Lista 1 de Álgebra Linear e Aplicações

11 de setembro de 2022

Exercício 1: Determine se W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V dado em cada um dos casos. Em caso positivo encontre uma base para W.

(a) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ x^2 = 0\}$ e $V = \mathbb{R}^4$ com as operações usuais.

(b) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ z = 1\}$ e $V = \mathbb{R}^4$ com as operações usuais.

(c) $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_{2022}(\mathbb{R});\ p'(x) = 0\}$ e $V = \mathcal{P}_{2022}(\mathbb{R})$ com as operações usuais.

(d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & a+b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e $V = M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais.

(e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x, y$ e z estão em PA$\}$ e $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais.

(f) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 1 = 0\}$ e $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais.

(g) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + z = 0\}$ e $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais.

Exercício 2: Considere o espaço vetorial real $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com a soma $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e o produto por escalar $\lambda(f(x)) = \lambda f(x)$.

(a) Prove que V tem dimensão infinita.

Sugestão: Encontre um conjunto infinito de vetores LI.

(b) Determine se $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \{f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R});\ f'(x)$ existe e é contínua$\}$, o conjunto das funções em V que são diferenciáveis de derivada continua, é um subespaço próprio de V.

(c) Determine se $W = \{f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}); f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$, o conjunto das funções contínuas não negativas, é um subespaço próprio de V.

Exercício 3: Seja V um espaço vetorial genérico. Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Caso seja falsa, dê um contra-exemplo.

(a) Seja $W \subset \mathbb{R}^4$ um subespaço vetorial próprio. Então existem 4 vetores LI em W.

(b) $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$.

(c) Se U e W são subespaços vetoriais de V então $U \cup W$ também é um subespaço vetorial de V.

(d) Se U e W são subespaços vetoriais de V então $U \cap W$ também é um subespaço vetorial de V

(e) Dados $u, v \in V$, temos que u e v são LI, se e somente se, $u + v$ e $u - v$ são LI.

(f) Quaisquer 10 vetores LI em $\mathbb{R}^{10}$ formam uma base.

(g) Dados 4 vetores não nulos em $\mathbb{R}^3$, eles não podem formar uma base de $\mathbb{R}^3$ pois apesar de gerarem todo o espaço, eles não serão LI.