

Lista 4 - Teoria dos Números

Matemática Discreta I

Setembro 2022

1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ positivos. Prove as seguintes propriedades de divisibilidade

- (a) Se $a|b$ e $b|a$, então $a = b$.
- (b) Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.
- (c) Se $a|b$ e $a|c$, então $a|b + c$.
- (d) Se $a|b$, então $a|b \cdot c$.
- (e) Se $a|b$ e $a|c$, então $a|mb + nc$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

2. Prove, por indução, que

- (a) $7|2^{3n} - 1$
- (b) $8|3^{2n} + 7$
- (c) $3|2^n + (-1)^{n+1}$

3. Encontre todos os valores de n tais que $n^2 + 1$ é divisível por $n + 1$.

4. Considere as afirmações abaixo:

- (I) Seja a um número inteiro positivo. Então $a^2 - a$ tem 2 como um dos fatores primos.
- (II) O número 9659 é primo.
- (III) Se p é primo, então $p + 1$ não é primo.
- (IV) Os fatores primos de 383838 são 2, 3, 7, 13, 703.

Assinale a alternativa correta.

- (a) Todas alternativas são falsas
- (b) Apenas (I) e (IV) são verdadeiras.
- (c) Apenas (III) é falsa.
- (d) Apenas (II), (III) e (IV) são falsas.
- (e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

5. Prove que dados a, b inteiros positivos, tem-se $a.b = mmc(a, b).mdc(a, b)$.

Dica: use o fato de que

$$\begin{aligned} mdc(a, b) &= p_1^{\min\{a_1, b_1\}} \cdots p_r^{\min\{a_r, b_r\}} \\ mmc(a, b) &= p_1^{\max\{a_1, b_1\}} \cdots p_r^{\max\{a_r, b_r\}}, \end{aligned}$$

em que p_1, \dots, p_r são os primos na decomposição de a e b :

$$\begin{aligned} a &= p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} \\ b &= p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r} \end{aligned}$$

6. Use o Algoritmo de Euclides e a questão 4 para determinar o $mdc(a, b)$ e $mmc(a, b)$ nos seguintes casos:

- (a) $a = 15$ e $b = 80$
- (b) $a = 8798$ e $b = 2314$
- (c) $a = 1583890$ e $b = 3927$

7. Encontre os valores de x e y tais que $mdc(a, b) = ax + by$, nos casos abaixo.

- (a) $a = 119$ e $b = 272$
- (b) $a = 24$ e $b = 138$
- (c) $a = 1128$ e $b = 336$

8. Mostre que se $a \in \mathbb{Z}$ é positivo, então a e $a + 1$ são primos entre si.

9. Assumindo que $mdc(a, b) = 1$, mostre que

- (a) $mdc(a + b, a - b) = 1$ ou 2 . Dica: se $d = mdc(a + b, a - b)$, mostre que $d|2a$, $d|2b$ e conclua que $d \leq 2mdc(a, b)$.
- (b) $mdc(2a + b, a + 2b) = 1$ ou 3 .
- (c) $mdc(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2 . Dica: $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + 2b^2$.

10. Um empreiteiro deseja construir um prédio em um terreno retangular de dimensões 216 m por 414 m. Para isso deverá cercá-lo com estacas. Se ele colocar uma estaca em cada canto do terreno e utilizar sempre a mesma distância entre duas estacas consecutivas, qual será a quantidade mínima de estacas a serem utilizadas?
- (a) 18
 - (b) 210
 - (c) 12
 - (d) 70
 - (e) 105
11. Dona Antônia possui um enfeite pisca-pisca, para árvores de Natal, que tem lâmpadas amarelas, vermelhas e azuis. As lâmpadas amarelas se acendem de 7 em 7 minutos; as vermelhas, de 3 em 3 minutos; e as azuis, de 6 em 6 minutos. Se às 20 horas e 15 minutos todas as lâmpadas se acenderem, a que horas elas voltarão a se acender novamente ao mesmo tempo?
- (a) 21 horas e 15 minutos
 - (b) 20 horas e 57 minutos
 - (c) 20 horas e 24 minutos
 - (d) 20 horas e 33 minutos
 - (e) 20 horas e 36 minutos