

# Métodos Numéricos - Gauss Legendre

Natzarena Rodríguez, Ángel Cárdenas, Édison Báez, Erick Criollo, Jorge Ramos

Ingeniería de Software

Universidad de las fuerzas armadas "ESPE". Quito, Ecuador

nnrodriguez2@espe.edu.ec

arcardenas1@espe.edu.ec

epbaez1@espe.edu.ec

edcriollo1@espe.edu.ec

jsramos@espe.edu.ec

**Abstract**—The present project carries with it the resolution of methods of integration, such as: trapezoidal methods, Simpson 3/8 and the implementation of the Gauss Legendre method. The same that have been carried out with the tool of Matlab to provide the user with a graphical interface in where each of the methods would be calculated if the user so want. The document is divided into 6 sections: 1) Introduction, 2) New Method (Gauss Legendre), 3) Interface, 4) Experimentation, 5) Results and 6) Conclusions. The new Gauss Legendre numerical method of integration aims to approximate the definite integral of a function, it is built to obtain the exact result when integrate polynomials of degree  $2n-1$  or less, to achieve it we select evaluation points  $x$  and weights  $w$ . this rule it is usually expressed for an interval  $[1, 1]$

## I. RESUMEN

Como bien sabemos la integración numérica es una herramienta esencial que para poder obtener valores aproximados de integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente con facilidad. Con la finalidad de analizar la precisión de las integrales se realizó la implementación gráfica de tres métodos de integración: Regla de Trapecios, Simpson tres octavos y Gauss Legendre basándonos en las fórmulas de Newton-Cotes que plantean la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar. La experimentación consistió en analizar tres funciones con cada uno de los métodos con diferente número de trapecios, polinomios y puntos en un determinado intervalo para analizar su resultado numérico y las gráficas que se generan según el método. Los resultados arrojan que en el ejemplo dos y tres el método de Gauss Legendre tiene mayor precisión, con un error relativo menor al 0.1% analizado con ocho puntos. Se concluyo que para mayor fidelidad en la obtención de integrales la utilización del método de Gauss Legendre es mejor comparado con los otros dos métodos.

## II. INTRODUCCIÓN

El presente proyecto lleva consigo la resolución de métodos de integración, tales como: métodos de trapecios, Simpson 3/8 y la implementación del método de Gauss Legendre. Los mismos que han sido llevados a cabo con la herramienta de Matlab para proporcionar al usuario una interfaz gráfica en donde se calculará cada uno de los métodos si el usuario así lo desea. El documento se encuentra dividido en 6 secciones: 1)

Introducción, 2) Nuevo Método (Gauss Legendre), 3) Interfaz, 4) Experimentación, 5) Resultados y 6) Conclusiones.

El nuevo método numérico de integración Gauss Legendre tiene como objetivo aproximar la integral definida de una función, está construida para obtener el resultado exacto al integrar polinomios de grado  $2n-1$  o menores, para conseguirlo seleccionamos puntos de evaluación  $x$  y pesos  $w$ . Esta regla generalmente se expresa para un intervalo  $[-1, 1]$

## III. GAUSS LEGENDRE

### A. ¿Cómo funciona este método?

Es una de las técnicas que se aplican para obtener una aproximación más precisa de una integral

## IV. GAUSS LEGENDRE DE DOS PUNTOS

El objetivo de esta es determinar los coeficientes y las abscisas de una ecuación de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \quad (1)$$

Donde

- $c_1$  y  $c_2$  son los coeficientes
- $x_1$  y  $x_2$  son puntos que no están fijos en los extremos (abscisas)

Estos deben ser exactos para polinomios cúbicos ( $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ), por lo que podemos evaluarla en cada uno de los puntos de este polinomio

$$\int_{-1}^1 1dx = w_1(1) + w_2(1) = 2 = w_1 + w_2$$

$$\int_{-1}^1 xdx = w_1(x) + w_2(x) = 0 = w_1x_1 + w_2x_2$$

$$\int_{-1}^1 x^2dx = w_1(x^2) + w_2(x^2) = \frac{2}{3} = w_1x_1^2 + w_2x_2^2$$

$$\int_{-1}^1 x^3dx = w_1(x^3) + w_2(x^3) = 0 = w_1x_1^3 + w_2x_2^3 \quad (2)$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones tenemos que

Table I: Nodos y pesos para El método de Gauss Legendre

N	Nodos $z$	Pesos $w$	Error
2	$-0.577350269$ $0.577350269$	$1.00000$ $1.00000$	$\frac{f^{(4)}c}{135}$
3	$\pm 0.7745966$ $0.000000000$	$0.555556$ $0.888888$	$\frac{f^{(6)}c}{15750}$
4	$\pm 0.8611363$ $\pm 0.33998104$	$0.3478548$ $0.65214515$	$\frac{f^{(8)}c}{3472875}$
5	$\pm 0.9061798$ $\pm 0.53846963$ $0.000000000$	$0.23692688$ $0.4786867$ $0.5688888$	$\frac{f^{(10)}c}{1237732650}$
6	$\pm 0.9324695$ $\pm 0.66120938$ $\pm 0.23861918$	$0.17132449$ $0.36076157$ $0.46791356$	$\frac{f^{(12)}c(2^13)(6!^4)}{(12!)^313!}$
7	$\pm 0.94910791$ $\pm 0.74153118$ $\pm 0.40584515$ $0.000000000$	$0.12948486$ $0.27970539$ $0.38183005$ $0.41791048$	$\frac{f^{(14)}c(2^15)(7!^4)}{(14!)^315!}$
8	$\pm 0.96028985$ $\pm 0.79666477$ $\pm 0.52553240$ $\pm 0.18343464$	$0.10122853$ $0.22238103$ $0.310764$ $0.36268378$	$\frac{f^{(16)}c(2^17)(8!^4)}{(16!)^317!}$

[2] Jhon Mathews y Kurtis Fink - Nodos Y pesos para Gauss Legendre

$$w_1 + w_2 = 2 \quad (3)$$

$$w_1x_1 = w_2x_2 \quad (4)$$

$$w_1x_1^2 + w_2x_2^2 = \frac{2}{3} \quad (5)$$

$$w_1x_1^3 = -w_2x_2^3 \quad (6)$$

Si resolvemos la ecuación (6) y (4) teniendo en cuenta que  $x_1$  y  $x_2$  son diferentes tenemos:

$$x_1^2 = x_2^2; x_1 = -x_2 \quad (7)$$

Usando (7) y dividiendo (4) entre  $x_1$  por la derecha y  $x_2$  por la izquierda:

$$w_1 = w_2 \quad (8)$$

Podemos sustituir la ecuación (8) en la ecuación (5):

$$w_1 = w_2 = 1 \quad (9)$$

Si usamos la ecuación (9) y (7) en la ecuación (5):

$$w_1x_1^2 + w_2x_2^2 = x_2^2 + x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{3} \quad (10)$$

Para terminar resolvemos la ecuación (10) y (7)

$$-x_1 = x_2 = -0.5773503 \quad (11)$$

De esta manera obtenemos la fórmula de Gauss Legendre de dos puntos:

$$\int_{-1}^2 f(x)dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (12)$$

[1] Jhon Mathews y Kurtis Fink - fórmula de Gauss Legendre de dos puntos

#### A. Nodos y pesos para El método de Gauss Legendre

Esta tabla nos facilitará el trabajo a la hora de resolver ejercicios, ya que nos da los pesos y nodos

#### B. Ejemplo de Gauss Legendre de dos puntos

con la función  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  en el intervalo  $(-0.8, 1.5)$  se procederá a realizar el ejemplo con dos puntos:

Cambio de límites de la integral con la ecuación

$$z = \frac{2x - (a + b)}{b - a} = \frac{2x - 0.7}{2.3}$$

Sí  $x = -0.8, z = -1$ ; sí  $x = 1.5, z = 1$ .

Con el cambio de la función en términos de la nueva variable  $z$ , queda:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0.8}^{1.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1.5 - (0 - 8)}{2} \right] e^{-\left[ \frac{1.5 - (0 - 8)}{2} z + \frac{-0.8 + 1.5}{2} \right]^2} dz$$

$$= \frac{2.3}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(2.3z + 0.7)2}{8}} dz$$

A partir de los valores de TABLE 1 tenemos que  $w_1 = w_2 = 1.0000$ ;  $-z_1 = z_2 = 0.5773502692$ .

Al evaluar la función del integrando en  $z_1, z_2$ .

$$F(0.5773502692) = e^{-[2.3(-0.5773502692) + 0.7]2/8} = 0.5980684$$

$$F(-0.5773502692) = e^{-[2.3(-0.5773502692) + 0.7]2/8} = 0.9516115$$

Tenemos que:

$$I = \frac{2.3}{2\sqrt{2\pi}} [1(+0.5980684) + 1(0.9516115)] = 0.711105$$

#### V. GAUSS LEGENDRE DE TRES PUNTOS

Mediante polinomios de grados  $2n + 1$  para una partición homogénea  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$  de  $[-1, 1]$  y determinar los coeficientes  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$  tal que:

$$\int_{-1}^1 f_{2n+1}(z)dz = w_1f(x_1) + w_1f(x_2) + \dots + w_nf(x_n) \quad (13)$$

Donde

•  $n$  es el número de puntos

- los valores de  $x$  y  $w$  para las fórmulas de hasta 8 puntos se presentan en TABLE 1

Para la regla de Gauss Legendre con tres nodos, los nodos son:

$-(0.6)^{\frac{1}{2}}$ , 0 y  $(0.6)^{\frac{1}{2}}$  con los pesos  $\frac{5}{9}$ ,  $\frac{5}{9}$  y  $\frac{8}{9}$  respectivamente entonces si el intervalo con el que trabajamos es  $[-1, 1]$  entonces tenemos que:

$$\int_{-1}^1 f_x(x)dx = \frac{5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})}{9} \quad (14)$$

[3]

#### A. Ejemplo de Gauss Legendre con tres puntos

Realizaremos el mismo ejercicio que en el ejemplo de Gauss Legendre con dos puntos, pero en este caso serán con tres

$$z = \frac{2x - (a + b)}{b - a} = \frac{2x - 0.7}{2.3}$$

A partir de los valores de TABLE 1 tenemos que:

$$w_1 = w_3 = 0.5555556 ; w_2 = 0.888888.$$

$$-z_1 = z_3 = 0.7745966692 ; z_2 = 0.0000000000.$$

Al evaluar la función del integrando en  $z_1, z_2$  y  $z_3$  se tiene:

$$I = \frac{2.3}{2\sqrt{2\pi}} [(0.5555...)(0.4631...) + (0.8888...)(0.9405...) + (0.5555...)(0.8639...)] = 0.721825 \quad (15)$$

### VI. ALGORITMO

INICIO

```
//Datos de entrada:
//f -> función
//a -> limite inferior
//b -> limite superior
//n -> numero de puntos de 2 a 8
//Valores internos
z -> vector de nodos (generados
automáticamente con el numero
de puntos acorde a la tabla)
w -> vector de pesos (generados
automáticamente con el numero
de puntos acorde a la tabla)
```

```
FUNCION gaussLegendre (f,a,b, n)
suma = 0
PARA i=1:1:n
    x(i) = ((b-a)/2)*z(i) + (b+a)/2
    fx(i) = (f evaluado en x(i))
    suma = suma + w(i)*fx(i)
FIN PARA

resultado = ((b-a)/2)*suma
```

FIN

### VII. PRUEBA DE ESCRITORIO

Se procede a realizar la prueba de escritorio con la siguiente integral para dos puntos:

$$\int_{0.2}^{1.2} e^{x^2} dx \quad (16)$$

entonces tenemos que:

- $a = 0.2$
- $b = 1.2$
- $f = e^{x^2}$
- $\text{numeroDePuntos} = 2$

partiendo de la tabla de valores de nodos y pesos tenemos que:

- $w_1 = w_2 = 1$
- $z_1 = -0.5773502692$
- $z_2 = 0.5773502692$

Como el número de puntos es igual a 2 se realizará dos iteraciones:

- Primera iteración:

$$\begin{aligned} x(1) &= \frac{b-a}{2}(z_1) + \frac{b+a}{2} \\ &= \frac{1.2-0.2}{2}(-0.5773502692) + \frac{1.2+0.2}{2} \\ &= 0.41132 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} fx(1) &= f(0.41132) \\ &= e^{0.41132^2} \\ &= 1.184338 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} suma &= suma + (w_1)(fx_1) \\ &= 0 + (1)(1.184338) \\ &= 1.184338 \end{aligned} \quad (19)$$

- Segunda iteración:

$$\begin{aligned} x(2) &= \frac{b-a}{2}(z_2) + \frac{b+a}{2} \\ &= \frac{1.2-0.2}{2}(0.5773502692) + \frac{1.2+0.2}{2} \\ &= 0.98868 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} fx(2) &= f(0.98868) \\ &= e^{0.98868^2} \\ &= 2.65777 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} suma &= suma + (w_2)(fx_2) \\ &= 1.184338 + (1)(2.65777) \\ &= 3.8421 \end{aligned} \quad (22)$$

Una vez cumplida las iteraciones de acuerdo al número de puntos, se realiza el resultado de la integral

$$\begin{aligned} \text{resultado} &= \frac{b-a}{2}(\text{suma}) \\ &= \frac{1.2-0.2}{2}(3.8421) \\ &= 1.9210 \end{aligned} \quad (23)$$

## VIII. VENTAJAS Y DESVENTAJAS

### A. Ventajas

- La Gauss Legendre brinda mayor precisión que los métodos de trapecio y Simpson
- Se pueden reutilizar los valores de la función de orden superior para estimar los de orden inferior, logrando un rendimiento mucho mayor

### B. Desventajas

- En ocasiones es necesario utilizar polinomio de mayor grado para alcanzarla mejores resultados
- Se requiere conocer las raíces y los pesos para los polinomios interpolantes de Lagrange.

## IX. INTERFAZ

En esta sección se muestran las ventanas gráficas de la interfaz desarrollada en Matlab

### A. Ventana Principal

Aquí se muestra un vistazo general de los métodos desarrollados, para que el usuario pueda escoger con qué método desea obtener la aproximación de una integral definida.

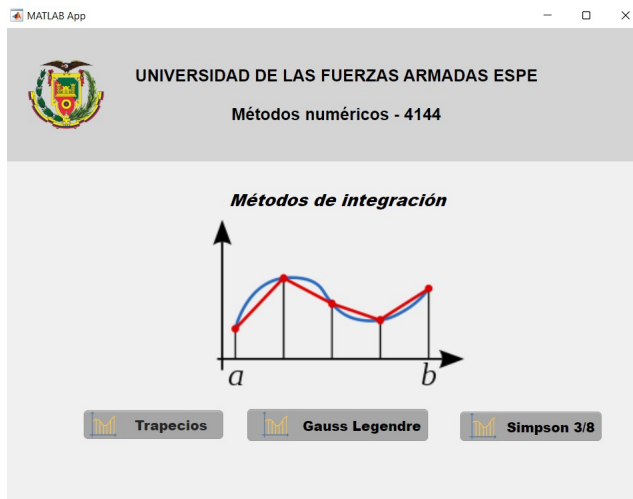


Figure 1: Pantalla Principal de la interfaz

### B. Método de Trapecios

Aquí se muestra en funcionamiento el método de los Trapecios, para lo cual se introduce la función, el intervalo en el que se desea analizar (a,b) y el número de polinomios que se desean trazar para encontrar la aproximación. Se observa así el resultado y la gráfica de la función con sus respectivos polinomios que aproximan a la función.

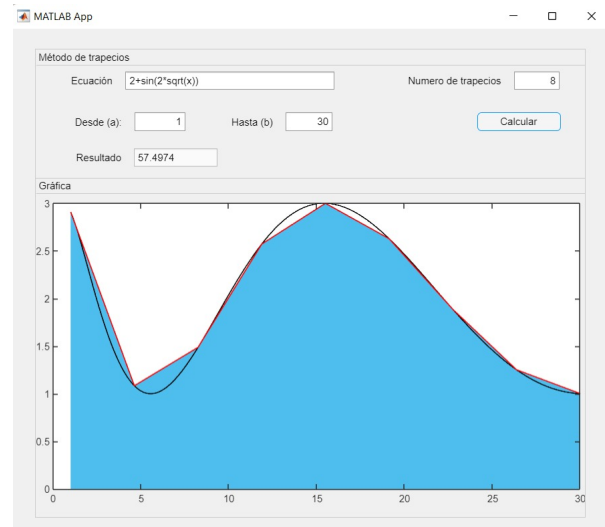


Figure 2: Ventana del método de Trapecios

### C. Método de Gauss-Legendre

Aquí se muestra en funcionamiento el método de Gauss-Legendre, para lo cual se introduce la función, el intervalo en el que se desea analizar (a,b) y el número de puntos (2-8) para encontrar la aproximación. Se observa así el resultado y la gráfica de la función con sus respectivos polinomios que aproximan a la función.

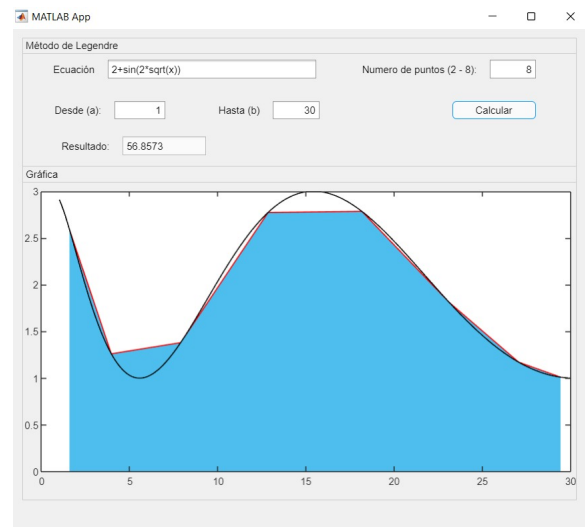


Figure 3: Ventana del método de Gauss-Legendre

### D. Método de Simpson 3/8

Aquí se muestra en funcionamiento el método de Simpson 3/8, para lo cual se introduce la función, el intervalo en el que se desea analizar (a,b) y el número de polinomios de tercer grado que se desean trazar para encontrar la aproximación. Se observa así el resultado y la gráfica de la función con sus respectivos polinomios que aproximan a la función.

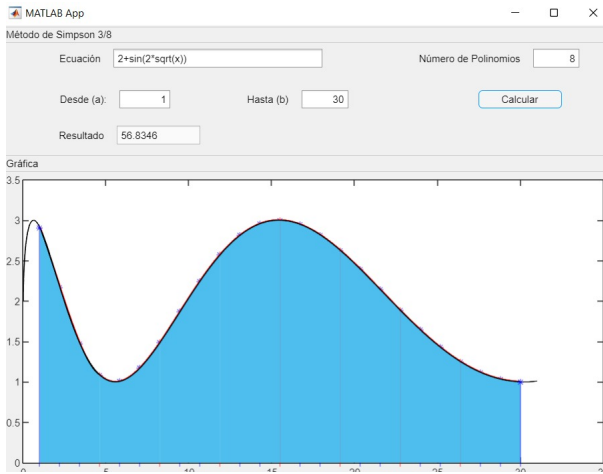


Figure 4: Ventana del método de Simpson 3/8

## X. EXPERIMENTACIÓN

Para esta sección las integrales que se usaron para las experimentaciones fueron tomadas del libro "Métodos Numéricos con Matlab" de John H. Mathews y Kurtis D. Fink. Usaremos las siguientes 3 integrales:

Ejemplo 1

$$\int_0^3 \frac{\sin(2x)}{1+x^2} dx$$

Ejemplo 2

$$\int_{0.1592}^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Ejemplo 3

$$\int_{0.04}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Esta sección tiene dos partes en las cuales la primera se implementa la nueva funcionalidad de la interfaz en cada método en la cual se irá variando el número de Trapecios, número de Puntos y número de Polinomios con cada uno de los ejemplos, visualizando así los resultados obtenidos. Para la segunda parte se utiliza la nueva interfaz de comparación en donde se visualiza los resultados en donde se aplica a los ejemplos los tres métodos al mismo tiempo para compararlos entre si posteriormente en la sección de resultados.

### A. Experimentación del método

Método de trapecios

Table II: Método de Trapecios para el ejemplo 1

Método de Trapecios	Desde a	Hasta b	N Trapecios	Resultado
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	3	0.28932
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	5	0.41787
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	8	0.45458

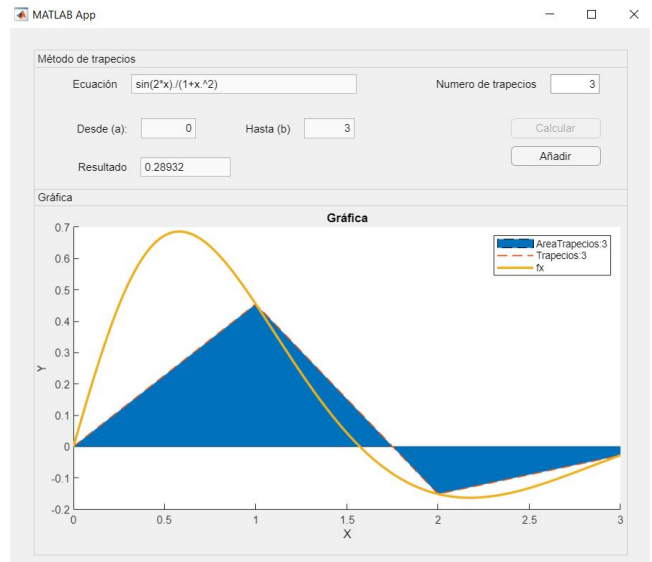


Figure 5: Ventana del método de Trapecios con el ejemplo 1

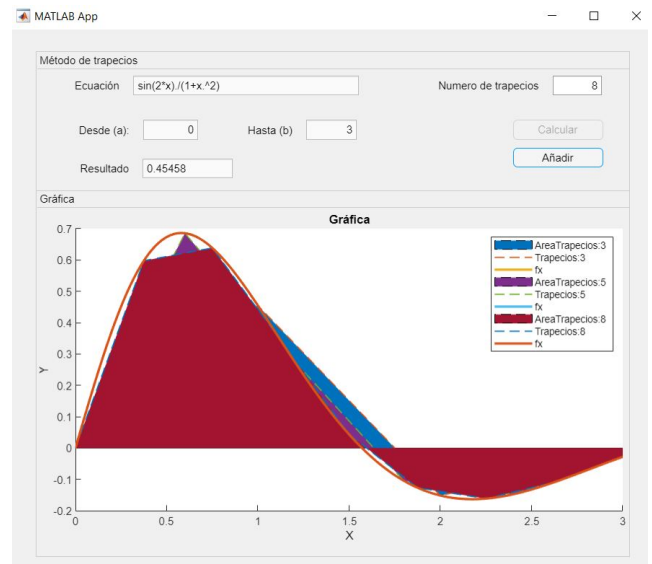


Figure 6: Ventana del método de Trapecios con varios trapecios con el ejemplo 1

Análisis: Como se puede observar al seguir añadiendo más trapecios el área bajo la curva se aproxima más a la función real por lo que el resultado de la aproximación será más cercano al real y con menos error.

Table III: Método de Trapecios para el ejemplo 2

Método de Trapecios	Desde a	Hasta b	N Trapecios	Resultado
$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	0.1592	2	3	1.142
$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	0.1592	2	5	1.2412
$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	0.1592	2	8	1.2275

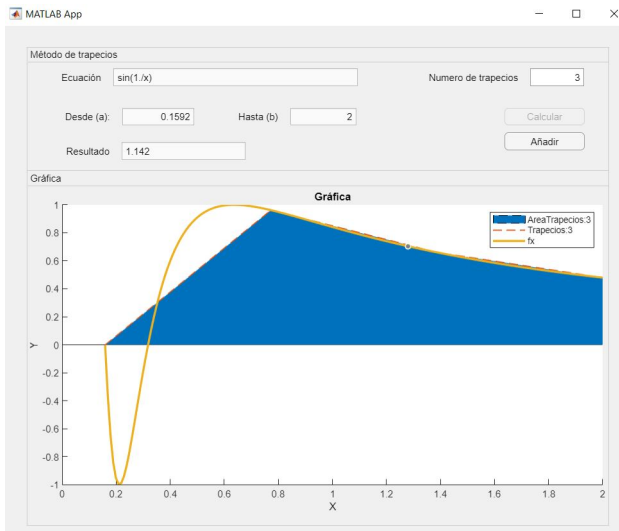


Figure 7: Ventana del método de Trapecios con el ejemplo 2

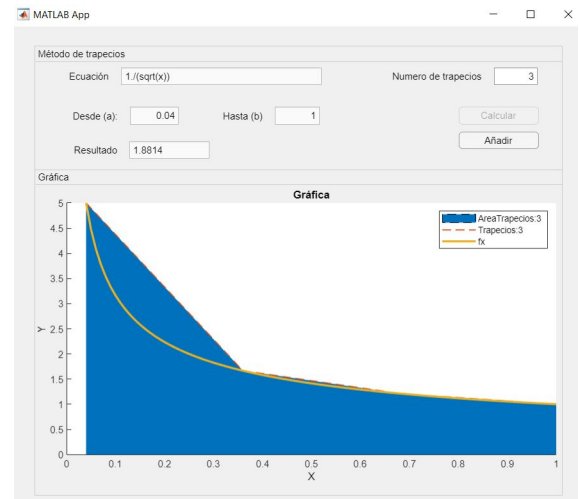


Figure 9: Ventana del método de Trapecios con el ejemplo 3

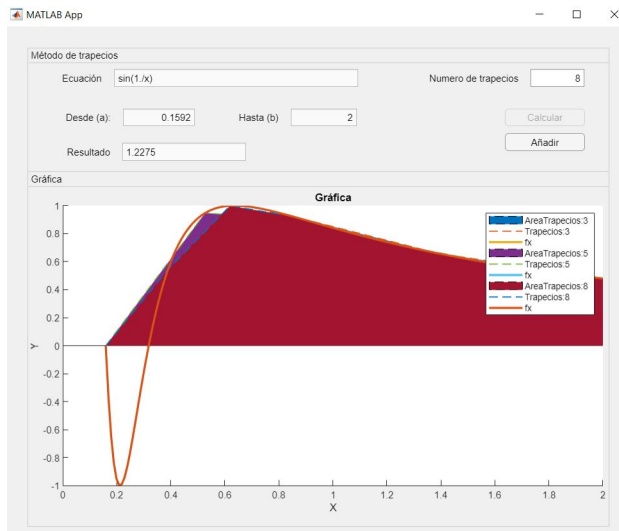


Figure 8: Ventana del método de Trapecios con varios trapecios con el ejemplo 2

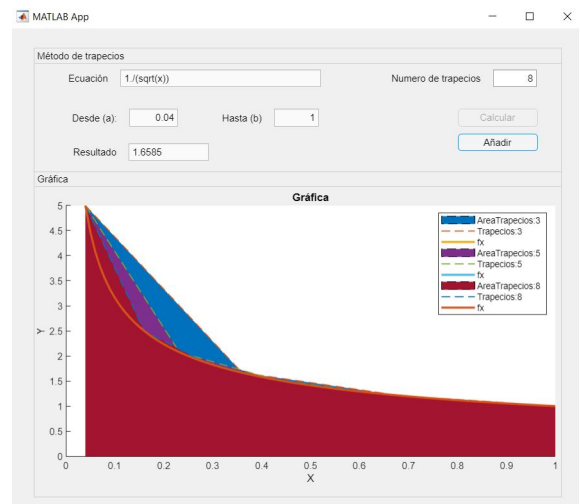


Figure 10: Ventana del método de Trapecios con varios trapecios con el ejemplo 3

Análisis: Como se puede observar al seguir añadiendo más trapecios el área bajo la curva se aproxima más a la función real pero solo en los valores de "y" positivos, mientras que en la parte de la función con valores de "y" negativos no se gráfica ningún tipo de trapecio, reflejando un problema con resultado aproximado de la integral

Análisis: Como se puede observar al seguir añadiendo más trapecios el área bajo la curva se aproxima más a la función real ajustándose a esta como vemos con 8 trapecios, reduciendo así el error.

#### Método de Legendre

Table IV: Método de Trapecios para el ejemplo 3

Método de Trapecios	Desde a	Hasta b	N Trapecios	Resultado
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	3	1.8814
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	5	1.7277
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	8	1.6585

Table V: Método de Legendre para el ejemplo 1

Método de Legendre	Desde a	Hasta b	N puntos	Resultado
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	3	0.44153
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	5	0.4771
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	8	0.47614

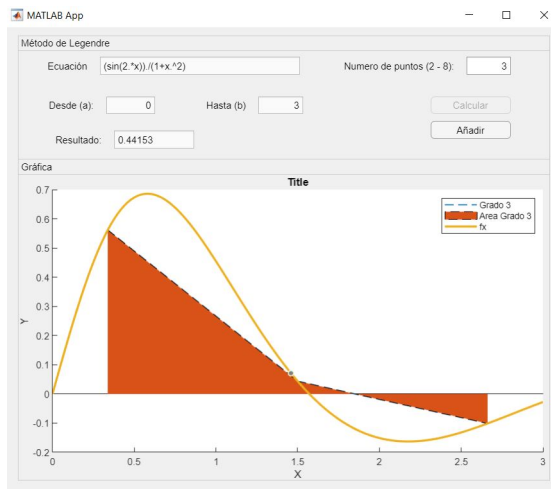


Figure 11: Ventana del método de Gauss-Legendre con el ejemplo 1

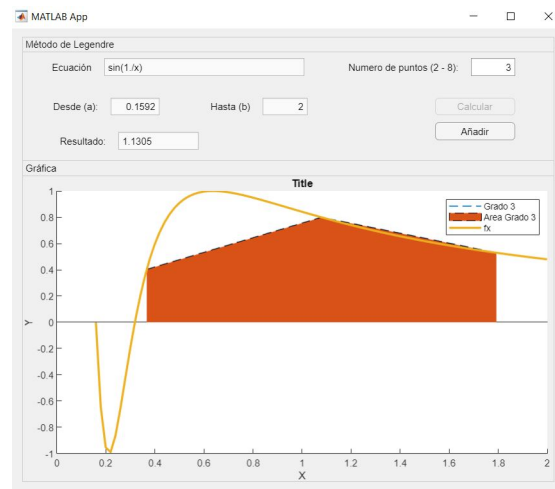


Figure 13: Ventana del método de Gauss-Legendre con el ejemplo 2

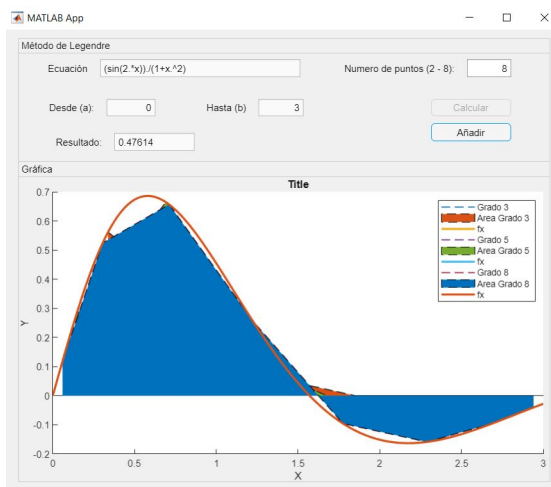


Figure 12: Ventana del método de Gauss-Legendre con varios puntos con el ejemplo 1

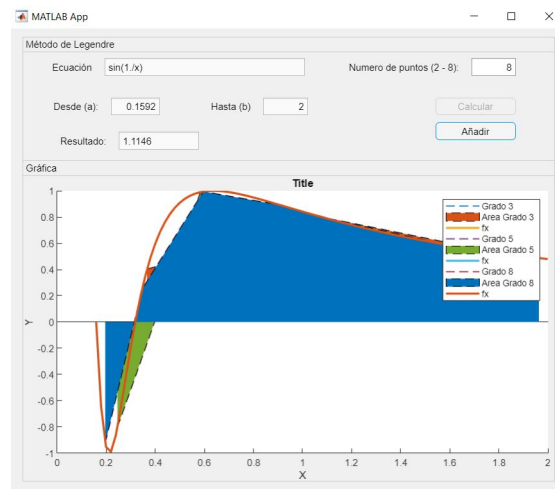


Figure 14: Ventana del método de Gauss-Legendre con varios puntos con el ejemplo 2

Análisis: Como se puede observar al seguir añadiendo puntos el área bajo la curva se aproxima más a la función real tanto así que con 8 puntos se sobreponen a las de 3 y 5 puntos, además que aquí se observa que la aproximación va en toda la curva de la función tanto para sus valores positivos como negativos en "y", reduciendo así el error.

Table VI: Método de Legendre para el ejemplo 2

Método de Legendre	Desde a	Hasta b	N Puntos	Resultado
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	3	1.1305
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	5	1.0499
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	8	1.1146

Análisis: Como se puede observar al seguir añadiendo puntos el área bajo la curva se aproxima más a la función real tanto así que con 8 puntos se sobreponen a las de 3 y 5 puntos, además que aquí se observa que la aproximación va en toda la curva de la función tanto para sus valores positivos como negativos en "y", reduciendo así el error.

Table VII: Método de Legendre para el ejemplo 3

Método de Legendre	Desde a	Hasta b	N Puntos	Resultado
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	3	1.5668
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	5	1.5947
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	8	1.5996

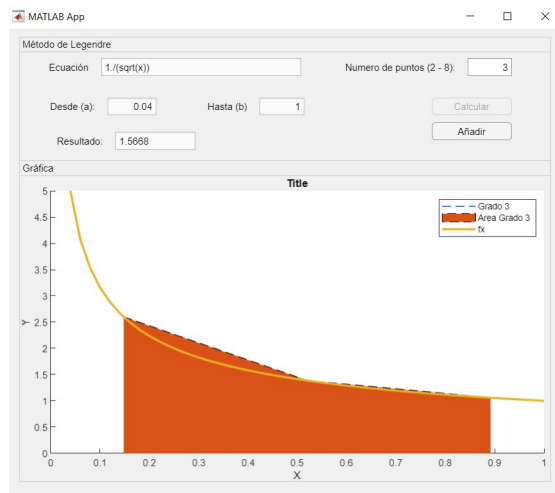


Figure 15: Ventana del método de Gauss-Legendre con el ejemplo 3

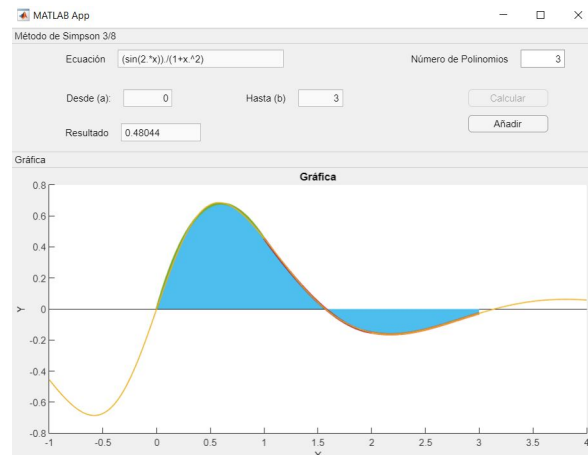


Figure 17: Ventana del método de Simpson 3/8 con el ejemplo 1

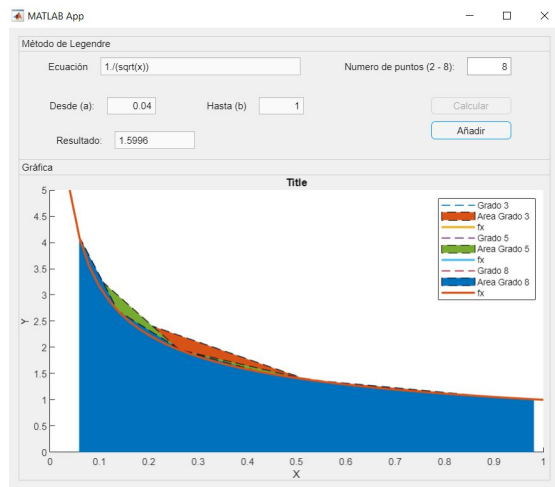


Figure 16: Ventana del método de Gauss-Legendre con varios puntos con el ejemplo 3

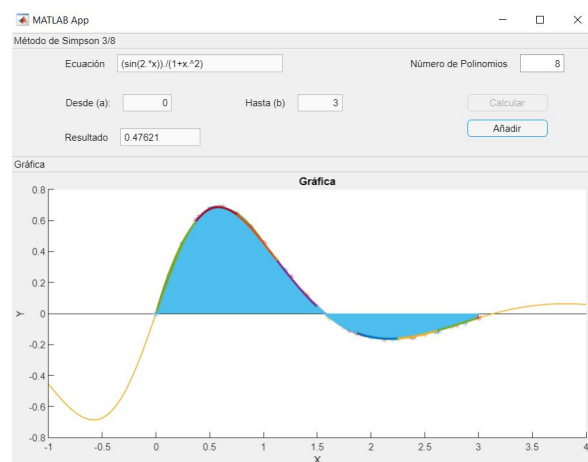


Figure 18: Ventana del método de Simpson 3/8 con varios polinomios con el ejemplo 1

Análisis: Como se puede observar al seguir añadiendo puntos el área bajo la curva se aproxima más a la función real tanto así que con 8 puntos se sobreponen a las de 3 y 5 puntos, reduciendo así el error.

#### Método de Simpson 3/8

Table VIII: Método de Simpson 3/8 para el ejemplo 1

Método de Simpson 3/8	Desde a	Hasta b	N Polinomios	Resultado
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	3	0.48044
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	5	0.47666
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	8	0.47621

Análisis: Como podemos observar en el caso de Simpson 3/8 la gráfica nos muestra que con 8 polinomios el área esta muy cercana a ser la real.

Table IX: Método de Simpson 3/8 para el ejemplo 2

Método de Simpson 3/8	Desde a	Hasta b	N Polinomios	Resultado
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	3	1.2251
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	5	1.154
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	8	1.1228



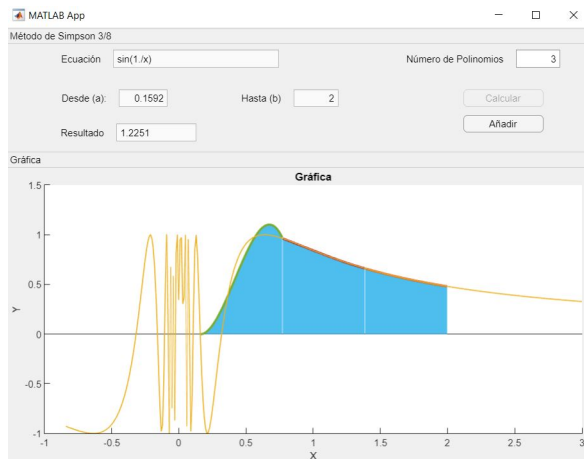


Figure 19: Ventana del método de Simpson 3/8 con el ejemplo 2

Análisis: Con este ejemplo podemos observar que el Método de Simpson 3/8 tiene algunas complicaciones, sin embargo sigue siendo una excelente opción debido a su precisión.

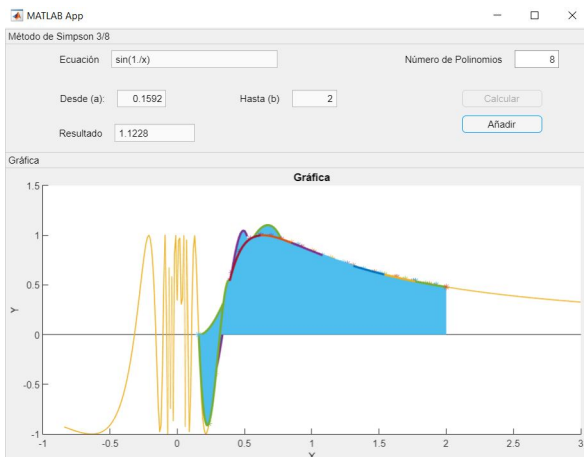


Figure 20: Ventana del método de Simpson 3/8 con varios polinomios con el ejemplo 2

Análisis: Podemos ver con aumentando el número de polinomios la precisión se acerca un poco mas al valor real, sin embargo esta se sale un poco de la función.

Table X: Método de Simpson 3/8 para el ejemplo 3

Método de Simpson 3/8	Desde a	Hasta b	N Polinomios	Resultado
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	3	1.6185
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	5	1.6055
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	8	1.6015

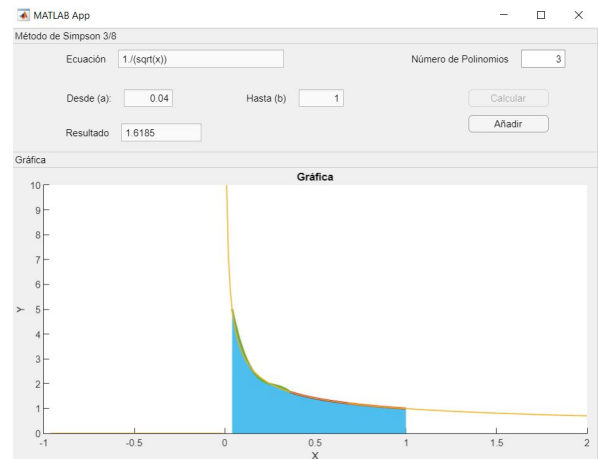


Figure 21: Ventana del método de Simpson 3/8 con el ejemplo 3

Análisis: Para este ejemplo podemos observar que el método funciona muy bien con un número de polinomios bajo, en este caso 3. Existen pequeñas partes en donde se sale de la función pero no se excede.

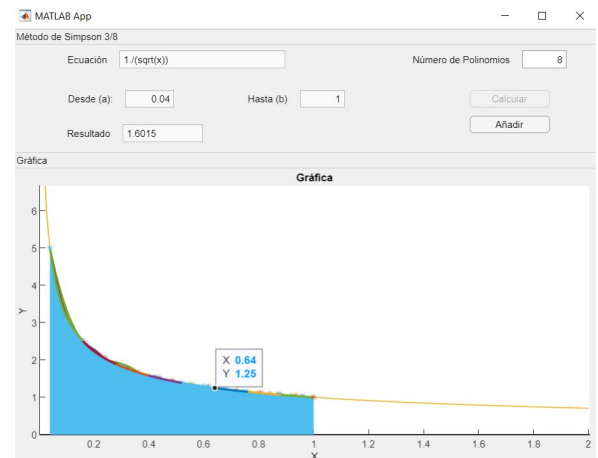


Figure 22: Ventana del método de Simpson 3/8 con varios polinomios con el ejemplo 3

Análisis: Aumentando el numero de polinomios podemos observar que el área pintada se corrige un poco, sin embargo en este ejemplo no es muy notorio.

## B. Experimentación comparación

### Ejemplo 1/Experimentos 5

Donde:

- N.P: Número de polinomios
- N.T: Número de trapecios
- N.Pol: Número de polinomios
- R.T: Regla de trapecio
- R.L: Regla de Gauss Legendre
- R.S: Regla de Simpson 3/8

Función	Desde a	Hasta b	N.T, N.P, N.Pol	R.T.	R.L.	R.S.
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	2	0.044176	0.79397	0.48591
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	3	0.48591	0.44153	0.48044
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	5	0.41787	0.4771	0.47666
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	7	0.44771	0.47612	0.47626
$\frac{\sin(2x)}{1+x^2}$	0	3	8	0.45458	0.47614	0.47621

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 2.

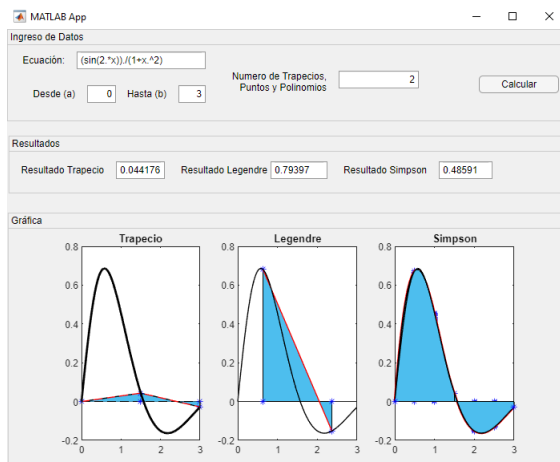


Figure 23: Ventana del combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 2.

Análisis: Se puede evidenciar que para este caso el método de trapecios es el menos efectivo puesto que es el que menos área bajo la curva comprende lo que genera un margen de error significativamente grande.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 3.

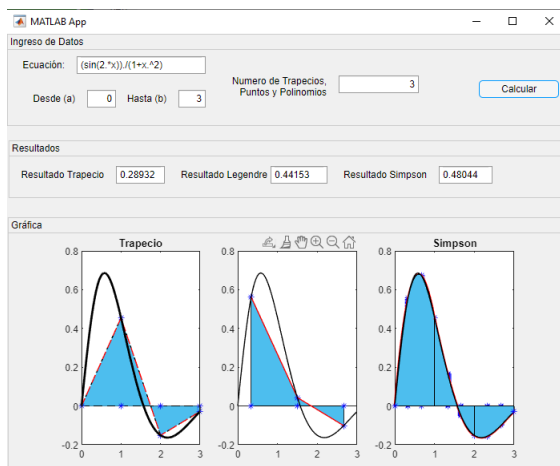


Figure 24: Ventana del combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 3.

Análisis: Se puede evidenciar que el método del trapecio comprende una región mas grande del área de la función, sin embargo continua siendo la aproximación mas errónea por otro lado el método de Simpson 3/8 es el mas cercano al valor real.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 5.

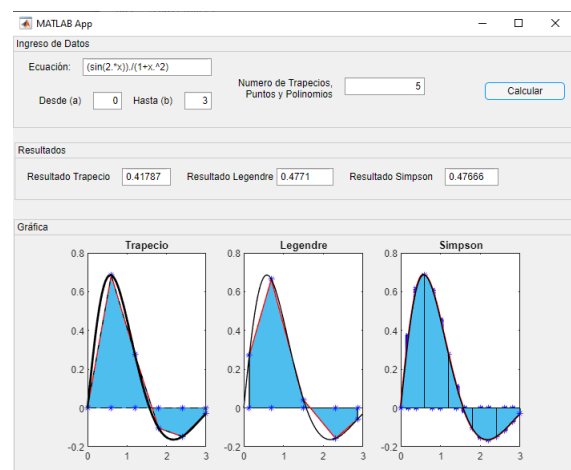


Figure 25: Ventana del caso 1 de combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 5.

Análisis: Al igual que en la comparación anterior, se evidencia que el área comprendida en el método de trapecios abarca una región negativa superior al método de Legendre lo que puede explicar la diferencia de valores a pesar de la similitud de las áreas abarcadas, además, se puede ver que el método de Simpson y el método de Legendre son mas cercanos entre si.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 7.

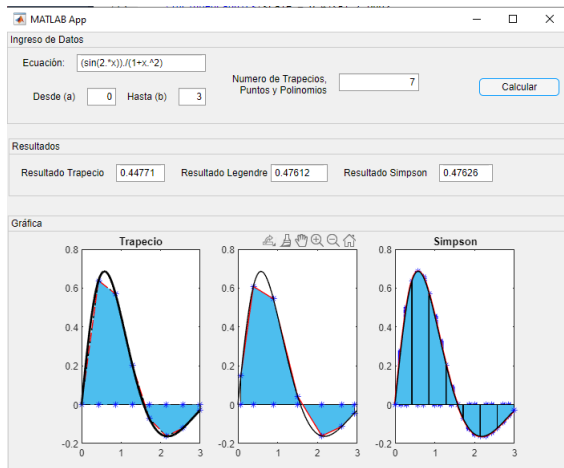


Figure 26: Ventana del caso 1 de combinación de los métodos con número de trapezios, nodos y polinomios 7.

Análisis: Es evidente que las aproximaciones tanto del método de Legendre como de trapezios se acercan mas a la sección comprendida por el área total sin embargo el método de trapezios aun es el que mas difiere esto podría deberse a que si bien a simple vista la el área contenida en los valores negativos es mas grande que la misma comprendida por el método de Legendre.

Comparación de los métodos con número de trapezios, nodos y polinomios 8.

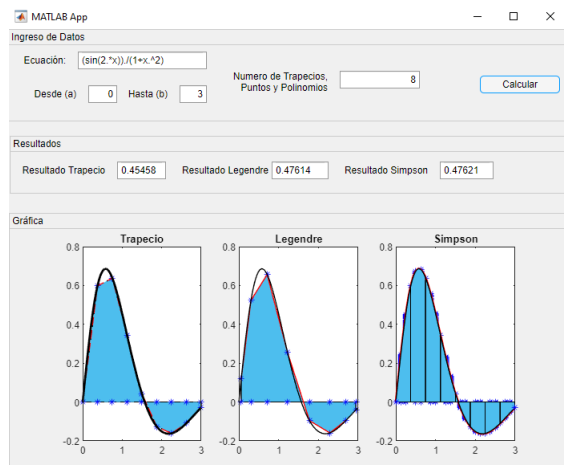


Figure 27: Ventana del caso 1 de combinación de los métodos con número de trapezios, nodos y polinomios 8.

Análisis: Vemos que el método de Simpson es el mas próximo a considerar el área comprendida bajo la curva, por otro lado vemos que el método del trapezio y de Legendre dejan regiones considerables excluidas del calculo del área.

Ejemplo 2/Experimentos 5

Función	Desde a	Hasta b	N.T, N.P, N.Pol	R.T.	R.L.	R.S.
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	2	0.95557	1.4264	1.2806
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	3	1.142	1.1305	1.2251
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	5	1.2412	1.0499	1.154
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	7	1.238	1.107	1.1285
$\sin(\frac{1}{x})$	0.1592	2	8	1.2275	1.1146	1.1228

Comparación de los métodos con número de trapezios, nodos y polinomios 2.

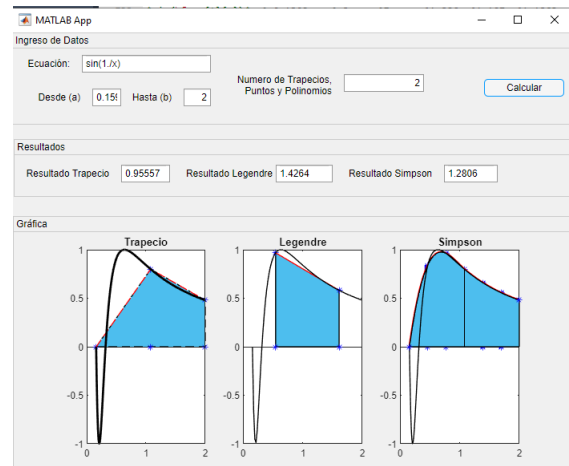


Figure 28: Ventana del caso 2 de combinación de los métodos con número de trapezios, nodos y polinomios 2.

Análisis: Vemos que los métodos en general ignoran una región importante de la curva que se esta analizando sin embargo el método de Simpson es el mas aproximado.

Comparación de los métodos con número de trapezios, nodos y polinomios 3.

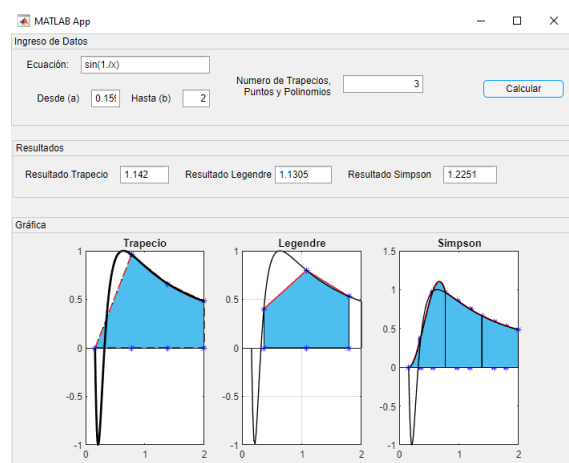


Figure 29: Ventana del caso 2 de combinación de los métodos con número de trapezios, nodos y polinomios 3.

Análisis: Nuevamente se evidencia que se ignora una sección importante de la función, y que el método de

Simpson es el mas próximo al valor real.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 5.

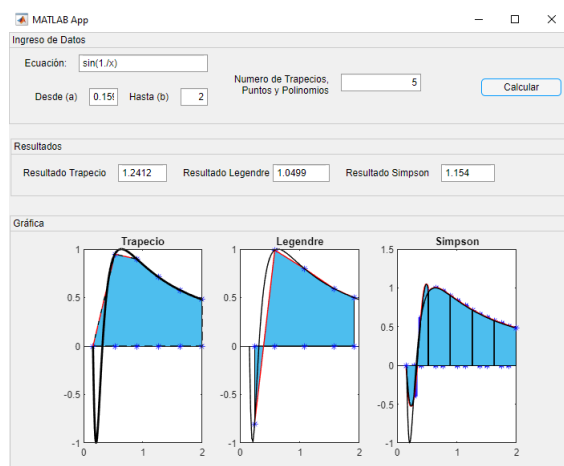


Figure 30: Ventana del caso 2 de combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 5.

Análisis: Se puede ver que el método de trapecios no toma en cuenta una sección de la curva, a diferencia de Lagrange que ya lo hacen al igual que el método de Simpson.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 7.

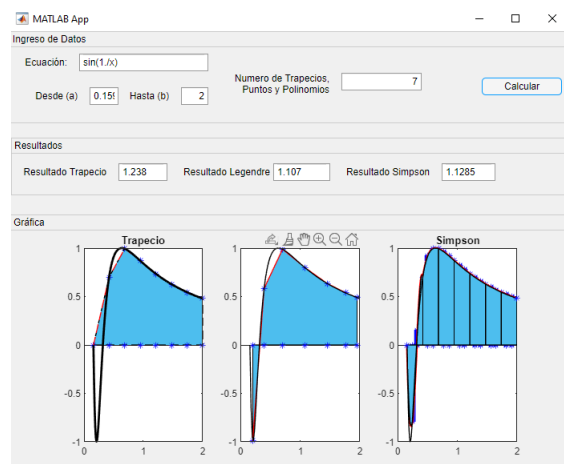


Figure 31: Ventana del caso 2 de combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 7.

Análisis: Se puede ver que el método de trapecios no toma en cuenta una sección de la curva, a diferencia de Lagrange que lo hace de mejor manera y Simpson que esta bastante próximo a comprender el área total.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 8.

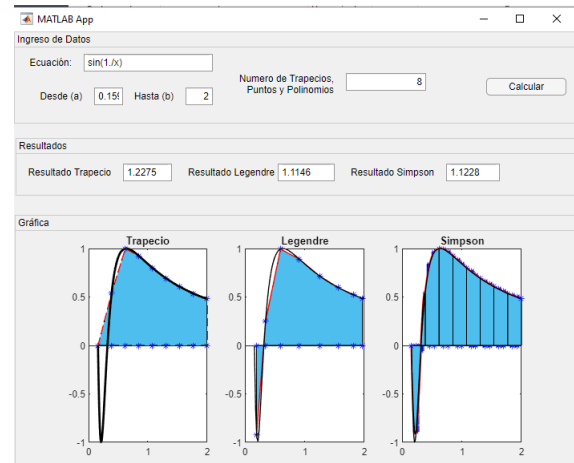


Figure 32: Ventana del caso 2 de combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 8.

Análisis: Se observa que el método de Simpson es el mas próximo a considerar el área comprendida bajo la curva, por otro lado vemos que el método del trapecio debido a la evaluación de puntos que genera omite una parte realmente considerable de la función y Legendre se acerca de manera favorable al área total de la curva.

### Ejemplo 3/Experimentos 5

Función	Desde a	Hasta b	N.T, N.P, N.Pol	R.T.	R.L.	R.S.
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	2	2.1056	1.5116	1.64361
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	3	1.8814	1.5668	1.6185
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	5	1.7277	1.5947	1.6055
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	7	1.6734	1.5991	1.6022
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.04	1	8	1.6585	1.5996	1.6015

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 2.

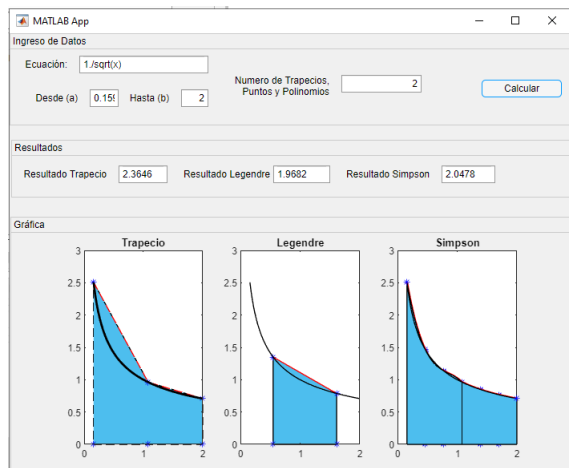


Figure 33: Ventana del caso 3 de combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 2.

Análisis: Se evidencia el método de Simpson se aproxima mucho a la función, mientras que el de trapecios y Legendre omiten secciones importantes de la curva.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 3.

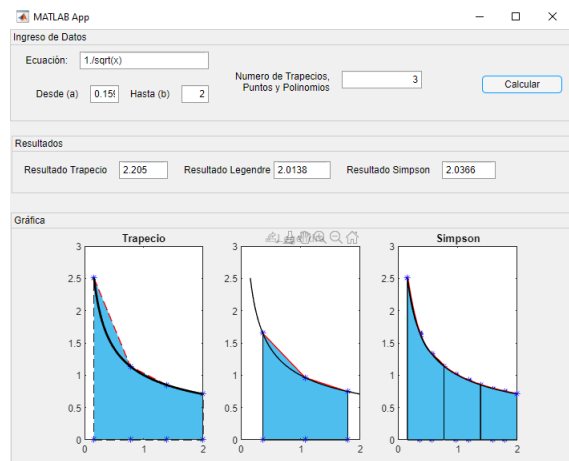


Figure 34: Ventana del caso 3 de combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 3.

Análisis: Nuevamente se evidencia la proximidad del método de Simpson a al área de la función mientras que el de trapecios abarca una sección que esta fuera de los limites de la curva al igual que, aunque en menor medida Legendre.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 5.

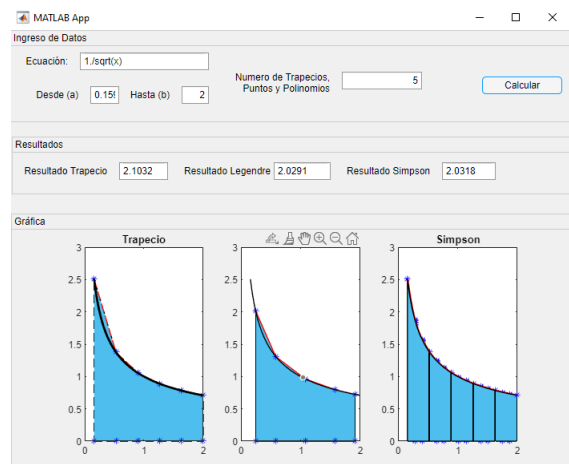


Figure 35: Ventana del caso 3 de combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 5.

Análisis: Vemos que todos los métodos se comprenden casi la totalidad de la curva de la función sin embargo tanto Legendre como el método de trapecios aun consideran una sección extra dentro de lo que comprende el área.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 7.

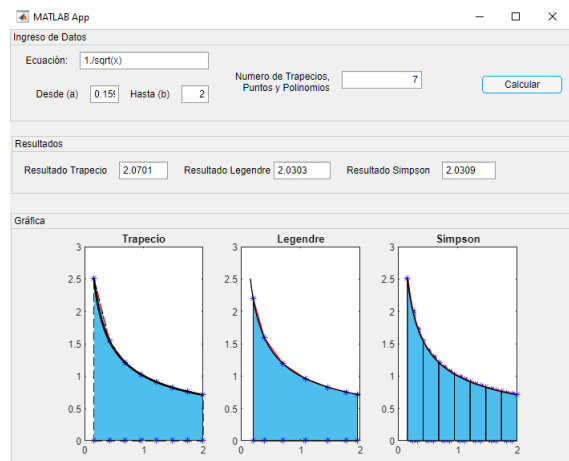


Figure 36: Ventana del caso 3 de combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 7.

Análisis: Se puede ver que los métodos se acercan de forma muy precisa a la curva de la función.

Comparación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 8.

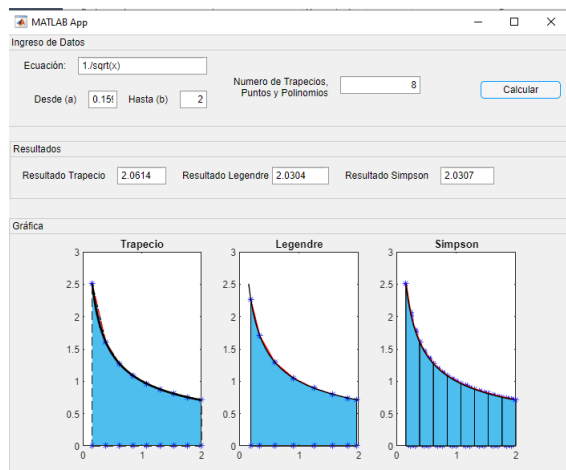


Figure 37: Ventana del caso 3 de combinación de los métodos con número de trapecios, nodos y polinomios 8.

**Análisis:** Podemos ver que por la naturaleza de la curva en este intervalo los métodos pueden calcular con bastante precisión el área de la curva.

## XI. RESULTADOS

En el siguiente apartado se muestran los resultados de la experimentación. Como se indicó anteriormente en la sección de experimentación se utilizaron 3 ejemplos pertinentes para llevar a cabo la resolución de resultados tanto para el método de trapecios, método de Legendre y método de Simpson 3/8.

Para cada uno de ellos se realizó el calculo del error relativo a través de la siguiente fórmula:

$$ErrorRelativo = \left| \frac{Valor_{Real} - Valor_{Aproximado}}{Valor_{real}} \right| \cdot 100\%$$

Aparte los resultados se organizan en la tabla donde:

- N.P: Número de polinomios
- N.T: Número de trapecios
- N.Pol: Número de polinomios
- R.T: Regla de trapecio
- R.L: Regla de Gauss Legendre
- R.S: Regla de Simpson 3/8
- E.R: Error Relativo

Ejemplo 1

$$\int_0^3 \frac{\sin(2x)}{1+x^2} dx$$

N.T, N.P, N.Pol	R.T.	E.R	R.L.	E.R	R.S.	E.R
2	0.044176	93.4238	0.79397	18.1929	0.48591	27.6659
3	0.48591	27.6659	0.44153	34.2724	0.48044	28.4802
5	0.41787	37.7946	0.4771	28.9774	0.47666	29.0429
7	0.44771	33.3525	0.47612	29.1233	0.47626	29.1024
8	0.45458	32.3298	0.47614	29.1203	0.47621	29.1099

Ejemplo 2

$$\int_{0.1592}^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

N.T, N.P, N.Pol	R.T.	E.R	R.L.	E.R	R.S.	E.R
2	0.95557	14.2275	1.4264	28.0345	1.2806	14.9474
3	1.142	2.5066	1.1305	1.4744	1.2251	9.9657
5	1.2412	11.4109	1.0499	5.7603	1.154	3.5837
7	1.238	11.1236	1.107	0.6350	1.1285	1.2948
8	1.2275	10.1811	1.1146	0.0472	1.1228	0.7832

Ejemplo 3

$$\int_{0.04}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

N.T, N.P, N.Pol	R.T.	E.R	R.L.	E.R	R.S.	E.R
2	2.1056	31.6000	1.5116	5.5250	1.64361	2.7256
3	1.8814	17.5875	1.5668	2.0750	1.6185	1.1562
5	1.7277	7.9812	1.5947	0.3313	1.6055	0.3437
7	1.6734	4.5875	1.5991	0.0563	1.6022	0.1375
8	1.6585	3.6563	1.5996	0.0250	1.6015	0.0937

- Análisis de los resultados:

Podemos observar que el error relativo en cada uno de los métodos utilizados va disminuyendo conforme al número de puntos en el que se evalúa la integral. El método que mayor precisión ofrece es el método de Gauss Legendaria así como el de Simpson 3/8 mejorado, pues a un mayor número de puntos el error se va acercando a cero sin embargo se debe tener en cuenta que esto puede variar de acuerdo a la naturaleza de la curva de la función que se a ingresado, sumado a esto, tenemos que el método de trapecios, pese a que su aproximación es mas precisa de acuerdo al numero de trapecios generados, es que que mas tiende a generar error que los otros métodos.

Para la experimentación se utilizó el equipo con las siguientes características:

- Procesador: Intel(R) Core(TM) i5-10300H CPU @ 2.50GHz 2.50 GHz
- Memoria instalada (RAM): 16,0 GB (15,8 GB utilizable)
- Tipo de sistema: Sistema operativo de 64 bits, procesador x64

A continuación se indica el tiempo de ejecución para cada uno de los métodos:

- Método de Trapecio: 1.12 segundos
- Método de Gauss Legendre: 0.92 segundos
- Método de Simpson 3/8: 4.70 segundos

## XII. CONCLUSIONES

Con la interfaz gráfica se pudo observar las áreas sombreadas de las integrales definidas permitiendo analizar la precisión de cada método de manera visual.

Con los resultados obtenidos se concluyo que el método de Gauss Legendre ofrece una mayor precisión a medida que se aumenta el numero de puntos en los que se evaluará, además, en se evidencia que en los casos y con la propuesta de solución presentada para este método el tiempo de ejecución es menor, sin embargo el área que comprende este método puede caer en pequeños fallos debido a la naturaleza de la curva siendo las curvas sinusoidales las que mas presentan estos casos.

Gracias al trabajo realizado, se pudo afianzar los conocimientos en cuanto a la resolución de cada uno de los métodos de integración utilizados. Un de los mejoras que se puede realizar a futuro es la optimización del tiempo de ejecución de cada uno de los métodos para mejorar la experiencia del usuario.

Como mejoras a considerar en el futuro se ha de tener en cuenta el calculo automático de los pesos y nodos de acuerdo al numero de puntos ingresados, pues es una limitante generar datos de acuerdo a un esquema preestablecido, o que sea el usuario el que necesite conocer estos datos.

#### REFERENCES

- [1] Jhon Mathews y Kurtis Fink (2007). Métodos Numéricos con MATLAB (3.a ed.). CLOSAS-ORCOYEN. Pag 425
- [2] Jhon Mathews y Kurtis Fink (2007). Métodos Numéricos con MATLAB (3.a ed.). CLOSAS-ORCOYEN. Pag 427
- [3] Jhon Mathews y Kurtis Fink (2007). Métodos Numéricos con MATLAB (3.a ed.). CLOSAS-ORCOYEN. Pag 427
- [4] Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (2007). Métodos Numéricos para ingenieros (Quinta edición). McGraw-Hill Interamericana