

# Mecânica Estatística - Monografia

Jorge Augusto Salgado Salhani

April 2018

## 1 Introdução

Organismos vivos em ambientes naturais estão constantemente sujeitos a estímulos externos capazes de moldar seu comportamento. De organismos unicelulares, como bactérias [4], a pluricelulares, como mamíferos, todos apresentam meios de percepção de seu entorno como forma basal de sobrevivência.

Ao assumirmos que sempre são preferenciais comportamentos que promovem a sobrevivência específica, com estratégias emergentes [3] ou conscientes [18, 13], podemos afirmar que para um dado indivíduo, por exemplo, a simples escolha da direção de movimento é capaz de elevar suas chances de sobrevivência caso exista uma tendência em deslocamentos para proximidades de ambientes favoráveis a seu desenvolvimento (com abundância de nutrientes [28], por exemplo) e/ou com distanciamento de ambientes prejudiciais a seu desenvolvimento [27]. Logo o estudo da influência de estímulos sobre seres vivos se mostra uma ferramenta fortemente elucidativa no que tange a dinâmica dos organismos em análise.

Entre estímulo e percepção existe o indivíduo simultaneamente passivo (ao primeiro) e ativo (ao segundo, mesmo que inconscientemente). Com a hipótese anterior quanto à sobrevivência específica, decorre uma possível explicação acerca da percepção ser um evento ativo ao indivíduo: os processos reativos ou causais, isto é, aqueles que somente são realizados (efeito) dada a presença de um evento anterior (causa), devem ser eficientes no maior número de níveis de complexidade possível (referentes às estruturas básicas que definem um organismo). Tais estruturas podem ser sociais ou biológicas. Dado o foco biológico deste trabalho, temos por exemplo os níveis celulares de armazenamento e processamento de informação até a sua execução expressas através de genomas, transcriptomas, proteomas e metabolomas, interdependentes. [20] A percepção é, portanto, quantificada e julgada pelo indivíduo a fim de obter a melhor resposta para um dado estímulo.

Como exemplos a nível intracelular desta dinâmica estímulo-percepção-reação temos o ramo de biologia de sistemas [1, 14], que busca modelar as redes de interações bioquímicas. Um de seus resultados interessantes expressam "motivos de rede" comuns em rotas bioquímicas capazes de auto-regulação, sem os quais resultaria em desequilíbrio de excesso de produção (e portanto gasto desnecessário de recursos energéticos celulares) ou

de escassez (logo, falta de recursos vitais para o desenvolvimento celular). Isto exemplifica, em um dos níveis de complexidade, a importância de organismos apresentarem percepção ativa, permitindo ao organismo capacidade de reações otimizadas.

Em um segundo exemplo, passamos para o nível intercelular, que contempla o desenrolar deste trabalho. Algumas das células presentes em organismos pluricelulares complexos são neurônios. As mesmas estão contidas no complexo sistema neural de seres vivos e apresentam comunicação por vias químicas dependentes de íons  $Na^+$ . Os neurônios constituem uma rede através de terminações sinápticas (espaçamentos presentes entre neurônios que mantêm comunicação seletiva entre distintos aglomerados neuronais e demais tecidos [21]) responsáveis pela propagação de informação através de impulsos elétricos. Uma vez recebido um estímulo de que um pulso elétrico deve ser transmitido em determinada direção, canais proteicos de  $Na^+$  são abertos e permitem a entrada destes íons na célula, que passa a ser mais permeável à sua entrada, promovendo a transmissão de um sinal pulsado ao longo da célula nervosa. O ciclo de retro-alimentação positiva é característico de um sistema clássico de descrição de transmissão de informação via rede de neurônios. No entanto, uma vez utilizados como propagadores, os canais de troca iônica são impossibilitados de conduzir corrente em tempos subsequente no que se chama período refratário ou de pós-hiperpolarização, até que o neurônio possa ser novamente utilizado como condutor. [5]

Modelos de ativação neuronal podem ser criados considerando múltiplas células conectadas de forma direcional ou não-direcional (isto é, células conectadas podem ativar-se reciprocamente) e que apresentam três regimes: de repouso, ativo e transiente (ou refratário). O período transiente representa uma das variações entre construções de modelos computacionais.

Estímulos podem apresentar intensidade e duração (outras características como direcionamento espacial podem ser consideradas para um modelo mais rico, porém aqui trabalharemos com sistemas não-direcionados). Tais grandezas podem estar diretamente relacionadas quando apresentam magnitude elevada. Isto significa que estímulos intensos podem **aparentar** longa duração assim como estímulos prolongados podem **aparentar** alta intensidade. [16] Esta diferença pode ser estudada através de uma rede de elementos interagentes (o grau de conectividade do sistema está associado à duração de um estímulo) sujeitos a um estímulo externo (associado à intensidade mencionada), modelo este que será utilizado neste trabalho.

Aqui apresentaremos três modelos: o modelo de Ising, como paradigma para melhor compreensão de fenômenos críticos; o modelo proposto por Kinouchi [12], no qual este trabalho se baseia; e o modelo construído de modo a simular os resultados deste último, como forma de estudar o comportamento do sistema para parâmetros distintos daqueles já apresentados.

## 2 Metodologia

Nesta seção definiremos o modelo utilizado para a simulação algébrica e computacional do nosso sistema em estudo. Dado que trataremos o problema por meio de uma rede de neurônios interagentes e sujeitos a estímulos externos, o objeto-modelo será o **grafo** (escolhido por sua facilidade de descrição de sistemas interagentes) e a matematização de sua estrutura e dinâmica será realizada em termos de **variáveis estocásticas**, para que o modelo seja mais aproximado a organismos reais que estão sujeitos a ações nem sempre determinísticas.

### 2.1 Modelagem do sistema físico em estudo

Consideramos para a dinâmica proposta a representação do modelo em grafo, onde cada um de seus vértices representa um elemento excitável (vale ressaltar que as palavras 'vértice' e 'elemento' serão tidas como sinônimos e utilizadas de forma intercambiável neste estudo) e, suas arestas, cada uma das interações entre os elementos disponíveis. A excitação de cada elemento pode acontecer por vias exógena ou endógena, isto é, devido a uma fonte geradora de estímulos externa capaz de exercer atividade sobre todos os elementos com mesma probabilidade  $\lambda$  ou devido às interações entre os próprios elementos através das arestas que os ligam, com probabilidade  $p_{ij}$  representando a probabilidade de ativação do elemento  $j$  pelo vértice  $i$ . Esta probabilidade é definida para cada aresta individualmente (e não apresenta direcionalidade, sendo válida a relação  $p_{ij} = p_{ji}$ ) e mantida fixa ao longo de todo o desenrolar da dinâmica do sistema. Todo elemento é caracterizado por apresentar  $n$  estados, discretizados em um estado dormente (0), um estado ativo (1) e  $n - 1$  estados refratários representados na forma

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{caso dormente;} \\ 1, & \text{caso ativado;} \\ 2, 3, 4, \dots, n-1, & \text{caso refratário;} \end{cases} \quad (1)$$

onde o índice  $i$  representa o  $i$ -ésimo elemento dentre os  $N$  totais e  $s_i$ , o estado a ele associado. Todo estado não apresenta dependência explícita do tempo, porém a dinâmica decorre da seguinte forma: Após um estímulo externo, existe uma chance  $\lambda$  de que o elemento  $i$  seja excitado e passe do estado  $s_i = 0$  para  $s_i = 1$ , no mesmo instante em que sofreu o estímulo. Após um passo temporal existe a probabilidade  $p_{ij}$  de que o elemento  $i$  excite  $j$  por meio de sua conexão. Caso isto ocorra, o estado final deste elemento torna-se  $s_j = 1$ ; senão, mantém-se nulo. Também neste mesmo instante, todo elemento que estava no estado ativado entra em modo refratário no qual permanece impossibilitado de produzir ou receber estímulos, tanto de fontes endógenas quanto exógena. Em termos explícitos da evolução de cada estado, temos que caso  $s_i = 1$  no instante  $t = 0$ , quando  $t = 1$ ,  $s_i = 2$ ; subsequentemente, para  $t = 2$ ,  $s_i = 3$ , e assim suscetivamente, até que em  $t = n - 2$ ,  $s_i = n - 1$  e, finalmente, quando  $t = n - 1$ ,  $s_i = 0$ , voltando ao estado dormente.

## 2.2 Sistema de rede interativa

Nesta primeira seção compreenderemos os modelos matemático e computacional que descrevem a construção das conexões da rede interativa de agentes (neurônios) que consiste o nosso sistema de estudo.

### 2.2.1 Matematisação do sistema

A  $K_j$  rede é construída baseada no modelo de grafo (neste contexto podemos assumir 'grafo' como uma estrutura de dados formada por elementos que buscam representar objetos do mundo real suas interações) aleatório não-direcional de Erdos-Renyi, ou seja, para um dado número total  $N$  de vértices que individualmente podem apresentar  $N-1$  conexões com probabilidade  $p$  independentes, podemos afirmar que a probabilidade de um elemento qualquer realizar  $k$  conexões é dada pela distribuição binomial

$$P_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-k-1}. \quad (2)$$

A função  $P_k$  representa a distribuição de probabilidade associada à conectividade do grafo.

A obtenção de uma fórmula matemática completa para a distribuição de probabilidade impõe ao modelo propriedades próximas às do mundo real enquanto conserva propriedades aleatórias. Ambas são qualidades importantes na descrição de modelos com agentes (ou elementos) interativos, visto que a forma como objetos reais interagem não possui caráter completamente determinístico nem unicamente aleatório (uma destas interações pode ser facilmente racionalizada na forma de relações interpessoais, onde os vértices são pessoas e as arestas, a relação que as mesmas apresentam). Em justiça à distribuição dada pela equação (2) e no contexto que ela aqui se mostra, podemos conhecer qual o 'grau' médio de conectividade dos elementos presentes no nosso sistema físico real (isto é, saber quantas são as conexões, em média, que um objeto dispõe) e, a partir disso construir um modelo computacional que tanto preserva propriedades reais quanto apresenta uma função matemática capaz de descrevê-lo [17].

Este fato decorre da consideração inicial de que, escolhido o vértice  $j$  dentre os  $N$  disponíveis no grafo, cada uma das  $N-1$  possíveis conexões é feita (obtenção de 'sucesso' ou, em notação binária, 1) ou não (obtenção de 'falha', ou 0) por meio de uma variável aleatória  $\xi_l$  associada ao referido elemento que recebe valores  $\xi_l = 1$ , com probabilidade  $p$ , ou  $\xi_l = 0$ , com probabilidade  $q$  tal que  $q = 1 - p$  (de modo que a soma das probabilidades possíveis seja normalizada). Note que o índice da variável  $\xi$  não representa o elemento  $j$ , mas sim a conexão  $l$  que a ele está associada. Neste cenário, podemos definir uma nova variável  $y_j = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{N-1}$  como o número de conexões que serão feitas a partir de  $j$ . Ao considerarmos a independência de vértices, podemos afirmar que  $y_j = y$ , válido para todo vértice. Assim a distribuição de probabilidade pode ser obtida via equação característica

$$G_y(\omega) = \langle e^{ik\omega y} \rangle, \quad (3)$$

que, para o este contexto, toma a forma

$$G_y(\omega) = \langle e^{i\omega \sum_l \xi_l} \rangle. \quad (4)$$

Sabendo que a média de uma função qualquer de variáveis estocásticas  $X_l$  é dada pela relação entre seu valor  $F(X_l)$  e a sua probabilidade de ocorrência  $P(X_l)$  de modo que podemos escrevê-la como

$$\langle F(X_l) \rangle = \sum_{l=1}^N F(X_l) P(X_l), \quad (5)$$

é possível construirmos uma relação direta entre a equação característica dada por (3) e a distribuição de probabilidade de uma dada função.

A função característica pode ser compreendida como uma construção matemática capaz de relacionar a distribuição de probabilidade  $P(y)$  com uma nova função  $G_y(\omega)$ , que pode ser mais fácil de ser encontrada em comparação à densidade  $P(y)$ . A função  $G_y(\omega)$  é entendida como a transformada de Fourier da função  $P(y)$ .

Sabendo que a transformada de Fourier de uma função  $f(t)$  tal como sua função inversa são dadas pelas relações

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt, \quad (6)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} F(\omega) d\omega, \quad (7)$$

a relação entre a densidade de probabilidade (contínua)  $\rho(y)$  se relaciona à função característica nas formas [26]

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y) e^{i\omega y} dy = \langle e^{i\omega y} \rangle, \quad (8)$$

$$\rho(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega y} d\omega. \quad (9)$$

Antes do próximo desdobrar da equação (4) o conceito de covariância deve ser introduzido. A grandeza covariância  $C$  representa a proximidade média simultânea de duas (ou mais, quando generalizada) variáveis aleatórias distintas  $\xi_m$  e  $\xi_n$  com suas respectivas médias, e pode ser construída com a relação

$$C = \langle [\xi_m - \langle \xi_m \rangle] [\xi_n - \langle \xi_n \rangle] \rangle. \quad (10)$$

Reescrevendo-a na forma

$$C = \langle \xi_m \xi_n \rangle - \langle \xi_n \rangle \langle \xi_m \rangle, \quad (11)$$

percebemos que, caso  $C = 0$  pela equação (10), na média, tanto  $\xi_m$  quanto  $\xi_n$  estão convergindo para suas respectivas médias, indicando independência entre elas. Em consequência a isso, ao relacionar independência de variáveis aleatórias à covariância nula, pela equação (11) concluímos que  $\langle \xi_m \xi_n \rangle = \langle \xi_n \rangle \langle \xi_m \rangle$ .

Neste caso, podemos reescrever a equação (4) na forma

$$G_y(\omega) = \left\langle \prod_{l=1}^{N-1} e^{i\omega \xi_l} \right\rangle = \prod_{l=1}^{N-1} \langle e^{i\omega \xi_l} \rangle, \quad (12)$$

onde usamos que não há dependência entre distintas criações de  $y$  ligações por vértice (uma vez que a média é tomada após a seleção de um número arbitrário - e preferencialmente grande - de  $N - 1$  arestas por vértice), formalizado através da nulidade da covariância entre cada um dos elementos. Então concluímos que a equação (12) pode ser reescrita através da equação

$$G_y(\omega) = \prod_{l=1}^{N-1} \left[ \sum_{\xi_l=0,1} e^{i\omega \xi_l} P(\xi_l) \right] = [pe^{i\omega} + q]^{N-1}. \quad (13)$$

A passagem ao último termo da equação (13) ocorre ao considerarmos independência entre as variáveis aleatórias  $\xi_l$ , de modo que a probabilidade de formação de uma conexão entre os elementos  $i$  e  $j$  independa da existência de ligação entre  $i$  e os demais elementos, quando interpretado no contexto desta construção de grafos.

Com este resultado final, temos que a função característica apresenta-se como um binômio na forma  $(a + b)^{N-1}$ , com  $a = pe^{i\omega}$  e  $b = q$ . Ao utilizarmos a expansão binomial para representá-lo, temos

$$[pe^{i\omega} + q]^{N-1} = \sum_{l=1}^{N-1} \binom{N-1}{l} e^{i\omega l} p^l q^{N-1-l}, \quad (14)$$

que, ao considerarmos  $F(X_l) = e^{i\omega l}$  na equação (5) e compararmos com a formulação da equação (12), obtemos a relação binomial apresentada antecipadamente pela equação (2), tomando  $l = k$ .

Os resultados anteriores dizem respeito a propriedades estruturais do sistema. Passamos agora para a descrição da dinâmica de sinalização exógena e endógena dos elementos que constituem o sistema.

### 2.2.2 Descrição computacional do sistema

Como cada agente  $i$  (com  $i = 1, 2, \dots, N$ ) pode ou não estar conectado com demais agentes  $j$ , podemos mapear tais interações por meio de uma matriz de adjacência  $\mathbf{A}$  dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

onde o elemento de matriz  $a_{ij} \in [0, 1]$  representa o peso associado à conexão existente (caso não exista,  $a_{ij} = 0$ ).

É possível notar que caso a matriz seja simétrica ( $a_{ij} = a_{ji}$ ), temos a representação matricial de um grafo não direcionado, onde as conexões apresentam o mesmo peso em ambas as direções ( $a_{ij} \rightarrow a_{ji} = a_{ji} \rightarrow a_{ij}$ ). Caso contrário, teremos um grafo direcionado.

Ao associar a presença de uma ligação ( $a_{ij} \neq 0$ ) entre os elementos  $i$  e  $j$  com probabilidade  $p$  e impondo que cada conexão independe das demais temos a distribuição de probabilidade dada pela equação (2). O valor atribuído à cada elemento da matriz será descrito na seção **"Sinalização endógena"**.

## 2.3 Modelo de dinâmica de sinalização

Ao inicializar o sistema de grafo, todo elemento encontra-se em estado de repouso e assim permanece a menos que haja um estímulo externo (sinal exógeno) capaz de ativá-los. Caso sejam ativados, existe a possibilidade de transmissão de informação para outros agentes por meio das conexões existentes entre eles (sinal endógeno). A seguir descreveremos os modelos de sinalizações exógena e endógena em que sujeitam-se os agentes (elementos) dos sistema.

### 2.3.1 Sinalização exógena

Assumindo que todo elemento é independente, na presença de um estímulo externo, haverá uma probabilidade de transição de estado  $s_i = 0 \rightarrow s_i = 1$  para um elemento  $i$  qualquer com probabilidade

$$\lambda_i = 1 - e^{-r\Delta t}, \quad (15)$$

com  $r$  constante e proporcional à intensidade do estímulo. Ao abstrair cada elemento como um neurônio passível de receber um sinal via terminação axonal, o estímulo pode ser informado ao sistema na forma de odor,

e sua intensidade relacionada à sua concentração; na forma de luminosidade, e sua intensidade relacionada à intensidade luminosa da fonte; entre outras [12].

A formulação de sinalização exógena aleatória como um processo de Poisson (como é conhecida a relação (15)) decorre do desejo de se ter uma distribuição capaz de fornecer a probabilidade de ocorrência de um determinado evento desejado dado que conhecemos o intervalo de tempo médio que separa um desses eventos de outro, subsequente. Como podemos vislumbrar pela equação (15), para intervalos de tempo pequenos (ou seja  $\Delta t \ll 1/r$ , já que  $r$  deve possuir unidade de frequência e caracteriza a frequência média dos sinais exógenos transmitidos ao sistema) a probabilidade  $\lambda_i$  de excitação do elemento associado  $i$  se mostra próxima a zero. Já para intervalos de tempo muito grandes ( $\Delta t \gg 1/r$ ), a chance de excitação deste mesmo elemento aproxima-se de 100%.

A construção da equação (15) pode ser pensada como uma situação limite de um processo de 'sucessos' e 'falhas' descritos anteriormente para a distribuição binomial (2). Como a distribuição binomial pode ser compreendida como a "distribuição de números de sucessos obtidos em um número  $N$  fixo de tentativas de Bernoulli (relembrando: com variáveis aleatórias binárias  $\xi = 0$  ou  $\xi = 1$ )", para  $N$  grande, temos a ocorrência de ao menos um 'sucesso' na execução do processo. Logo, o processo de Poisson (15) pode ser entendido como "a distribuição de números de sucesso obtidos em um intervalo de tempo  $\Delta t$  fixo".

A fim de tornar claro o uso de um processo de Poisson na descrição de estímulos exógenos, primeiro precisamos estabelecer a relação limite entre as distribuições de densidade de probabilidade binomial e de Poisson.

Partindo da equação (2), podemos reescrevê-la como

$$P_l = \frac{N!}{(N-l)!l!} p^l \frac{1}{(1-p)^l} (1-p)^N, \quad (16)$$

que pode ser expandida nos termos fatoriais

$$P_l = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-l-1)(N-l)!}{(N-l)!l!} p^l \frac{1}{(1-p)^l} (1-p)^N \quad (17)$$

Como precisaremos tomar o limite onde  $N \rightarrow \infty$ , precisamos definir uma quantidade  $\alpha = pN$  que se mantenha constante com o aumento de  $N$  e conforme  $p \rightarrow 0$  (relembrando que  $p$  refere-se à probabilidade de ocorrência de um evento de 'sucesso', ou  $\xi = 1$ ), já que para um número crescente  $N$  de tentativas, a probabilidade de ocorrência de um evento específico torna-se progressivamente menor. Assim, decorre da equação anterior a relação

$$P_l = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-l-1)}{l!} \frac{\alpha^l}{N^l} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^l} \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^N, \quad (18)$$



que pode ser rearranjada na forma

$$P_l = \left[ \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-l-1)}{N^l} \right] \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^{-l} \frac{\alpha^l}{l!} \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^N. \quad (19)$$

Este rearranjo final permite cindir a densidade de probabilidade  $P_l$  em 4 termos multiplicativos. O primeiro, entre colchetes, apresenta  $l$  termos no numerador iniciando em  $N$  e decrescendo, e  $l$  termos no denominador constantes e iguais a  $N$ , podendo ser reduzido, para  $N \rightarrow \infty$ , a 1, pois

$$\frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-l-1)}{N^l} = \frac{N}{N} \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \dots \frac{N-l-1}{N} \rightarrow 1. \quad (20)$$

O segundo termo, assim como o anterior, tende a 1 já que  $\alpha/N = p \rightarrow 0$  e. Os dois últimos dão forma à distribuição de Poisson.

Utilizando da definição limite da exponencial  $e^x$  dada por

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (21)$$

e fazendo  $n = N$  e  $x = -\alpha$ , temos

$$e^{-\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^N. \quad (22)$$

Logo, obtemos a distribuição de Poisson dada por

$$P_l = \frac{\alpha^l}{l!} e^{-\alpha}, \quad (23)$$

onde o subíndice  $l$  indica o valor desejável da variável estocástica  $X$ , cuja probabilidade de ocorrência é  $P_l$ , que pode ser representada na forma  $P(X = l)$ .

Podemos também afirmar que um determinado processo como a percepção de um estímulo externo depende do tempo de exposição a ele. Assim, definindo um intervalo de tempo  $\Delta t = t - t_0$  no qual o sistema é exposto ao estímulo, o número  $N$  de tentativas executadas neste intervalo é dado por  $N(\Delta t) = N(t)$  (considerando  $N(t_0) = 0$ , sem perda de generalidade já que os eventos são independentes entre si). Por fim, como a cada passo temporal neste intervalo  $\Delta t$  uma nova tentativa é realizada,  $N(\Delta t) = N\Delta t$  representa o número de tentativas tomadas no intervalo temporal considerado.

Concluimos a formulação do processo de Poisson tomando  $\alpha(\Delta t) = pN(\Delta t) = pN\Delta t = \alpha\Delta t$ , que resulta em

$$P_l = \frac{(\alpha \Delta t)^l}{l!} e^{-(\alpha \Delta t)}. \quad (24)$$

Tendo a distribuição de Poisson em função de um intervalo temporal, iniciamos o processo de obtenção da equação (15) como descrição da probabilidade de ocorrência de um evento após um intervalo  $\Delta t$ .

Assumindo que os eventos em análise ocorram sequencialmente de modo que, para o evento  $k = 4$  ser bem sucedido, os eventos  $k = 1$ ,  $k = 2$  e  $k = 3$  devem ter seu processo contabilizado no tempo, mesmo que não ocorram. Neste contexto, pensemos que, para a  $k$ -ésima emissão de um pulso externo, as emissões (ou a ausência delas) anteriores a  $k$  devem ser contabilizadas no tempo. Agora definindo  $N(t)$  o evento no instante de tempo  $t$  e considerando a ocorrência do evento  $k$  associada ao instante de tempo  $T_k$ , então  $N(t) = k$  apenas se  $t = T_k$  ou  $N(t) < k$  apenas se  $t < T_k$  [6].

Com a associação acima, estabelecemos a relação entre um evento  $N(t)$  e seu instante  $t$ , que podem ser analisados em termos de suas respectivas probabilidades, isto é

$$P(N(t) < k) = P(t < T_k), \quad (25)$$

uma vez que a probabilidade de que  $N(t) < k$  é igual à probabilidade de que  $t < T_k$ .

Ao considerarmos o tempo  $T_k$  de espera até a primeira excitação, o número de eventos anteriores a este instante é nulo e, portanto  $N(t) = 0$  para todo  $t < T_k$ . Desta forma,

$$P(t < T_k) = P(N(t) < k) = P(N(t) = 0), \quad (26)$$

e, impondo que a sequência de eventos siga uma distribuição de Poisson dada por (24),

$$P(t < T_k) = P(l = 0) = \frac{(\alpha t)^0}{0!} e^{-(\alpha t)} = e^{-\alpha t}, \quad (27)$$

que nos mostra a probabilidade de ocorrência do primeiro evento. Como os eventos são independentes, o tempo médio de espera entre dois eventos pode ser compreendido como a ocorrência de um evento dado que um outro foi observado para um tempo  $t < T_{k-1}$ , ou seja,  $P(t < T_{k-1}) = 1$ . Assim, temos

$$F(t) = P(t < T_{k-1}) - P(t < T_k) = 1 - e^{-\alpha t}, \quad (28)$$

que representa a distribuição cumulativa da distribuição de probabilidade  $P(t)$ .

Como a tal distribuição cumulativa até um evento  $x$  é descrita na forma

$$F(X = x) = \int_{-\infty}^x P_c(t) dt, \quad (29)$$

temos que

$$P_c(t) = \alpha e^{-\alpha t} \quad (30)$$

representa o tempo de espera entre dois eventos simultâneos, numericamente dada pela distribuição de probabilidade cumulativa  $P_c(t)$  associada à probabilidade  $P(t)$ . Logo, podemos compreender a distribuição de Poisson como a ocorrência de eventos sequenciais que são espaçados através de uma distribuição exponencial do tipo  $\alpha e^{-\alpha t}$ . Este resultado será importante para a modelagem computacional do sistema proposto.

Em computação rotineiramente temos apenas a possibilidade de geração de números aleatórios uniformemente distribuídos, precisamos então, a partir destes valores, obter uma distribuição poissoniana. Logo precisamos relacionar a distribuição de variáveis aleatórias  $\xi$  com densidade de probabilidade  $\rho_1(\xi)$  dada por

$$\rho_1(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (31)$$

com a distribuição de eventos dada por

$$\rho_2(y) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \quad (32)$$

Como tal relação tem a forma

$$\rho_1(\xi') d\xi' = \rho_2(y') dy', \quad (33)$$

para um intervalo correspondente às variáveis aleatórias  $\xi$  e  $y$ , temos

$$\int_0^\xi \rho_1(\xi') d\xi' = \int_0^y \rho_2(y') dy' \implies \quad (34)$$

$$\xi = \int_0^y e^{-\alpha y'} dy' = 1 - e^{-\alpha t} \implies e^{-\alpha y} = 1 - \xi. \quad (35)$$

Portanto, ao gerarmos uma variável aleatória com distribuição uniforme, com a função

$$y = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \xi), \quad (36)$$

conseguimos gerar uma sequência de números distribuídos em forma de Poisson.

### 2.3.2 Sinalização endógena

Uma vez em estado excitado, um dado elemento  $i$  pode ser responsável por excitar um elemento  $j$  distinto e fazer seu estado ser alterado de  $s_j = 0$  para  $s_j = 1$ , supondo haver conexão direta entre eles. Tal excitação ocorre ao considerar que todo elemento apresenta um 'peso' (que pode ser utilizado como sinônimo de 'importância' ou 'ponderação', porém mantido com esta nomenclatura para que haja paralelo direto com a terminologia usual 'weight') sobre os demais.

A construção desta via endógena se faz através da atribuição de pesos individuais para cada conexão presente no grafo, assim a probabilidade de excitação do elemento  $j$  devido à ligação com  $i$  é igual a  $p_{ij}$  ( $= p_{ji}$ , dada a não direcionalidade do grafo, como já discutido anteriormente) e permanece inalterada ao longo de toda a dinâmica. Para que satisfaça condições do espaço de probabilidade, tais pesos devem ser normalizados e, portanto, devem pertencer ao intervalo  $[0, 1]$ . No entanto, como sugerido em [12], este intervalo pode ser dado em termos dos valores  $[0, p_{max}]$ , tal que  $p_{max} = p(\sigma, K)$  e  $p_{max} \leq 1$ , a fim de escrever o intervalo de probabilidade de sinalização inter-elementos em termos de variáveis que carregam caráter empírico.

A quantidade  $\sigma$  é dada pela relação

$$\sigma = \langle \sigma_j \rangle \quad (37)$$

tal que

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{K_j} p_{ij}. \quad (38)$$

Compreendemos  $\sigma_j$  como o número médio de excitações realizadas ou sentidas pelo elemento  $j$  e  $\sigma$  como a média das excitações do sistema. Desta forma  $\sigma$  apresenta valor máximo quando todo elemento possui conexão com pesos  $p_{max}$ .

Já a quantidade  $K$  representa o número médio de conexões feitas por cada elemento presentes o grafo.

Para a construção de um grafo que segue tais propriedades, definimos um número  $K$  e escolhemos  $NK/2$  elementos da matriz  $\mathbf{A}$  que obedecem a relação  $i > j$ . Tal definição ocorre pela consideração não-direcional da matriz  $\mathbf{A}$  e para que não haja contagem dupla de conexões. Ou seja, serão escolhidos  $NK/2$  elementos

presentes na matriz triangular superior de  $\mathbf{A}$  (por simetria, poderíamos ter definido a escolha para elementos que obedecem  $i < j$ ).

Assim, podemos concluir que teremos no caso extremo  $K = N$  com cada conexão apresentando peso  $p_{ij} = p_{ji} = p_{max}$ . Portanto

$$\sigma_j = \frac{N}{2} p_{max} = \sigma \implies p_{max} = \frac{2\sigma}{K}. \quad (39)$$

Para que seja satisfeita a condição de normalização, os limites do intervalo devem satisfazer  $(0, p_{max}) < (0, 2\sigma/K)$ . Logo, as quantidades definíveis  $K$  e  $\sigma$  devem estar sujeitos à relação

$$\sigma < \frac{K}{2}. \quad (40)$$

Para caracterizar o sistema também definimos as quantidades  $\rho_t$ , atividade instantânea da rede, e  $F_T$ , atividade média da rede tais que

$$\rho_t = \frac{1}{N} \sum_{s_i=1, i=1}^N s_i, \quad (41)$$

onde tomamos a média de sítios ativos ( $s_i = 1$ ) em dado instante de tempo  $t$ ; e

$$F_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \rho(t), \quad (42)$$

onde tomamos a média de sítios ativos em um dado intervalo de tempo  $T$ .

Por fim, para que sejam feitas análises em aproximação de um sistema contínuo, consideramos a aproximação de campo médio. Tomando  $k_i = K$  e  $p_{ij} = \sigma/K$  para os resultados obtidos em cada simulação, o número de conexões para cada elemento passa a ser  $K$  e o número médio de excitações produzidas pelo elemento  $j$  passa a ser  $\sigma/K$ . Assim cada indivíduo torna a representar de forma exata as propriedades médias esperadas do sistema.

Seguimos agora para o equacionamento do campo médio relativo ao sistema.

Sendo  $p_t$  probabilidade de ativação de um elemento no instante  $t + \Delta t$  por pelo menos uma de suas  $K$  conexões, temos

$$p_t = 1 - \left[ 1 - \frac{\sigma F_t}{K} \right]^K, \quad (43)$$

o qual é análogo à quantidade  $\rho_t$ .

A relação dada por (43) pode ser compreendida por meio de análise do termo entre colchete. O mesmo pode ser reduzido à expressão  $1 - p_{ij}F_t$ , que indica o percentual complementar à fração de toda conexão do elemento  $j$  que está ativada ( $F_t$ ) e que também será responsável por produzir uma excitação ( $p_{ij}$ ) para outros, ou seja, o percentual de todo elemento conexo a  $j$  que pode ser ativado em um próximo instante. O expoente  $K$  atribuído ao termo em análise remete à existência da permutação para todos os elementos do grafo que podem ser ativados em instante seguinte. Portanto,  $p_t$  agora pode ser compreendido como a probabilidade de um elemento, dentre todos os inativos, sofrer ativação por uma de suas conexões.

Como  $F_{t+1}$  passa a depender tanto da ativação via impulso externo com probabilidade  $\lambda$  quanto via propagação sistêmica (com probabilidade  $1 - \lambda$  de não ser ativado e probabilidade  $p_t$  de ocorrer ativação endógena), podemos expressá-lo na forma

$$F_{t+1} = P_t(0)\lambda + P_t(0)(1 - \lambda)p_t, \quad (44)$$

onde

$$P_t(0) = 1 - (n - 1)F_t \quad (45)$$

condiz com a probabilidade de um dado agente estar no estado de repouso, uma vez que  $(n - 1)F_t$  representa a probabilidade de um elemento estar ativado quando o mesmo pode apresentar  $n - 1$  estados inativo e refratários.

No regime estacionário, temos que  $F_{t+1} = F_t = F$ , então

$$F_{t+1} = F = [1 - (n - 1)F_t]\lambda + [1 - (n - 1)F_t](1 - \lambda)\left[1 - (1 - \sigma F_t/K)^K\right] \quad (46)$$

$$= [1 - (n - 1)F]\left[\lambda + (1 - \lambda)\left[1 - (1 - \sigma F/K)^K\right]\right] \quad (47)$$

$$= [1 - (n - 1)F]\left[1 - (1 - \sigma F/K)^K + \lambda(1 - \sigma F/K)^K\right], \quad (48)$$

que nos retorna a situação estacionária

$$F = [1 - (n - 1)F]\left[1 - (1 - \sigma F/K)^K(1 - \lambda)\right] \quad (49)$$

necessária para que possamos estudar a dependência do número de neurônios ativos com a conectividade do sistema  $\sigma$  e com a intensidade  $r$  do estímulo externo, que será discutida mais a frente.

Para que possamos finalizar a descrição do sistema neural, precisamos construir um modelo matemático-computacional para a evolução temporal do estado de cada neurônio.

### 2.3.3 Descrição computacional da evolução de estados

Mantendo fixo a intensidade do estímulo externo  $r$  e a matriz de adjacência  $\mathbf{A}$  construída em seção anterior, após um impulso externo podemos construir uma matriz de probabilidade de transição  $\mathbf{P}$  dada por

$$\mathbf{P}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{S}^t,$$

onde  $\mathbf{S}^t$  representa a matriz de estados para cada agente, com  $s_i = 1$  ou  $s_i = 0$ , dependendo se houve ou não ativação via exógena do  $i$ -ésimo elemento.

A matriz  $\mathbf{P}^t$  agora apresenta a probabilidade de ativação dos elementos conectados àqueles que foram ativados, onde podemos ativar (ou não) um novo elemento em um próximo passo temporal  $\Delta t$  através de uma nova variável aleatória  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) com a relação

$$b_i^t = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi_i < p_i \text{ e } s_i^t = 0; \\ 0, & \text{se } \xi_i > p_i \text{ ou } s_i^t \neq 0, \end{cases} \quad (50)$$

com  $b_i^t$  representante de cada um dos elementos de uma matriz de elementos transientes  $\mathbf{T}^t$  e  $p_i$ , os elementos de  $\mathbf{P}^t$ . A matriz  $\mathbf{T}^t$  se faz necessária para que apenas estados dormentes (e não refratários) sejam passíveis de ativação, ou seja,  $\mathbf{T}^t$  é capaz de armazenar valores  $b_i^t = 1$  se  $s_i^t = 0$  e  $b_i^t = 0$ , se  $s_i^t = 1, 2, \dots, n-1$ . Agora os estados devem ser incrementados de modo cíclico, caso tenham sido ativados. Dessa forma

$$s_i^{t+\Delta t} = \begin{cases} (s_i^t + 1) \bmod n - 1, & \text{se } s_i^t \neq 0 \\ 0, & \text{se } s_i^t = 0, \end{cases} \quad (51)$$

nos retorna um vetor de estados  $\mathbf{S}^{t+\Delta t}$  contendo os estados refratários. O operador  $\bmod (n-1)$  é responsável por retornar o sistema ao estado de repouso caso determinado agente atinja o último estado refratário. Também precisamos contabilizar os elementos que sofreram ativação via endógena. Assim

$$\mathbf{S}^{t+\Delta t} = \mathbf{S}^t + \mathbf{T}^t. \quad (52)$$

Em tempos subsequentes, utilizamos o vetor  $\mathbf{T}$  para determinar a probabilidade de transição apenas dos elementos ligados àqueles que foram ativados em passos anteriores. Desta forma temos que

$$\mathbf{P}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{T}^t,$$

Até que o tempo final  $T$  seja atingido, retornamos à função (50) e repetimos  $T$  vezes estes passos mencionados, possibilitando a simulação computacional do sistema desejado, também denominado de sistema de avalanches neuronais.

## 2.4 Fenômenos críticos em sistemas magnéticos

Neste último momento da descrição metodológica antes dos resultados, precisamos introduzir o conceito de criticalidade e transição de fase, já que estes são fenômenos emergentes para sistemas com dinâmica com interações de curto alcance (ou de contato via terminação axonal, no caso do sistema em estudo).

### 2.4.1 Modelo de Ising e criticalidade

Sistemas interagentes apresentam, por construção, maior complexidade que aqueles cujo comportamento pode ser descrito de forma global, isto é, como um corpo único. Um dos paradigmas de modelos interagentes baseia-se nos fenômenos de ferromagnetismo no chamado modelo de Ising.

Através de observações experimentais notou-se que materiais ferromagnéticos, diferentemente dos paramagnéticos, retinham características magnéticas mesmo na ausência de campos magnéticos aplicados sobre eles em "ilhas" magnéticas. [9] Desta forma, um dos modelos propostos para explicar tal fenômeno considera a magnetização do material devido aos elementos que o constituem.

Para caracterizar este sistema, supomos que o material é composto por elementos de spin  $\pm 1$  e que cada configuração apresenta uma energia associada. Também supomos que cada spin é capaz de interagir fortemente a curtas distâncias com seus pares, e capaz de alterá-los de modo a minimizar a energia do sistema. A energia do sistema para o modelo de Ising é descrito por

$$\mathcal{H} = - \sum_{i \in V} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - H \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (53)$$

onde  $J_{ij}$  representa a energia de interação entre os vizinhos próximos presentes no volume  $V$ ,  $\sigma_k$  representa o



valor assumido pelo  $k$ -ésimo spin e  $H$  o campo magnético externo. No entanto, como sabemos que a magnetização espontânea é uma das propriedades emergentes devido à interação entre spins (propriedade em foco) e que a mesma ocorre mesmo na ausência de campo externo, neste momento consideraremos um modelo mais simplificado onde  $H = 0$  e, portanto, sua energia pode ser descrita como

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i \in V} \sigma_i \sigma_j, \quad (54)$$

ou, de forma mais intuitiva, podemos separar a energia associada a cada spin na forma

$$\mathcal{H}_s = -\frac{J\sigma_s}{g} \sum_{i \in V} \sigma_i, \quad (55)$$

tal que a energia total do sistema pode ser obtida pela soma simples da contribuição de cada energia  $s$ . Logo

$$\mathcal{H} = \sum_s \mathcal{H}_s. \quad (56)$$

Para um sistema bidimensional, a equação acima pode ser entendida como a energia associada ao spin  $s$  referente à posição  $(x, y)$  com contribuições de cada um de seus vizinhos próximos, onde  $V = \{(x-1, y), (x+1, y), (x, y+1), (x, y-1)\}$ . O sinal negativo indica que o mínimo de energia é obtido caso todos apresentem mesmo alinhamento e o fator  $g$  representa o número total de vizinhos contabilizados. Neste caso,  $g = 4$  dado a presença de 4 vizinhos próximos.

Sem perda de generalidade, podemos considerar o modelo apresentado como estando em equilíbrio térmico à temperatura  $T$  com o ambiente ao seu redor. Além de ser consistente com sistemas físicos reais, tal consideração permite o tratamento do problema através do modelo estatístico canônico. Logo podemos tomar que o número de estados possíveis do sistema em uma dada temperatura  $T$  segue a forma

$$Z = \sum_j e^{-\frac{\mathcal{H}_j}{k_B T}}, \quad (57)$$

onde  $k_B$  representa a constante de Boltzmann e  $\mathcal{H}_j$ , a energia associada ao estado  $j$ .

Conhecendo a função de partição  $Z$  podemos determinar propriedades físicas do sistema que apresentam vínculo direto com os fenômenos de criticalidade que aqui serão tratados. Para que possamos escrevê-las de forma sucinta, relacionamos a função de partição à energia livre de Helmholtz dada por

$$F(H, T) = -k_B T \ln Z, \quad (58)$$

que apresenta como variáveis  $H$  e  $T$  independentes. Esta dependência de  $F(H, T)$  se faz importante uma vez que fenômenos críticos neste modelo decorrem da nulidade do campo  $H$  e do ponto em que a temperatura  $T = T_c$  (temperatura do ponto crítico), como será evidenciado mais a frente. Definimos desta forma a magnetização  $M$ , suscetibilidade magnética  $\chi$  e capacidade térmica  $C$

$$M = -\frac{\partial}{\partial H}F(H, T); \quad \chi = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial H}M(H, T); \quad C = T^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2}F(H, T). \quad (59)$$

Compreendido o funcionamento do modelo, podemos notar o paralelo com o sistema neural descrito neste trabalho. Ambos apresentam dinâmica dependente do estado cada elemento individual e da relação mútua que possuem. Suas diferenças, no entanto, não são simples, especialmente quando considerados o modelo matemático que os descrevem. O ferromagneto apresenta interações de contato em um número fixo de vizinhos, já o sistema neural é descrito via interações de contato com múltiplos e não fixo número de "vizinhos" (na verdade tomados via conexões diretas).

Apesar da diferença entre eles, ambos apresentam emergência de fenômenos críticos, isto é, fenômenos de transição de estados a partir de um determinado ponto denominado **ponto crítico**. Associado ao modelo ferromagnético, a temperatura é a quantidade de referência à criticalidade, uma vez que para valores  $T > T_c$  (onde  $T_c$  refere-se à temperatura no ponto crítico) o sistema não apresenta magnetização espontânea, diferentemente daquele apreciado para  $T < T_c$ . [9, 23]

Matematicamente transições de fase são regiões de não analiticidade de propriedades termodinâmicas, ou seja, em regiões onde mesmo com a variação contínua e lenta de funções termodinâmicas como pressão, volume e temperatura, há um ponto (ponto crítico) onde a variação é inerentemente descontínua. Definimos então transições de primeira ordem aquelas que a primeira derivada de potenciais termodinâmicos é descontínua e transições de segunda ordem caso ocorra em derivadas de segunda ou maiores ordens. [10]

Uma das quantidades macroscópicas relacionadas ao ponto crítico é denominado **parâmetro de ordem**, responsável por caracterizar um sistema que apresenta duas fases contrastantes. Podemos compreender seu significado como uma quantidade capaz de medir a perda de ordenamento pelo sistema após o forçarmos à transição de fase. No sistema ferromagnético, este parâmetro é dado pela magnetização  $M$ , enquanto que na rede neuronal, pela atividade neuronal  $F$ .

Os expoentes críticos  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu)$ , como ficaram conhecidos, são definidos como

$$C \sim |t|^{-\alpha}, \quad M \sim |t|^\beta, \quad \chi \sim |t|^{-\gamma}, \quad M \sim H^{1/\delta}, \quad \xi \sim |t|^{-\nu}, \quad (60)$$

Onde as grandezas a eles associadas, em ordem da esquerda para a direita, são: capacidade térmica  $C$ , magnetização  $M$ , suscetibilidade térmica  $\chi$ , magnetização  $M$  (e campo  $H$ ) e comprimento de correlação  $\xi$ .  $t$ , por sua

vez, representa a "temperatura reduzida" de criticalidade

$$t \equiv \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (61)$$

Das grandezas apresentadas como relacionadas a expoentes críticos, o comprimento de correlação  $\xi$  apresenta descrição distinta das demais. Para melhor compreensão de seu significado, precisamos antes definir o conceito de **função de correlação**.

Funções de correlação são responsáveis por mensurar (como o nome sugere, mesmo com infeliz redundância) a correlação entre dois ou mais distintos eventos. Em termos de sistemas físicos, quantificam as flutuações térmicas em escala microscópica de determinado material.

Como ilustrativo, tomamos o caso ferromagnético. O alinhamento de dois spins  $S(\mathbf{x}, t)$  e  $S(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)$  presentes nas posições  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  em um mesmo instante de tempo  $t$  pode ser descrito em termos da função correlação

$$C_t(\mathbf{r}) = \langle S(\mathbf{x}, t) S(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle. \quad (62)$$

Para regime aquém da criticalidade, as 'ilhas' de magnetização espontânea apresentam um tamanho variante, porém de ordem típica, dado por  $L(t)$  de modo que  $C(\mathbf{r}, t)$  tem valores próximos a

$$C(\mathbf{r}, t) \approx \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{r} \rightarrow 0; \\ 0, & \text{se } |\mathbf{r}| \gg L(t); \\ 1/2, & \text{se } |\mathbf{r}| \sim L(t). \end{cases} \quad (63)$$

Ou seja, para os extremos, entre spins muito afastados a correlação é nula e, entre spins muito próximos, é quase total.

O comprimento de correlação, assim, representa a distância a partir da qual a função de correlação para tempos iguais (isto é, para sistemas estáticos com  $C(\mathbf{r}, \tau = 0)$ ) decai exponencialmente para longas distâncias até o momento (no ponto crítico) em que diverge (ver figura 1). Este fato representa a existência de correlação em todos os comprimentos de escala. [24] Podemos relacionar a existência desta correlação no conceito de **universalidade** de fenômenos, onde modelos fisicamente distintos podem ser compreendidos de forma semelhante quando transitam entre estados (ou regimes) bastante distintos.

Modelos associados ao ferromagnetismo são aqueles que apresentam simetria a nível de microestados (ou seja, com energia associada ao estado  $+1$ ,  $U(\uparrow)$ , sendo igual à energia  $U(\downarrow)$ , ao estado  $-1$ ). [23] Já modelos associados à propagação de sinal via interação de múltiplos agentes apresentam sinalização em cascata (uma vez que a ativação de um único neurônio pode ser responsável por desencadear uma sequência de ativações enormemente

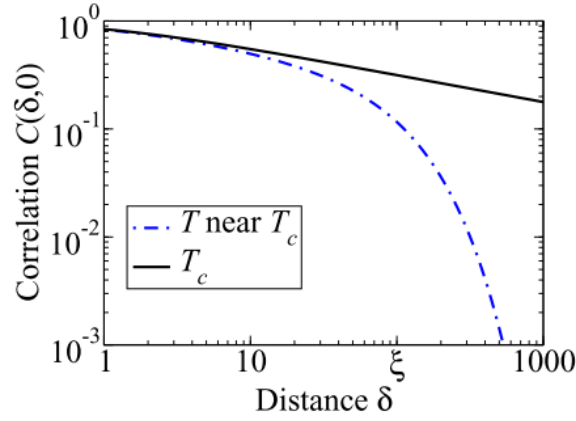


Figure 1: Relação esquemática entre a função correlação para sistemas estáticos  $C(\delta, \tau = 0)$  e a distância entre os eventos tratados. Percebemos que **no** ponto crítico (linha contínua, em cor preta),  $C \sim r^{-p}$  representa lei de potência e, para regiões **próximas ao** ponto crítico (linha em cor azul, não contínua),  $C \sim e^{-\delta/\xi(T)}$ , dependente do comprimento de correlação  $\xi$ . [24]

ramificada), que em sua simplicidade, assim como sistemas biológicos são direcionados à otimização de processamento de informação e, com isso, atingem a criticalidade. Tal associação de modelos liga-se à universalidade de fenômenos, já mencionado anteriormente.

Outro conceito que vale atentar refere-se à chamada **criticalidade auto-organizável** (derivado do inglês Self Organized Criticality), [15, 2] que pode ser melhor compreendida ao analisarmos modelos de pilha de areia. [2] Nestes modelos acrescentamos grãos de areia um sobre o outro até que, atingida uma altura limite, a estrutura desaba e preenche lacunas adjacentes com o grão que fora depositado. Em uma dimensão, podemos representá-lo através da figura 2, onde  $z_n$  indica a altura atingida pela pilha na posição  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ).

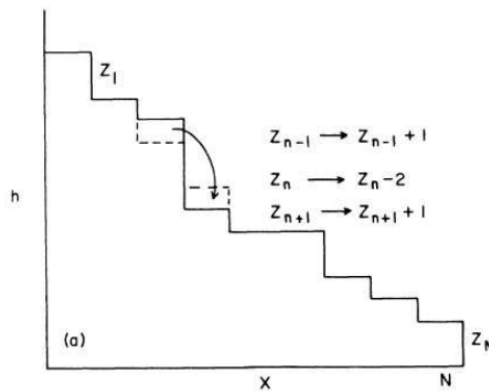


Figure 2: Representação da dinâmica de modelos de pilha de areia em uma dimensão. Aqui  $z_n$  indica a altura atingida pela pilha na posição  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Após atingir uma altura limite, o grão de areia instável despenca para uma das posições adjacentes que possuam menor altura, isto é, onde  $z_{n\pm 1} < z_n$ , com possibilidade de também se manter fixa nesta altura, caso  $z_{n\pm 1} = z_n - 1$ . [2]

Como após atingir uma altura limite o grão de areia instável despenca para uma das posições adjacentes que possuam menor altura ( $z_{n\pm 1} < z_n$ ) ou se mantém fixa em  $n$  caso  $z_{n\pm 1} = z_n$  e supondo que o sistema não conserve os grãos que passem de um limite  $n > N$ , após um determinado tempo todas as posições terão alturas decrescentes ( $z_{n-1} > z_n > z_{n+1}$ ) e cada novo grão de areia depositado sobre o sistema cai para além do limite conservado. Este momento de criticalidade estável emerge deste modelo espontaneamente e apresenta a propagação de sinal (em forma de grão de areia) mais otimizada.

Em paralelo a este modelo apresentado brevemente, é possível compreendermos melhor o conceito de criticalidade auto-organizável, que, assim como veremos em seções seguintes, ocorre em processamento de informação em sistemas neuronais.

Voltando à modelagem matemática para o sistema proposto por Ising, a presença de flutuações térmicas em escala microscópica (medida em termos da função correlação) altera a configuração do sistema e, por isso precisamos contabilizar uma variável estocástica associada à possibilidade de inversão de estados (modelando as oscilações microscópicas). Podemos afirmar que o aumento de temperatura do sistema tende a desestabilizar a configuração de mais baixa energia. Assim para que haja inversão de um spin  $s$  e mudança para um estado com energia  $\mathcal{H}_s$ , não apenas a contribuição de seus vizinhos deve ser considerada mas também a probabilidade da ocorrência do spin  $s$  para dada temperatura  $T$ . Neste momento apreciamos a relevância do uso do método de Monte Carlo via algoritmo de Metropolis para a avaliação da transição de estado, [23] que será apresentado em sequência.

#### 2.4.2 Descrição computacional do modelo e método de Monte Carlo Metropolis

Como a probabilidade de ocorrência de um estado  $q$  em certa posição da rede  $(x, y)$  depende apenas da configuração  $s$  associada à mesma coordenada em um instante imediatamente anterior, este processo é considerado Markoviano. Definindo  $\mu(a \rightarrow b)$  como a probabilidade de transição para o estado  $b$  estando previamente no estado  $a$ , podemos representar a variação dos estados mencionados anteriormente como  $\mu(s \rightarrow q) \equiv \mu_{sq}$ . Sendo  $P_{t+\Delta t}(H_s)$  probabilidade de ocorrência do estado cuja energia é  $H_s$  após um passo temporal  $\Delta t$ , temos que

$$P_{t+\Delta t}(H_s) = P_t(H_s) - P_t(H_s)\mu_{sq} + P_t(H_q)\mu_{qs}. \quad (64)$$

Caso tomamos o limite onde o tempo é contínuo e  $\Delta t \rightarrow 0$ , dividindo a equação por  $\Delta t$  podemos reescrever a equação acima na forma

$$\frac{\partial P(H_s, t)}{\partial t} = -P(H_s, t)\omega_{sq} + P(H_q, t)\omega_{qs}, \quad (65)$$

onde redefinimos a probabilidade de transição  $\mu_{sq}$  como taxa de transição de estados  $\omega(s \rightarrow q) \equiv \omega_{sq}$  tal que

$$\omega_{sq} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu_{sq}}{\Delta t}. \quad (66)$$

A equação diferencial (65) é referida como **equação mestra** de processos estocásticos. No caso onde há equilíbrio térmico com o sistema, não há mudanças na variação da taxa de probabilidade do estado  $H_s$ , logo  $\partial P(H_s, t)/\partial t = 0$  e portanto

$$\overline{P}(H_s, t)\omega_{sq} = \overline{P}(H_q, t)\omega_{qs}, \quad (67)$$

que pode ser referida como princípio do balanço detalhado. Os termos  $\overline{P}$  são relacionados às mesmas probabilidades de ocorrência de estado, porém no caso em equilíbrio térmico. Tal princípio pode ser entendido pela sentença: *"a taxa de transição de estado  $s \rightarrow q$  dada a probabilidade de ocorrência de  $s$  é igual à taxa de transição  $q \rightarrow s$  dada a probabilidade de ocorrência de  $q$ ".*

Com o princípio do balanço detalhado podemos então admitir que a transição  $s \rightarrow q$  ocorre necessariamente quando  $H_q \leq H_s$  ou apresenta probabilidade de  $\exp\{-(H_q - H_s)/kT\}$  de ocorrência caso  $H_q \geq H_s$ , uma vez que

$$\frac{\omega_{sq}}{\omega_{qs}} = \frac{e^{-\frac{H_q}{kT}}}{e^{-\frac{H_s}{kT}}} = e^{-\frac{H_q - H_s}{kT}}. \quad (68)$$

Esta condição de troca entre transição obrigatória ou probabilística é necessária para que o sistema atinja um equilíbrio após um determinado tempo.

Atribuindo inicialmente a cada coordenada  $(x, y)$  um valor de spin  $+1$  ou  $-1$  de forma aleatória, para que seja atingido o equilíbrio térmico um número  $R$  de iterações é tomado. Para cada unidade de tempo  $r < R$  uma coordenada  $(a, b)$  é escolhida aleatoriamente e seu estado  $s$  é armazenado e trocado, caso satisfaça as condições da escolha do método de Metropolis. Este processo é repetido até que seja atingida uma temperatura  $T$  máxima.

A análise quantitativa pode ser feita através da medida de energia e da magnetização totais do sistema, calculadas respectivamente através da soma, sobre todas as coordenadas, dada pelas equações (55) e (56) e da soma simples de todos os estados

$$M = \sum_j \sigma_j. \quad (69)$$

Ambas as grandezas  $H$  e  $M$  devem ser normalizadas pelo número de compartimentos do sistema  $N^2$  multiplicado pelo número total de iterações temporais  $R$  até que o equilíbrio tenha sido atingido.

### 3 Resultados e Discussões

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos para o modelo de Ising, como forma de traçar um caminho mais concreto para a compreensão de fenômenos críticos em sistemas interagentes; para o modelo de Kinouch em relação a um sistema neural de conectividade aleatória apresentado no artigo em estudo [12]; e os resultados obtidos utilizando-se de modelagem computacional própria construída com base no modelo proposto até este momento juntamente com suas devidas explicações.

#### 3.1 Resultados explicados

Em primeiro lugar, construiremos o modelo de Ising para a análise de criticalidade. Em seguida, passaremos à descrição do modelo proposto por Kinouchi [12] e, por fim, reproduziremos tal modelo, fazendo novas simulações e ressaltando alguns outros fenômenos observados.

##### 3.1.1 Resultados obtidos para o modelo de Ising

Dispondo de uma matriz  $(200, 200)$  onde a cada coordenada é atribuído aleatoriamente um valor de spin  $+1$  ou  $-1$ .

A escolha da temperatura entre 0 e 2 como forma de comparação entre o grau de ordenação das "ilhas" não é arbitrária. Ao observarmos as figuras 3 e 4 referentes à magnetização em função da temperatura notamos a predominância de dois domínios evidentes: Para  $T < 2$  o sistema mantém sua magnetização e para  $T > 2.5$ , ela é quase completamente perdida. Esse fenômeno é descrito através de sua criticalidade. A temperatura crítica  $T_c$  a partir da qual existe transições descontínuas de segunda ordem (pois a descontinuidade está presente na segunda derivada dos potenciais termodinâmicos, como calor específico, ao invés de apresentar-se diretamente na primeira derivada, como entropia [23]) aproxima-se do valor  $T_c \approx 2.25$ .

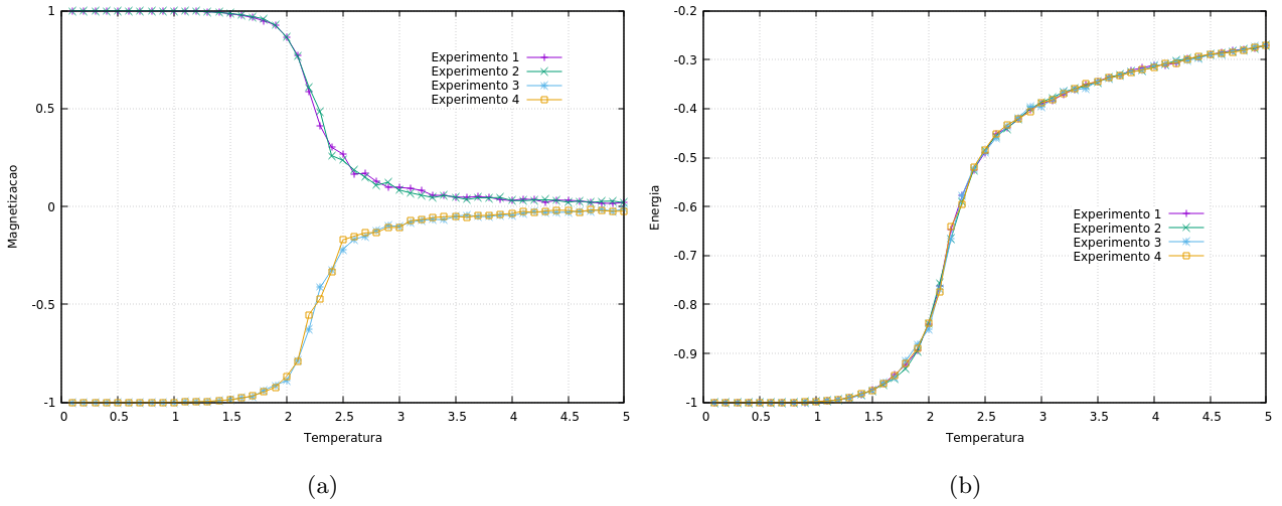


Figure 3: Variação da magnetização (a) e da energia (b) conforme a temperatura é incrementada sobre matriz  $(N, N)$  com  $N = 50$ . Nos experimentos rotulados 1 e 2 todo o sistema foi inicializado com spin  $+1$  enquanto para 3 e 4, com spin  $-1$ .

Conforme pode ser visto para o modelo exato, é esperado que a temperatura neste ponto seja dada por  $T_c = 2/\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 2.27$ . [8]

Outro ponto interessante que é evidenciado quando comparamos as figuras 3 a 5 refere-se à invariância da energia, devido à simetria de spins  $\uparrow$  e  $\downarrow$  que minimizam a energia ser independente de sua orientação, desde que tenham a mesma orientação quando próximos, e à região permitida da magnetização, limitada pelas curvas que descrevem condições iniciais completamente alinhadas ( $-1$  ou  $+1$ , mostrado na figura 3a).

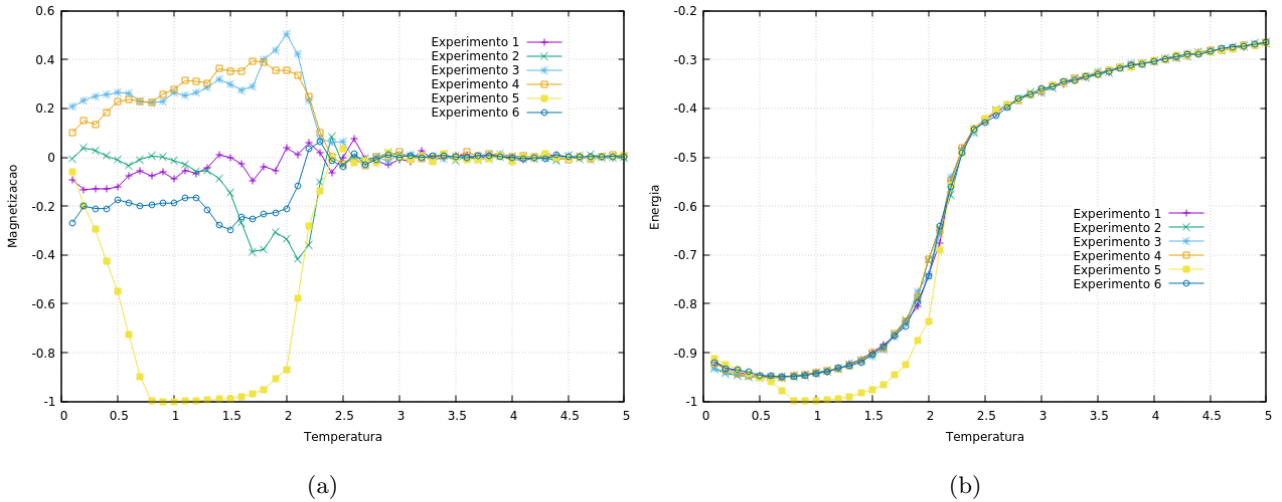


Figure 4: Variação da magnetização (a) e da energia (b) conforme a temperatura é aumentada. Em todos os experimentos as condições iniciais para a configuração dos spins sobre a matriz  $(N, N)$  com  $N = 50$  foram aleatórias. Cada experimento foi inicializado e mantido ao longo de toda variação de temperatura.



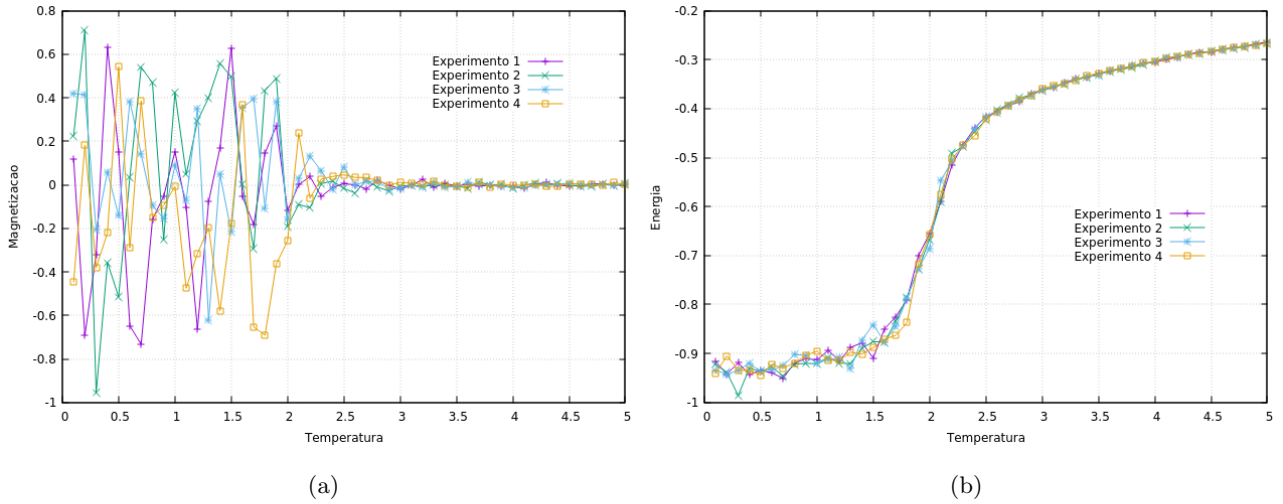


Figure 5: Variação da magnetização (a) e da energia (b) conforme a temperatura é aumentada. Em todos os experimentos as condições iniciais para a configuração dos spins sobre a matriz  $(N, N)$  com  $N = 50$  foram aleatórias. A cada temperatura considerada uma nova condição inicial aleatória foi estabelecida.

Os resultados obtidos para simulações mais objetivas quanto à descrição de expoentes críticos relacionados ao modelo ferromagnético são mostrados em [23]. Evidenciando os valores que também serão expostos para o modelo subsequente (foco deste estudo) temos  $\beta = 0.125 = 1/8$  e  $\delta = 15$ . Como veremos na próxima sessão, tais expoentes não são iguais (ou próximos) àqueles que representam o modelo de cascata neuronal, o que nos indica que os sistemas não pertencem à mesma classe fenomenológica.

### 3.1.2 Modelo de Kinouchi

Para a caracterização da rede, foram analisadas as distribuições do número de conexões  $K_j$  de cada um dos elementos e o número médio de excitações  $\sigma_j$  por elemento  $j$ , assim como a evolução temporal do número de elementos em estado ativado. Os resultados são apresentados na figura 6.

Os histogramas apresentados pela figura 6(A) descrevem (interno) o número de elementos (normalizado pelo total  $N$ ) que apresentam  $k_i$  conexões e (externo) que apresentam a quantidade  $\sigma_i$  de excitação/excitabilidade média. Notamos que ambas descrevem uma distribuição binomial com média dadas pelos parâmetros  $K$  e  $\sigma$ , respectivamente, o que corrobora o modelo matemático descrito para a estrutura de rede.

Fenômenos interessantes podem ser observados com a variação de  $\sigma$ . Como percebemos na figura 6(B), existem regimes típicos em função do intervalo a que pertence o parâmetro de conectividade.

Retomando o significado do parâmetro  $\sigma$ , este representa o número médio de excitações do sistema. Assim baixos valores conduzem o sistema a apresentar baixa propagação endógena de um estímulo imposto ao sistema, levando à inativação de todo elemento caso não haja estímulos externos posteriores àquele que desencadeou a primeira

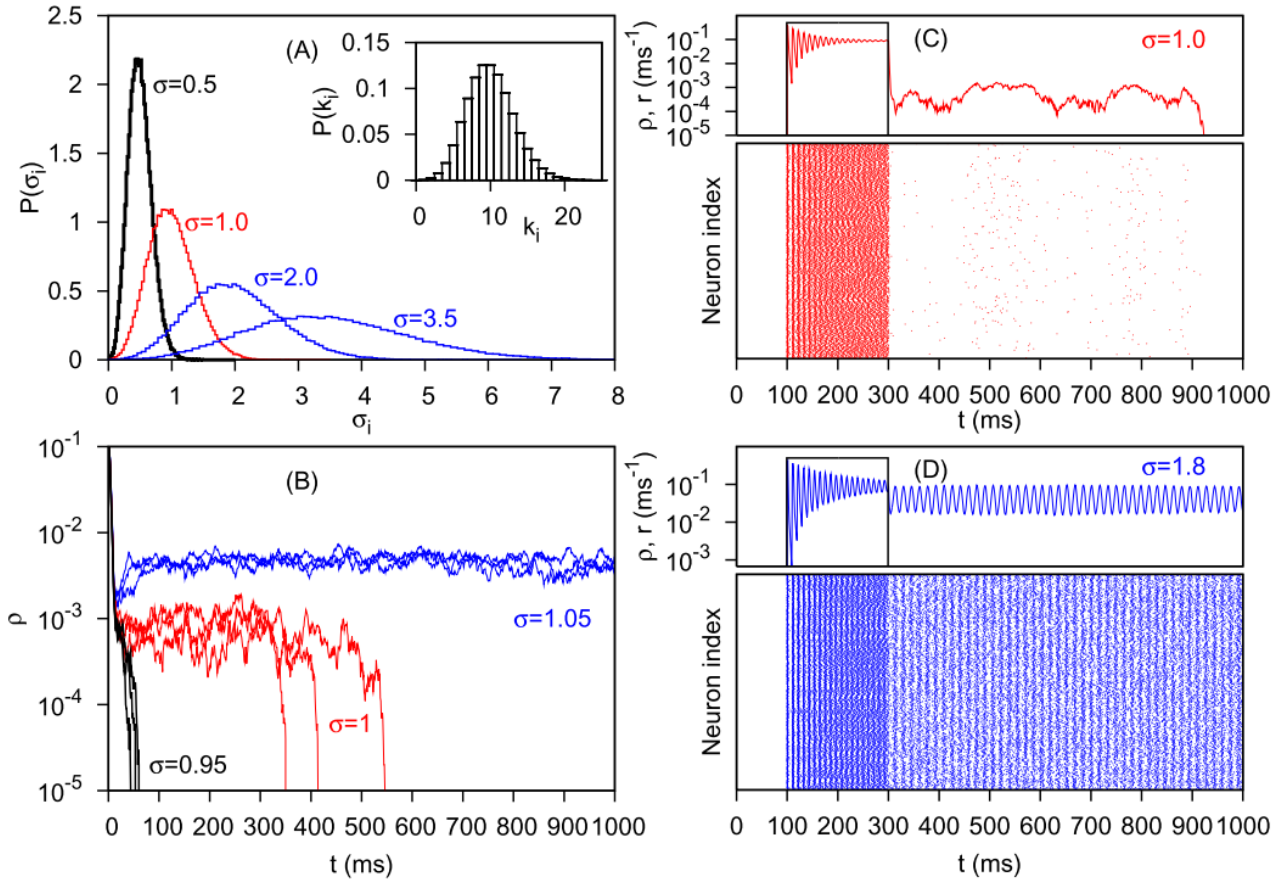


Figure 6: Caracterização da rede e de atividade de agentes. Simulações com  $N = 10^5$  agentes,  $K = 10$  e  $n = 10$  estados. (A) Função densidade de probabilidade da razão de ramificação local  $\sigma_i$  e distribuição de conectividade (interno); (B) Densidade instantânea de elementos ativos para parâmetros supercrítico (preto), crítico (vermelho) e subcrítico (azul) em função do tempo (três simulações para cada caso); (C), (D) Densidade instantânea (para todos os elementos; painel acima) e gráfico de varredura temporal (para  $10^3$  agentes escolhidos aleatoriamente; abaixo) em resposta a um pulso quadrado de estímulo (com  $r = 0.5 \text{ ms}^{-1}$  para  $t \in [100, 300]$  ms e  $r = 0$ , caso contrário) para os regimes com parâmetro crítico  $\sigma = 1$  (C) e subcrítico  $\sigma = 1.8$  (D).

ativação de estados ( $s_i = 0 \rightarrow s_i = 1$ ). Por outro lado, altos valores indicam alta propagação endógena do estímulo imposto ao sistema, o que implica em manutenção de transmissão de informação entre os elementos.

Tal descrição intuitiva pode ser observada na figura 6(B). Notamos que o valor do parâmetro  $\sigma$  que referencia os "baixos" e "altos" valores mencionados no parágrafo anterior é dado por  $\sigma = 1$ . Mais sutil que apenas impor um nível de referência, este ponto possui caráter instável, uma vez que pequenas flutuações ao redor de  $\sigma = 1$  (estão presentes os valores  $\sigma = 0.95$  e  $\sigma = 1.95$ , cuja variação ocorre na casa centesimal) já são suficientemente grandes para deslocar o sistema de um regime estável e diferente de zero (caso supercrítico,  $\sigma > 1$ ) para estável e igual a zero (caso subcrítico,  $\sigma < 1$ ).

Conhecendo este valor de criticalidade, por fim as figuras 6(C) e (D) nos permite vislumbrar com mais clareza

as oscilações reais de cada elemento do sistema quando sobre ele é imposto um estímulo duradouro. Dentro do intervalo temporal  $t \in [100, 300]$  ms um estímulo externo é mantido constante. É evidente a presença de oscilações neste intervalo, já que quando o estímulo é percebido, muitos dos elementos (referidos como neurônios) são ativados e capazes de transmitir tal informação. No entanto, em um tempo subsequente, aqueles elementos ativos tornam-se refratários ao longo de 8 passos temporais (já que  $n = 10$  e, ao nono passo, o próximo retorna a  $s_i = 0$ , novamente capaz de sofrer ativação pelo estímulo externo), o que mantém a oscilação com frequência próxima a  $1/n$ . Quando o estímulo é cessado (caso  $t > 300$  ms), o regime imposto pelo valor de  $\sigma$  é resgatado e quando em criticalidade (figura 6(C)) o sistema perdura por um longo tempo até se extinguir, enquanto que em sub-criticalidade (figura 6(D)) o sistema mantém uma autorregulação oscilatória de ativação.

Neste primeiro momento analisamos como parâmetros que descrevem o sistema são responsáveis por alterar sua dinâmica na presença de um estímulo pontual (figura 6(C)) ou contínuo (figura 6(D)). Em seguida analisaremos como características do estímulo (isto é, sua intensidade) afetam o sistema.

O parâmetro único presente na sinalização exógena é apresentado em termos de  $r$ , como indicado na equação (15). Para um dado passo temporal  $\Delta t$ , temos que a quantidade  $r$  é responsável pelas tendências  $\lambda_i \rightarrow 1$  (ativação completa dos neurônios), se  $r\Delta t \gg 1$  e  $\lambda_i \rightarrow 0$  (pulso não age sobre os neurônios, que continuam inativos), se  $r\Delta t \ll 1$ . Como  $\lambda_i$  representa a probabilidade de ativação do  $i$ -ésimo elemento, temos que grandes valores de  $r$  implicam em maior número de elementos ativados imediatamente após a aplicação do estímulo exógeno, válida contrária análise em caso de pequenos valores de  $r$ . Podemos entender melhor tal relação através da figura 7.

Notamos nas figuras 7(A) e 7(B) que, fixo um valor  $\sigma$ , o incremento do valor numérico do parâmetro  $r$  é responsável por aumentar o valor da quantidade  $F$ . Lembrando que  $F$  representa o número médio de elementos ativos em um dado intervalo temporal  $T$ , então podemos quantificar a análise feita anteriormente, já que, como esperado, a intensidade do estímulo externo aplicado ao sistema apresenta relação direta com o número de agentes ativos. No entanto, o crescimento não é totalmente linear, mas sigmoidal e, além disso, dependente do parâmetro  $\sigma$ .

Mantendo o foco na figura 7(A) podemos mensurar a relação entre  $F$  e as variações de  $r$  e  $\sigma$ . Quando em regime subcrítico (linhas pretas), há pouco estímulo sistêmico (endógeno) uma vez que  $\sigma \approx 0$ . Neste caso, apenas para  $r$  elevados há autossustentação do sistema, já que somente caso um grande número de agentes seja ativado a propagação é passível de ser continuada em tempos subsequentes. Para o regime supercrítico, por sua vez, um estímulo relativamente baixo já é capaz de manter a propagação de atividade do sistema, pois a grande chance de sucesso de transmissão endógena (ditada por  $\sigma$ ) implica em pequenos número de agentes inicialmente ativados serem suficientemente capazes de promover a autossustentação sistêmica.

Para que possamos mais facilmente analisar a resposta  $F$  em termos da intensidade de estímulo  $r$ , podemos aproximar a função  $F(r)$  para uma reta no intervalo dinâmico  $\Delta$  definido, de forma pictórica, na figura 7(C). Como notamos a existência de regimes transitórios próximos às respostas constantes nula ( $F_0 = 0$ , para regimes

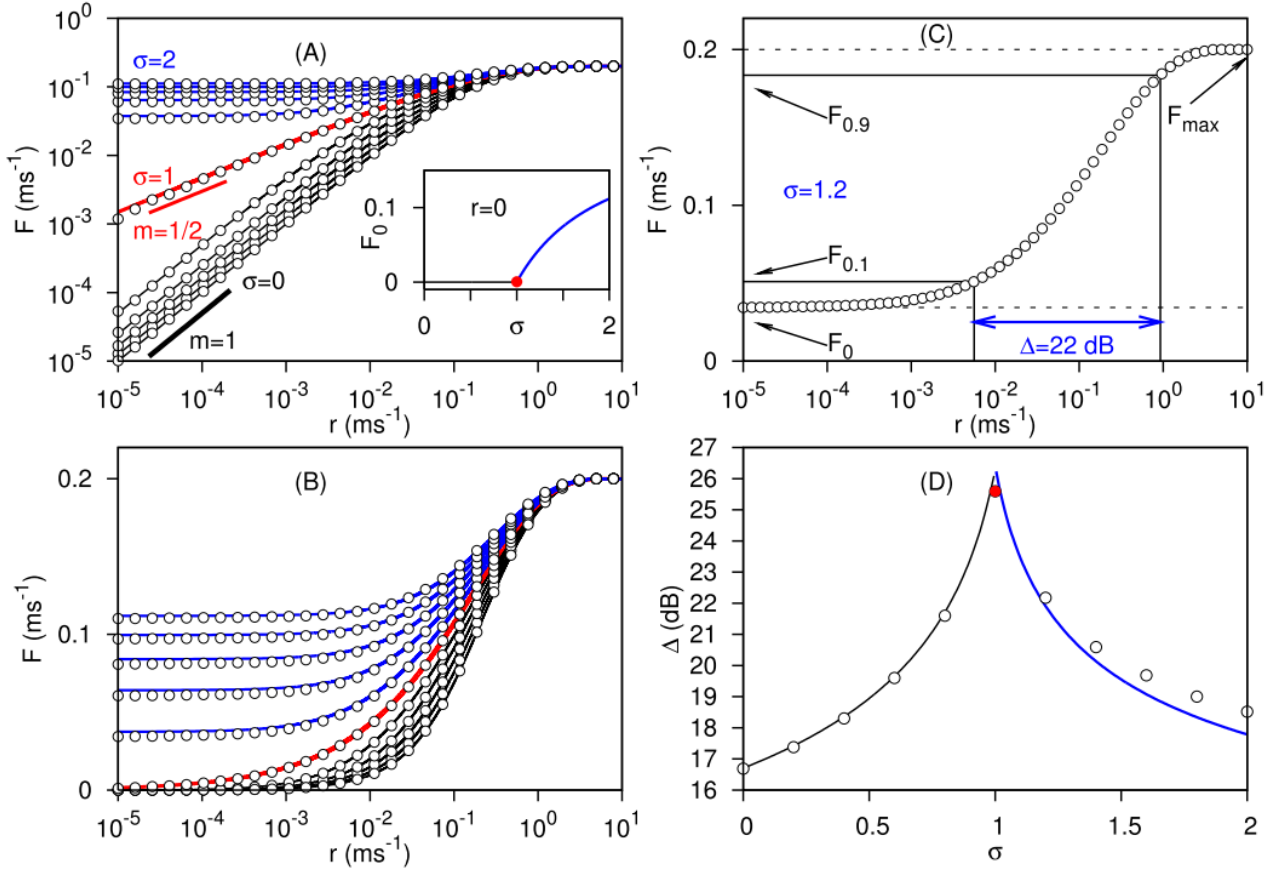


Figure 7: Curvas de resposta e intervalo dinâmico. Cada ponto representa os resultados de simulações para  $N = 10^5$  elementos,  $K = 10$ ,  $n = 5$  estados e  $T = 10^3$  ms, onde as linhas correspondem ao modelo de campo médio descrito no texto. (A) Curvas de resposta (taxa de ativação média  $F$  vs. taxa de estímulo  $r$ ) para  $\sigma = 0$  a  $\sigma = 2$  (em intervalos de 0.2). Os segmentos de linha são potências para  $F \propto r^m$  com  $m = 1$  (supercrítico) e  $m = 1/2$  (crítico). Interno: Atividade espontânea  $F_0$  vs.  $\sigma$ . (B) Curvas de resposta em escala linear. (C) Curva de resposta para  $\sigma = 1.2$  com foco aos parâmetros relevantes para o cálculo do intervalo dinâmico  $\Delta$ . (D) Intervalo dinâmico vs.  $\sigma$ , mostrando otimização para o ponto crítico  $\sigma = 1$ .

subcrítico e crítico) ou não nula ( $F(r) > 0$ , para regime supercrítico), e próximos às respostas máximas (neste caso, igual para todo regime)  $F_{max} = 0.2$ , definimos um intervalo dinâmico  $r_{din} \equiv [r_{0.1}, r_{0.9}]$  onde a função  $F(r_{din})$  é bem comportada. O valor  $r_{0.1}$  representa o estímulo mínimo responsável por causar uma resposta de 10% de  $F_{max}$ . (Análise similar pode ser feita para  $r_{0.9}$ , com 90% de resposta.)

De outro modo, podemos definir o intervalo  $\Delta$  como

$$\Delta = 10 \log \left[ \frac{r_{0.1}}{r_{0.9}} \right]. \quad (70)$$

Esta relação pode ser compreendida caso tomemos como válida a relação  $F(x) = F_0 + x(F_{max} - F_0)$  no intervalo

$\Delta$ . Assim, temos que

$$F_{0.9} = F_0 + r_{0.9}(F_{max} - F_0); \quad (71)$$

$$F_{0.1} = F_0 + r_{0.1}(F_{max} - F_0); \quad (72)$$

o que implica nas relações

$$\frac{F_{0.9} - F_0}{F_{max} - F_0} = r_{0.9}; \quad (73)$$

$$\frac{F_{0.1} - F_0}{F_{max} - F_0} = r_{0.1}; \quad (74)$$

que, ao serem divididas e utilizando a definição de  $\Delta$ , resultam em

$$\Delta = 10 \log \left[ \frac{F_{0.9} - F_0}{F_{0.1} - F_0} \right], \quad (75)$$

que possibilita a análise do significado de  $\Delta$  como a relação entre as respostas  $F_{0.9}$  e  $F_{0.1}$ . Como tornado evidente pela figura 7(A), sistemas subcríticos sujeitos a estímulos fracos estabilizam-se em  $F(r) = 0$  e o aumento de  $\sigma$  induz a uma maior propagação de sinal, tendo como consequência um aumento do valor  $F(r_{0.1})$ . Logo, o intervalo  $\Delta$  é crescente. Já para sistemas supercríticos sujeitos a estímulos fracos, a estabilização ocorre em  $F(r) > 0$  e o aumento de  $F(r_{0.1})$  devido à propagação de sinal incrementada é responsável por reduzir o intervalo  $\Delta$ .

Em termos do estado dos agentes, podemos entender o crescimento de  $\Delta$  dado o aumento de  $\sigma$  no regime subcrítico do seguinte modo: para fracos estímulos (valores reduzidos de  $r$ ), um pulso exógeno é capaz de ativar alguns poucos agentes que entram em estado refratário em seguida, logo após estimular um novo número, também reduzido, de agentes não atingidos pelo estímulo externo inicial. Tal dinâmica apresenta tempo de vida curto, já que o estímulo dependerá unicamente da propagação associada aos primeiros agentes ativados por via endógena. Mantendo a intensidade  $r$  constante e aumentando o número médio de excitações  $\sigma$ , percebemos que o mesmo fraco estímulo sentido por um número similar de elementos considerado anteriormente é capaz de ser amplificado em uma primeira propagação endógena, resultando em transmissão de sinal prolongado e, assim, aumentando  $F(r)$ . Como  $r$  manteve-se constante, a intensidade de estímulo  $r_{0.1}$  responsável por 10% de resposta  $F$  é reduzida, aumentando, portanto, o intervalo dinâmico  $\Delta$ .

Com análise análoga podemos chegar à conclusão de que o aumento de  $\sigma$  para regimes supercríticos resulta em redução do intervalo  $\Delta$ , tornando-o decrescente neste intervalo. Novamente, em termos do estado dos agentes, podemos entender o decréscimo de  $\Delta$  com o aumento de  $\sigma$  no regime supercrítico da seguinte forma: Para

estímulos fracos (valores reduzidos de  $r$ ) ocorre fenômeno similar àquele descrito no parágrafo anterior, onde existe amplificação de sinal. Porém, como estamos no regime supercrítico,  $\sigma$  é suficientemente alto para que haja autossustentação do estado ativo do sistema, mantido em  $F(r) > 0$  constante. A medida que aumentamos o valor de  $\sigma$  para um valor fixo de intensidade de estímulo  $r$ , temos um maior número de agentes sendo ativados em um passo subsequente ao instante do estímulo externo, promovendo uma chegada cada vez mais rápida ao estado estacionário de ativação máxima  $F_{max}$ , reduzindo, assim, o intervalo dinâmico  $\Delta$ .

Com estas propriedades de  $\Delta$ , podemos concluir qualitativamente (apesar de não intuitivamente) que existe um ponto onde o intervalo dinâmico apresenta maior valor, ou seja, possui um intervalo temporal mais prolongado de autossustentação após o período transiente de platôs onde a resposta é mínima ( $F(r) = F_0$ ) e máxima ( $F(r) = F_{max}$ , supersaturação). Como vemos na figura 7(D), este momento ocorre justamente onde  $\sigma = 1$ .

Podemos perceber, com este resultado, que existe um ponto particular do sistema de maior proporção entre sua atividade e um eventual retorno ao estado inativo. Ao traçar um paralelo entre o modelo e estímulos recorrentes em conexões sinápticas (como sugere a nomenclatura atribuída aos agentes nas figuras 7(C) e 7(D)) em neurônios, notamos que a criticalidade representa um limite a partir do qual o sistema está em saturação e é condicionado a não retornar ao estado original de repouso.

Para compreensão da dependência da atividade média  $F$  com o estímulo  $r$  e com a conectividade do sistema  $\sigma$  consideramos o campo médio de  $F$  no regime estacionário (uma vez que neste regime, as flutuações da atividade média tornam-se pequenas suficiente para que  $F$  seja exato e não esteja na forma recursiva, onde  $F_{t+1}$  seja função de  $F_t$ ) **próximo ao** ponto crítico e na ausência de estímulo externo ( $\lambda = 0$ , caso 1), e **no** ponto crítico ( $\sigma = \sigma_c = 1$ , caso 2) com estímulo externo próximo a zero.

Por meio da equação 49, para o caso 1 temos

$$F = [1 - (n-1)F] \left[ 1 - \left[ 1 - \frac{\sigma F}{K} \right]^K \right] \quad (76)$$

$$F = 1 - \left[ 1 - \frac{\sigma F}{K} \right]^K - (n-1)F + (n-1)F \left[ 1 - \frac{\sigma F}{K} \right]^K \implies \quad (77)$$

$$nF - 1 = - \left[ 1 - \frac{\sigma F}{K} \right]^K + (n-1)F \left[ 1 - \frac{\sigma F}{K} \right]^K = \left[ 1 - \frac{\sigma F}{K} \right]^K [(n-1)F - 1]. \quad (78)$$

Expandindo o termo à potência  $K$  em série de Taylor sobre o ponto  $F = 0$  temos

$$\left[ 1 - \frac{\sigma F}{K} \right]^K \approx 1 - \sigma F + \frac{\sigma^2 F^2}{2K} (K-1), \quad (79)$$

que aplicado na equação anterior, resulta em

$$nF - 1 \approx \left[ 1 - \sigma F + \frac{\sigma^2 F^2}{2K} (K - 1) \right] [(n - 1)F - 1] \implies \quad (80)$$

$$nF - 1 \approx (n - 1)F - 1 - \sigma F [(n - 1)F - 1] + \sigma^2 F^2 \frac{(K - 1)}{2K} [(n - 1)F - 1] \implies \quad (81)$$

$$nF \approx (n - 1)F - \sigma F^2 (n - 1) + \sigma F + \sigma^2 F^3 \frac{(K - 1)}{2K} (n - 1) - \sigma^2 F^2 \frac{(K - 1)}{2K} \quad (82)$$

Como truncamos a série de Taylor em  $F^2$ ,  $F^3 \rightarrow 0$  e assim

$$n \approx n - 1 - \sigma F (n - 1) + \sigma - \sigma^2 F \frac{(K - 1)}{2K} \implies \quad (83)$$

$$F \sigma \left[ (n - 1) + \sigma \frac{(K - 1)}{2K} \right] \approx \sigma - 1 \implies \quad (84)$$

$$F \approx \frac{\sigma - 1}{C}, \quad (85)$$

$$C = \sigma \left[ (n - 1) + \sigma \frac{(K - 1)}{2K} \right]. \quad (86)$$

Como próxima à criticalidade temos que  $\sigma \rightarrow \sigma_c = 1$ , podemos aproximar o denominador  $C$  para

$$C \approx \left[ (n - 1) + \frac{(K - 1)}{2K} \right], \quad (87)$$

que confere com o resultado esperado para a dependência  $F(\sigma)$  obtida em [12]. O termo no numerador não pode ser considerado no limite  $\sigma \rightarrow 1$  já que perderíamos a dependência desejada para  $\sigma$ .

Já para o caso 2, temos

$$F = [1 - (n - 1)F] \left[ 1 - \left[ 1 - \frac{F}{K} \right]^K e^{-r} \right], \quad (88)$$

que apresenta apenas um termo multiplicativo distinto das primeiras manipulações algébricas acima. Logo

$$nF - 1 = \left[1 - \frac{F}{K}\right]^K [(n-1)F - 1]e^{-r}. \quad (89)$$

Utilizando a mesma expansão em série de Taylor anterior junto com a expansão para o termo exponencial  $e^{-r} \approx 1 - r$  (por condição de que  $r$  seja pequeno), então

$$nF - 1 \approx \left[1 - F + F^2 \frac{(K-1)}{2K}\right] [(n-1)F - 1] [1 - r] \quad (90)$$

$$\approx \left[1 - F + F^2 \frac{(K-1)}{2K}\right] [(n-1)F - 1 - r(n-1)F + r] \implies \quad (91)$$

$$nF - 1 \approx (n-1)F - 1 - r(n-1)F + r - F^2(n-1) + F \quad (92)$$

$$+ F^2 r(n-1) - rF + F^3(n-1) \frac{K-1}{2K} \quad (93)$$

$$- F^2 \frac{K-1}{2K} - F^3 r(n-1) \frac{K-1}{2K} + F^2 r \frac{K-1}{2K}. \quad (94)$$

Devido ao truncamento em  $F^2$ , temos  $F^3 \rightarrow 0$  e então

$$0 \approx -r(n-1)F + r - F^2(n-1) + F^2 r(n-1) - rF - F^2 \frac{K-1}{2K} + F^2 r \frac{K-1}{2K} \implies \quad (95)$$

$$r(nF - 1) \approx F^2 \left[ (n-1)[r-1] - \frac{K-1}{2K}[r-1] \right] = [r-1]F^2 \left[ n-1 + \frac{K-1}{2K} \right], \quad (96)$$

e, portanto

$$F \approx \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{C}} \sqrt{\frac{(nF-1)}{(r-1)}}, \quad (97)$$

tal que

$$C = n-1 + \frac{K-1}{2K}. \quad (98)$$

Como  $nF \leq 1$  e  $r \rightarrow 0$ , os termos dentro da raiz podem ser tomados como próximos a 1 (e a negatividade de cada individual permite a manutenção de  $F$  no domínio dos números reais) e, portanto

$$F \approx \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{C}}, \quad (99)$$



como esperado.

Com estes resultados obtidos através da descrição de campo médio podemos concluir que  $\sigma_c = 1$  (ponto crítico) e  $\beta = 1/2$  (parâmetro de ordem). Notando sua enorme proximidade quando comparados aos dados obtidos em simulações estocásticas através da figura 7 podemos compreender, de modo mais acurado, como sistemas operando em regime crítico apresentam caráter distinto de sistemas em outros regimes.

A comparação com sistemas reais nos quais a criticalidade caracteriza-se como um fenômeno emergente ocorre possivelmente devido à otimização de processamento de informação. [29] Em paralelo com o modelo de Ising apresentado anteriormente, onde a simplicidade do sistema torna mais clara a distinção de regimes sub- e super-críticos, a partir de uma temperatura  $T_c$  o sistema está condicionado a manter sua magnetização nula e impossibilitado de, espontaneamente, retornar a condições que o permitam interagir de forma ordenada (formação de 'ilhas' magnéticas) com campos externos. Com explicação análoga, porém com argumentos biológicos, para excitabilidade superiores a  $\sigma_c$  o sistema neuronal é dito saturado e impossibilitado de retornar à posição de repouso onde pode atuar como receptor de novas informações do meio.

A organização de sistemas em proximidades à criticalidade pode nos ajudar a compreender a dinâmica em escalas distintas, uma vez que aqueles que obedecem leis de potência e apresentam comprimento de correlação  $\xi$  divergente no ponto crítico (isto é, apresentam distância característica de interação além da qual não há correlação de eventos) são **invariantes por escala**.

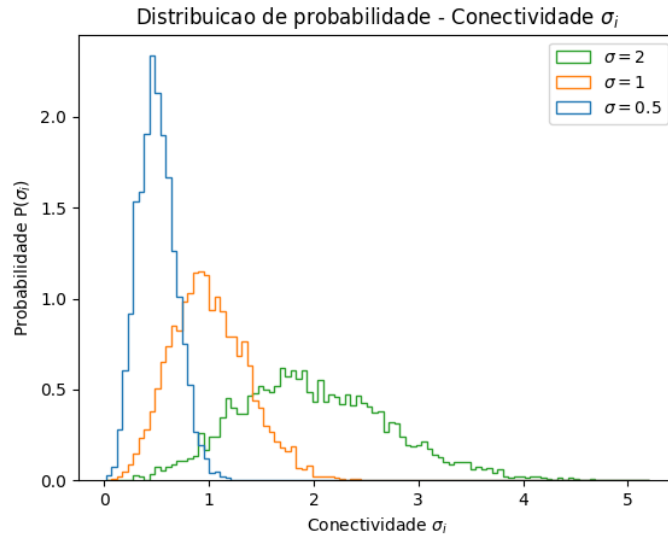


Figure 8: Caracterização da rede interativa. Assim como mostrado pela figura 6(A), temos a distribuição da conectividade  $\sigma_i$  para diferentes valores de  $\sigma$ . Notamos que o valor médio para cada uma das distribuições encontradas é compatível com o valor  $\sigma$  imposto ao sistema. Utilizamos uma simulação com  $N = 10^4$  agentes, com  $K = 10$ .

A invariância por escala de sistemas de ativação neuronal permite a construção de modelos capazes de descrever

cascatas de ativação que variam de pequena a larga escala em atividades cerebrais que ocorrem independentemente em regiões distintas do cérebro de mamíferos. Um dos resultados interessantes obtidos recentemente através de medidas dos expoentes críticos para a atividade neuronal em cérebros humanos e de macacos (com estruturas com diferença de escala da ordem de 10.000 vezes) corrobora a escalabilidade de tais expoentes, uma vez que em ambos sistemas apresentam valores incrivelmente próximos, [29] sugerindo que avalanches neuronais (como tal efeito em cascata de processamento neural de informação) em escalas tanto meso quanto macroscópicas predominantemente apresentam-se próximos à criticalidade termodinâmica

### 3.1.3 Resultados obtidos para o modelo de Kinouchi

Neste momento teremos como foco apresentar os resultados obtidos através da metodologia proposta em seções anteriores como forma de reproduzir os resultados supramencionados assim como a tentativa de estudar novas variações do sistema.

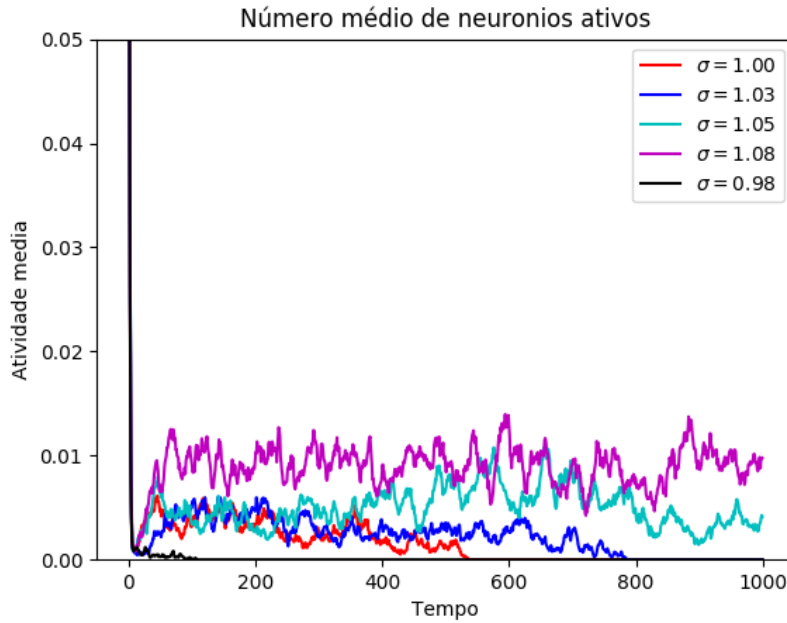


Figure 9: Análise da dinâmica temporal do número médio de agentes (ou neurônios) ativos para cada instante de tempo  $t \in [0, 1000]$  ms. A unidade "ms" é arbitrária, e foi imposta devido à relação com a unidade de tempo base sobre a qual neurônios apresentam sua dinâmica de ativação. Vemos que para conectividade maior que  $\sigma = 1$  (vermelho), temos a predominância de regimes oscilatórios estáveis, sem retorno ao estado inicial onde todo elemento permanece inativo. Tal recorrência, no entanto, não é notada para  $\sigma = 1.03$ . Para  $\sigma = 0.98 < 1$  (preto), temos um rápido retorno ao equilíbrio nulo. Os gráficos representam a média de 3 curvas mais significativas, com cerca de 5 simulações por valor de  $\sigma$ . Mantemos  $N = 10^4$ ,  $K = 10$  e  $n = 10$  estados inalterados.

Na figura 8 temos a caracterização da nossa rede interativa construída de acordo com o modelo computacional proposto em seções anteriores. Como podemos notar, os resultados conferem com aqueles já citados, porém ressaltando para a menor resolução da figura 8, uma vez que foram utilizados  $N = 10^4$  agentes, uma ordem de grandeza a menos que o utilizado para obtenção das distribuições 6(A).

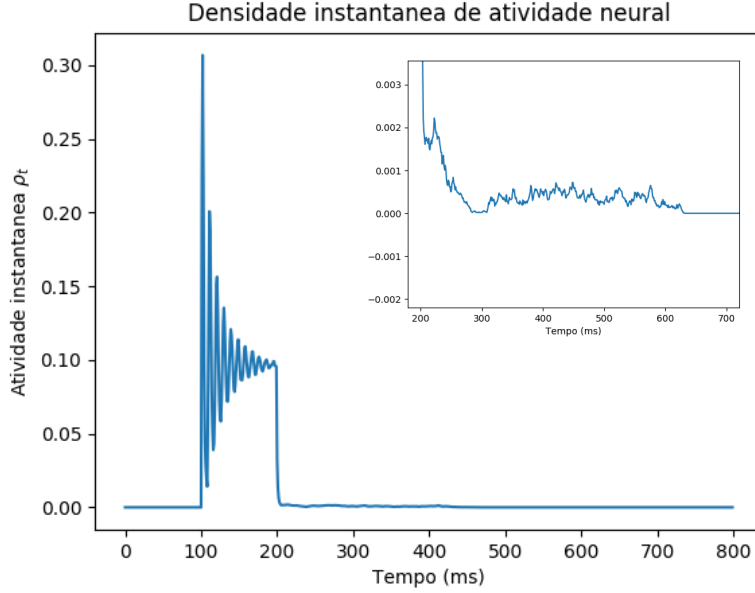


Figure 10: Densidade instantânea de atividade neural em condição de criticalidade para  $\sigma = 1 = \sigma_c$  ao longo do tempo. No intervalo  $t \in [100, 200]$  ms o sistema é exposto a estímulo externo constante, responsável por manter atividade pulsada. Para tempos superiores a  $T = 200$  ms, há apenas manutenção do sistema devido a estímulo endógeno, ou seja, devido as interações entre agentes. A figura interna detalha as pequenas oscilações que perduram. Os parâmetros neste caso foram fixos e iguais a  $N = 10^5$ ,  $K = 10$ ,  $r = 0.5$  e  $n = 10$ .

Corroborado pelos resultados anteriores, para valores elevados de  $\sigma$  (i. e.,  $\sigma = 1.08$  e  $\sigma = 1.05$ ) observamos a autossustentação do sistema no intervalo  $t \in [0, 10^3]$  ms (aqui, cada unidade de  $ms$  foi tomada como equivalente a um passo temporal discretizado nas simulações realizadas). Já para o valor limitante de  $\sigma = 1$ , o sistema é condicionado a retornar à situação inicial de equilíbrio em atividade nula.

Interessante ressaltar que para valores de  $\sigma = 1.03$  esperávamos um comportamento oscilatório recorrente, porém tal resultado não foi possível de ser obtido, mesmo após várias simulações (apesar de o gráfico representar a média de 3 curvas mais representativas, cerca de 5 simulações para cada um dos valores de  $\sigma$  foram realizadas). Este valor, em particular, apresentou comportamento atípico. Por ser um sistema dependente de variáveis estocásticas, é razoável considerarmos que mesmo para valores de conectividade maiores que em regime crítico  $\sigma = 1$  poderíamos obter sistemas capazes de retornar à situação de equilíbrio inativo, no entanto oscilações duradoras para tempos superiores a  $t = 800$  ms não foram observados para  $\sigma = 1.03$  (ver figura 9).

Quando submetemos o sistema a um estímulo externo constante durante um determinado intervalo de tempo,

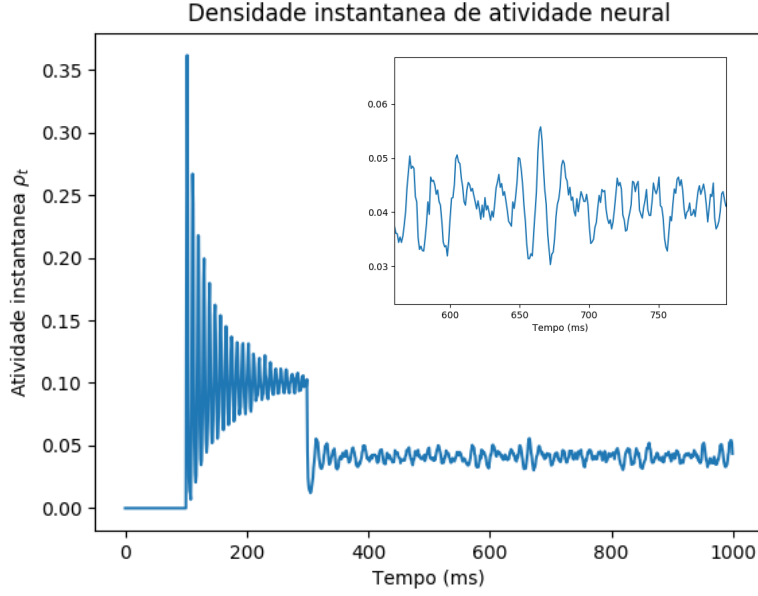


Figure 11: Densidade instantânea de atividade neural em condição de super-criticalidade para  $\sigma = 1.5$  ao longo do tempo para  $N = 10^4$ . No intervalo  $t \in [100, 300]$  ms o sistema é exposto a estímulo externo constante, responsável por manter atividade pulsada. A figura interna detalha algumas oscilações quando no regime para  $t > 200$  ms, e percebemos que a frequência próximo ao esperado teórico de  $1/10 \text{ ms}^{-1}$ , onde 10 representa o número de estados possíveis para cada agente. É interessante perceber que apesar de o regime para sistemas de tamanhos distintos apresentar comportamento similar, redes neuronais maiores tendem a manter uma propagação de informação menos ruidosa e, por isso, mais fiel ao estímulo. Os parâmetros neste caso foram fixos e iguais a  $K = 10$ ,  $r = 0.5$  e  $n = 10$ .

percebemos que sistemas operando em regime crítico apresentam mesmo caráter anterior, isto é, mantêm sua atividade prolongada, mas ainda é capaz de retornar ao equilíbrio, como podemos analisar pela figura 10.

Já para sistemas supercríticos sujeitos a um pulso exógeno a todo instante de tempo durante o intervalo de  $t \in [100, 200]$  (lembrando que o tempo é apresentado aqui de forma discretizada) o sinal imposto é propagado via endógena e perdura de forma ordenada e com frequência de pulso regular. Tais resultados podem ser vistos nas figuras 11 e 12. A regularidade, no entanto, apresenta mais ruído para sistemas menores ( $N = 10^4$ , na figura 11), o que nos possibilita afirmar que o número de neurônios neste sistema modelo pode ser ligado à fidelidade de propagação de sinal ao longo do tempo, uma vez que o aumento neste número em uma ordem de grandeza é suficiente para reduzir a amplitude de oscilação para o regime de estímulos puramente endógenos e manter mais regular a frequência dos pulsos.

Também é importante ressaltar distinções entre os resultados aqui obtidos e aqueles apresentados na figura 6(B), onde as oscilações apresentam menor amplitude e menos ruído, portanto, maior estabilidade. Tal divergência possivelmente deve-se à diferença de excitabilidade utilizada nos modelos ( $\sigma = 1.8$  e  $\sigma = 1.5$ , respectivamente

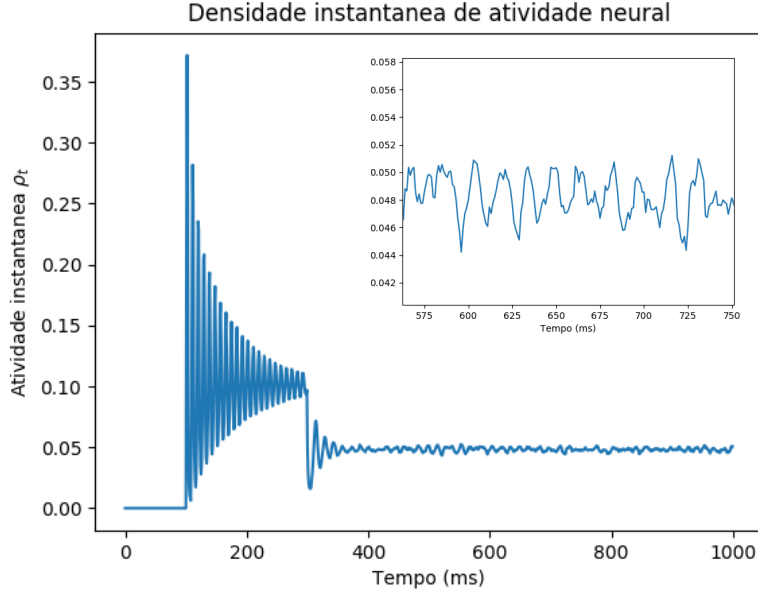


Figure 12: Densidade instantânea de atividade neural em condição de super-criticalidade para  $\sigma = 1.5$  ao longo do tempo para  $N = 10^5$ . No intervalo  $t \in [100, 300]$  ms o sistema é exposto a estímulo externo constante, responsável por manter atividade pulsada. A figura interna detalha algumas oscilações quando no regime para  $t > 200$  ms. Os parâmetros neste caso foram fixos e iguais a  $K = 10$ ,  $r = 0.5$  e  $n = 10$ .

aos modelos original e reproduzido).

Um dos fenômenos observáveis quando na presença de estímulos duradouros é chamado "efeito de pós-imagem" ou "percepção de pós-imagem". Este efeito, mesmo caso não conceitualizado formalmente pelas pessoas, é bastante comum e muitas vezes utilizado como forma de levemente perturbar a percepção da realidade visual. Algumas das ilusões via pós-imagem são desencadeadas através das chamadas configurações de Varin. A manutenção a períodos prolongados de uma imagem pode decorrer por duração de exposição e/ou intensidade de estímulo em branqueamento de receptores fotoquímicos (*photochemical pigment bleaching* [22]). Um dos efeitos que se justificava tal fenômeno decorre do surgimento de pós-imagens negativas, isto é, com cores complementares àquelas do objeto observado por longo período devido à saturação de apenas alguns cones presentes na retina, porém mesmo tal efeito pode ser explicado via atividade neural [30]), mas também, como foi recentemente sugerido e explicado via modelos experimentais [25], este fenômeno pode ocorrer devido à adaptação de circuitos neurais do córtex cerebral.

Neste cenário também encontramos a possibilidade de emergência de efeito similar ao de pós-imagens após estímulo visual no sistema em estudo. Quando sob estímulos neuronais prolongados, com as figuras de (10 a 12) podemos notar que operando na ou pouco acima da criticalidade, o sistema mantém o estímulo ao qual fora sujeito. Para este último caso também tende a atingir uma posição de equilíbrio estável, convergindo para valores específicos e maiores que zero. Podemos prolongar este comportamento mantendo o pulso em períodos

maiores de tempo, como visto na figura 13.

Fenômeno curioso para estímulos externos prolongados é evidenciado também nesta figura a pouco referida (figura 13). Diferentes números de estágios refratários resultam em distintas posições de equilíbrio estável para o regime de super-exposição na criticalidade ( $\sigma = 1 = \sigma_c$ ). Considerando a existência, por construção, dos estados dormite e ativo, para cada uma das linhas (do topo para baixo) temos 2, 4, 8 e 16 estágios refratários, respectivamente, cujos valores de tendência associados são  $\approx 0.465$ ,  $\approx 0.173$ ,  $\approx 0.098$  e  $\approx 0.053$ .

Estes mesmos valores podem ser observados quando na retirada de estímulo após certo período. Como vemos na figura 14, a frequência de oscilação é proporcional ao número de estados refratários e, após o instante  $t = 300$  ms, notamos que em alguns casos o sistema estabiliza na região que antes era ocupada por outro valor numérico de  $n$ . Por exemplo para  $n = 6$  (linha laranja), após desligamento do estímulo seu regime estável passa a oscilar próximo ao valor esperado para  $n = 10$  (linha verde) enquanto sob estímulo exógeno. O mesmo ocorre entre  $n = 10$  e  $n = 18$ .

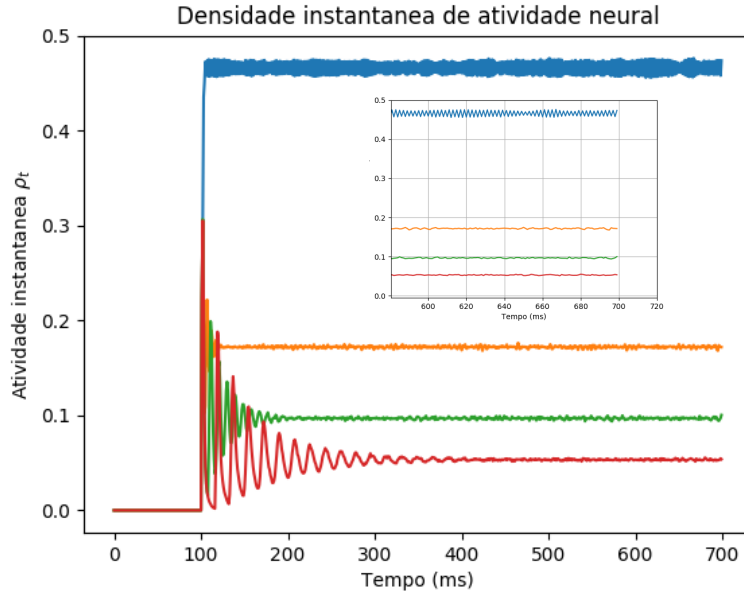


Figure 13: Densidade instantânea de atividade neural em condição de super-criticalidade para  $\sigma = 1.5$  ao longo do tempo para  $N = 10^5$ . Ao longo do intervalo  $t \in [100, 300]$  ms o sistema é exposto a estímulo externo constante. A figura interna detalha momentos intermediários do estado ativo do sistema. Os parâmetros neste caso foram fixos e iguais a  $K = 10$  e  $r = 0.5$ , considerando que houve variações de  $n$  (quantidade total de estados de cada neurônio). Nestes casos, temos do topo para baixo em azul (primeira oscilação)  $n = 4$ ; em laranja,  $n = 6$ ; em verde,  $n = 10$ ; e em vermelho (última oscilação),  $n = 18$ .

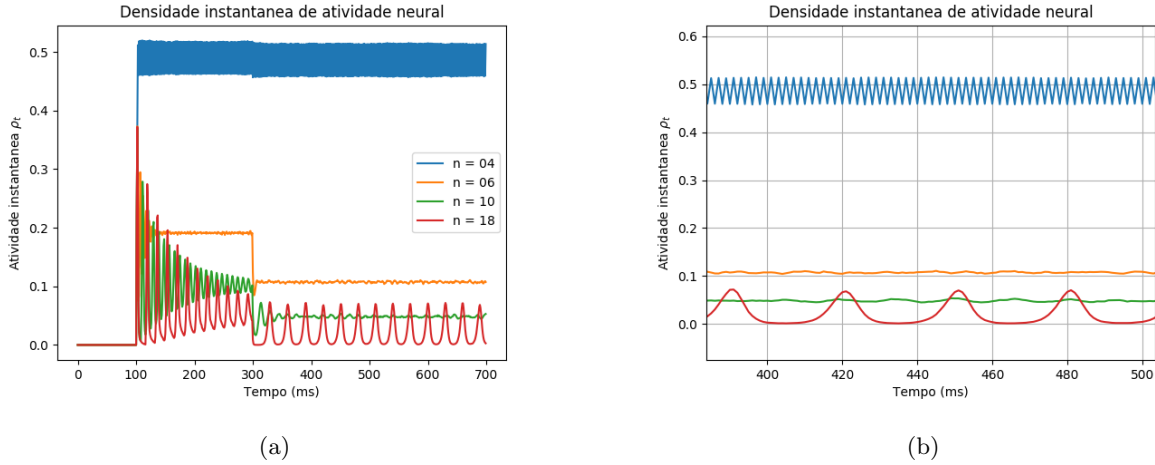


Figure 14: Densidade instantânea de atividade neural em condição de super-criticalidade para  $\sigma = 1$  ao longo do tempo para  $N = 10^5$ . (a) Ao longo do intervalo  $t \in [100, 300]$  ms o sistema é exposto a estímulo externo constante. (b) Detalhe de momentos intermediários do estado ativo do sistema. Os parâmetros neste caso foram fixos e iguais a  $K = 10$  e  $r = 0.5$ , considerando que houve variações de  $n$  (quantidade total de estados de cada neurônio). Nestes casos, temos do topo para baixo em azul (primeira oscilação)  $n = 4$ ; em laranja,  $n = 6$ ; em verde,  $n = 10$ ; e em vermelho (última oscilação),  $n = 18$ .

Impressionantemente os resultados obtidos nas figuras 13 e 14 apresentam comportamento similar a osciladores amortecidos. Estes sistemas apresentam formulação expressa por

$$x(t) = Ae^{-\mu t} [\cos(\omega t) + \sin(\omega t)], \quad (100)$$

onde  $x(t)$  é a posição do oscilador ao longo do tempo,  $A$  corresponde à amplitude de oscilação,  $\omega$  à sua frequência angular e  $\mu$ , à constante de amortecimento. No entanto este modelo prevê a estabilização em  $x(t) = 0$  caso  $t \rightarrow \infty$  e como queremos a estabilização em patamares não nulos, uma possível modificação na equação de oscilação amortecida é dada por

$$x(t) = B + Ae^{-\mu t} [\cos(2\pi\nu t) + \sin(2\pi\nu t)], \quad (101)$$

onde substituímos  $\omega = 2\pi\nu$ , com  $\nu$  frequência de oscilação, e  $B$  estado estacionário de ativação. Esta equação caracteriza inúmeros processos físicos que apresentem regimes de **resposta transiente**, como por exemplo circuitos resistivo-indutivo-capacitivo (ou RLC, como são conhecidos). [19, 11]

Nesta nova perspectiva podemos analisar a evolução temporal de atividade neuronal caso em que seja submetido a estímulos com intensidades variantes, em analogia ao ligar e desligar um circuito RLC em fontes de alimentação com valores de tensão distintos. Nos gráficos que seguem, em intervalos de tempo distintos, foram alterados os

valores de  $r$  (recordando: intensidade de estímulo exógeno, referido na equação (15)), mas mantendo-o constante nestes períodos. Também manteve-se o número  $n = 10$  de estados possíveis.

É interessante notar que o desligar do impulso permite ao sistema retornar à mesma situação de equilíbrio dinâmico, ou seja, o equilíbrio atingido após estímulo suficientemente duradouro independe de sua intensidade.

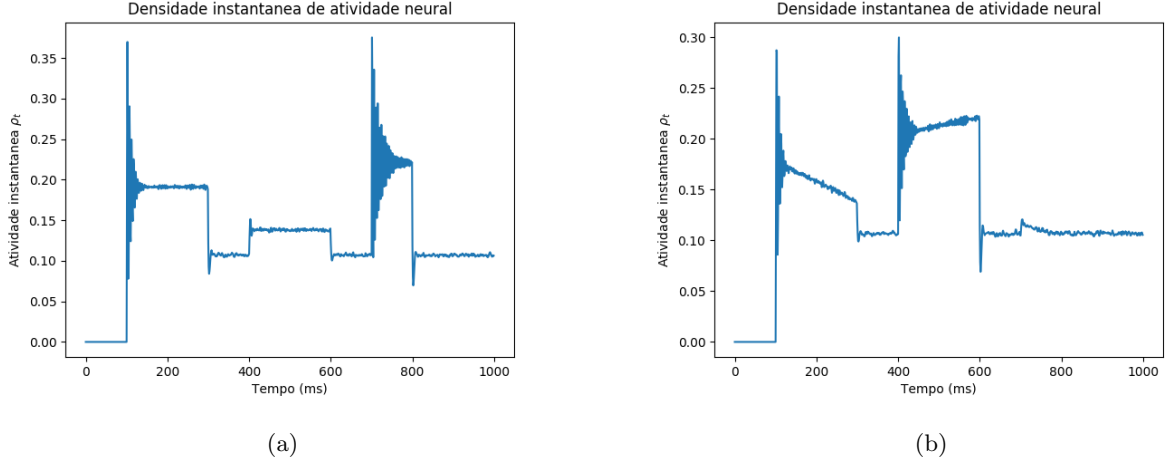


Figure 15: Densidade de atividade instantânea neuronal em regime supercrítico, com excitabilidade média  $\sigma = 1.5$  com estímulos externos variáveis. Em (a) mantivemos pulsos constantes nas regiões  $t_1 \in [100, 300]$  ms  $r = 0.5$ ; para  $t_2 \in [400, 600]$  ms,  $r = 0.2$ ; e para  $t_3 \in [700, 800]$  ms,  $r = 0.8$ . Já em (b) os valores são inicialmente iguais aos apresentados (notando a troca de  $r = 0.8$ , em  $t_2$ , e  $r = 0.2$ , em  $t_1$ , ao início de cada intervalo temporal). Aqui porém, diferentemente de (a), após cada incremento temporal  $r$  sofre um decremento (nos intervalos  $t_1$  e  $t_3$ ) ou incremento de  $t \cdot 10^{-3}$  (no intervalo  $t_2$ ). Notamos que uma vez desligado o estímulo, o sistema retorna à posição de equilíbrio dinâmico próximo ao valor de  $\rho_t = 0.1$ , como esperado para a descrição feita anteriormente, onde mais precisamente este sistema, para  $n = 10$  estados disponíveis, estabiliza em torno de  $\approx 0.098$ .

Como análise final passamos um impulso variável ao sistema. Neste caso a função de intensidade de estímulo é representada por uma senóide dada por

$$r_{t+1} = r_t \sin(10^{-2}t), \quad (102)$$

atentando para que não haja impulso negativo. O resultado pode ser vislumbrado na figura 16.

Concluimos que o sistema é responsivo de formas distintas para variações do número de estados acessíveis por neurônio assim como para a intensidade do estímulo externo passado a ele. Tal relação é direta e suficiente para apresentar similaridade com a resposta de circuitos elétricos a tensão variante. [7]



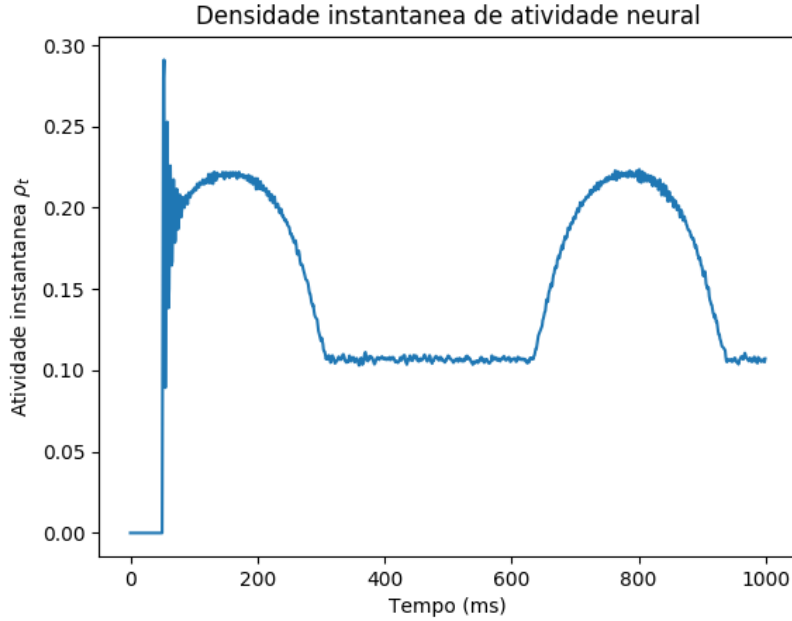


Figure 16: Densidade de atividade instantânea neuronal em regime supercrítico, com excitabilidade média  $\sigma = 1.5$  com estímulos externos variáveis. Para as regiões onde  $r \geq 2 \cdot 10^{-2}$ , temos ausência de estímulo e retorno à atividade via estímulo unicamente endógeno, já para as demais regiões, o sistema sofre estímulo externo em forma senoidal dada por  $\sin(t \cdot 10^{-2})$ .

## 4 Conclusão

Neste trabalho pudemos estudar sistemas de redes compostas por agentes capazes de interagir entre si, os quais apresentam estados dormiente, ativo e refratários. Com ele foi possível analisar matematica e computacionalmente sua construção, para que fosse possível compreender os resultados que com ele podem ser obtidos.

Também foi possível vislumbrar o paradigma da fenomenologia do estado crítico pelo modelo ferromagnético de Ising, sua construção matemática e implementação computacional via algoritmo de Monte Carlo, assim como o modo que as variáveis termodinâmicas relacionam-se com classes de universalidade de fenômenos quantificadas através dos chamados expoentes críticos.

Através de considerações baseadas em eventos reais de interação neuronal em sistemas complexos notamos a emergência de regimes operantes em criticalidade (criticalidade auto-organizável) pelo modelo de Kinouchi, os quais apresentam melhor desempenho quando comparados com demais regimes (de sub- e super-criticalidade) quanto ao processamento de informação e subsequente renovação do sistema ao estado basal (de ativação nula).

Por fim também por meio deste trabalho foi possível simular novas situações para o sistema interagente, com vislumbres de potenciais explicações para fenômenos observáveis em seres vivos, como a incitação deliberada de

pós-imagens mediante estímulo prolongado.

## References

- [1] Uri Alon. “Network motifs: theory and experimental approaches.” In: *Nature reviews. Genetics* 8.6 (2007), pp. 450–61. ISSN: 1471-0056. DOI: 10.1038/nrg2102. URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/17510665>.
- [2] Arka Banerjee. “Self-organized criticality in sandpile models”. In: *Unpublished* (2012), pp. 1–13.
- [3] C. W.P.M. Blom and L. A.C.J. Voesenek. “Flooding: The survival strategies of plants”. In: *Trends in Ecology and Evolution* 11.7 (1996), pp. 290–295. ISSN: 01695347. DOI: 10.1016/0169-5347(96)10034-3.
- [4] Anat Bren and Michael Eisenbach. *How Signals Are Heard during Bacterial Chemotaxis: Protein-Protein Interactions in Sensory Signal Propagation*. Tech. rep. 24. 2000, pp. 6865–6873.
- [5] W. A. Catterall et al. “The Hodgkin-Huxley Heritage: From Channels to Circuits”. In: *Journal of Neuroscience* 32.41 (2012), pp. 14064–14073. ISSN: 0270-6474. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.3403-12.2012. URL: <http://www.jneurosci.org/cgi/doi/10.1523/JNEUROSCI.3403-12.2012>.
- [6] Robert B. Cooper. *Introduction to Queueing Theory, Second Edition*. 2nd. Elsevier Science and Technology Books, 1980. ISBN: 0444003797.
- [7] Michael C. Faleski. “Transient behavior of the driven RLC circuit”. In: *American Journal of Physics* 74.5 (2006), pp. 429–437. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.2174032.
- [8] Nicholas J. Giordano. *Computacional Physics*. Prentice Hall, 1997, pp. 204–207.
- [9] David J. Griffiths. *Eletrodinâmica*. 3rd. Pearson, pp. 192–194.
- [10] K. Huang. *Statistical Mechanics*. 1963.
- [11] Agnieszka Jakubowska and Janusz Walczak. “Analysis of the Transient State in a Series Circuit of the Class  $RL\beta Ca$ ”. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 35.6 (2016), pp. 1831–1853. ISSN: 15315878. DOI: 10.1007/s00034-016-0270-2.
- [12] Osame Kinouchi and Mauro Copelli. “Optimal Dynamical Range of Excitable Networks at Criticality”. In: October (2006). DOI: 10.1038/nphys289. URL: <http://arxiv.org/abs/q-bio/0601037%0Ahttp://dx.doi.org/10.1038/nphys289>.
- [13] J. P. Krajewski et al. “Octopus mimicking its follower reef fish”. In: *Journal of Natural History* 43.3-4 (2009), pp. 185–190. ISSN: 00222933. DOI: 10.1080/00222930802450965.
- [14] S. Mangan and U. Alon. “Structure and function of the feed-forward loop network motif”. In: *Physical Biology* 13.4 (2016). ISSN: 14783975. DOI: 10.1088/1478-3975/13/4/045002.
- [15] Dimitrije Marković and Claudius Gros. “Power laws and self-organized criticality in theory and nature”. In: *Physics Reports* 536.2 (2014), pp. 41–74. ISSN: 03701573. DOI: 10.1016/j.physrep.2013.11.002.

- [16] William J. Matthews, Neil Stewart, and John H. Wearden. “Stimulus Intensity and the Perception of Duration”. In: *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance* 37.1 (2011), pp. 303–313. ISSN: 00961523. DOI: 10.1037/a0019961.
- [17] M. E. J. Newman, D. J. Watts, and S. H. Strogatz. “Random graph models of social networks”. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 99.Supplement 1 (Feb. 2002), pp. 2566–2572. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.012582999. URL: <http://www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.012582999>.
- [18] M. D. Norman, J. Finn, and T. Tregenza. “Dynamic mimicry in an Indo-Malayan octopus”. In: *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 268.1478 (2001), pp. 1755–1758. ISSN: 14712970. DOI: 10.1098/rspb.2001.1708.
- [19] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica 3 - Eletromagnetismo*. 1997.
- [20] Zoltán N Oltvai and Albert-lászló Barabási. “Life’s Complexity Pyramid”. In: *Sciencemag* 298.October (2002), pp. 763–765.
- [21] Alan Peters and Sanford L. Palay. “The morphology of synapses”. In: *Journal of Neurocytology* 25.1 (1996), pp. 687–700. ISSN: 0300-4864. DOI: 10.1007/bf02284835.
- [22] Vahid Salari et al. “Phosphenes, retinal discrete dark noise, negative afterimages and retinogeniculate projections: A new explanatory framework based on endogenous ocular luminescence”. In: *Progress in Retinal and Eye Research* 60.July 2017 (2017), pp. 101–119. ISSN: 18731635. DOI: 10.1016/j.preteyeres.2017.07.001.
- [23] Murilo L. Santos. “Simulação de Monte Carlo no Modelo de Ising na Rede Quadrada”. MA thesis. Universidade Federal de Minas Gerais, 2014.
- [24] James P Sethna. “Entropy, Order Parameters, and Complexity”. In: *Complexity* 2.14853 (2011), p. 376. ISSN: 9780198566779. DOI: 10.1.1.165.9961. arXiv: 0612418v1 [cond-mat].
- [25] Shinsuke Shimojo. “Afterimage of Perceptually Filled-in Surface”. In: *Science* 293.August (2001), pp. 1677–1681.
- [26] Tânia Tomé and Mário J. de Oliveira. *Stochastic Dynamics and Irreversibility*. 2015. ISBN: 978-3-319-11769-0. DOI: 10.1007/978-3-319-11770-6. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-11770-6>.
- [27] W. W. Tso and J. Adler. “Negative chemotaxis in Escherichia coli”. In: *Journal of Bacteriology* 118.2 (1974), pp. 560–576. ISSN: 00219193.
- [28] S Ward. “Chemotaxis by the nematode *Caenorhabditis elegans*: identification of attractants and analysis of the response by use of mutants.” In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 70.3 (1973), pp. 817–21. ISSN: 0027-8424. URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/4351805><http://www.pubmedcentral.nih.gov/articlerender.fcgi?artid=PMC433366>.
- [29] Shan Yu et al. “Universal organization of resting brain activity at the thermodynamic critical point”. In: *Frontiers in Systems Neuroscience* 7.August (2013), pp. 1–17. DOI: 10.3389/fnsys.2013.00042.

- [30] Qasim Zaidi et al. “Neural locus of color afterimages”. In: *Current Biology* 22.3 (2012), pp. 220–224. ISSN: 09609822. DOI: 10.1016/j.cub.2011.12.021. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cub.2011.12.021>.