Algebra Linear e Aplicações - Estudos

Jorge Augusto Salgado Salhani

Agosto, 2022

1 Espaços Vetoriais

1.1 Determinar se V é espaço vetorial

(a) Seja $V = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2; a, b > 0\}$ com operações definidas por

$$
\begin{aligned}
+ &: (a, b) + (c, d) = (ac, bd), \forall (a, b), (c, d) \in V \\
\cdot &: \alpha(a, b) = (a^\alpha, b^\alpha); \alpha \in \mathbf{R}, (a, b) \in V
\end{aligned}
$$

Para que V seja espaço vetorial, seja $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, vale que

1. $u + v = v + u$;
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$;
3. Existe $0 \in V; (0_V) + u = u$;
4. Existe $-u \in V; u + (-u) = (0_V)$;
5. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$;
6. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
7. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
8. Existe $1 \in V; 1u = u$;

Sejam $u = (a, b); v = (c, d); w = (e, f)$. Para 1. temos que:

$$
\begin{aligned}
&u + v = (a, b) + (c, d) = (ac, bd) \\
&v + u = (c, d) + (a, b) = (ca, db) = (ac, bd) \\
&\implies (u + v) = (v + u)
\end{aligned}
$$

Para 2. temos que:

$$u + (v + w) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a, b) + [(ce, df)] = (ace, bdf)$$
$$(u + v) + w = [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = [(ac, bd)] + (e, f) = (ace, bdf)$$
$$\implies u + (v + w) = (v + w) + u$$

Seja $0_V = (z_1, z_2)$. Para 3. temos que:

$$0_V + u = (z_1, z_2) + (a, b) = (z_1 a, z_2 b) = (a, b)$$
$$\implies 0_V = (1, 1)$$

Seja $-u = (z_3, z_4)$. Para 4. temos que:

$$u + (-u) = (a, b) + (z_3, z_4) = (az_3, bz_4) = 0_V = (1, 1)$$
$$\implies -u = (1/a, 1/b);$$

Para 5. temos que:

$$\alpha(\beta u) = \alpha[\beta(a, b)] = \alpha[(a^\beta, b^\beta)] = ((a^\beta)^\alpha, (b^\beta)^\alpha) = (a^{\beta\alpha}, b^{\beta\alpha})$$
$$(\alpha\beta)u = (a^{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}) = (a^{\beta\alpha}, b^{\beta\alpha})$$
$$\implies \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

Para 6. temos que:

$$\alpha(u + v) = \alpha(ac, bd) = [(ac)^\alpha, (bd)^\alpha]$$
$$\alpha u + \alpha v = (a^\alpha, b^\alpha) + (c^\alpha, d^\alpha) = [(a^\alpha c^\alpha), (b^\alpha d^\alpha)] = [(ac)^\alpha, (bd)^\alpha]$$
$$\implies \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

Para 7. temos que:

$$(\alpha + \beta)u = (a^{\alpha+\beta}, b^{\alpha+\beta})$$
$$\alpha u + \beta u = (a^\alpha, b^\alpha) + (a^\beta, b^\beta) = [(a^\alpha a^\beta), (b^\alpha b^\beta)] = [a^{\alpha+\beta}, b^{\alpha+\beta}]$$
$$\implies (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

Seja $1 = o$. Para 8. temos que:

$$1u = o(a, b) = (a^o, b^o) = (a, b)$$
$$\implies o = 1$$

Logo V é espaço vetorial.

1.2 Determinar se W é subespaço vetorial de V

(a) Seja $V = \mathbf{R}^3$, $W = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbf{R}\}$.

Sendo V espaço vetorial, W é subespaço de V se, para $0_V \in V$ $u, v \in W$ e $\alpha \in \mathbf{R}$

1. $0_V \in W$
2. $u + v \in W$
3. $\alpha u \in W$

Para 1. temos que $0_V = \{0, 0, 0\}$. Para $x = y = 0$, $0_v \in W$.

Sejam $u = (a, b, 0); v = (c, d, 0)$. Para 2. temos que:

$$u + v = (a, b, 0) + (c, d, 0) = (a + c, b + d, 0)$$
$$\implies u + v \in W$$

Para 3. temos que:

$$\alpha u = \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$
$$\implies \alpha u \in W$$

Logo W é subespaço vetorial de V.

(b) $V = M_{nXn}$ e $W = \{A \in V; A = A^T\}$

Para 1. temos que $0_V = 0_{nXn}$. Como $0_V^T = 0_V$, $0_V \in W$.

Sejam $U, V \in W$ e $C = U + V$. Para 2. temos que:

$$u + v = U + V = U^T + V^T$$
$$(U + V) = C \implies C^T = (U + V)^T = U^T + V^T = U + V = C$$
$$\implies C = U + V \in W$$

Para 3. temos que αU pertence a W se $(\alpha U)^T = \alpha U$. Como $(\alpha U)^T = \alpha U^T = \alpha U$, então $\alpha U \in W$.

Logo W é subespaço vetorial de V.

1. $V = \mathbf{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 3y - 2z + 1 = 0\}$

Para 1. temos que $0_V = (0,0,0)$. Como $0_V \implies 1 = 0$ (absurdo), $0_V \notin W$.

Logo W não é subespaço vetorial de V.

1.3 Combinações lineares e geradores

(a) Sejam $V = \mathbf{R}^2$ e $S = \{(2,1),(1,-1)\}$. Escreva $v = (1,2)$ como combinação linear dos elementos de S.

Para que v seja combinação linear de um conjunto $S = \{v_1, v_2\}$, deve existir $\overrightarrow{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ tal que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Assim, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2 = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Temos que $v = (1)(2,1) + (-1)(1,-1)$.

(b) Sejam $V = \mathbf{R}^2$ e $S = \{(2,1),(1,-1)\}$. Determine o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.

Dado $v = (x,y) \in V$, deve existir $\overrightarrow{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ tal que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ para $S = \{v_1, v_2\}$ de modo que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} x = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = (x+y)/3 \\ \alpha_2 = x - (2/3)(x+y) \end{cases}$$

Como para todo (x,y) existe (α_1, α_2) que, operados sobre S geram $v = (x,y)$, $[S] = V$, ou seja, o subespaço gerado por S ($[S]$) é todo o espaço V.