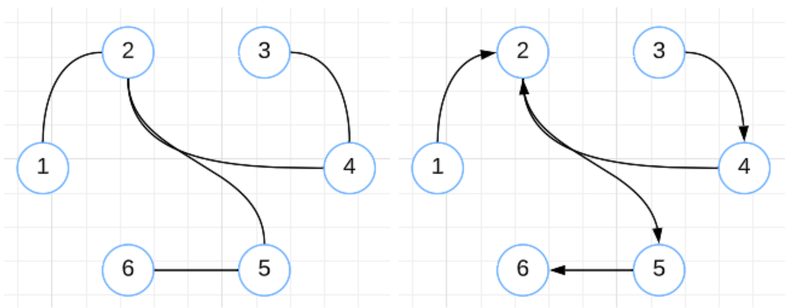
Modelagem Computacional em Grafos - Exercícios

Jorge Augusto Salgado Salhani

Março, 2023

1 Lista 1

1.1 Desenhe o grafo orientado e o grafo não orientado $G = (V, A)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A = \{(1, 2), (4, 2), (5, 6), (2, 5), (3, 4)\}$.



(a) (b)

Figure 1: Grafos do exercício 1

1.2 Defina formalmente os grafos ilustrados nas figuras a seguir, isto é, $G = (V, A)$.

a)

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 5), (5, 6)\}$$

b)

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{(1, 2), (3, 1), (2, 3), (5, 3), (5, 6)\}$$

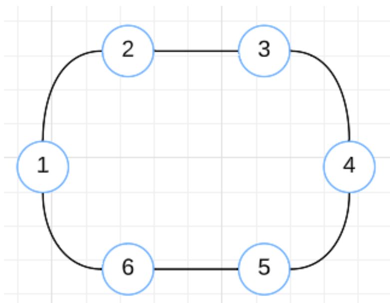
1.3 Dê exemplos de aplicações em que grafos são necessários para estruturar os dados, explicando o motivo de outras estruturas (como listas lineares ou árvores) não servirem para tal propósito.

Vamos partir dos conceitos de listas lineares e árvores. Em ambas estruturas de dados existem nós que contém alguma informação, como por exemplo um índice para discriminar cada nó (ou vértice). No entanto, listas lineares consideram que cada nó liga-se apenas a dois outros em uma ordem específica de precedência. Um nó liga-se a um anterior e um posterior, apenas.

De modo análogo árvores permitem a um nó conectar-se a mais de dois (até três, caso específico de árvores binárias), porém também mantendo uma estrutura de precedência hierárquica. Ou seja, um nó raiz folha não pode estar conectado à raiz da árvore.

Por conta das limitações acima, grafos são importantes estruturas gerais que permitem conexões múltiplas e decentralizadas. Aplicações típicas são em mapeamentos de linhas de tráfego de pessoas (rodovias), de abastecimento (energia elétrica), além de mapas de interações humanas (redes sociais). Em todos estes exemplos é evidente a necessidade de uma estrutura que permita múltiplas conexões (uma cidade é conectada por rodovias a outras N cidades adjacentes) não hierárquicas (uma cidade A ligada a outra B não apresenta necessária precedência, embora possa existir, como direcionalidade).

1.4 Desenhe um grafo em que cada vértice é adjacente a dois outros vértices e cada aresta é adjacente a duas outras arestas



(a)

Figure 2: Grafo do exercício 4

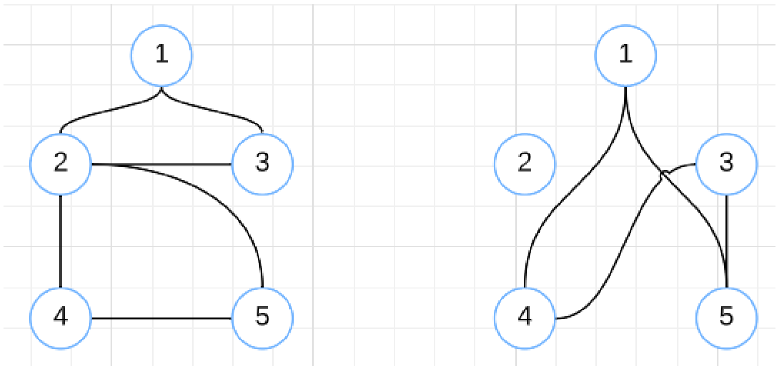
1.5 Quantas arestas têm um grafo completo não orientado com N vértices? E um grafo completo orientado? Explicite os cálculos.

Um grafo é dito completo quando todos os seus vértices ligam-se a todos os demais. Nesse caso, cada um dos N nós ligam-se aos demais $N - 1$.

caso não direcionado, vértice 1 liga-se aos $N - 1$, vértice 2 liga-se aos $N - 1$, vértice 3 liga-se aos $N - 1$, e o vértice N liga-se aos demais $N - 1$. Porém a conexão $(1, 2)$ foi contabilizada duas vezes, assim como a ligação $(1, 3)$. Dessa forma, para um grafo não direcionado completo o número de arestas é dado por $A = N(N - 1)/2$.

Caso o grafo seja direcionado (dígrafo), existem duas conexões entre cada vértice, a citar $(1, 2)$ e $(2, 1)$, entre os vértices 1 e 2. Dessa forma, não há duplicidade contabilizada e, portanto, $A = N(N - 1)$.

1.6 Encontre o complemento do grafo.



(a)

Figure 3: Grafos do exercício 6. Original (esquerda) e complementar (direita)

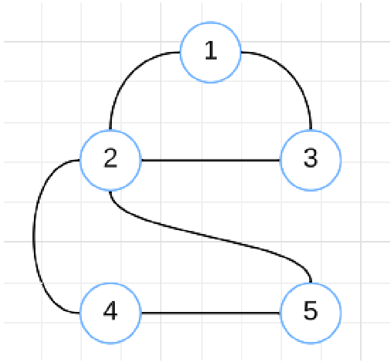
1.7 Apresente um grafo que tenha um caminho Euleriano e um caminho Hamiltoniano no qual tais caminhos não sejam idênticos.

Caminho euleriano: sequência de nós ou arestas que passam por todas as arestas uma única vez

$C = \{1, 3, 2, 5, 4, 2, 1\}$

Caminho hamiltoniano: sequência de nós ou arestas que passam por todos os nós uma única vez

$C = \{1, 3, 2, 5, 4\}$



(a)

Figure 4: Grafo do exercício 7.

1.8 Verifique que nenhum dos dois grafos da figura a seguir contém um caminho hamiltoniano.

1.9 Dê exemplos de aplicações reais de caminhos eulerianos e hamiltonianos.

Qualquer otimização de percurso que busque o menor caminho que contenha todos os elementos de um grafo pode ser modelado utilizando os percursos euleriano ou hamiltoniano.

Trajeto mais eficiente capaz de percorrer todas as cidades uma única vez (problema do caixeiro viajante) pode ser obtido via caminho hamiltoniano.

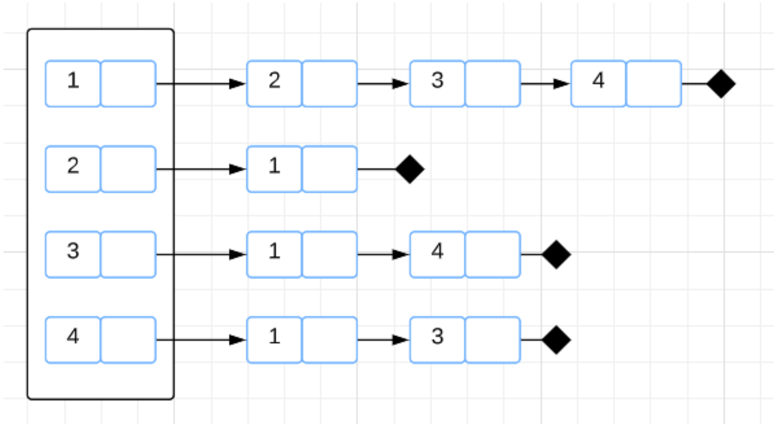
Otimização de construção e ordenação de circuitos e caminhos lógicos pode ser obtido via caminho euleriano

1.10 O que são hipergrafos? Como adaptar sua implementação do TAD Grafo para possibilitar a representação de hipergrafos?

Hipergrafos são representações generalizadas de grafos, onde uma aresta pode conectar qualquer número de vértices, número este igual a 2 para grafos.

Seja a representação do TAD Grafo em lista de adjacência

Uma extensão para representação em hipergrafo seria considerar como lista o conjunto de arestas (caixa preta à esquerda na figura abaixo), conectando cada um dos respectivos vértices.



(a)

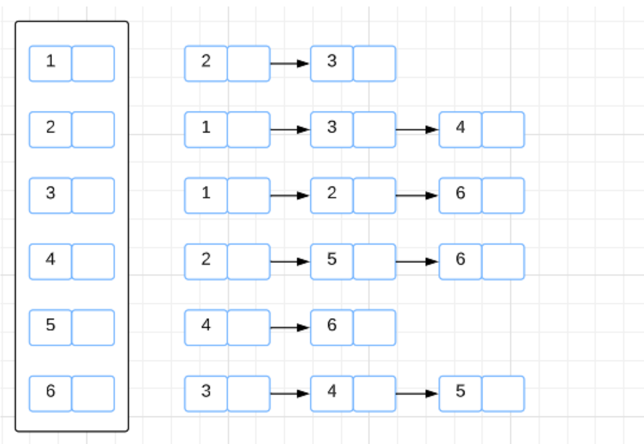
Figure 5: Representação de grafo em lista de adjacência para o grafo com $V = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $G = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4)\}$. A caixa preta à esquerda representa o conjunto de vértices V.

1.11 Seja uma matriz simétrica quadrada formada apenas por 0's e 1's que tem apenas 0's na diagonal principal. Essa matriz pode representar a matriz de adjacência de um grafo simples?

Sim. Essa matriz pode representar um grafo não direcional completo, onde cada vértice está conectado a todos os demais (exceto a si mesmo, pela presença de 0 na diagonal principal), ou também um dígrafo completo.

1.12 Represente o grafo usando matriz de adjacência e listas de adjacência.

Sendo $G = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$, temos



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0
3	1	1	0	0	0	1
4	0	1	0	0	1	1
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	1	0

(a)

Figure 6: Representação de grafo em matriz de adjacência e em lista de adjacência.

1.13 Identifique quais desses conjuntos de grafos são isomorfos. Caso haja algum que não seja, explique.

Sendo dois grafos G e H isomorfos, existe uma bijeção entre seus vértices tal que

$$f : V(G) \to V(H)$$

Em outras palavras, cada vértice pode ser mapeado de G em H mantendo os mesmos pares de conexões.

Assim, são isomorfos: (a) e (b). Não isomorfos: (c)

1.14 Exercícios 14 - 29: Implementações