LISTA 3: DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS - SME0320

Exercício 1. Suponha que X tenha distribuição $N(2; 0,16)$. Empregando a tabela da distribuição normal, calcule as seguintes probabilidades.

(a) $P(X < 1,8)$.
(b) $P(1,8 \leq X \leq 2,1)$.
(c) $P(X \geq 2,3)$.

Exercício 2. Se $X \sim Uniforme(a, b)$, determine: $E(X)$, $Var(X)$ e a função de distribuição acumulada de X.

Exercício 3. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 8. Calcule as seguintes probabilidades:

(a) $P(X > 10)$.
(b) $P(X \leq E[X])$.
(c) $P(5 \leq X \leq 11)$.

Exercício 4. Uma distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ tem média $7,5$ e variância $6,75$. Determine os valores de a e b, sabendo que $b > a > 0$.

Exercício 5. Sejam X e Y variáveis aleatórias, tais que $Y = 2X + 5$ e $X \sim Uniforme(0, 1)$. Obtenha:

(a) A função densidade de probabilidade de Y.
(b) $E(Y)$.
(c) $Var(Y)$.

Exercício 6. Sabe-se que a precipitação anual de chuva, em certa localidade, é uma variável aleatória normalmente distribuída, com média igual a $29,5$cm e desvio-padrão $2,5$cm. Em 95% do tempo a chuva fica acima de qual valor?

Exercício 7. Seja $X \sim Uniforme(-\alpha, \alpha)$, determine o valor do parâmetro α de modo que:

(a) $P(-1 < X < 2) = 3/4$.
(b) $P(|X| < 1) = P(|X| > 2)$.

Exercício 8. O rótulo de uma lata de coca-cola indica que o conteúdo é de 350ml. Suponha que a linha de produção encha as latas de forma que o conteúdo seja uniformemente distribuído no intervalo $[345, 355]$.

(a) Qual é a probabilidade de que uma lata tenha conteúdo superior a 353ml?
(b) Qual é a probabilidade de que uma lata tenha conteúdo inferior a 346ml?
(c) O controle de qualidade aceita uma lata com conteúdo dentro de 4ml do conteúdo exibido na lata. Qual é a proporção de latas rejeitadas nessa linha de produção?

Exercício 9. O tempo entre chegadas de automóveis num lava-jato é distribuído exponencialmente, com uma média de 12 minutos.

(a) Qual é a probabilidade de que o tempo entre chegadas de veículos neste lava-jato seja maior que 10 minutos?
(b) Qual é a probabilidade de que o tempo entre chegadas de veículos neste lava-jato seja menor que 8 minutos?

Exercício 10. Suponha que X seja uma variável aleatória para a qual $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Suponha que Y seja uniformemente distribuída sobre o intervalo (a, b). Determine a e b de modo que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$ e $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$.

Exercício 11. Uma enchedora automática enche garrafas de acordo com uma distribuição normal de média 1000ml. Deseja-se que no máximo 1 garrafa em 100 saia com menos de 990ml. Qual deve ser o maior desvio padrão tolerável?

Exercício 12. Suponha que a tabela seguinte represente a distribuição de probabilidade conjunta do vetor aleatório discreto (X, Y). Calcule todas as distribuições marginais e condicionais.

$Y \mid X$	1	2	3
1	1/12	1/6	0
2	0	1/9	1/5
3	1/18	1/4	2/15

Exercício 13. A função de probabilidade conjunta entre as variáveis aleatórias X e Y é apresentada na próxima tabela.

$X \mid Y$	-2	0	2	4
-1	0,1	0,2	0,1	0,2
1	0,2	0	0,1	0,1

(a) Obtenha as funções de probabilidade marginais das variáveis.
(b) X e Y são independentes?

Exercício 14. A função de probabilidade do vetor aleatório (X, Y) é dada a seguir

$Y \mid X$	0	1	2
0	1/12	1/60	7/40
1	1/8	1/12	1/30
2	1/24	1/24	1/4
3	1/12	1/40	1/24

Calcule:

(a) $P(X = 0 \mid 1 \leq Y < 3)$
(b) $E(X \mid Y = 3)$
(c) $Var(X + Y)$
(d) $Cov(X, Y)$
(e) $\rho(X, Y)$

Exercício 15. Uma moeda é jogada duas vezes. Considere X o número de caras na primeira jogada e Y o número total de caras nas duas jogadas. Se a moeda não for equilibrada, tal que cara tem 40% de chance de ocorrer, determine

(a) A distribuição de probabilidade conjunta e as distribuições marginais de X e Y.
(b) Qual a função de probabilidade condicional de X dado Y?
(c) A probabilidade de que pelo menos uma cara ocorra.

Exercício 16. Determine os valores de k de modo que as seguintes funções representem as distribuições de probabilidade conjuntas das variáveis aleatórias X e Y:

(a) $f(x, y) = kxy$, para $x = 1, 2, 3$ e $y = 1, 2, 3$.
(b) $f(x, y) = k(2x + y)$, para $2 < x < 6$ e $0 < y < 5$.

Exercício 17. A densidade conjunta das variáveis aleatórias (X, Y), onde X é a unidade de mudança de temperatura e Y é a proporção de mudança de espectro que certa partícula atômica produz, é

$$f(x, y) = 10xy^2, \quad \text{com} \quad 0 < x < y < 1$$

(a) Determine as densidades marginais $g(x)$ e $h(y)$ e a densidade condicional $f(y \mid x)$.
(b) Determine a probabilidade de que o espectro mude em mais da metade do total de observações, dado que a temperatura é aumentada para $0,25$ unidade.

Exercício 18. As variáveis X e Y têm densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{6}{7}\left(x^2 + \dfrac{xy}{2}\right), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função densidade conjunta.
(b) Obtenha as marginais de X e Y.
(c) X e Y são independentes?

SME0123 - GABARITO LISTA 3: DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

Exercício 1.

(a) $0,3085$.

(b) $0,2902$.

(c) $0,2206$.

Exercício 2.

$E(X) = \frac{a+b}{2}$.

$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{2}$.

Função de Distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se} \quad x > b \end{cases}$$

Exercício 3.

(a) $0,2865$.

(b) $0,6321$.

(c) $0,2824$.

Exercício 4. $a = 3$, $b = 12$.

Exercício 5.

(a) $f_Y(y) = \frac{1}{2}$, $y \in (5,7)$.

(b) $E(X) = 6$.

(c) $Var(X) = \frac{1}{3}$.

Exercício 6. $25,3879$.

Exercício 7.

(a) $\alpha = 2$.

(b) $\alpha = 3$.

Exercício 8.

(a) $0,2$.

(b) $0,1$.

(c) $0,2$.

Exercício 9.

(a) $0,3012$.

(b) $0,5507$.

Exercício 10.

$a = \mu \mp \sqrt{3\sigma^2}$.

$b = \mu \pm \sqrt{3\sigma^2}$.

Exercício 11. $\sigma \cong 4,2986$.

Exercício 12.

Função Distribuição de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{36} & \text{se} \quad x = 1 \\ \frac{19}{36} & \text{se} \quad x = 2 \\ \frac{12}{36} & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Função Distribuição de probabilidade

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{45}{180} & \text{se} \quad y = 1 \\ \frac{56}{180} & \text{se} \quad y = 2 \\ \frac{79}{180} & \text{se} \quad y = 3 \end{cases}$$

Distribuição condicional de probabilidade

$$P(Y = y|X = 1) = \begin{cases} \frac{3}{5} & \text{se} \quad y = 1 \\ 0 & \text{se} \quad y = 2 \\ \frac{2}{5} & \text{se} \quad y = 3 \end{cases}$$

Distribuição condicional de probabilidade

$$P(Y = y|X = 2) = \begin{cases} \frac{6}{19} & \text{se} \quad y = 1 \\ \frac{4}{19} & \text{se} \quad y = 2 \\ \frac{9}{19} & \text{se} \quad y = 3 \end{cases}$$

Distribuição condicional de probabilidade

$$P(Y = y|X = 3) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y = 1 \\ \frac{3}{5} & \text{se} \quad y = 2 \\ \frac{2}{5} & \text{se} \quad y = 3 \end{cases}$$

Distribuição condicional de probabilidade

$$P(X = x|Y = 1) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se} \quad x = 1 \\ \frac{2}{3} & \text{se} \quad x = 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Distribuição condicional de probabilidade

$$P(X = x|Y = 2) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 1 \\ \frac{5}{14} & \text{se} \quad x = 2 \\ \frac{9}{14} & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Distribuição condicional de probabilidade

$$P(X = x|Y = 3) = \begin{cases} \frac{10}{79} & \text{se} \quad x = 1 \\ \frac{45}{79} & \text{se} \quad x = 2 \\ \frac{24}{79} & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Exercício 13.

(a) Função Distribuição de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,6 & \text{se} \quad x = -1 \\ 0,4 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Função Distribuição de probabilidade

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0,3 & \text{se} \quad y = -2 \\ 0,2 & \text{se} \quad y = 0 \\ 0,2 & \text{se} \quad y = 2 \\ 0,3 & \text{se} \quad y = 4 \end{cases}$$

(b) Não são independentes.

Exercício 14.

(a) $\frac{20}{69}$.

(b) $\frac{13}{18}$.

(c) $1,8327$.

(d) $-\frac{19}{720}$.

(e) $-0,0288$.

Exercício 15.

(a) Distribuição conjunta de probabilidade

$Y \mid X$	0	1	2	Total
0	0,36	0,24	0	0,6
1	0	0,24	0,16	0,4
Total	0,36	0,48	0,16	1

(b) Distribuição condicional de probabilidade

$$P(X = x|Y = 0) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Distribuição condicional de probabilidade

$$P(X = x|Y = 1) = \begin{cases} 0,5 & \text{se} \quad x = 0 \\ 0,5 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Distribuição condicional de probabilidade

$$P(X = x|Y = 2) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

(c) $0,64$.

Exercício 16.

(a) $k = \frac{1}{36}$.

(b) $k = \frac{1}{210}$.

Exercício 17.

(a) $g(x) = \frac{10(x-x^4)}{3}$, $x \in (0,1)$.

$h(y) = 5y^4$, $y \in (0,1)$.

$f(y|x) = \frac{3y^2}{1-x^3}$, $0 < x < y < 1$.

(b) $\frac{8}{9}$.

Exercício 18.

(a) Demonstração.

(b) $g(x) = \frac{6(2x^2+x)}{7}$, $y \in (0,1)$.

$h(y) = \frac{3y+4}{14}$, $y \in (0,2)$.

(c) Não são independentes.