Algebra Linear e Aplicações - Listas de Exercícios

Jorge Augusto Salgado Salhani

Agosto, 2022

1 Lista 1 - Revisão de Geometria Analítica

1.1 Em cada um dos casos abaixo dê a equação da reta $r \subset \mathbf{R}^2$ que cumpre as condições desejadas na forma geral ($r : ax + by = c$) e na forma vetorial ($r : P + t\overrightarrow{v}$).

(a) r passa pelos pontos (2, -1) e (-1, 1)

Sendo um ponto $A = (x_1, y_1)$ e um vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$, um ponto $P = (x, y)$ pertence a r se o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\overrightarrow{v}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}$$
$$P - A = t\overrightarrow{v} \implies P = A + t\overrightarrow{v}$$
$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(a, b)$$

Dessa forma, seja $A = (2, -1)$, $P = (-1, 1)$ e $t = 1$. Assim, $\overrightarrow{v} = P - A = (-3, 2)$. Logo, temos que

$$r : (x, y) = (-1, 1) + t(-3, 2)$$

(b) r é paralela à reta $l : x + y = 0$ e passa pelo ponto (-5, 5).

Como vale para a reta $l : x + y = 0$, temos que essa reta passa pelos pontos $x = 1 \implies y = -1$, resultando em $A = (1, -1)$ e $x = -1 \implies y = 1$, resultando em $B = (-1, 1)$. Logo, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 2)$. Logo

$$r : (x, y) = (-5, 5) + t(-2, 2)$$

(c) r é paralela à reta $l : (2, 3) + t\overrightarrow{(2, -1)}$ e passa pelo ponto (-4, -9).

Sendo paralela ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(2,-1)}$, segue que

$$r : (x, y) = (-4, -9) + t(2, -1)$$

(d) r é perpendicular ao eixo X e passa pelo ponto (2,3)

Sendo perpendicular ao eixo X, sabemos que o vetor diretor da reta r é dado por $\vec{v} = \alpha(0, 1) = (0, \alpha)$.

Sendo $\alpha = 3$, fazemos com que o vetor $\vec{v}$ passe pelo ponto (2,3). Logo

$$r : (x, y) = (2, 3) + t(0, 3)$$

(e) r é perpendicular à reta $l : (0, 2) + t\overrightarrow{(1, 1)}$ no ponto (4,2)

Como a reta l contém o ponto (4,2), e para r perpendicular a l temos que seus vetores diretores devem ser tais que $\vec{v_l} \cdot \vec{v_r} = 0$. Sendo $\vec{v_r} = (\alpha, \beta)$, $1\alpha + 1\beta = 0$. Um dos possíveis vetores é $\vec{v_r} = (-1, 1)$. Logo

$$r : (x, y) = (4, 2) + t(-1, 1)$$

1.2 Sejam $A = (1, 2)$, $B = (3, -2)$, $C = (-3, 4)$, $D = (0, y)$ pontos do plano, r a reta que passa por A e B, e l a reta que passa por C e D. Determine o valor de y para que as retas r e l sejam paralelas e para que sejam perpendiculares.

Pelos pontos que passam as retas r e l, temos que

$$r : (x', y') = (1, 2) + t(2, -4)$$
$$l : (x', y') = (-3, 4) + t(3, y - 4)$$

Para que sejam perpendiculares, y é tal que $\vec{v_r} \cdot \vec{v_l} = 0 = (2, -4) \cdot (3, y - 4)$. Logo $y = 11/2$.

Para que sejam paralelas, os vetores diretores de ambas precisam ser linearmente dependentes, ou seja, $\vec{v_r} = \alpha \vec{v_l}$, onde $\vec{v_r}$ representa o vetor diretor da reta r e $\alpha \in \mathbf{R}$. Assim, temos que $(3, y-4) = \alpha(2, -4)$ e, portanto $\alpha = 3/2$ e $y = -2$ para que sejam paralelas.

1.3 Determine se as retas dadas são paralelas ou concorrentes. Caso elas sejam concorrentes, determine em que ponto elas se intersectam.

(a) $2x - y = 2$ e $3x + y = 3$

Primeiro, vamos encontrar os vetores diretores das retas. Para isso, precisamos encontrar y caso $x = 0$ e x caso $y = 0$.

Sendo $r : 2x - y = 2$, r passa pelos pontos (0, -2) e (1,0). Sendo $l : 3x + y = 3$, l passa pelos pontos (0, 3) e (1,0).

Para que sejam paralelas, $\vec{v_r} = \alpha\vec{v_l} \implies (-1, -2) = \alpha(-1, 3)$. Como não existe α que satisfaça, r e l são linearmente independentes e, portanto, concorrentes com intersecção em $(1, 0)$.

(b) $5x - 7y = 3$ e $10x - 14y = 5$

Sendo $r : 5x - 7y = 3$, a reta passa pelos pontos $(0, -3/7)$ e $(3/5, 0)$, temos portanto $\vec{v_r} = (3/5, 3/7)$.

Sendo $l : 10x - 14y = 5$, a reta passa pelos pontos $(0, -5/14)$ e $(5/10, 0)$, temos portanto $\vec{v_l} = (5/10, 5/14)$

Como $\vec{v_l} = \alpha\vec{v_r} \implies (5/10, 5/14) = \alpha(3/5, 3/7)$ válido para $\alpha = 5/6$, ambos vetores diretores são linearmente dependentes, e portanto, r e l são paralelas.

(c) $x + 2y = 4$ e $3x + 4y = 10$

Sendo $r : x + 2y = 4$, os pontos $(0, 4/2)$ e $(4, 0)$ pertencem à reta r, cujo vetor diretor é $\vec{v_r} = (4, -4/2)$.

Sendo $l : 3x+4y = 10$, os pontos $(0, 10/4)$ e $(10/3, 0)$ pertencem à reta l, cujo vetor diretor é $\vec{v_l} = (10/3, -10/4)$.

Para que sejam paralelas, $\vec{v_r} = \alpha\vec{v_l}; \alpha \in \mathbf{R}$. Como não existe α tal que $(4, -4/2) = \alpha(10/3, -10/4)$ seja satisfeita, as retas são concorrentes.

O ponto onde r e l se cruzam ocorre quando $r = l$. Assim, $(x, y) = (2, 1)$ representa o ponto de intersecção das retas.

1.4 Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 1$, $y = 3x - 2$ e $y = 1 - x$. Encontre os vértices desse triângulo

Os vértices do triângulo formado pelas retas acontecem onde as mesmas se encontram. Logo, igualando as equações, temos os vértices em $(x, y) = \{(3, 7), (0, 1), (3/4, 1/4)\}$.

1.5 Sejam A, B e C pontos no plano

(a) Que condição os pontos A, B e C devem cumprir para que eles sejam vértices de um triângulo? O que isso significa em termos dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$?

Para que formem um triângulo, os três pontos devem ser coplanares e distintos e não podem pertencer à mesma reta. Logo $A \neq B \neq C$ e $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AC}$, sendo $\overrightarrow{AB} \neq \alpha\overrightarrow{AC}$ $\forall\alpha \in \mathbf{R}$, ou seja, devem ser linearmente independentes.

1.6 Sejam A, B, C pontos em $\mathbf{R}^2$ não colineares. Em cada item, explique quais são os pontos do plano que cumprem a condição desejada.

(a) Estão na mediatriz do lado $\overline{AC}$

A mediatriz do seguimento $\overline{AC}$ é relativa à reta perpendicular ao seguimento que passa sobre o ponto equidistante de A e C. Assim, sendo $A = (x_A, y_A)$,$C = (x_C, y_C)$, temos o ponto da mediatriz $M = (x_M, y_M)$ dado por

$$(x_M, y_M) = [(x_A, y_A) + (x_C, y_C)](1/2)$$

Sendo também o vetor diretor do seguimento $\overline{AC}$ dado por $\overrightarrow{v_{AC}} = A - C = (x_A, y_A) - (x_C, y_C)$, o vetor diretor da mediatriz $\overrightarrow{v_M} = (\alpha, \beta)$ é tal que $\overrightarrow{v_M} \cdot \overrightarrow{v_{AC}}$. Logo deve ser válido que

$$\alpha(x_A - x_C) + \beta(y_A - y_C) = 0$$

Por fim, teremos que os pontos estão contidos na reta

$$(x, y) = (x_M, y_M) + t(\alpha, \beta)$$