Variáveis aleatórias: Projetos breves

O solicitado para cada projeto é:

- Preparar uma apresentação de dez minutos respondendo perguntas do enunciado (não se espera que respondam todas).
- A apresentação deve descrever o problema (que é diferente de ler o enunciado) e embasar teoricamente os métodos utilizados para responder as perguntas (numéricos ou analíticos). Se recomenda utilizar cálculos analíticos, nos casos que seja possível, para verificar que a programação esteja correta.
- Para a primeira parte do projeto (que será apresentada como **Prova 4**) o solicitado é realizar uma série de experimentos aleatórios do sistema de interesse de maneira a gerar um conjunto de dados simulados (ou sintéticos). A seguir, aplicar técnicas de análise descritiva para responder as perguntas e descrever o comportamento do sistema.
- Sintam-se livres para pensar alguma variante que vocês achem interessante. Algumas estão sugeridas em alguns enunciados. Podem adicionar uma pergunta original sua, algum estudo que gere curiosidade ou surpresa.
- Cada alun@ (não cada grupo) deverá encaminhar os slides da apresentação e os códigos desenvolvidos pelo e-disciplinas num arquivo zip (mesmo que seja um pdf, por favor zipar). Serão avaliados os seguintes aspectos: (a) Clareza e precisão, (b) correção dos cálculos, raciocínios, códigos e resultados, (c) criatividade do conteúdo original, (d) qualidade dos gráficos.
- A pessoa do grupo que realizará a apresentação será sorteada no momento da prova. Todos devem ser capazes de apresentar, responder perguntas, e rodar os códigos utilizados se for pedido.
- **Se espera que cada grupo tenha no mínimo uma reunião preparatória com um monitor ou docente, antes das apresentações de (que serão a Prova 4).**

1. Confiabilidade

Um sistema requer n máquinas para funcionar. Elas quebram, a cada unidade de tempo (um minuto), com probabilidade p_0. Para garantir o funcionamento confiável do sistema, s máquinas adicionais são mantidas para reposição. Quando uma máquina quebra, ela é substituída por uma em bom estado e enviada para reparo. O tempo de reparo de cada máquina é t_R (fixo).

Deseja-se estudar a variável aleatória "tempo de colapso" do sistema, isto é, o tempo T que o sistema funciona até dever ser parado porque não há n máquinas disponíveis. Quanto vale $E(T)$? Qual é a distribuição de T? Como depende a variável T do número de máquinas reserva s? Mais em concreto, quantas máquinas adicionais são necessárias para que Prob$\{T < 10000\}$ seja menor que 1%?

Faixas sugeridas de valores: $n = 10 - 100$, $p_0 = 0.001 - 0.01$, $t_R = 10 - 100$.

- Quais das perguntas acima conseguem responder analiticamente? Nos casos que possa, qual é o resultado?
- Os resultados do simulador são consistentes com as estimações analíticas no caso $\beta = 0$?
- No simulador, é fácil inserir a amostragem de outras variáveis aleatórias. Estudar por exemplo a variável Z que podemos llamar "tempo de alerta", definido como o tempo em que o número de máquinas em reparação atinge 80% do valor disponível s (ou outra porcentagem a escolher). Como é a distribuição de probabilidade de Z?
- São Z e T variáveis independentes? É possível predizer em alguma medida o tempo de colapso uma vez que foi atingido o tempo de alerta? Se uma parada ordenada do sistema requer o tempo t_R, pode sugerir uma estratégia de manejo que "garanta" chegar a parada ordenada com 99% de probabilidade?
- É lógico que as máquinas envelheçam. A probabilidade de cada máquina de falhar pode crescer linearmente com o tempo, seguindo $p(k) = p_0 + \beta\, t_f(k)$ onde k identifica a máquina e $t_f(k)$ o tempo que ela leva em funcionamento desde o último reparo. No caso de $\beta \neq 0$ é impossível realizar cálculos analíticos sobre a variável T. Para isto, desenvolver um pequeno código de simulação do processo. Esse caso é mais complexo que o original, porque é necessário armazenar informação específica para cada máquina (o tempo que leva trabalhando). Mesmo assim, trata-se apenas de uma adequada combinação de variáveis Bernoulli que o computador sabe simular.

2. Preço vs. Falência

Um pescador vende peixe fresco grelhado numa barraca na praia. Ele recebe o pedido, pesca, prepara o peixe, grelha, serve e vende. Ele nunca armazena mais de um peixe. Cada hora ele checa se apareceu um novo pedido, o que acontece com probabilidade p (valor típico: 0.4, consideramos que no máximo chega um pedido por hora), e decide o que fazer na próxima hora. Se ele tem um cliente e um peixe, a próxima hora é dedicada a cozinhar o peixe, servir e receber o preço S. Se ele tem cliente mas não tem peixe, ele vai pescar, com probabilidade q de conseguir um peixe (valor típico: 0.7). Se ele tem peixe e não tem cliente, ele descansa. Se ele não tem cliente nem peixe, ele vai pescar. O custo de manutenção da barraca é de 10 reais por hora. Qual é o preço que ele deve vender o peixe para o negócio não ir a falência, dependendo dos valores de p e q?

Nada é livre de risco. Vamos assumir que o pescador decide determinar o preço de maneira que seu risco de ir a falência nas primeiras 900 horas de funcionamento seja menor que 1%. É considerada falência quando as perdas acumuladas são maiores que o capital inicial do pescador.

- Considerar $p = 0.4 - 0.7$, $q = 0.6 - 0.9$ e capital inicial de 500 a 2000 reais. Um pescador com maior capital inicial poderia vender mais barato e levar a falência a outro com menor capital?
- *Sugestão:* Considerar que o pescador tem 4 estados possíveis: (1) Sem cliente nem peixe, (2) sem cliente com peixe, (3) com cliente e sem peixe, (4) com cliente e com peixe. Ele irá de um estado a outro (ou não) hora por hora, com probabilidades fáceis de calcular. Se ele a tempo t está no estado 4, por exemplo, ele com probabilidade 1 estará no estado 1 a tempo $t+1$, e seu capital terá crescido em $S - 10$ reais.
- Uma variável aleatória X que nos interessa é o mínimo, entre $t = 0$ e $t = 900$, do capital $C(t)$ ao tempo t, sendo que $C(0) =$ capital inicial. Cada realização com $X < 0$ corresponde a uma falência.
- Notar que, para cada $t > 0$, o capital $C(t)$ é uma v.a. diferente (mas não independente) de $C(t-1)$, $C(t-2)$, etc.
- Escolha o preço S de acordo com o critério do pescador. Qual é o capital final esperado, após 900 horas, condicionado a não ter falido? Escrita matematicamente, a pergunta é qual é a distribuição da v.a. $C(t = 900)$ condicionado a $X \geq 0$.
- Analisando o processo do pescador, existem pedidos não atendidos? Adicionar uma v.a. Y que seja o número de pedidos não atendidos em 900 horas.

- Seria interessante para o pescador saber quantas tempo horas seguidas ele terá que trabalhar, entre dois descansos.
- Poderia acontecer que o esforço colocado na pesca, e assim a probabilidade q de pescar, não fossem fixas. Imaginemos por exemplo que se, ao tempo t, o capital $C(t)$ é maior que o capital inicial, o pescador relaxa um pouco seus métodos e com isto a probabilidade de pesca cai para $0.8q$. Nesse caso, qual seria o valor apropriado de S?

3. Caminhada aleatória em 2D

Um móvel sai da origem (0,0), sendo que apenas pode se movimentar por uma rede x-y de pontos de distanciamento 1. Assim, a cada passo de tempo, da posição (i, j) pode ir a $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$ e $(i, j-1)$. O móvel realiza esse movimento repetidamente, de maneira que ao longo do experimento vai passando pelas posições $(x(t), y(t)) \in \mathbb{Z}^2$, com $t > 0$.

O movimento se inicia com igual probabilidade nas 4 direções, e a partir do segundo movimento, as probabilidades são: $1/4 + \alpha$ de repetir a direção do passo anterior, $1/4 - \alpha$ de voltar atrás, e $1/4$ de ir em cada uma das outras duas direções. Poderia ser visto como uma espécie de inercia do processo. Quando α é zero temos a caminhada aleatória "padrão".

O móvel está dentro da caixa $-L \leq x, y \leq L$, e registramos o tempo T que ele demora em chegar à borda da caixa, e qual é o ponto da borda (X_C, Y_C), onde faz contato e é removido.

- Nos interessa analisar as distribuições das variáveis T, X_C e Y_C. Tem partes da borda onde os móveis demoram mais em chegar? Como é a distribuição das "idades" T dos móveis que chegam aos diversos pontos da borda da caixa?
- Essas distribuições dependem de α? Em quais variáveis é observada maior dependência?
- Como dependem as variáveis de interesse do tamanho L?
- Quanto tempo deveria durar o experimento para ter 95% de probabilidade de o móvel ter chegado à borda?

4. Uma epidemia de Poisson

Um modelo básico de epidemia numa população de N indivíduos considera eles divididos em quatro grupos: S susceptíveis (sãos mas sem imunidade), I infectados não hospitalizados, H infectados hospitalizados e R recuperados (com imunidade). Esses números evoluem, considerando intervalos δt de tempo, segundo as seguintes regras:

- Se $I(t)+H(t)$ e $S(t)$ são o número de infectados e susceptíveis, respectivamente, ao tempo t, produzem-se novos contágios com uma taxa média $r_I(t) = \beta(t)\,(I(t)+H(t))S(t)/N$ (em contágios/dia). Desses novos contágios, 5% em média é internado no hospital. Se sabe que normalmente a população tem $\beta(t) = \beta_0 = 0.2592$ (contágios/dia), e que isto depende da frequência dos contatos inter-pessoais. Para certos dias excepcionais (cuja frequência média é de 2 por mês) acontecem grandes aglomerações levando o valor de β a $3\beta_0$.
- A taxa média de recuperação dos infectados não hospitalizados (em pacientes por unidade de tempo) é modelada como $r_{RI}(t) = \gamma_I\, I(t)$, com $\gamma_I = 0.07143$ dia^{-1} (duração média da doença $\simeq$ duas semanas).
- A taxa média de recuperação dos infectados hospitalizados é modelada como $r_{RH}(t) = \gamma_H\, H(t)$, com $\gamma = 0.03571$ dia^{-1} (duração média da doença $\simeq$ quatro semanas).

Deseja-se construir um simulador desse processo.

Considere $N = 10^4$ e o número inicial de infectados $I(0)$ aleatório, entre 10 e 20. Inicialmente não há infectados hospitalizados. O tempo a ser estudado é até não haver mais pessoas hospitalizadas por 3 dias seguidos. As variáveis de interesse são, dentre outras:

- O máximo número de hospitalizados simultâneos, isto é, $X = \max_t H(t)$.
- O tempo T_* desde a primeira hospitalização até o pico maximo de hospitalizados.
- A fração da população que teve a doença uma vez acabada a epidemia. A fração que esteve hospitalizada.
- O tempo desde a primeira hospitalização até a hospitalização número 10, e até a hospitalização número 40 (essas variáveis denotaremos por T_{10} e T_{40}). Notar que essas variáveis são fáceis de observar numa epidemia real.

- Sugestão de modelo de Poisson:

```
p = dt*beta(t)*(I(t-1)+H(t-1))*S(t-1)/N;
novosI   = randp(0.95*p);
novosH   = randp(0.05*p);
qI = dt*gammaI*I(t-1);
recuperadosI = randp(qI)
qH = dt*gammaH*H(t-1);
recuperadosH = randp(qH);
novosRecuperados = recuperadosI + recuperadosH;
```

- A distribuição de probabilidade de T_* é de bastante interesse. Qual seria o valor de t tal que Prob$(T_* < t) = 0.05$?
- Como variam os resultados do modelo quando é variada a frequência dos eventos de aglomeração para 1/mês ou 3/mês? Como variam se a taxa de internação não é 5% (por exemplo, se fosse 1%)?
- Os resultados do modelo são razoavelmente independentes do passo de tempo δt utilizado? Deveriam?
- É possível utilizar T_{10} e T_{40} para estimar em que momento acontece o pico de hospitalizações?

5. Uma enquête eleitoral

Sabe-se que a população de um pais está dividida em dois grupos políticos, que chamaremos A e B. A fração do grupo A é f, a de B é $1 - f$. Três perguntas serão feitas numa enquête, com respostas X, Y e Z, números reais. O pessoal de A acostuma responder às três perguntas com $N(0, \sigma)$, e o pessoal de B com $N(1, \sigma)$.

- Como são as distribuições de X, Y e Z para diversos valores de σ e de f? E as distribuições conjuntas?
- Para uma certa resposta (x_i, y_i, z_i), é possível estimar a qual dos grupos o respondente pertence?
- Suponha que se extrai uma amostra de n pessoas, cujo grupo político se desconhece. O grupo de cada pessoa é estimado segundo se $x + y + z$ é maior ou menor que $3/2$. Dessa maneira é calculada a "fração estimada", sendo

$$f_{\text{est}} = \frac{1}{n} \sum_i \chi\left(x_i + y_i + z_i < \frac{3}{2}\right)$$

  onde χ é 1 se o argumento é verdadeiro, e 0 se não.
- f_{est} é uma v.a., cujo espaço amostral é a de todas as possíveis amostras de n pessoas. Como é sua distribuição de probabilidade? Como depende de n, de σ e de f?

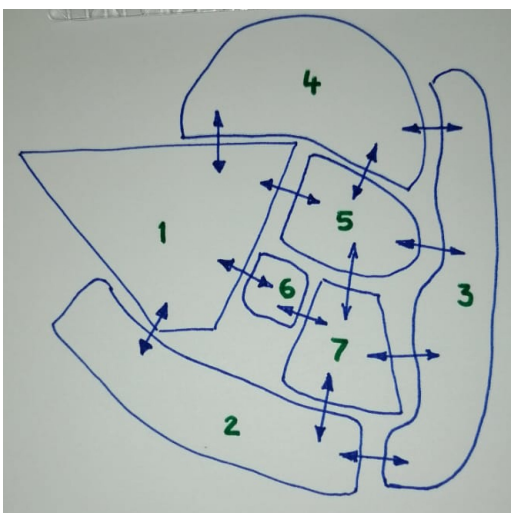
- Vários dos itens colocados acima podem ser calculados analiticamente. Realizem o cálculo e um estudo de simulação, e vejam se há concordância entre os resultados.
- É possível calcular um valor de n tal que o erro $|f_{\text{est}} - f|$ seja menor que 1%? Verificar com simulações.

6. De prédio em prédio

Uma instalação é constituída por vários prédios, como esquematizado na Figura. Existem conexões entre os prédios, que também estão marcadas. Um móvel se desloca pela instalação em tempo discreto, sabendo-se que a cada passo de tempo ele muda de prédio. As mudanças de prédio são aos prédios vizinhos, isto é, aos conectados, com igual probabilidade de ir para cada um deles. Por exemplo, se no tempo t o móvel está no prédio 5 (ver figura), a tempo $t+1$ ele estará nos prédios 1, 3, 4 ou 7, com igual probabilidade.

Iniciando no prédio 1, e considerando um tempo de estudo de 200, deseja-se conhecer as variáveis aleatórias T_i correspondentes ao tempo passado em cada prédio i, com $i = 1, \ldots, 7$.

Deseja-se também saber a quantidade de vezes que cada conexão é utilizada. Qual é a conexão com mais tráfego?



Prédios e conexões da instalação.

- Outra variável de interesse é o tempo de retorno. Seja R_i o tempo que demora o móvel entre duas visitas sucessivas ao prédio i. Como é a distribuição de R_i?
- Suponha que o móvel, toda vez que passa pelo prédio 1, carrega sua bateria. Quanto deve ser a autonomia da bateria para ter 99% de certeza de que o móvel conseguirá chegar ao tempo 200 sem nunca esvaziar totalmente a bateria?
- Qual é a probabilidade de achar o móvel, no tempo 200, em cada um dos 7 prédios?
- Se o móvel ficasse queto por ter esgotado a bateria, em qual prédio seria mais provável que isto acontecesse?
- Também poderia se estudar como mudam as variáveis de interesse se, por exemplo, a conexão entre o prédio 1 e o 6 está fechada.

Segunda parte:

- Cada grupo deve finalizar o projeto iniciado na primeira parte. Cada alun@ deve entregar, pelo e-disciplinas, os slides, os dados principais e os códigos (tudo num único arquivo zip), e realizar a segunda apresentação oral, com as mesmas regras da primeira (presença obrigatória, a pessoa a apresentar será sorteada).
- O que será avaliado é:
  - Ter corrigido e aprimorado a primeira parte (simulador e análise descritiva).
  - Ter idealizado, justificado, implementado e discutido um teste de hipótese referente a alguma/s variável/eis resultado do simulador. Deverá ser considerada um hipótese nula e uma hipótese alternativa. Dados deverão ser gerados em ambos casos com o simulador, e testados, avaliando-se erros do tipo I (rejeitar H0 sendo ela verdadeira) e do tipo II (não rejeitar H0 sendo Ha verdadeira). Deverá ser estudado o efeito do tamanho da amostra.
  - Realizar o solicitado corretamente será avaliado com nota 7. Pontos adicionais serão otorgados levando em consideração a clareza da apresentação, a qualidade dos gráficos, a qualidade da justificação do teste proposto, e a exatidão dos resultados. Se possível, se recomenda incluir um teste de aderência.
  - Permitam-se ser criativos nas propostas, mantendo elas razoáveis. Se forem divertidas, melhor.
- A semana em que se espera sejam as apresentações é a de 5 a 9 de dezembro. Os grupos que apresentarem fora dessa semana perderão pontualidade nessa prova.