

Física Estatística Computacional - Projeto 1

Jorge Augusto Salgado Salhani

August 2018

1 Introdução

A análise de fenômenos físicos de múltiplos corpos possui dificuldade inata de descrição dado ao grande número de equações que possuem. Considere, por exemplo, uma partícula de posição e momento conhecidos (\vec{r}, \vec{p}) confinada em uma caixa de volume V também conhecido. Todo o movimento desta pode ser descrito facilmente pela mecânica newtoniana. No entanto, conforme outras partículas (por simplicidade, idênticas à inicial) são adicionadas à caixa, o movimento das N partículas afetam as $N - 1$ demais, tornando o sistema impossível de ser caracterizado para N muito grande.

Neste contexto a descrição termodinâmica e estatística tornam-se excelentes ferramentas de análise.

Em análise estatística, estes N corpos supracitados descritos pelo par de coordenadas (\vec{r}_n, \vec{p}_n) , com $n \in \{N\}$, podem estar distribuídos pelo volume V de maneiras finitas e conhecidas^[1]. Tal distribuição implica no surgimento de uma probabilidade P_i de evento, ou seja, para um sistema com Ω possíveis maneiras de distribuição dos N corpos, existe a chance P_i de encontrar o sistema em um estado específico Ω_i . Esta abordagem, ainda que responsável por belos resultados, não tem a capacidade de descrever, sozinha, fenômenos físicos emergentes para sistemas similares ao apresentado, necessitando-se da descrição termodinâmica do mesmo.

Conceitos de temperatura T , calor Q , energia interna U e entropia S foram, ao longo dos anos, recebendo distintas explicações do que eram e como se comportavam. Apenas com a descrição de fenômenos macroscópicos (e.g. temperatura e pressão) como consequências diretas de aspectos microscópicos de um dado sistema (e.g. energia dos átomos que o compõe)^[2] é que tornou sua quantificação precisa. Assim, como cada configuração específica Ω_i que o sistema pode apresentar possui uma energia interna U_i à ela associada devido ao movimento dos corpos presentes no sistema, se faz possível a descrição de fenômenos físicos emergentes em termos de análises estatísticas existentes.

2 Objetivos

Estudar o comportamento de grandezas físicas mensuráveis (deslocamento espacial e temporal) para um número N grande de entes físicos não interagentes em movimento, supondo não apresentarem viés baseado em acontecimentos de tempos anteriores àquele sobre o qual a medida foi feita assim como o modo de descrição de suas médias e quais informações carregam.

3 Metodologia

3.1 Distribuição contínua

Fazendo uso de geradores de números pseudo-aleatórios, para N números gerados, sua média (ou valor esperado) é calculada através da equação

$$\langle H \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N H_i \quad (1)$$

onde, de modo geral, H_i representa o valor obtido do observável H após $i - 1$ medidas.

No caso deste estudo, será contabilizado o valor esperado da variável aleatória (pseudo-aleatórias) x_i^n , com $n = 1, 2, 3, 4$, obtidas através do método `random.random` presente na biblioteca `numpy` disponível para a linguagem `Python`, responsável por gerar valores no intervalo $[0, 1)$.

Os resultados obtidos podem, então, ser comparados com o modelo contínuo dado por

$$\langle x \rangle = \int_0^1 x^n dx \quad (2)$$

com limites apresentados de acordo com o intervalo de existência das medidas realizadas que, para este caso, apresenta-se normalizado.

3.2 Distribuição discreta

Considerando-se agora um espaço discreto unidimensional x sobre o qual os entes físicos C (a chamar 'Caminhantes') permanecem confinados, para cada valor aleatório selecionado pelo método `random.random` apresentado, existe uma probabilidade p destes entes moverem-se para o sentido positivo do eixo espacial x e $q = 1 - p$ para o sentido negativo.

O observável apresenta-se como a posição final dos N Caminhantes considerados após um dado tempo T tal que $T = L$ (cada passo temporal apresenta um passo espacial). Assim sendo, a média é calculada por

$$\langle S \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N s_i P_i \quad (3)$$

onde define-se P_i como a probabilidade de o observável S possuir o valor medido s_i dentre todos os estados possíveis (a chamar Ω) dado por

$$\Omega = \frac{L!}{L_p! L_q!} = \frac{L!}{L_p! (L - L_p)!} \quad (4)$$

sendo L_p e L_q número de passos dados nos sentidos positivo e negativo de x , respectivamente, sujeitos à relação $L_p + L_q = L$ que devem ser contabilizados no denominador a fim de evitar a múltipla contagem de variações entre as posições inicial e final já obtida, já que os passos intermediários são indistiguíveis.

Deste modo a probabilidade P_i de que um dos caminhantes atinja a posição $i = L_p$ é dada por

$$P_{L_p} = \Omega p^{L_p} q^{L_q} = \binom{L}{L_p} p^{L_p} (1-p)^{(L-L_p)} \quad (5)$$

Utilizando-se agora da expansão binomial para sintetizar a equação (5) e denotando x a posição final atingida pelos Caminhantes, tem-se

$$\langle x \rangle = \sum_{x=0}^L x P_x = \sum_{x=0}^L x \left[\binom{L}{x} p^x (1-p)^{(L-x)} \right] \quad (6)$$

Para tornar este valor obtenível de modo mais otimizado, pode-se reestruturar a equação (6) através do resultado

$$\begin{aligned} p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{x=0}^L \left[\binom{L}{x} p^x q^{(L-x)} \right] &= p \sum_{x=0}^L \left[\binom{L}{x} \frac{\partial}{\partial p} p^x q^{(L-x)} \right] \\ &= \sum_{x=0}^L x \left[\binom{L}{x} p^{x-1} q^{(L-x)} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

onde se supõe a existência de probabilidade p válida para todo o domínio dos reais. Por fim, escrevendo $\langle x \rangle$ em termos deste último resultado obtido,

$$\langle x \rangle = p \sum_{x=0}^L \left[\binom{L}{x} \frac{\partial}{\partial p} p^x q^{(L-x)} \right] \implies \langle x \rangle = Lp \quad (8)$$

Desta forma, é possível comparar os resultados obtidos com o valor teórico calculado para $\langle x \rangle$.

Com passagens análogas às aquelas apresentadas em (7), para a média de x^2 ,

$$\langle x^2 \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 \sum_{x=0}^L \left[\binom{L}{x} p^x q^{(L-x)} \right] \implies \langle x^2 \rangle = Lp + L(L-1)p^2 \quad (9)$$

Tais resultados são importantes pois, definindo-se variância σ^2 como o quão afastados da média $\langle x \rangle$ os resultados obtidos se apresentam,

$$\sigma^2 \equiv \langle [x - \langle x \rangle]^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (10)$$

pode-se analisar a precisão dos dados medidos conforme aumenta-se o número de amostras coletadas tomando a distância relativa da média aos valores dos dados medidos,

$$\frac{\sigma}{\langle x \rangle} = \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (11)$$

que tende a zero para L grande. Tal relação pode ser referenciada como "lei dos grandes números", significando que, para um número alto de amostras tomadas, a distância da média esperada aos valores obtidos tende a zero, equivalendo à convergência da média esperada teoricamente com a média obtida "experimentalmente" - através de modelos estocásticos.

Tal resultado tem grande influência na descrição macroscópica de sistemas físicos baseado em estados energéticos microscópicos. Por exemplo, tomando o caso de modelos de gases confinados em recipientes, o número de átomos em seu interior é da ordem de 10^{23} (número de Avogadro). Aplicando o modelo matemático acima referido a este sistema, seria como se a cada tempo de medida houvessem 10^{23} passos contabilizados, fazendo com que a média esperada para valores emergentes de temperatura e pressão, e.g., possam ser descritos através de modelos estatísticos similares àsqueles aqui apresentados com grande precisão, ao invés de calcular equações de movimento singulares para cada partícula.

Aspecto característico de um sistema dispersivo pode ser formulado também através da entropia S que o mesmo carrega ao longo do tempo. Tal função é descrita na forma

$$S = - \sum_i^N P_i \ln(P_i) \quad (12)$$

onde P_i é a probabilidade de ocorrência de determinado evento i . Esta medida pode ser entendida como o grau de dispersão de informação que o sistema apresenta, que atinge um valor máximo quando o mesmo encontra-se em equilíbrio estável, e possui caráter aditivo ao considerar a entropia S_i de sistemas menores nele contido^[3].

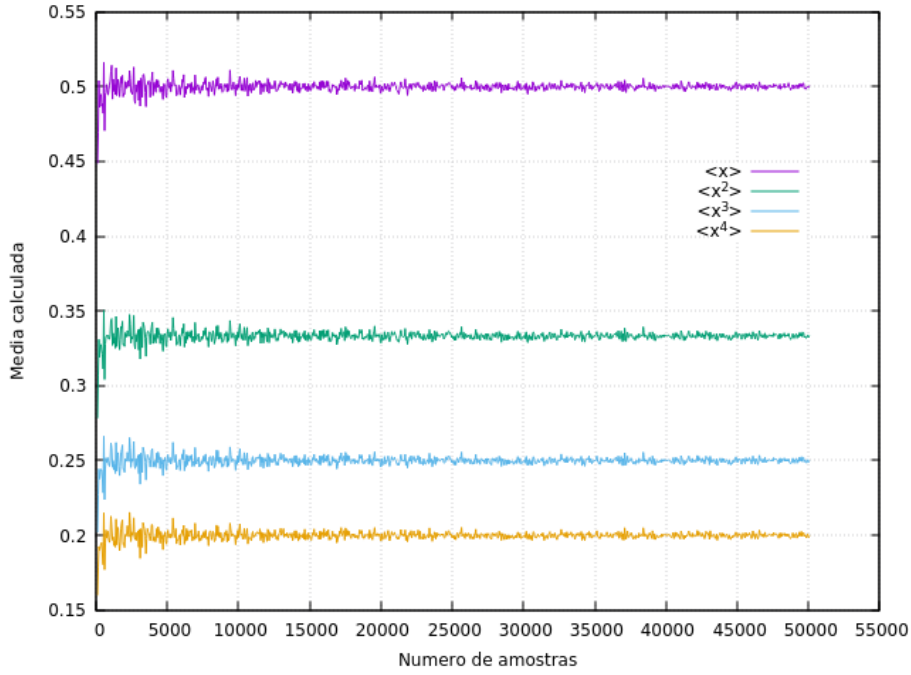


Figure 1: Médias calculadas para um número N crescente de amostras. Como pode-se observar, os valores para $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle x^3 \rangle$ e $\langle x^4 \rangle$ convergem para 0.5, $0.\bar{3}$, 0.25 e 0.2, respectivamente, como esperado conforme prediz os resultados teóricos. Os valores limitam-se ao intervalo $[0,1)$.

4 Resultados

4.1 Distribuição contínua

Como pode ser visualizado através da figura (1), a medida que aumenta-se o número de amostras coletadas para análise, maior é a convergência para os valores teóricos esperados. Estes valores, dados por $\langle x \rangle = 1/2$, $\langle x^2 \rangle = 1/3$, $\langle x^3 \rangle = 1/4$ e $\langle x^4 \rangle = 1/5$ obtidos da equação (2), fazem perceptível a convergência entre modelo estocástico e teórico, porém ainda não se pode aferir a rapidez desse evento.

Para esta análise são dispostas as figuras (2) e (3), onde as médias são calculadas com o aumento do número de amostras e, caso a precisão seja menor ou igual àquela desejada (10% ou 1%, respectivas às figuras), um sinal é gerado, incrementando em uma unidade o valor do eixo adimensional y (o qual inicialmente apresenta-se em $k - 1$, para $\langle x^k \rangle$).

Através da equação (11), para uma precisão de $w\%$, é necessário que a distância relativa da média aos valores calculados σ tenha a mesma ordem de w e pode-se concluir que aumentar a precisão de $\sigma = 10\%\langle x^n \rangle$ para $\sigma = 1\%\langle x^n \rangle$ requer que o número de amostras N seja multiplicado por um fator de 100. Assim utilizando dos resultados obtidos nas figuras (2) e (3) respectivamente para $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle x^3 \rangle$ e $\langle x^4 \rangle$ pode-se sumarizar os resultados obtidos como mostrado na tabela (1).

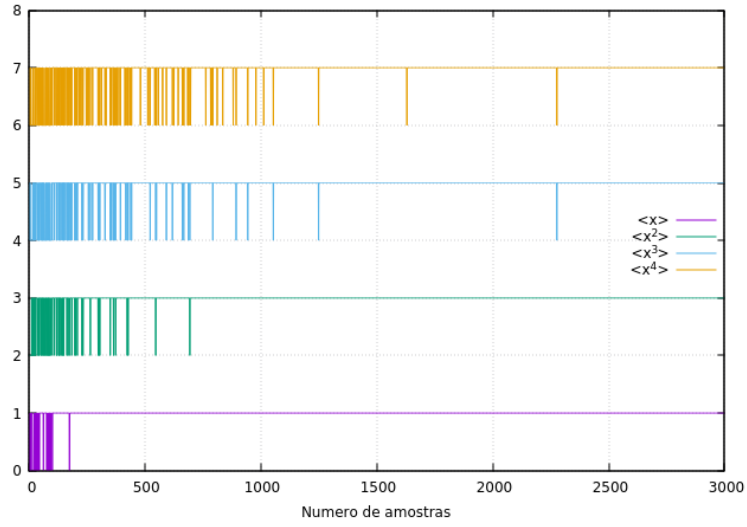


Figure 2: Taxa de aproximação do resultado esperado com precisão de 10%. Observa-se que, caso o valor calculado para a média tenha precisão maior que 10%, há um pulso sinalizador que incrementa em 1 o valor do eixo y. Tal precisão ocorre para $\langle x \rangle$ em $N \approx 178$; para $\langle x^2 \rangle$, em $N \approx 692$; para $\langle x^3 \rangle$ em $N \approx 1253$; e para $\langle x^4 \rangle$, $N \approx 1651$. Os pulsos no intervalo $[2000, 2500]$ foram desconsiderados por apresentarem um longo período de precisão antes de sua ocorrência.

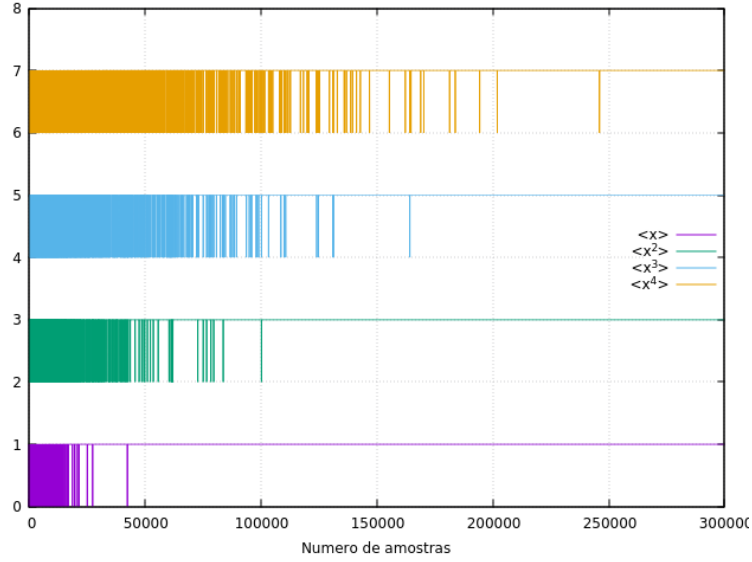


Figure 3: Taxa de aproximação do resultado esperado com precisão de 1%. Observa-se que, caso o valor calculado para a média tenha precisão maior que 1%, há um pulso sinalizador que incrementa em 1 o valor do eixo y, assim como na figura (2). Tal precisão ocorre para $\langle x \rangle$ em $N \approx 27834$; para $\langle x^2 \rangle$, em $N \approx 84014$; para $\langle x^3 \rangle$ em $N \approx 131512$; e para $\langle x^4 \rangle$, $N \approx 201992$. Os pulsos no intervalo $[150000, 200000]$ e $[225000, 250000]$ para $\langle x^3 \rangle$ e $\langle x^4 \rangle$, respectivamente, foram desconsiderados por apresentarem longo período de precisão antes de sua ocorrência.

	N (10%)	N (1%)	Razão
$\langle x \rangle$	178	27834	156,37
$\langle x^2 \rangle$	692	84014	121,41
$\langle x^3 \rangle$	1253	131512	104,9
$\langle x^4 \rangle$	1635	201992	123,5

Table 1: Resultados obtidos aproximadamente para o número de amostras N necessário para que se obtenha 10% e 1% de precisão para cada média $\langle x^n \rangle$, com $n = 1, 2, 3, 4$. A razão entre os valores encontrados para cada porcentagem corresponde à constante multiplicativa responsável por aumentar a precisão em uma ordem de grandeza que, neste caso, tem o valor teórico igual a 100.

Como a razão entre os valores de N para as flutuações de 1% e 10% aproximam-se de 100 com erro aproximado de 20% e considerando que o incremento utilizado foi de $N = 10$, pode-se afirmar que os resultados obtidos corroboram a teoria antes descrita com boa aproximação.

4.2 Distribuição discreta

Nesta abordagem, para um dado número aleatório obtido, N "caminhantes" sobre um eixo unidimensional discreto andam para a direita ou para a esquerda com probabilidade p e q . Caminhos distintos tomados por um número $N = 5$ considerando $p = q = 1/2$ podem ser observados na figura (4).

Vale ressaltar que, para esta sessão, N será considerado como o número de caminhantes, M , o número de medidas tomadas para o cálculo da posição média atingida por cada um e t , o tempo decorrido até que se atinja a posição final de interesse.

Com resultado similar ao mostrado na figura (1) da sessão 4.1, a figura (5) indica a posição final média atingida por $N = 50$ caminhantes após transcorrido um tempo $t = T = 500$. Observando-se esta figura, nota-se que os valores convergem para distintas posições de acordo com a probabilidade de passo à direita p (e à esquerda, q , consequentemente) conforme aumenta-se o número M de amostras.

Considerando caminhantes inicialmente posicionados em $y = 0$ com $y \in \mathbf{Z}$ e que o tempo transcorrido é igual aos limites máximo e mínimo de y sobre os quais os caminhantes tem acesso (pois cada passo temporal corresponde a um passo espacial por caminhante), os resultados obtidos devem corroborar a teoria dada pela equação (8).

Neste caso os valores de $\langle s_{1/n} \rangle = T(1/n)$, para valores de s presentes no intervalo simétrico $s \in [-T, T]$ - figura (5) -, convergem para os valores de $\langle s_{1/2} \rangle = 0$, $\langle s_{1/3} \rangle = -166.\bar{6}$, $\langle s_{1/4} \rangle = -250$, $\langle s_{1/5} \rangle = -300$, onde o sinal negativo indica $p > q$, já que o valor médio, neste intervalo, deve ser dado pela relação $\langle s_{1/n} \rangle = T/n - T$, para que se desloque o eixo espacial para uma posição de referência em $y = T$. Este resultados concordam com o esperado teoricamente.

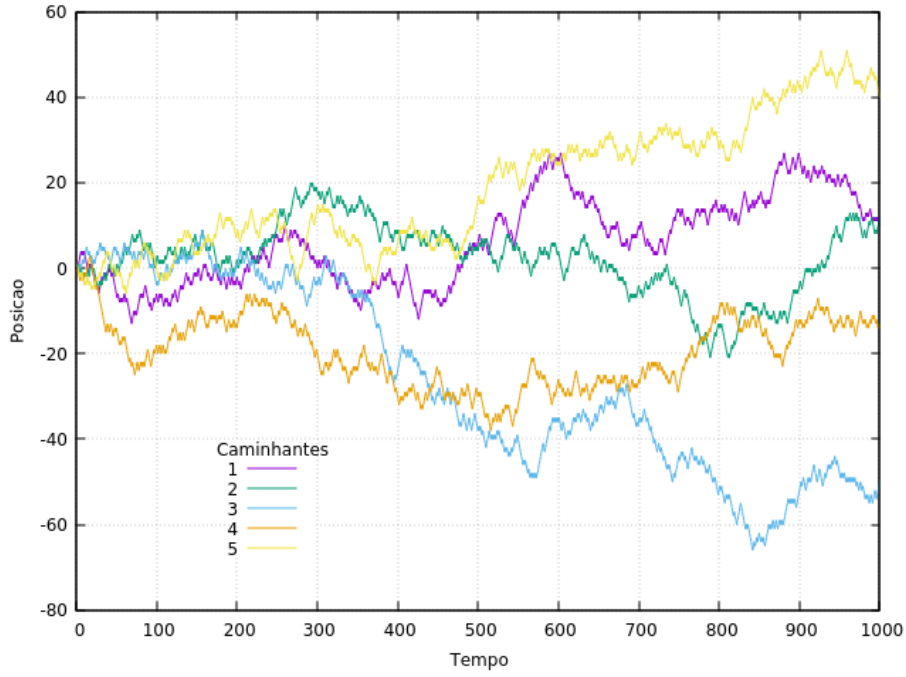


Figure 4: Caminho percorrido por cada um dos $N = 5$ caminhantes após um tempo $T = 1000$ partindo da posição inicial $y = 0$, onde possuem probabilidade $p = q = 1/2$ de se moverem para a direita e esquerda, respectivamente.

Outros resultados interessantes decorrem do aumento dos parâmetros N e M . Pelas figuras (6) e (7), agora tomando $L = 400$ fixado como posição máxima acessível, conclui-se que a distribuição da posição final média se faz mais suave para maiores números de medidas M e que, incrementando-se o número de caminhantes N , maior sua resolução (i.e., menor o desvio padrão relacionado a ela).

Através da figura (7) também é possível estipular o quão resoluto se faz a distribuição para cada N . Neste caso, para $N = 50$, $N = 100$, $N = 500$ e $N = 1000$ a distância média entre os valores médios obtidos e o valor esperado é dado, respectivamente, por $\sigma \approx 22.6857$, $\sigma \approx 16.4071$, $\sigma \approx 7.4548$ e $\sigma \approx 5.2762$.

4.2.1 Generalização bidimensional

Expandindo o espaço livre para movimentação dos caminhantes mencionados na sessão anterior para um plano bidimensional onde $(x, y) \in \mathbf{N}^2$, pode-se renomear os entes físicos como moléculas a princípio concentradas na posição central do plano (cujas bordas são fixas em $x = y = L$) e estão sujeitas a movimentos aleatórios com probabilidade $c = b = d = e = 1/4$, onde define-se tais parâmetros, respectivamente, como a probabilidade de determinada molécula dar um passo crescente ou decrescente (*cima e baixo*) no eixo y ou no eixo x (*direita e esquerda*).

Assim, a evolução temporal para tais condições, tomando a posição final média de $N = 200$ moléculas feitas

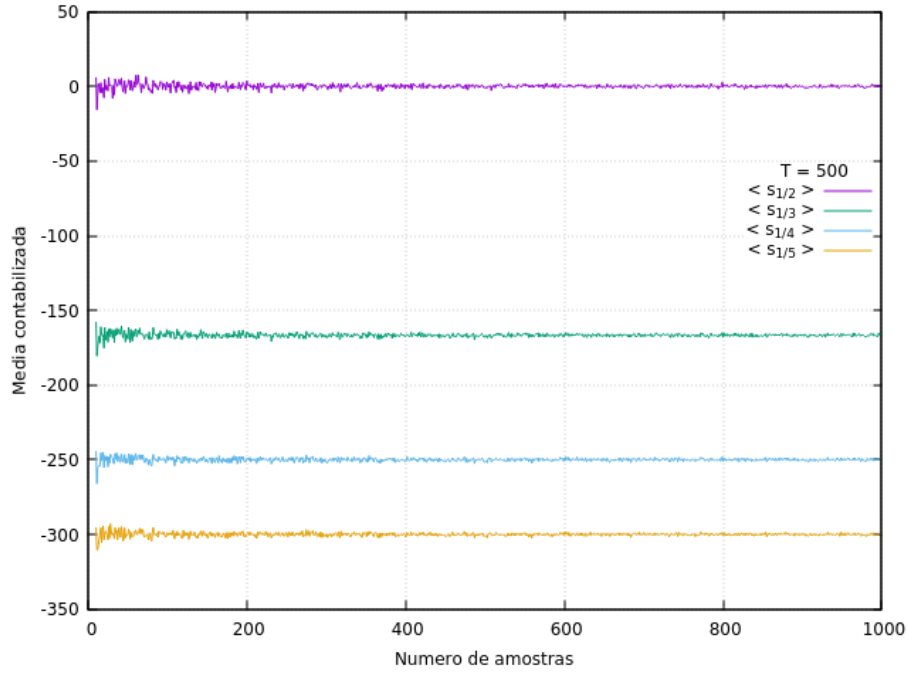


Figure 5: Médias calculadas para as posições finais de cada um dos $N = 50$ caminhantes considerados impondo que estão livres para transitar ao longo de $y \in [-T, T]$ para um número crescente de amostras (eixo x). Os resultados para distintos valores de p indicam uma tendência maior (conforme este aumenta) para posições mais afastadas da origem no sentido negativo de y . Conforme esperado pelo modelo teórico, os resultados convergem para os valores $\langle s_{1/2} \rangle = 0$, $\langle s_{1/3} \rangle = -166, \bar{6}$, $\langle s_{1/4} \rangle = -250$, $\langle s_{1/5} \rangle = -300$.

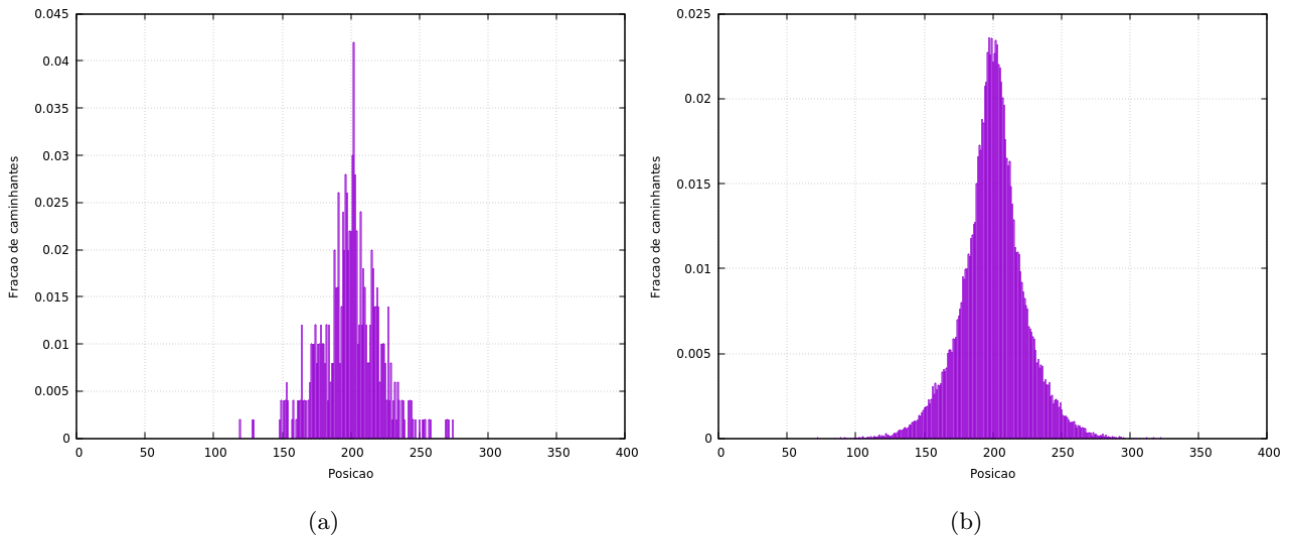


Figure 6: Distintas distribuições de posição final média $\langle s_{1/2} \rangle$ para $N = 50$ caminhantes e $T = 1000$ espaços temporais tomando $M = 10$ (a) e $M = 1000$ (b). Nota-se a melhor delimitação da distribuição com o aumento do número de medidas realizadas.

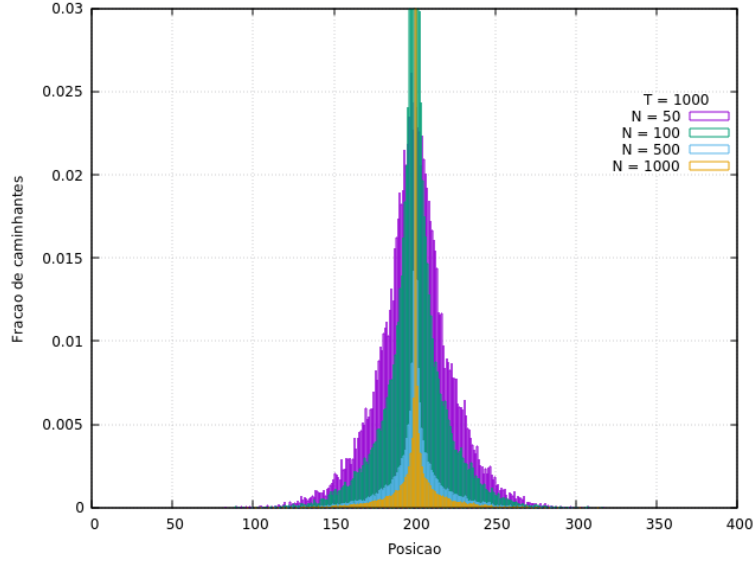


Figure 7: Diferentes distribuições da posição final média $\langle s_{1/2} \rangle$ mantendo-se fixo $T = 1000$ e $M = 500$, com aumento do número de caminhantes N considerados. Nota-se maior resolução para o valor esperado $\langle s_{1/2} \rangle = 200$ para as considerações agora propostas.

sobre um espaço com dimensão $L = 100$ para $M = 10$ medidas pode ser observada na figura (8).

Caso se tenha uma secção sobre a coordenada $x = L/2$, espera-se que a distribuição de moléculas nesta linha seja similar àquelas obtidas na figura (6) da sessão anterior. A figura (9) confirma esta hipótese, apesar de apresentar uma distribuição não muito suave devido a consideração de poucas medidas M realizadas. Seu aumento tende a melhorar a delimitação do histograma, como mostrado pela figura (6).

A entropia do sistema também pode ser obtida através da equação (10) que, conforme o tempo avança e as moléculas se dispersam, o sistema considerado tende a atingir um equilíbrio estável e, conseqüentemente, um máximo é observado, como pode ser notado na figura (10). Porém, como as bordas do sistema são livres, ou

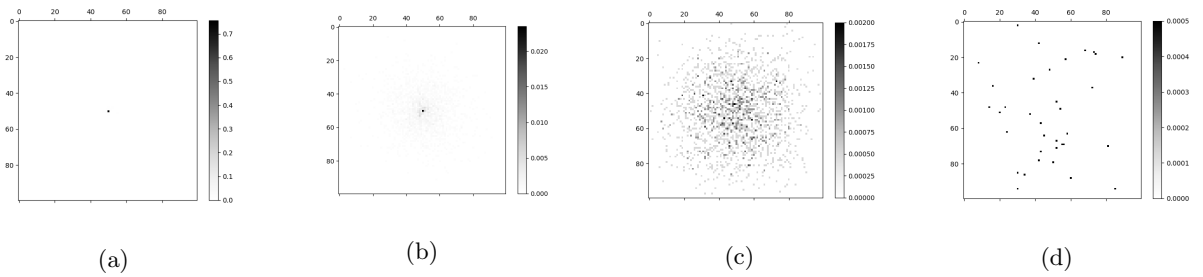


Figure 8: Evolução temporal da média de $M = 10$ medidas das posições finais de $N = 200$ moléculas posicionadas na coordenada $(50, 50)$ em $t = 0$. Os mapas representam a distribuição das moléculas para $T = 100$ (a), $T = 500$ (b), $T = 1000$ (c) e $T = 10000$ (d), notando que há uma redução da quantidade de moléculas devido a condições de contorno livres, i.e., há evasão das mesmas para posições maiores que o limite $L = 100$ e $L = 0$.

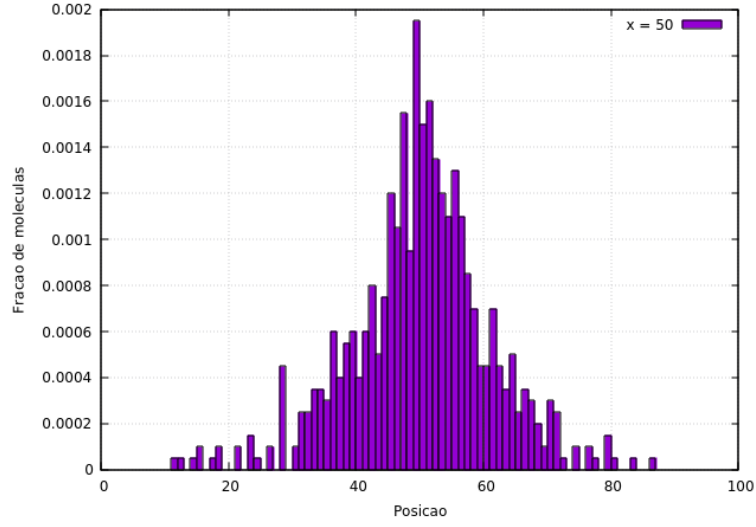


Figure 9: Histograma da distribuição de moléculas ao longo do eixo $x = L/2 = 50$ para $M = 100$ medidas tomadas sobre $N = 200$ moléculas. A distribuição segue um padrão similar ao obtido na sessão 4.2.

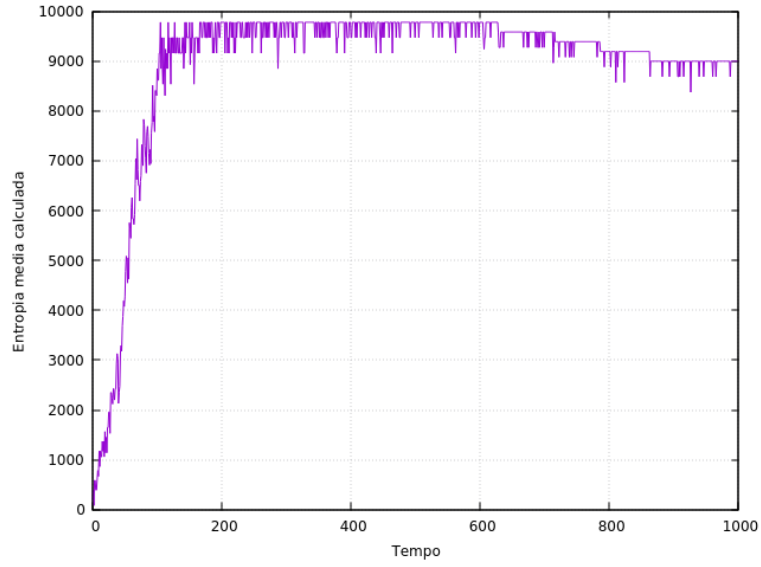


Figure 10: Evolução temporal da entropia média calculada. Pelo gráfico nota-se a estabilização desta grandeza em um valor constante que se estende por tempos consideráveis, no entanto há diminuição para tempos grandes devido à presença de barreiras livres, com perda de moléculas e consequentemente redução da entropia associada ao sistema.

seja, o sistema perde seus constituintes físicos quando os mesmos atingem seus limites, para tempos grandes a entropia tende a diminuir.

Este resultado ilustra a aproximação do sistema a uma situação de equilíbrio estável (desconsiderando tempos longos para os quais há evasão de moléculas) na qual todas as posições espaciais possuem a mesma probabilidade de conterem moléculas, fenômeno emergente de sistemas com grande número de corpos que são dispersos em seu interior.

5 Conclusão

Com todos os resultados aqui apresentados, conclui-se que a partir dos métodos estocásticos computacionais empregados emergem valores de convergência aos modelos matemáticos teóricos.

Vale notar também a importância da abordagem estatística para sistemas físicos (por exemplo difusão de moléculas sobre um plano 2D, na sessão 4.2.1) que envolvem um número consideravelmente grande de entes. Estes que a princípio seriam intratáveis pela mecânica clássica, podem ser caracterizados com impressionante precisão através da ligação entre a termodinâmica e a estatística que prediz uma aproximação dos resultados teóricos e experimentais (aqui apresentados através de simulações computacionais) quando da disposição de muitos corpos em interação.

6 Bibliografia

[1]- Salinas, Sílvia R. A. (2008) Introdução à Física Estatística. Ed. 2, pp. 48-52.

[2]- Callen, Herbert B. (1985) Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics. Ed. 2, pp. 27-31.

7 Códigos

7.1 Distribuição contínua

Este código tem, resumidamente, a função de somar um número N de valores aleatoriamente selecionados, normalizá-los e escrevê-los em um arquivo de texto. Este processo é feito $M = \text{run}$ vezes.

```
# means.py
import numpy as np;

run = 100 #Número de medidas tomadas
```

```

N = 100 #Numero de amostras para cada medida
arq1 = open('medias.dat', 'w')

t = 0 #Iniciando uma bateria de medidas
while t < run:
    totalx = 0 #Contabilizador de valores aleatorios

    for i in range(N): #Geracao de N numeros aleatorios
        r = np.random.random()
        totalx += r

    meanX += totalx / N #Media tomada sobre os N numeros gerados em uma bateria
    arq1.writelines([str(N), '\t', str(meanx), '\n'])

    N += 50 #Na proxima bateria, serao gerados 50 numeros a mais que na anterior
    t += 1
arq1.close()

```

7.2 Distribuição discreta

Com ideia semelhante ao código anterior, agora são gerados números aleatórios para que, dada uma probabilidade fixa, seja incrementado ou reduzido o valor representativo da posição final de cada um dos N caminhantes para cada tempo t discreto.

```

# rw_means.py
import numpy as np

T = 500 #Tempo transcorrido ate a posicao final de cada caminhante
N = 10 #Numero de caminhantes posicionados inicialmente para se fazer as medidas
measures = 1000 #Numero de medidas que serao tomadas para cada espaco de tempo T transcorrido
arq2 = open('bebados.dat', 'w')

m = 0 #Iniciando bateria de medidas
while m < measures:
    totS2 = 0

    n = 0 #Inicializacao de andar de cada n caminhante
    while n < N:
        s2 = 0

```

```

t = 0 #Inicializacao do numero de passos que serao dados por cada caminhante
while t < T:
    p = np.random.random()

    if p <= 0.5:
        s2 += 1
    else:
        s2 -= 1
    t += 1
    totS2 += s2
    n += 1

arq2.writelines([str(N), '\t', str(totS2 / N), '\n'])
m += 1
N += 1

arq2.close()

```

7.2.1 Generalização bidimensional

Ao criar uma matriz L -dimensional, é dado à posição central desta matriz um valor N referente ao número de moléculas. Após um tempo T considerado, o número de moléculas é incrementado a uma matriz intermediária com probabilidade fixa dependendo de um número aleatoriamente gerado, sendo esta progressão temporal realizada M vezes para que seja contabilizada a média de partículas que terminaram sobre uma dada coordenada da matriz fim.

```

#mol2d.py
N = 50 #Numero de moleculas inicialmente dispostas no espaco 2d
L = 100
rua = np.zeros((L,L)) #Matriz nula de dimensao (L,L) disponivel para as moleculas
rua_med = np.zeros((L,L)) #Matriz intermediaria para estocar o numero de moleculas em movimento sem
    influenciar as que ainda nao o fizeram
x0 = int(L / 2)
rua[x0][x0] = N #Posicionamento das N moleculas no centro da matriz
time = 10000
measures = 100
rua_end = np.zeros((L,L)) #Matriz fim

arq2 = open('mol2d.dat', 'w')
arq2.writelines(['#', 'x', '\t', 'y', '\t', 'moleculas', '\n'])

```

```

m = 0 #Inicializacao de bateria de medidas
while m < measures:
    t = 0 #Inicializacao dos passos temporais tomados
    while t < time:

        for i in range(L-1):
            for j in range(L-1):
                if rua[i][j] > 0:
                    p1 = np.random.random()
                    p2 = np.random.random()

                    if p1 <= 0.5: #Atualizacao da matriz intermediaria
                        if p2 <= 0.5:
                            rua_med[i][j+1] += 1
                        else:
                            rua_med[i][j-1] += 1

                    else:
                        if p2 <= 0.5:
                            rua_med[i+1][j] += 1
                        else:
                            rua_med[i-1][j] += 1

                    rua[i][j] -= 1
                    rua_med[i][j] += rua[i][j]

                rua = rua_med #Atualizacao da matriz inicial com os valores da matriz intermediaria
                rua_med = np.zeros((L,L)) #Anulamento da matriz intermediaria
                t+=1

        for k in range(L-1): #Passagem de valores normalizados para a matriz fim
            for l in range(L-1):
                rua_end[k][l] += rua[k][l] / N

        rua = np.zeros((L,L)) #Anulamento da matriz inicial para a proxima medida
        rua[x0][x0] = N

        m+=1

for x in range(L-1):

```

```
for y in range(L-1):  
    arq2.writelines([str(x), '\t', str(y), '\t', str(rua_end[x][y] / measures), '\n'])  
  
arq2.close()
```
