Lista 3 de Álgebra Linear e Aplicações

8 de outubro de 2022

Exercício 1: Em cada um dos casos abaixo encontre a interseção e a soma dos subespaços U e V dados. Além disso, determine uma base e a dimensão de $U \cap V$ e $U + V$. Em quais casos a soma é direta?

(a) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ z = w = 0\}$.

(b) $U = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ x, y \in \mathbb{R}\right\}$ e $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

(c) $U = \{f(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R});\ f'(x) = 0\}$ e $V = \{g(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R});\ f(0) = 0\}$.

(d) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ 2x + y - z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ x - y = 0\}$.

Exercício 2: Determine quais funções abaixo são transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x^2 + y^2, 0)$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 2y, y - x)$.

(c) $T : M_2(R) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -c \\ b & a \end{pmatrix}$.

(d) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T(1) = 2$ e $T(4) = 10$.

(e) $T : \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = sen(x)$.

(f) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = sen(x)$.

Exercício 3: Demonstre que se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é bijetora, então $m = n$. Dê um exemplo em que não vale a recíproca.

Exercício 4: Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(1, 1, 1) = (0, 3, 1, 5)$, $T(1, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$? Existe mais de uma?

Exercício 5: Em cada um dos casos abaixo encontre uma base para o núcleo e a imagem das transformações lineares dadas:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$.

(b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - d$

(c) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2022}$ dada por $T(ax^2 + bx + c) = (a, b, c, 0, 0, \cdots, 0)$

(d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + d)x^3 + (b + d)x^2 + (c + d)x$.

(e) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(f(x)) = f'(x)$.

Exercício 6: Sejam U, V e W espaços vetorial reais e $T : U \to V$ e $S : V \to W$ transformações lineares. Prove que $S \circ T : U \to W$ é uma transformação linear.

Exercício 7: Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Caso seja falsa, dê um contra exemplo.

(a) Toda transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.

(b) Toda transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.

(c) Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.

(d) Não existe transformação linear injetora $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(e) Toda transformação $T : U \to \{0\}$, onde U é um espaço vetorial qualquer, é sobrejetora.

(f) Sejam U e V subespaços vetoriais de mesma dimensão de um mesmo espaço vetorial W. Então, existe $T : U \to V$ isomorfismo linear.

(g) Seja W um espaço vetorial. Se $T : \mathbb{R}^2 \to W$ é injetora, $S : W \to \mathbb{R}^4$ é sobrejetora e $Ker(S) = Im(T)$, então $dim(W) = 6$.

(h) Se $T : M_4 \to W$ é uma transformação linear injetora, então $dim(W) < 16$

(i) Se $T : M_4 \to W$ é uma transformação linear sobrejetora, então $dim(W) \leq 16$

Exercício 8: Em cada um dos itens da questão 5, encontre a matriz da transformação linear dada. Considere que ambos os espaços estão com a base canônica usual.

Exercício 9: Considere as transformações lineares $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $T(x, y) = (2x + 3y, -y)$ e $S(x, y) = (x - 3y, 4y)$.

(a) Tomando um ponto genérico (sem usar matrizes), mostre que $T \circ T \circ S(x, y) = 4(x, y)$.

(b) Encontre as matrizes $[T]$ e $[S]$ das transformações T e S respectivamente, na base canônica.

(c) Verifique que $[S][T]^2 = 4.I_{2\times 2}$. Como isso está relacionado com o item (a)?

Exercício 10: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que na base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ é representada por

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre a matriz de T em relação à base canônica.

Exercício 11: Sejam V um espaço vetorial, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de V e $I : V \to V$ o operador linear identidade. Mostre que

$$[I]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$