Lista 4 de Álgebra Linear e Aplicações

26 de outubro de 2022

Exercício 1: Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Caso seja falsa, dê um contra-exemplo.

(a) Seja T um operador linear sobrejetor. Então T não pode ter autovalor igual a 0.

(b) Seja T um operador linear injetor. Então T não pode ter autovalor igual a 0.

(c) Se $\vec{v}$ é autovetor de T então $2022.\vec{v}$ também o será.

(d) A multiplicidade geométrica de um autovalor é menor ou igual à sua multiplicidade algébrica.

(e) Seja T um operador linear em V de dimensão finita n. Se a soma das multiplicidades geométricas é n, então T é diagonalizável.

(f) Seja T um operador linear em V de dimensão finita n. Se a soma das multiplicidades algébricas é n, então T é diagonalizável.

Exercício 2: Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $[T]$ é uma matriz triangular.

(a) Mostre que se todos os elementos da diagonal de $[T]$ forem distintos, então $[T]$ é diagonalizável.

(b) Mostre que não é possível garantir que $[T]$ seja diagonalizável sem a hipótese acima.

Exercício 3: Encontre os autovalores dos seguintes operadores lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (3x, x + 4y + 3z, x + y + 6z)$.

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ dada por $T(a, b, c, d, e) = (3a, 3b, 3c, 3d, 3e)$.

(c) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p(x)) = p'(x) + p(1)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + y + 2z, x + 2y + z, x + y + 2z)$.

Exercício 4: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear que tem como autovetores $(3, 1)$ e $(-2, 1)$ associados aos autovalores -2 e 3 respectivamente. Calcule $T(x, y)$.

Exercício 5: Verifique se as matrizes abaixo são diagonalizáveis. Em caso positivo encontre uma base de autovetores.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Exercício 6: Seja M a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x+y+z, z, -z)$. Calcule M^{2022}. *(Dica: É muito mais fácil fazer potência de matrizes diagonais.)*

Exercício 7: Que condições os números reais a e b devem satisfazer para que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + z, by, ax - z)$ seja diagonalizável?