Matemática Discreta - Listas de Exercícios

Jorge Augusto Salgado Salhani

Agosto, 2022

1 Lista 3 - Equivalências, Inferências, Demonstrações

1.1 Classifique em V ou F as sentenças abaixo. No caso de ser verdadeira, demonstre. Caso falsa, encontre um contra-exemplo.

(a) $(A \backslash B) \cup (A \cap B) = A$

Para que seja válida a igualdade, as partes da igualdade devem ser equivalentes. Ou seja, $X = Y$ implica que $X \subset Y$ e $X \supset Y$, ou também $X \implies Y$ e $X \impliedby Y$. Em ordem, usaremos $X = Y$.

Assim, supondo X, temos que

$$[x \in A \cap x \notin B] \cup [x \in A \cap x \in B] \implies$$
$$[x \in A] \cap [x \notin B \cup x \in B] \implies x \in A$$

Supondo Y

$$x \in A \implies [x \in A] \cap [x \notin B \cup x \in B] \implies$$
$$[x \in A \cap x \notin B] \cup [x \in A \cap x \in B]$$

Válido!

(b) $(A \backslash B) \subset (A \cup B)$

Aqui, precisamos apenas da relação $X \implies Y$. Assim, supondo X

$$[x \in A \cap x \notin B] \implies [x \in A] \implies [x \in A \cup x \in B]$$

(c) $A \subset B \implies B^c \subset A^c$

Supondo X,

$$[x \in A \implies x \in B] \implies [x \notin B \implies x \notin A]$$

Como $B^c \subset A^c$ representa $x \notin B \implies x \notin A$, a proposição é válida!

(d) $(A \backslash B) \subset B^c$

Suponto X

$$[x \in A \cap x \notin B] \implies x \notin B \implies x \in B^c$$

Como $x \notin B$ representa $x \in B^c$, vale a proposição.

(e) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Supondo X

$$x \notin (A \cup B) \implies [x \notin A \cap x \notin B] \implies [x \in A^c] \cap [x \in B^c]$$

Supondo Y

$$x \notin A \cap x \notin B \implies x \notin (A \cup B)$$

Vale a proposição.

(f) $\varnothing \cap \{\varnothing\} = \varnothing$

Sejam A, B conjuntos quaisquer. Seja $B = \{A\}$. Assim, supondo $A \cap B$

$$A \cap B \implies x \in A \cap x \in B \implies x \in A$$

Supondo agora A, $x \in A$. Mas como $A \subset B$, então $x \in A \implies x \in B$. Logo $x \in A \cap x \in B$, equivalente a $A \cap B$.

Sendo $A = \varnothing$, vale a proposição.

(g) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

Sendo $\mathcal{P}(A) = \{x; x \subset A\}$, então $x \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow x \subset A \implies x \in A$, então supondo X

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \implies [x \subset A] \cap [x \subset B] \implies x \in A \cap x \in B \implies x \in (A \cap B)$$

Supondo Y

$$\mathcal{P}(A \cap B) \implies x \in A \cap x \in B \implies [x \subset A] \cap [x \subset B] \implies \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

A proposição é válida.

(h) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$

Supondo X

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \implies [x \subset A] \cup [x \subset B] \not\Longrightarrow x \in A \cup x \in B$$

Supondo Y

$$\mathcal{P}(A \cup B) \implies x \subset (A \cup B) \not\Longrightarrow x \in A \cup x \in B$$

Seja $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2\}$. Então $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{2\}\}$, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$. No entanto $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ contém o elemento $\{1, 2\}$. Inválido.

1.2 Demonstre por absurdo que

(a) se $A \cup B = A \backslash B$, então $B = \varnothing$

Supondo que $B \neq \varnothing$, logo existe x tal que $x \in B$. Por hipótese, vale a proposição.

Como X indica que $x \in (A \cup B) \implies x \in A \cup x \in B$ e Y indica que $x \in A \cap x \notin B$,

$$x \in A : \text{vale X e Y}$$
$$x \in B : \text{vale X, não vale Y}$$

Contradição. Logo $B = \varnothing$.

(b) se $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \cup B$, então $A \cap B = \varnothing$

Supondo $A \cap B \neq \varnothing$. Por hipótese, vale a proposição.

De X temos

$$[x \in A \cap x \notin B] \cup [x \in B \cap x \notin A] \implies$$
$$[x \in A \cup x \in B] \cap [x \in A \cup x \notin A] \cap [x \notin B \cup x \in B] \cap [x \notin B \cup x \notin A] \implies$$
$$[x \in A \cup x \in B] \cap [x \notin B \cup x \notin A]$$

Se existe x tal que $x \in (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \cap x \in B$ e portanto $[x \notin B \cup x \notin A]$ é inválido. Logo $A \cap B = \varnothing$.