Redes Complexas - Projeto 1

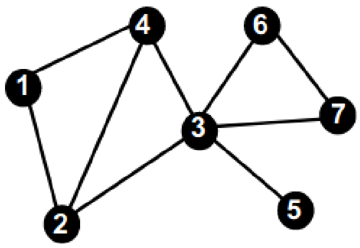
Jorge Augusto Salgado Salhani

September 2019

1 Exercício 1

Resolução manual dos itens do exercício 1, referentes ao projeto 1 de Redes Complexas.

Todos os itens terão como referência o grafo a seguir:



o qual será referido como **G**.

1.1 Item a) Degree distribution

Representando o grafo através de uma matriz de adjacência, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde cada elemento da matriz $A_{i,j}$ representa a presença (1) ou ausência (0) de conexão entre os nós i e j. Sendo k_i grau do i-ésimo nó, temos a relação

$$k_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \tag{1}$$

o qual pode ser compreendido como a soma de todos os elementos da i-ésima linha ou coluna (por simetria em relação à diagonal principal).

Desta forma, relativo a cada um dos nós ordenados do menor (1) ao maior (7), temos o vetor $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = [2, 3, 5, 3, 1, 2, 2], \tag{2}$$

armazenando cada um dos k_i graus, de modo que seu histograma deve ser construído em termos de um intervalo Δk. Por exemplo, caso $\Delta k = 1$,

$$\mathbf{H} = [0, 1, 3, 2, 0, 1], \tag{3}$$

com $h_l \in \mathbf{H}$ representando o número de elementos no intervalo $[l, l + \Delta k)$.

Também podemos escrevê-lo como distribuição de probabilidade. Desta forma, deve ser válido que

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 1, \tag{4}$$

o que nos resulta no vetor referente à distribuição de probabilidade (Probability of Degree Distribution)

$$\mathbf{H}_{norm} = \left[0, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 0, \frac{1}{7}\right] \tag{5}$$

$$= [0, 0.14, 0.43, 0.29, 0, 0.14]. \tag{6}$$

1.2 Item b) Local clustering coefficient

Utilizando o vetor $\mathbf{K}$, a medida de Local Clustering Coefficient relaciona o número de conexões ($k_i \in \mathbf{K}$) do i-ésimo nó e o número de conexões ($e_i \in \mathbf{e}$) feitas por seus vizinhos diretos. Sendo o vetor $\mathbf{e}$ representando esta última quantidade, temos

$$\mathbf{e} = [1, 2, 2, 2, 0, 1, 1]. \tag{7}$$

Utilizando da relação

$$C_i = 2\frac{e_i}{k_i(k_i - 1)}, \tag{8}$$

obtemos o coeficiente local armazenado no vetor $\mathbf{C}$ tal que

$$\mathbf{C} = [1, 0.67, 0.2, 0.67, 0, 1, 1]. \tag{9}$$

Análogo ao item anterior, para construir seu histograma precisamos atribuir um valor ao intervalo Δc tal que $c_l \in \mathbf{C}$ represente o número de elementos no intervalo $[l, l + \Delta c)$.

Caso $\Delta c = 0.2$, temos

$$\mathbf{H} = [1, 1, 0, 2, 3]. \tag{10}$$

1.3 Item c) Transitivity

Sendo a transitividade de uma rede dada por

$$T = 3\frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{N}|}, \tag{11}$$

com $\mathbf{M}$ vetor contendo os nós que formam triângulos fechados e $\mathbf{N}$, nós com tríades conexas. Em notação de conjuntos, $|\mathbf{M}|$ indica a cardinalidade (número de elementos presentes no conjunto $\mathbf{M}$). Para o grafo $\mathbf{G}$ temos

$$\mathbf{M} = \{(1, 2, 4), (2, 3, 4), (3, 6, 7)\}, \tag{12}$$

e, portanto, $|\mathbf{M}| = 3$. Já para $\mathbf{N}$,

$$\mathbf{N} = \{(1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 3, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), \tag{13}$$

$$(1, 2, 3), (1, 4, 3), (4, 3, 6), (4, 3, 7), (4, 3, 5), (2, 3, 6), \tag{14}$$

$$(2, 3, 7), (2, 3, 5), (3, 6, 7), (6, 7, 3), (7, 3, 6), (6, 3, 5), (7, 3, 5)\}, \tag{15}$$

o que implica em $|\mathbf{N}| = 19$ e, portanto, $T = 0.47368$.

1.4 Item d) Distance matrix

Esta medida relaciona qual o menor caminho entre dois nós $i \to j$. Desta forma, similar à matriz de adjacência, temos uma matriz $\mathbf{D}$ tal que $D_{i,j} \in \mathbf{D}$ representa o menor caminho entre i, j. Portanto

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} * & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & * & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & * & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & * & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & * & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & * & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

Tal como $\mathbf{A}$ (matriz de adjacência), $\mathbf{D}$ é simétrico em relação à diagonal principal, no entanto a mesma apresenta valores indefinidos, já que o caminho $i \to i$ inexiste no caso não direcionado.

1.5 Item e) Entropy of degree distribution

Sendo S entropia de Shannon total do sistema e S_i entropia relativa a cada medida individual,

$$S = -\sum_{i=1}^{n} S_i, \tag{16}$$

tal que, sendo a medida cada um dos valores da distribuição de grau $h_i \in \mathbf{H}_{norm}$, valor este equivalente a $P(k_i)$ (probabilidade relacionada ao grau $k_i \in \mathbf{K}$)

$$S_i = h_i \ln [h_i]. \tag{17}$$

Resultando, então, em $S = 1.27703$.

1.6 Item f) Second moment of the degree distribution

O cálculo do segundo momento de uma distribuição de valores $h_i \in \mathbf{H}$ pode ser tomada na forma

$$\mu^2 = \langle (h_i - \mu)^2 \rangle, \tag{18}$$

com $\mu = \langle h_i \rangle$ média dos valores de h_i. Assim

$$\mu^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(h_i - \mu)^2\right], \tag{19}$$

e

$$\mu = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i\right]. \tag{20}$$

Valendo do resultado $\mu = 1.167$, portanto, $\mu^2 = 1.13889$.