Lista 2 - Equivalências, inferências e demonstrações

Matemática Discreta I

Setembro 2022

1. Prove as tautologias a seguir, começando com a expressão à esquerda do símbolo do bicondicional e encontrando uma série de equivalências que convertem a expressão à esquerda na expressão à direita.

   (a) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \leftrightarrow p$

   (b) $\sim(p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim q$

   (c) $p \vee (q \wedge \sim p) \leftrightarrow p \vee q$

   (d) $[\sim(p \wedge \sim q)] \vee q \leftrightarrow \sim p \vee q$

   (e) $p \wedge [\sim(p \wedge \sim q)] \leftrightarrow p \wedge q$

2. Justifique cada passo na sequência de demonstração de

   (a) $q \wedge [(q \wedge r) \to \sim p] \wedge (q \to r) \to \sim p$

      1. q
      2. $(q \wedge r) \to \sim p$
      3. $q \to r$
      4. r
      5. $q \wedge r$
      6. $\sim p$

   (b) $[p \to (q \vee r)] \wedge \sim q \wedge \sim r \to \sim p$

      1. $p \to (q \vee r)$
      2. $\sim q$
      3. $\sim r$
      4. $\sim q \wedge \sim r$
      5. $\sim(q \vee r)$
      6. $\sim p$

   (c) $\sim p \wedge q \wedge [q \to (p \vee r)] \to r$

      1. $\sim p$
      2. q
      3. $q \to (p \vee r)$

4. $p \vee r$
5. $\sim(\sim p) \vee r$
6. $\sim p \to r$
7. r

3. Use lógica proposicional para provar que o argumento é válido.
   (a) $\sim(p \vee \sim q) \wedge (q \to r) \to (\sim p \wedge r)$
   (b) $\sim p \wedge (q \to p) \to \sim q$
   (c) $\sim p \wedge (p \vee q) \to q$
   (d) $(\sim p \to \sim q) \wedge q \wedge (p \to r) \to r$

4. Usando tabela verdade, prove que

$$p \wedge q \to (r \to s) \leftrightarrow p \wedge q \wedge r \to s \tag{1}$$

é uma tautlogia. Agora, suponha que o argumento que queremos provar tenha a forma

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \to (r \to s). \tag{2}$$

Desde que (1) é uma tautologia, em vez de usar $p_1, p_2, \ldots, p_n$ como hipóteses e inferir $r \to s$, o *método dedutivo* nos permite adicionar r como uma hipótese e depois inferir s. Em outras palavras, provar (2) é equivalente a provar

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge r \to s.$$

Usando o método dedutivo, prove que os seguintes argumentos são válidos.
   (a) $(p \to q) \wedge [p \to (q \to r)] \to (p \to r)$
   (b) $[(r \to s) \to r] \to [(r \to s) \to s]$
   (c) $[p \to (q \to r)] \wedge (p \vee \sim s) \wedge q \to (s \to r)$
   (d) $(p \to q) \wedge [q \to (r \to s)] \wedge [p \to (q \to r)] \to (p \to s)$

5. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par.

6. Demonstre que se $m+n$ e $n+p$ são números inteiros pares, em que m,n e p são números inteiros, então $m+p$ é par.

7. Use uma demonstração direta para mostrar que todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.

8. Prove que todo quadrado de um número inteiro deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4.

9. Use um demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um racional é irracional.

10. Seja n um número inteiro. Prove que $3n+2$ é ímpar se, e somente se, n é ímpar.

11. Seja n um número inteiro positivo. Prove que

$$n \text{ é ímpar} \iff n^2 \text{é ímpar}$$

12. Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.
13. Demonstre que se x é irracional, então $1/x$ é irracional.
14. Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.
15. Demonstre ou contrarie que o produto de um número racional diferente de zero e um número irracional é irracional
16. Use o príncipio de indução para mostrar que
    (a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1.$
    (b) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \forall n \geq 1$
    (c) $2.1+2.2+2.3+\cdots+2n=n^2+n, \forall n \geq 1$
    (d) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall n \geq 1.$
    (e) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} i(i+1)=\dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall n \geq 2$
    (f) $2n+1<2^n, \forall n \geq 3$
    (g) $n^2<2^n, \forall n \geq 5$
    (h) Seja a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_k &= 7.a_{k-1}, \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

    Mostre que $a_n=3.7^{n-1}$, para $n \geq 1$.