# Matemática Discreta - Listas de Exercícios

Jorge Augusto Salgado Salhani

Agosto, 2022

## 1 Lista 2 - Equivalências, Inferências, Demonstrações

### 1.1 Prove as tautologias a seguir, começando com a expressão à esquerda do símbolo do bicondicional e encontrando uma série de equivalências que convertem a expressão à esquerda na expressão à direita.

**(a)** $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \leftrightarrow p$

Da distributiva de operadores, temos que

$$p \wedge (q \vee s) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$$
$$p \vee (q \wedge s) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee s)$$

Assim

$$p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$$

Como $q \wedge \sim q = F$ (falso), vale que $p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$.

Em sequência, temos que

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \leftrightarrow p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$$

**(b)** $\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim q$

Pela lei de DeMorgan, vale que $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$. Logo

$$\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$$

Pela distributiva anterior, vale que $\sim q \vee (\sim p \wedge p) \leftrightarrow (\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$. Como também $\sim p \wedge p = F$ (falso), vale que $\sim q \vee (\sim p \wedge p) \leftrightarrow \sim q$.

Em sequência, temos que

$$\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee \sim q \leftrightarrow \sim q$$

**(c)** $p \vee (q \wedge \sim p) \leftrightarrow p \vee q$

Por distributiva, temos que $p \vee (q \wedge \sim p) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \sim p)$. Como $(p \vee \sim p) = V$ (verdadeiro), vale que $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim p) \leftrightarrow (p \vee q)$.

Logo, em sequência temos

$$p \vee (q \wedge \sim p) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \sim p) \leftrightarrow p \vee q$$

**(d)** $[\sim (p \wedge \sim q)] \vee q \leftrightarrow \sim p \vee q$

Usando que $[\sim (p \wedge \sim q)] \leftrightarrow \sim p \vee q$, e $p \vee q \vee q \leftrightarrow \sim p \vee q$, em sequência temos que

$$[\sim (p \wedge \sim q)] \vee q \leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee q \leftrightarrow \sim p \vee q$$

**(e)** $p \wedge [\sim (p \wedge \sim q)] \leftrightarrow p \wedge q$

Sendo $\sim (p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim p \vee q$ e por associatividade $p \wedge (\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$.

Como $p \wedge \sim p = F$ (falso), vale que $(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p \wedge q$. Assim, em sequência temos que

$$p \wedge [\sim (p \wedge \sim q)] \leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p \wedge q$$

## 1.2 Justifique cada passo na sequência de demonstração de

**(a)** $q \wedge [(q \wedge r) \rightarrow \sim p] \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow \sim p$

1. q: primeira hipótese
2. $(q \wedge r) \rightarrow \sim p$. Segunda hipótese
3. $q \rightarrow r$ terceira hipótese.
4. r

   Para 3.

   $$q \rightarrow r \leftrightarrow \sim q \vee r$$

   Por 1.

   $$q \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow q \wedge (\sim q \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \sim q) \vee (q \wedge r) \leftrightarrow q \wedge r \therefore (q \rightarrow r) \rightarrow r$$

5. $q \wedge r$

   Por 4.

$$q \wedge [(q \wedge r) \rightarrow \sim p] \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow \sim p \leftrightarrow [(q \wedge r) \rightarrow \sim p] \wedge (q \wedge r)$$

   Sendo que

$$(q \wedge r) \rightarrow \sim p \leftrightarrow [\sim (q \wedge r)] \vee \sim p$$

   Então

$$[(q \wedge r) \rightarrow \sim p] \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow [\sim (q \wedge r)] \vee \sim p \wedge (q \wedge r)$$

6. $\sim p$ Por 5.

$$[\sim (q \wedge r)] \vee \sim p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow [\sim (q \wedge r)] \wedge (q \wedge r) \vee \sim p \leftrightarrow \sim p$$

**(b)** $[p \rightarrow (q \vee r)] \wedge \sim q \wedge \sim r \rightarrow \sim p$

1. $p \rightarrow (q \vee r)$: hipótese 1
2. $\sim q$: hipótese 2
3. $\sim r$: hipótese 3
4. $\sim q \wedge \sim r$

$$\sim q \wedge \sim r \leftrightarrow \sim (q \vee r)$$

5. $\sim (q \vee r)$

$$p \rightarrow (q \vee r) \leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r) \implies$$
$$[p \rightarrow (q \vee r)] \wedge \sim \wedge \sim r \leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r) \wedge [\sim (q \vee r)] \leftrightarrow$$

6. $\sim p$

$$\sim p \vee [(q \vee r) \wedge \sim (q \vee r)] \leftrightarrow \sim p$$

**(c)** $\sim p \wedge q \wedge [q \rightarrow (p \vee r)] \rightarrow r$

1. $\sim p$: hipótese 1
2. $q$: hipótese 2
3. $q \rightarrow (p \vee r)$: hipótese 3

4. $p \vee r$

$$q \rightarrow (p \vee r) \leftrightarrow \sim q \vee (p \vee r) \implies$$
$$q \wedge [\sim q \vee (p \vee r)] \leftrightarrow [q \wedge \sim q] \vee (p \vee r) \leftrightarrow p \vee r$$

5. $\sim (\sim p) \vee r$

$$p \wedge r \leftrightarrow \sim (\sim p) \vee r$$

6. $\sim p \rightarrow r$

$$\sim p \rightarrow r \leftrightarrow p \vee r \leftrightarrow \sim (\sim p) \vee r$$

7. $r$

$$\sim p \wedge (p \vee r) \leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee r \leftrightarrow r$$

## 1.3 Use lógica proposicional para provar que o argumento é válido

**(a)** $\sim (p \vee \sim q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \wedge r)$

$$\sim (p \vee \sim q) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow$$
$$(\sim p \wedge q) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow$$
$$(\sim p \wedge r)$$

**(b)** $\sim p \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow \sim q$

$$\sim p \wedge (q \rightarrow p) \leftrightarrow$$
$$\sim p \wedge (\sim q \vee p) \leftrightarrow \sim q$$

**(c)** $\sim p \wedge (p \vee q) \rightarrow q$

$$(\sim p \wedge p) \vee q \leftrightarrow q$$

**(d)** $(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge q \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow r$

$$(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge q \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow$$
$$(p \vee \sim q) \wedge q \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow$$
$$[p \wedge (p \rightarrow r)] \vee \sim q \wedge q \leftrightarrow r$$

## 1.4 Usando tabela verdade, prove que

$$p \wedge q \to (r \to s) \leftrightarrow p \wedge q \wedge r \to s \tag{1}$$

**é uma tautologia. Agora, suponha que o argumento que queremos provar tenha a forma**

$$p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to (r \to s). \tag{2}$$

**Desde que (1) é uma tautologia, em vez de usar $p_1, p_2, ..., p_n$ como hipóteses e inferir $r \to s$, o método dedutivo nos permite adicionar $r$ como uma hipótese e depois inferir $s$. Em outras palavras, provar (2) é equivalente a provar**

$$p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \wedge r \to s.$$

**Usando o método dedutivo, prove que os seguintes argumentos são válidos.**

**(a)** $(p \to q) \wedge [p \to (q \to r)] \to (p \to r)$

$$\begin{aligned}
&(p \to q) \wedge [p \to (q \to r)] \to (p \to r) \\
&\leftrightarrow (p \to q) \wedge [p \to (q \to r)] \wedge p \to r \\
&\to q \wedge (q \to r) \to r
\end{aligned}$$

**(b)** $[(r \to s) \to r] \to [(r \to s) \to s]$

$$\begin{aligned}
&[(r \to s) \to r] \to [(r \to s) \to s] \\
&\leftrightarrow [(r \to s) \to r] \wedge (r \to s) \to s \\
&\to r \to s
\end{aligned}$$

**(c)** $[p \to (q \to r] \wedge (p \vee \sim s) \wedge q \to (s \to r)$

$$
\begin{aligned}
&[p \to (q \to r] \wedge (p \vee \sim s) \wedge q \to (s \to r) \\
&\leftrightarrow [p \to (q \to r)] \wedge (p \vee \sim s) \wedge q \wedge s \to r \\
&\to (q \to r) \vee \sim s \wedge q \wedge s \to r \\
&\leftrightarrow (q \to r) \wedge q \vee \sim s \wedge s \to r
\end{aligned}
$$

**(d)** $(p \to q) \wedge [q \to (r \to s)] \wedge [p \to (q \to r)] \to (p \to s)$

$$
\begin{aligned}
&(p \to q) \wedge [q \to (r \to s)] \wedge [p \to (q \to r)] \to (p \to s) \\
&\leftrightarrow (p \to q) \wedge [q \to (r \to s)] \wedge [p \to (q \to r)] \wedge p \to s \\
&\to q \wedge [q \to (r \to s)] \wedge (q \to r) \to s \\
&\to (r \to s) \wedge r \to s
\end{aligned}
$$

## 1.5 Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par

Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ ímpares, então sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
m &= 2k_1 + 1 \\
n &= 2k_2 + 1 \\
m + n &= 2(k_1 + k_2) + 2 = 2(k_1 + k_2 + 1) = 2k_3
\end{aligned}
$$

Seja $k_3$ dado pela combinação acima, $m + n$ é par.

## 1.6 Demonstrar que se $m+n$ e $n+p$ são número inteiros pares, em que $m, n, p \in \mathbb{Z}$, então $m + p$ é par.

Novamente, sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
&m + n = 2k_1 \\
&n + p = 2k_2 \\
&m - p = 2(k_1 - k_2) \implies m + p = 2(k_1 - k_2) + 2p \\
\implies &m + p = 2(k_1 - k_2 + p) = 2k_3
\end{aligned}
$$

Seja $k_3$ dado pela combinação acima, $m + p$ é par.

## 1.7 Use uma demonstração direta para mostrar que todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.

Sendo $m = 2k + 1$ inteiro ímpar e $a, b, k \in \mathbb{Z}$. Se $m = a^2 - b^2$, se $a, b$ par, inválido!!

## 1.8 Prove que todo quadrado de um número inteiro deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4.

Sejam $m, k \in \mathbb{Z}$, $m$ pode ser par ou ímpar. Logo

$$\begin{aligned}
m \text{ par} : m &= 2k \\
&\implies m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \\
&\therefore m^2 \mod 4 = 0 \\
m \text{ ímpar} : m &= 2k + 1 \\
&\implies m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 \\
&\therefore m^2 \mod 4 = 1
\end{aligned}$$

## 1.9 Use uma demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um racional é irracional.

Seja $m \in \mathbb{I}$ e $n \in \mathbb{Q}$, então $n = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$. Supondo que $m + n = k \in \mathbb{Q}$, temos que

$$\begin{aligned}
m + n = k = r/s &\implies m = r/s - n = r/s - p/q \\
&\implies m = (rq - ps)/(sq) \in \mathbb{Q}
\end{aligned}$$

Que é uma contradição com a hipótese de que $m \in \mathbb{I}$. Logo $m + n = k \in \mathbb{I}$.

## 1.10 Seja $n$ um número inteiro. Prove que $3n + 2$ é ímpar se, e somente se, $n$ é ímpar.

Como $n \in \mathbb{Z}$, $n$ é par ou ímpar. Se $n$ ímpar, $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$3n + 2 = 3(2k + 1) + 2 = 2(3k) + 3 + 2 = 2(3k + 2) + 1$$

Válido pela hipótese do enunciado. Já se $n$ par

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k) + 2 = 2(3k + 1)$$

que é par, invalidando a hipótese que $3n + 2$ é ímpar. Logo $n$ ímpar $\leftrightarrow 3n + 2$ ímpar.

## 1.11 Seja $n$ um número inteiro positivo. Prove que $n$ ímpar $\leftrightarrow n^2$ impar.

Se $n$ inteiro, $n$ é par ou ímpar. Seja $k \in \mathbb{Z}$. Se $n$ par,

$$n = 2k \implies n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

Logo, se $n$ par, $n^2$ par. Já para $n$ ímpar,

$$\begin{aligned} n = 2k+1 \implies n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Logo, $n$ ímpar $\leftrightarrow n^2$ ímpar, como gostaríamos.

## 1.12 Mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Supondo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $\sqrt{2} = p/q$, irredutível. Assim

$$2 = p^2/q^2 \implies 2q^2 = p^2.$$

Como ambos $p, q$ não podem ser simultaneamente par, vamos supor que $q$ ímpar. Como vale que $q$ ímpar $\leftrightarrow q^2$ ímpar (item anterior) e também vale que $p$ par, pois $p$ par $\leftrightarrow p^2$ par (item anterior), então sejam $r \in \mathbb{Z}$, logo

$$2 = p^2/q^2 = (2r)^2/q^2 \implies 2q^2 = 4r^2 \implies q^2 = 2r^2$$

Que indica que $q^2$ é par, contradizendo o que afirmamos acima. Logo $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

## 1.13 Demonstre que se $x$ é irracional, então $1/x$ é irracional.

Supondo que $1/x \in \mathbb{Q}$, então existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $1/x = p/q$. Assim $x = q/p \in \mathbb{Q}$, o que contradiz a hipótese que $x \in \mathbb{I}$. Logo $1/x \in \mathbb{I}$.

## 1.14 Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.

Sendo $a, b \in \mathbb{I}$. Supondo que $ab \in \mathbb{I}$, como sabemos que se $b \in \mathbb{I} \rightarrow 1/b \in \mathbb{I}$, podemos fazer com que $b = 1/a$. Logo $ab = 1 \in \mathbb{Q}$, em contradição com a hipótese. Logo $ab \in \mathbb{Q}$.

## 1.15 Demonstre ou contrarie que o produto de um número racional diferente de zero e um número irracional é irracional.

Sendo $m \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{I}$, existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $m = p/q$. Supondo que $mn \in \mathbb{Q}$, $mn = r/s$, com $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$mn = r/s \implies (p/q)n = r/s \implies n = (rq/sp) \in \mathbb{Q}.$$

Que contradiz a hipótese de que $n \in \mathbb{I}$. Logo $mn \in \mathbb{I}$.

## 1.16 Use o princípio de indução para mostrar que

**(a)** $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = [n(n+1)(2n+1)]/6; \forall n \geq 1$

Para $n = 1$

$$1 = (1)(2)(3)/6 = 1. \text{ Válido!}$$

Supondo válido para $k$, para $k+1$ temos

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 &= [(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]]/6 \\ [k(k+1)(2k+1)]/6 + (k+1)^2 &= [(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]]/6 \\ \implies k(2k+1) + 6(k+1) &= (k+2)(2k+3) \\ \implies 2k^2 + k + 6k + 6 &= 2k^2 + 3k + 4k + 6. \text{ Válido!} \end{aligned}$$

**(b)** $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2; \forall n \geq 1$

Para $n = 1$

$$1 = (1)^2 = 1. \text{ Válido!}$$

Supondo válido para $k$, para $k+1$ temos

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + [2(k+1)-1] &= (k+1)^2 \\ k^2 + [2(k+1)-1] &= (k+1)^2 \\ \implies k^2 + 2k + 1 &= k^2 + 2k + 1. \text{ Válido!} \end{aligned}$$

**(c)** $2.1 + 2.2 + 2.3 + ... + 2n = n^2 + n; \forall n \geq 1$

Para $n = 1$

$$2 = (1)^2 + 1 = 2. \text{ Válido!}$$

Supondo válido para $k$, para $k+1$ temos

$$
\begin{aligned}
2.1 + 2.2 + 2.3 + ... + 2k + 2(k+1) &= (k+1)^2 + k + 1 \\
k^2 + k + 2(k+1) &= k^2 + 2k + 1 + k + 1 \\
\implies k^2 + 3k + 2 &= k^2 + 3k + 2. \text{ Válido!}
\end{aligned}
$$

**(d)** $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = [n^2(n+1)^2]/4; \forall n \geq 1$

Para $n = 1$

$$1 = (1)^2(2)^2/4 = 1. \text{ Válido!}$$

Supondo válido para $k$, para $k+1$ temos

$$
\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 &= [(k+1)^2(k+2)^2]/4 \\
[k^2(k+1)^2]/4 + (k+1)^3 &= [(k+1)^2(k+2)^2]/4 \\
\implies k^2 + 4(k+1) &= (k+2)^2 \\
\implies k^2 + 4k + 4 &= k^2 + 4k + 4. \text{ Válido!}
\end{aligned}
$$

**(e)** $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = [n(n-1)(n+1)]/3; \forall n \geq 2$

Para $n = 2$

$$1(2) = 2 = 2(1)(3)/3 = 2. \text{ Válido!}$$

Supondo válido para $k$, para $k+1$ temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) + k(k+1) &= [(k+1)(k)(k+2)]/3 \\
[k(k-1)(k+1)]/3 + k(k+1) &= [(k+1)(k)(k+2)]/3 \\
\implies k - 1 + 3 = k + 2 &\implies k + 2 = k + 2. \text{ Válido!}
\end{aligned}
$$

**(f)** $2n + 1 < 2^n; \forall n \geq 3$

Para $n = 3$

$$2(3) + 1 < 2^3 \implies 7 < 8. \text{ Válido!}$$

Para $k+1$ temos

$$2[2(k+1) + 1] < 2^{k+1} \Leftrightarrow 4k + 6 < 2^{k+1}$$

Supondo válido para $k$

$$2k+1<2^k \Leftrightarrow 2[2k+1]<2.2^k \Leftrightarrow 4k+2<2^{k+1}$$

Como $4k+2<4k+6<2^{k+1}$ (para $k$, $2k+1$ é limitado por $2^k$; para $k+1$, $2(k+1)+1$ também é limitado por $2^{k+1}$), logo, vale a proposição $2n+1<2^n; \forall n \geq 3$.

**(g)** $n^2<2^n; \forall n \geq 5$

Para $n=5$

$$5^2<2^5 \Leftrightarrow 25<32. \text{ Válido!}$$

Supondo válido para $k$, então vale que

$$k^2<2^k \Leftrightarrow 2k^2<2^{k+1}$$

Para $k+1$ temos

$$(k+1)^2<2^{k+1} \Leftrightarrow k^2+2k+1<2^{k+1}$$

Como $k^2<k^2+2k+1<2^{k+1}$ (ou seja, para $k, k^2$ é limitado por $2^k$ e para $k+1, (k+1)^2$ também é limitado por $2^{k+1}$), vale a proposição $n^2<2^n; \forall n \geq 5$.

**(h)** Seja a sequência $a_1, a_2, a_3, ...$ definida como $a_1=3$; $a_k=7 \times a_{k-1}; \forall k \geq 2$. Mostre que $a_n=3 \times 7^{n-1}$, para $n \geq 1$.

Para $n=1,2$

$$a_1=3=3 \times 7^0=3$$
$$a_2=21=3 \times 7^1=21 \text{ Válidos!}$$

Por hipótese, válido para $k$ implica que vale $a_k=3 \times 7^{k-1}$. Para $k+1$, temos

$$a_{k+1}=7a_k=7 \times 3 \times 7^{k-1}$$
$$\Longrightarrow a_{k+1}=3 \times 7^k \Leftrightarrow a_k=3 \times 7^{k-1},$$

conforme, gostaríamos.