil(L(2)/L(1)*nx) ; % # divisions in direction y
32
33 nel = [ nx ny ]' ;
34 nnos = nel + 1 ; % # of nodes in each direction
35 nnostot = nnos(1)*nnos(2) ; % # of total nodes
36
37 % --- Load and boundary conditions -----
38 q = -1 ; % Distributed load on surface
39 % Boundary conditions: 0 free 1 displacement fixed 2 displacement and rotation fixed
40 CondSouth = 1 ;
41 CondNorth = 1 ;
42 CondWest = 0 ;
43 CondEast = 0 ;
44
45 % --- Nodes coordinates ---
46 lins1 = linspace( 0 , L(1) , nnos(1) )';
47 lins2 = linspace( 0 , L(2) , nnos(2) )';
48
49 % =====
50
51 % ===== Process =====
52
53
54 % --- nodes coordinates matrix ---
55 coordnodes = [] ;
56 for i = 1:nnos(2)
57   coordnodes( ( nnos(1) * (i-1) + 1 : nnos(1)*i ),:) = [ lins1 lins2(i)*ones(nnos(1),1)
58   ] ;
59 end
60
61 % ---- Conectivity matrix ---
62 Mcon = [] ; %
63 for j = 1:nel(2)
64   for i = 1:nel(1)
65     intri = (i-1)+1+(j-1)*nel(1);
66     Mcon( intri , : ) = [(j-1)*nnos(1)+i (j-1)*nnos(1)+i+1 j*nnos(1)+i+1 j*nnos(1)+i
67     ] ;
68   end
69 end
70
71 % --- Degrees of freedom ---
72 NodesSouth = ( 1:nnos(1) )' ;
73 NodesEast = ( nnos(1):nnos(1):nnostot )' ;
74 NodesNorth = ( nnos(1)*ny+1:nnostot )' ;
75 NodesWest = ( 1:nnos(1):nnos(1)*ny+1 )' ;
76
77 flagfuerzapuntual = 0 ;
78
79 % fixed degrees of freedom
80 Gradlibfijab=[] ;
81 %

```

Sección B.4. Unidad Temática 8**155**

```

80 | for i=1:length(NodesSouth)
81 |   switch CondSouth
82 |     case 1
83 |       Gradlibfijab = [ Gradlibfijab 3*NodesSouth(i)-2 3*NodesSouth(i)-1 ] ;
84 |       ;
85 |       %~ Gradlibfijab = [ Gradlibfijab 3*NodesSouth(i)-2 ] ;
86 |     case 2
87 |       Gradlibfijab = [ Gradlibfijab 3*NodesSouth(i)-2 3*NodesSouth(i)-1 3*NodesSouth(i) ] ;
88 |       ;
89 |     end
90 |
91 |   Gradlibfijder=[];
92 |   %
93 |   for i=1:length(NodesEast)
94 |     switch CondEast
95 |       case 1
96 |         Gradlibfijder = [ Gradlibfijder 3*NodesEast(i)-2 3*NodesEast(i) ];
97 |       case 2
98 |         Gradlibfijder = [ Gradlibfijder 3*NodesEast(i)-2 3*NodesEast(i)-1 3*NodesEast(i) ] ;
99 |       end
100 |
101 |   Gradlibfijarr=[];
102 |   %
103 |   for i=1:length(NodesNorth)
104 |     switch CondNorth
105 |       case 1
106 |         Gradlibfijarr = [ Gradlibfijarr 3*NodesNorth(i)-2 3*NodesNorth(i)-1 ] ;
107 |         %~ Gradlibfijarr = [ Gradlibfijarr 3*NodesNorth(i)-2 ] ;
108 |       case 2
109 |         Gradlibfijarr = [ Gradlibfijarr 3*NodesNorth(i)-2 3*NodesNorth(i)-1 3*NodesNorth(i) ] ;
110 |         ;
111 |     end
112 |
113 |   Gradlibfijizq=[];
114 |   %
115 |   for i=1:length(NodesWest)
116 |     switch CondWest
117 |       case 1
118 |         Gradlibfijizq=[Gradlibfijizq 3*NodesWest(i)-2 3*NodesWest(i) ] ;
119 |       case 2
120 |         Gradlibfijizq=[Gradlibfijizq 3*NodesWest(i)-2 3*NodesWest(i)-1 3*NodesWest(i) ] ;
121 |       end
122 |     end
123 |
124 |   % fixed degrees of freedom
125 |   Gradlibfij = [Gradlibfijab Gradlibfijder Gradlibfijarr Gradlibfijizq];
126 |   Gradlibfij = unique(Gradlibfij);
127 |
128 |   Gradlibfij
129 |
130 |   %~ stop
131 |
132 |

```

Sección B.4. Unidad Temática 8

156

```

133 % free degrees of freedom
134 Gradliblib = 1:3*nnostot ;
135
136 % center of the plate node
137 nodomedio = floor(nnostot/2) +1;
138 % center of the plate dof
139 gdlwmedio = nodomedio * 3 - 2 ;
140
141 Gradliblib (Gradlibfij) = [];
142
143 % --- Build Elements coordinates vectors
144 neltotal = nel(1)*nel(2); % total # of elements
145 for i = 1:neltotal
146     Xel(:,i) = (coordnodes( Mcon(i,:) , 1 )) ;
147     Yel(:,i) = (coordnodes( Mcon(i,:) , 2 )) ;
148 end
149
150 % ----- Stiffness matrix -----
151
152 D = E * t^3 / ( 12 * (1-nu^2) )
153 KG = sparse( 3*nnostot,3*nnostot);
154
155 a = L(1) / ( nel(1) * 2 ) ;
156 b = L(2) / ( nel(2) * 2 ) ;
157
158 Ke1 = b / ( 6 * a^3 ) * ...
159 [ 6           6*a          0      -6      6*a          0      -3      3*a          0      3      3*a          0
160 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
161   6*a         8*a^2        0      -6*a        4*a^2        0      -3*a        2*a^2        0      3*a        4*a^2        0
162 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
163   0           0           0       0           0           0           0           0           0           0           0           0
164 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
165   -6          -6*a         0       6           -6*a         0           3           -3*a         0           -3          -3*a         0
166 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
167   6*a         4*a^2        0      -6*a        8*a^2        0      -3*a        4*a^2        0      3*a        2*a^2        0
168 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
169   0           0           0       0           0           0           0           0           0           0           0           0
170 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
171   -3          -3*a         0       3           -3*a         0           6           -6*a         0           -6          -6*a         0
172 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
173   3*a         2*a^2        0      -3*a        4*a^2        0      -6*a        8*a^2        0      6*a        4*a^2        0
174 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
175   0           0           0       0           0           0           0           0           0           0           0           0
176 ];
177
178 Ke2 = a / (6*b^3) * ...
179 [ 6           0           6*b          3      0      3*b          -3      0      3*b          -6      0      6*b
180 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
181   0           0           0       0       0       0           0           0           0           0           0           0
182 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
183   0           0           0       0       0       0           0           0           0           0           0           0
184 ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;           ;
185   0           0           0       0       0       0           0           0           0           0           0           0
186 ];

```

Sección B.4. Unidad Temática 8**157**

```

175      6*b      0      8*b^2      3*b      0      4*b^2      -3*b      0      2*b^2      -6*b      0
176      4*b^2;
177      3      0      3*b      6      0      6*b      -6      0      6*b      -3      0
178      3*b      0      4*b^2      6*b      0      8*b^2      -6*b      0      4*b^2      -3*b      0
179      2*b^2;
180      -3      0      -3*b      -6      0      -6*b      6      0      -6*b      3      0
181      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
182      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
183      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
184      0      0      4*b^2      3*b      0      2*b^2      -3*b      0      4*b^2      -6*b      0
185      8*b^2 ];
186 Ke3 = nu / (2*a*b) * ...
187 [ 1      a      b      -1      0      -b      1      0
188      0      -1      -a      0      0      0      0      0
189      a      0      2*a*b      0      0      0      0      0
190      -a      0      0      0      0      0      0      0
191      b      2*a*b      0      -b      0      0      0      0
192      0      0      0      1      -a      b      -1      a
193      -1      0      -b      0      0      -a*b      a      0      0
194      0      0      0      0      0      -2*a*b      a      0      0
195      0      0      0      0      0      0      0      -b      2*a
196      0      0      0      0      0      0      0      0      0
197      0      0      0      0      0      0      0      0      0
198      0      0      0      0      0      0      0      b      0
199
200
201 Ke4 = (1-nu)/ (30*a*b) * ...
202 [ 21      3*a      3*b      -21      3*a      -3*b      21      -3*a
203      -3*b      -21      -3*a      3*b;
204      3*a      8*a^2      0      -3*a      -2*a^2      0      3*a      2*a^2
205      0      -3*a      -8*a^2      0      -8*a^2      3*b      0      2*
      b^2      -3*b      0      -2*b^2;

```

Sección B.4. Unidad Temática 8**158**

```

205      -21      -3*a      -3*b      21      -3*a      3*b      -21      3*a
206      3*a      3*b      21      -3*a      8*a^2      0      3*a      -8*a^2
207      -2*a^2      0      -3*a      2*a^2      0;
208      0      -8*b^2      3*b      0      8*b^2      -3*b      0
209      -3*b      0      -2*b^2      3*b      0      2*b^2;
210      21      3*a      3*b      -21      3*a      -3*b      21      -3*a
211      -3*a      2*a^2      0      3*a      -8*a^2      0      -3*a      8*a^2
212      0      3*a      -2*a^2      0;
213      -3*b      0      2*b^2      3*b      0      -2*b^2      -3*b      0
214      8*b^2      3*b      0      -8*b^2;
215      -21      -3*a      -3*b      21      -3*a      3*b      -21      3*a
216      3*a      2*a^2      0      3*a      2*a^2      0      -3*a      -2*a^2
217      0      3*a      8*a^2      0;
218      3*b      0      -2*b^2      -3*b      0      2*b^2      3*b      0
219      -8*b^2      -3*b      0      8*b^2      0;
220      Ke = D * (Ke1 + Ke2 + Ke3 + Ke4) ;
221
222      [v,d] = eig( Ke )      ;
223      vall = sort(diag(d)) ;
224      valorespropiosmaschicos = vall(1:3)
225
226      for i=1:neltotal
227          gdl = [];
228          for j=1:4
229              gdl = [ gdl  Mcon(i,j)*3-2 Mcon(i,j)*3-1 Mcon(i,j)*3 ] ;
230          end
231          KG( gdl , gdl ) = KG( gdl , gdl ) + Ke ;
232      end
233
234      % ----- Nodal forces vector -----
235      qelem = 4*q*a*b* [1/4    a/12    b/12    1/4    -a/12    b/12    1/4    -a/12    -b/12    1/4    a
236      /12    -b/12 ]' ;
237      qtot = zeros(3*nnostot,1);
238      for i=1:neltotal
239          gdl = [];
240          for j=1:4
241              gdl = [ gdl Mcon(i,j)*3-2 Mcon(i,j)*3-1 Mcon(i,j)*3];
242          end
243          %
244          qtot( gdl ) = qtot( gdl ) + qelem;
245      end
246
247      %--- if the flag is 1 then a load is added at the center point ---
248      if flagfuerzapuntual == 1
249          gdlwmedio      = nodomedio * 3 - 2 ;
250          qtot( gdlwmedio ) = qtot( gdlwmedio ) - 1 ;
251      end
252
253      KGu = KG ( Gradliblib , Gradliblib ) ;

```

Sección B.4. Unidad Temática 8**159**

```

251 qtotlib = qtot;
252 qtotlib( Gradlibfij ) = [] ;
253
254 u      = KG\qtotlib ;
255
256 U = zeros( 3 * nnostot , 1 ) ;
257
258 U(Gradliblib) = u ;
259
260 Vz    = U( 1 : 3 : 3*nnostot-2 ) ;
261 Titax = U( 2 : 3 : 3*nnostot-1 ) ;
262 Titay = U( 3 : 3 : 3*nnostot ) ;
263
264 flechmaxnum = min(Vz)
265 flechmaxteo = 0.322*q/D
266 errorrelfemax = ( flechmaxnum - flechmaxteo ) / flechmaxteo
267
268 KGr = KG ( Gradlibfij , Gradliblib ) ;
269
270 Rfij = KGr * u ;
271
272 R = zeros( 3*nnostot , 1 ) + qtot ;
273 R(Gradlibfij) = Rfij ;
274
275 fuerzaapoyo = R( gdlwmedio )
276
277 Fz = R( 1 : 3 : 3*nnostot-2 ) ;
278 Mx = R( 2 : 3 : 3*nnostot-1 ) ;
279 My = R( 3 : 3 : 3*nnostot ) ;
280
281 % converts the vector displacements to a matrix
282 MatVz = zeros( nnos(1) , nnos(2) ) ;
283
284 for j=1:nnos(2)
285   MatVz( 1:nnos(1) , j ) = Vz( ((j-1)*nnos(1)+1):(j*nnos(1)) ) ;
286 end
287 % =====
288
289
290
291
292 % ===== Plotings =====
293
294 % mesh graph
295 figure
296 hold on, grid on
297 for i=1:neltotal
298   plot( coordnodes( Mcon(i,:) , 1 ) , coordnodes( Mcon(i,:) , 2 ) )
299 end
300 title('mesh graph')
301
302 % deformed graph
303 figure
304 surf(MatVz)
305 title('Deformed graph')
306 xlabel('x'), ylabel('y')

```

Sección B.4. Unidad Temática 8

160

307

308

% =====

Apéndice C

Fórmulas útiles

Método de Desplazamientos matricial para reticulados.

Ecuación de rigidez del elemento finito: $\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e$

Matriz de rigidez: Coordenadas locales bidimensional

$$\mathbf{K}_L^e = \frac{\Omega_e E_e}{L_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^e = \begin{pmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez: - Coordenadas globales - $\mathbf{K}_G^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}_L^e \mathbf{R}^T$

$$\mathbf{K}_G^e = \frac{\Omega_e E_e}{L_e} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}$$

$c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$ siendo α el ángulo que forman los ejes globales con los locales (sentido: eje global hacia eje local antihorario positivo).

Vector desplazamiento - Coordenadas globales - $\mathbf{u}^e = \mathbf{R} \mathbf{u}_L^e$

$$\mathbf{u}^e = [u_1^e \quad v_1^e \quad u_2^e \quad v_2^e]^T$$

Método de las fuerzas para reticulados.

Grado de hiperestaticidad total: $gh = n_R + n_S - n_C n_E$

Grado de hiperestaticidad externa: $ghe = n_R - n_E$

Grado de hiperestaticidad interna: $ghi = gh - ghe$

Energía potencial complementaria:

$$\Pi^*(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{(N_0^e + \sum_{j=1}^{gh} X_j N_j^e)^2}{E^e A^e} \ell^e - \mathbf{u}^T \left(\mathbf{f}_0 + \sum_{j=1}^{gh} X_j \mathbf{f}_j \right).$$

Sistema de ecuaciones del MF:

$$\mathbf{M}_f \mathbf{X} = \mathbf{f}_f$$

con

$$(\mathbf{M}_f)_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{N_i^e N_j^e}{E^e A^e} \ell^e, \quad (\mathbf{f}_f)_i = - \sum_{e=1}^{n_e} \frac{N_0^e N_i^e}{E^e A^e} \ell^e.$$

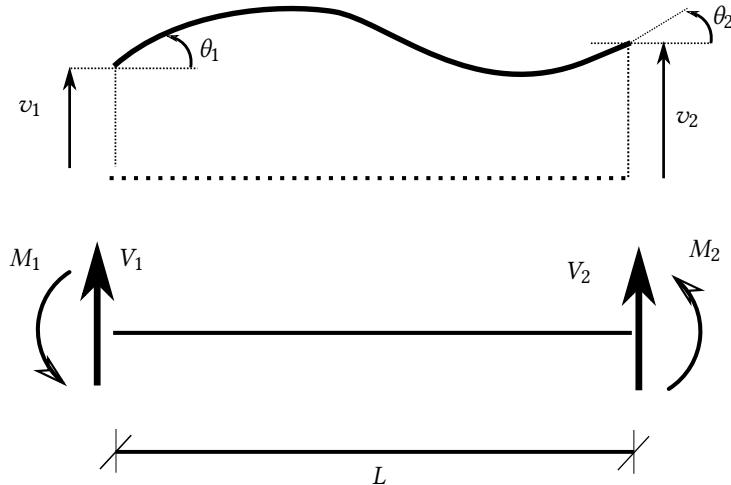
Directa en las barras y reacciones:

$$N^e(x) = N_0^e + \sum_{j=1}^{gh} X_j N_j^e; \quad R^i(x) = R_0^i + \sum_{j=1}^{gh} X_j R_j^i$$

Desplazamiento asociado al estado adicional $gh + 1$:

$$\delta_{gh+1} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{N_{gh+1}^e (N_0^e + \sum_{j=1}^{gh} X_j N_j^e)}{E^e A^e} \ell^e$$

Método de Slope-Deflection



Desplazamiento relativo:

$$\psi = \frac{v_2 - v_1}{L}$$

Momentos nodales:

$$\begin{cases} M_{12} &= \frac{2EI}{L} (2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + M_{12}^{emp} \\ M_{21} &= \frac{2EI}{L} (\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + M_{21}^{emp} \end{cases}$$

Fuerzas nodales:

$$\begin{cases} F_{12} = \frac{M_{12}+M_{21}}{L} + F_{12}^{tramo-iso} \\ F_{21} = -\frac{(M_{12}+M_{21})}{L} + F_{21}^{tramo-iso} \end{cases}$$

Caso particular ($M_{21} = 0$):

$$M_{12} = \frac{3EI}{L} (\theta_1 - \psi) + M_{12}^{emp}$$

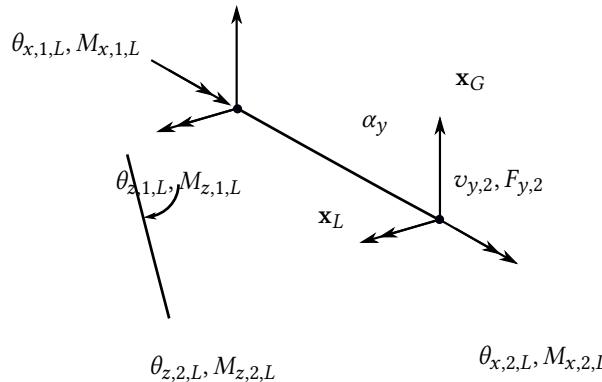
Estructuras tridimensionales de barras

Torsión

$$M_t = GJ\Theta, \quad \Theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{l}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$v_{y,1}, F_{y,1}$$



Ecuación de rigidez del elemento finito: $\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e$

Matriz de rigidez -coordenadas locales-

$$\mathbf{K}_L^e = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_z}{l^3} & 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & -12\frac{EI_z}{l^3} & 6\frac{EI_z}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EI_z}{l^2} & 4\frac{EI_z}{l} & 0 & -6\frac{EI_z}{l^2} & 2\frac{EI_z}{l} \\ -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_z}{l^3} & -6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & 12\frac{EI_z}{l^3} & -6\frac{EI_z}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EI_z}{l^2} & 2\frac{EI_z}{l} & 0 & -6\frac{EI_z}{l^2} & 4\frac{EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación:

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_y) & 0 & -\sin(\alpha_y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_y) & 0 & -\sin(\alpha_y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) \end{bmatrix}$$

α_y es el ángulo que forman los ejes globales con los locales (sentido: eje global hacia eje local como se muestra en la figura).

Matriz de rigidez - coordenadas globales - $\mathbf{K}_G^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}_L^e \mathbf{R}^{eT}$

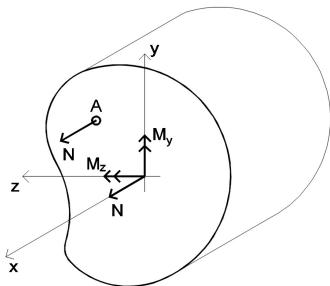
Vector desplazamiento - coordenadas globales - $\mathbf{u}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{u}_L^e$

$$\mathbf{u}^e = [\theta_{x,1} \quad v_{y,1} \quad \theta_{z,1} \quad \theta_{x,2} \quad v_{y,2} \quad \theta_{z,2}]^T$$

Vector Fuerza - coordenadas globales - $\mathbf{f}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{f}_L^e$

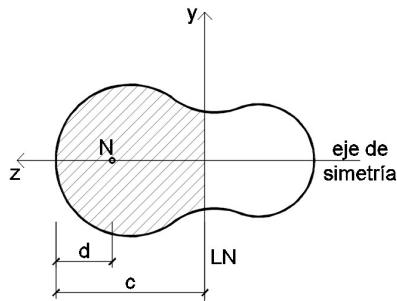
$$\mathbf{f}^e = [M_{x,1} \quad F_{y,1} \quad M_{z,1} \quad M_{x,2} \quad F_{y,2} \quad M_{z,2}]^T$$

Análisis seccional



$$\sigma(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} \left(1 + \frac{y_A}{\rho_z^2} y + \frac{z_A}{\rho_y^2} z \right)$$

$$\rho_y^2 = \frac{I_y}{A}; \quad \rho_z^2 = \frac{I_z}{A}$$

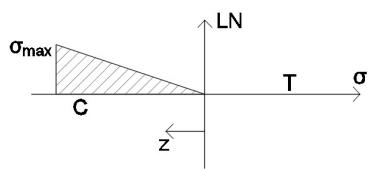


Ecuación de la línea neutra:

$$1 + \frac{y_A}{\rho_z^2} y + \frac{z_A}{\rho_y^2} z = 0$$

Equilibrio de fuerzas en la sección:

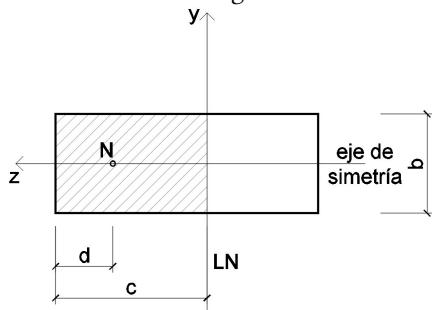
$$N = \int_A \sigma dA; \quad \sigma = k.z = -\frac{\sigma_{maxc}}{c} z$$



Equilibrio de momentos en la sección:

$$N(c - d) = \int_A \sigma dA;$$

Caso Sección Rectangular



$$c = 3d$$

$$N = -\frac{\sigma_{maxc}}{c} \frac{b c^2}{2}$$

$$\sigma_{maxc} = -\frac{2N}{bc}$$

Estabilidad Estructural

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + N \frac{d^2 v}{dx^2} + q = 0; \quad k^2 = \frac{N}{EI}$$

Caso de compresión : $v(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) + Cx + D$

$$V(x) = \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + N \frac{dv}{dx}$$

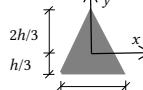
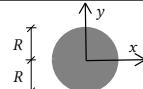
$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\sigma_{cr,i} = \frac{EI\pi^2}{AL_{p,i}^2}; \quad L_{p,i} = \beta_i L; \quad i \in \{y, z\}$$

$$\sigma_{cr,i} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_i^2}; \quad \lambda_i = \frac{L_{p,i}}{\rho_i}; \quad \rho_i = \sqrt{\frac{I_i}{A}}$$

$$\frac{M}{W} + \frac{N}{A} \leqslant \min\{\sigma_{fluencia}, \sigma_{cr}\}$$

Tabla de propiedades geométricas

	I_x	W_x	I_y	W_y
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{hb^2}{6}$
	$\frac{bh^3}{36}$	-	$\frac{hb^3}{48}$	-
	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^3}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^3}{4}$

Momentos de empotramiento perfecto I=cte				
	Empotramiento en un apoyo		Empotramiento en ambos apoyos	
	M	M'	M	M'
	$\frac{Qab}{2l^2}(l+b)$	$\frac{Qab}{2l^2}(l+a)$	$\frac{Qab}{l^2} \cdot b$	$\frac{Qab}{l^2}$
	$\frac{3}{16}Ql$	$\frac{3}{16}Ql$	$\frac{1}{8}Ql$	$\frac{1}{8}Ql$
	$\frac{3}{2}Qa\left(1 - \frac{a}{l}\right)$	$\frac{3}{2}Qa\left(1 - \frac{a}{l}\right)$	$Qa\left(1 - \frac{a}{l}\right)$	$Qa\left(1 - \frac{a}{l}\right)$
	$\frac{1}{3}Ql$	$\frac{1}{3}Ql$	$\frac{2}{9}Ql$	$\frac{2}{9}Ql$
	$\frac{15}{32}Ql$	$\frac{15}{32}Ql$	$\frac{5}{16}Ql$	$\frac{5}{16}Ql$
	$\frac{1}{8}ql^2$	$\frac{1}{8}ql^2$	$\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{1}{12}ql^2$
	$\frac{qa^2}{8} \left(2 - \frac{a}{l}\right)^2$	$\frac{qa^2}{8} \left(2 - \frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qa^2}{12} \left(6 - 8\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qa^2}{12} \left(4\frac{a}{l} - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$
	$\frac{9}{128}ql^2$	$\frac{7}{128}ql^2$	$\frac{11}{192}ql^2$	$\frac{5}{192}ql^2$
	$\frac{qa^2}{4} \left(3 - 2\frac{a}{l}\right)$	$\frac{qa^2}{4} \left(3 - 2\frac{a}{l}\right)$	$\frac{qa^2}{6} \left(3 - 2\frac{a}{l}\right)$	$\frac{qa^2}{6} \left(3 - 2\frac{a}{l}\right)$
	$\frac{qabc}{2l^2} \left(l + b - \frac{c^2}{4a}\right)$	$\frac{qabc}{2l^2} \left(l + a - \frac{c^2}{4b}\right)$	$\frac{qc}{l^2} \left[ab^2 + \frac{c^2}{12}(l-3b)\right]$	$\frac{qc}{l^2} \left[a^2b + \frac{c^2}{12}(l-3a)\right]$
	$\frac{qla}{16} \left(3 - \frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qla}{16} \left(3 - \frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qla}{24} \left(3 - \frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qla}{24} \left(3 - \frac{a^2}{l^2}\right)$
	$\frac{qa^2}{120} \left(40 - 45\frac{a}{l} + 12\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qa^2}{60} \left(10 - 6\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qa^2}{30} \left(10 - 15\frac{a}{l} + 6\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qa^2}{20} \left(5\frac{a}{l} - 4\frac{a^2}{l^2}\right)$
	$\frac{7}{120}ql^2$	$\frac{1}{15}ql^2$	$\frac{1}{30}ql^2$	$\frac{1}{20}ql^2$