LISTA 2: VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Exercício 1. Considere W a variável aleatória definida como o número de caras menos o número de coroas com três jogadas de uma moeda (o experimento é, assim, "lançar três vezes sucessivas uma moeda").

(a) Considerando a moeda honesta, liste os elementos do espaço amostral para três lançamentos da moeda e, para cada ponto amostral, atribua o valor w de W.

(b) Se a moeda não fosse honesta, o espaço amostral seria diferente e os valores atribuídos seriam diferentes?

(c) Considerando a moeda honesta, calcule $E(W)$ e $V(W)$.

(d) Assumindo que a moeda seja viciada, de modo que cara seja duas vezes mais provável de ocorrer do que coroa, determine a distribuição de probabilidade da variável aleatória W, sua função de distribuição acumulada, sua esperança e sua variância.

(e) Sobre o mesmo experimento, consideremos a variável aleatória Y definida como sendo 1 se o segundo lançamento for cara, e 0 se não. Qual é a distribuição de probabilidade de Y? E a f.d. acumulada? Calcular também esperança e variância.

(f) Verifique se o evento $X = k$ (com $k = 0$, 1 ou 2) é independente do evento $Y = \ell$ (com $\ell = 0$, 1 ou 2).

Exercício 2. Experimento: Três cartas são retiradas, sucessivamente, de um baralho sem reposição.

(a) Determine a distribuição de probabilidade f_X para a variável aleatória X, definida como o "número de espadas". Calcule também esperança $E(X)$ e variância $V(X)$.

(b) Determine a distribuição de probabilidade f_Y para a variável Y, definida como o "número de ouros". Calcule também $E(Y)$ e $V(Y)$.

(c) Determine a distribuição de probabilidade para a variável Z, definida como "número de espadas mais número de ouros". Calcule também $E(Z)$ e $V(Z)$.

(d) Verifique se o evento $X = k$ (com $k = 0$, 1 ou 2) é independente do evento $Y = \ell$ (com $\ell = 0$, 1 ou 2).

Exercício 3. Seja X a variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade

x	-3	6	9
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

(a) Calcule $E[(2X+1)^2]$, utilizando os cálculos de $E(X)$ e $E(X^2)$.

(b) Sejam $X_1 \sim X$ e $X_2 \sim X$. Calcule a distribuição de probabilidade de $Y = X_1 + X_2$ se X_1 e X_2 são independentes. Também $E(Y)$ e $V(Y)$.

(c) Calcule a distribuição de probabilidade de $Z = 2X$. Também $E(Z)$ e $V(Z)$.

Exercício 4. Sendo X uma variável aleatória seguindo uma distribuição Uniforme Discreta, com valores no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, determine:

(a) $P(X \geq 7)$.

(b) $P(3 < X \leq 7)$.

(c) $P(X \leq 7 | X \geq 6)$.

(d) $E(X)$ e $V(X)$.

(e) Os eventos $X \leq 7$ e $X \leq 4$ são independentes?

Exercício 5. Determine o valor de $c \in \mathbb{R}$, de modo que a função a seguir represente uma distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

$$f(x) = c \begin{pmatrix} 5 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4-x \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2.$$

Suponha $X_1 \sim X$ e $X_2 \sim X$, independentes. Calcular a distribuição de probabilidade de $Y = X_1 + X_2$. Calcular também $E(Y)$ e $V(Y)$. Calcular a distribuição de probabilidade de $Z = 2X$.

Exercício 6. Suponha que um conjunto de 116 celulares contenham 6 com defeitos e 110 que funcionem normalmente. Se X é o número de celulares defeituosos em uma amostra de 18 celulares escolhidos aleatoriamente do conjunto, determine a $P(X > 3)$.

Exercício 7. Demonstre as seguintes propriedades do valor esperado de uma variável aleatória X:

(a) Se $X = C$, onde C é uma constante, então $E(X) = C$.

(b) Se C é uma constante, então $E(CX) = CE(X)$.

Exercício 8. Demonstre as seguintes propriedades da variância de uma variável aleatória X:

(a) Se C for uma constante, então $V(X + C) = V(X)$.

(b) Se C for uma constante, então $V(CX) = C^2V(X)$.

Exercício 9. Um vendedor de cachorro quente trabalha na porta do estádio do Morumbi em dias de jogo. Ele pode deixar preparado 5, 6 ou 7 dúzias de sanduíches, que custam a ele $R\$5$ a dúzia. Sabe-se que a procura por cachorro quente (X), no seu ponto, é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

X	4	5	6	7
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Sabe-se que cada dúzia de sanduíche é vendida a $R\$12$ e os sanduíches não vendidos vão para um canil que paga $R\$2$ pela dúzia.

(a) Qual é o número N de dúzias de sanduíches que devem ser preparados de modo a maximizar o lucro médio do vendedor?

(b) Se o número de dúzias preparadas é fixado em N (o resultado de (a)), qual é a distribuição de probabilidade da variável aleatória Y definida como "lucro obtido no dia". Calcular $E(Y)$ e $V(Y)$.

(c) Nas condições do item (b), e assumindo que o que acontece cada dia é independente do que aconteceu no dia anterior, qual a distribuição de probabilidade da variável aleatória Z definida como "lucro médio obtido em dois dias seguidos"? E se os dias não fossem consecutivos? Calcular $E(Z)$ e $V(Z)$.

Exercício 10. O número de pedidos de reparo que uma construtora recebe por mês é uma variável aleatória. Em média, são recebidos 7,5 pedidos por mês. Determine a probabilidade de que em um mês qualquer, a construtora receba:

(a) Exatamente dois pedidos de reparo.

(b) No máximo 2 pedidos de reparo.

(c) No mínimo 8 pedidos de reparo.

Imagine agora que o período analizado é de 10 meses. A média de pedidos é 90 por ano. Calcular a probabilidade de que, num período qualquer, a construtora receba:

(a) Exatamente 20 pedidos de reparo.

(b) No máximo 20 pedidos de reparo.

(c) No mínimo 80 pedidos de reparo.

Comparar os resultados obtidos para cada duração do período de análise.

Exercício 11. Numa central telefônica, o número de chamadas recebidas segue uma distribuição Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

(a) Dez ou mais chamadas.

(b) Menos que nove chamadas.

(c) Entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.

Sabe-se que das chamadas recebidas 60% (em média) são propaganda política. Qual é a probabilidade que num minuto se tenha 10 ou mais chamadas, das quais todas são propaganda política?

Exercício 12. Se $X \sim Bin(n, p)$, sabendo-se que $\text{E}(X) = 12$ e $\text{Var}(X) = 3$, determinar

(a) n **(b)** p **(c)** $P(X < 12)$ **(d)** $P(X \geq 14)$.

(e) $\text{E}(Z)$ e $\text{Var}(Z)$, em que $Z = (X - 12)/\sqrt{13}$.

(f) $P(Y \geq 14/16)$, em que $Y = X/n$.

(g) $P(Y \geq 12/16)$, em que $Y = X/n$.

Exercício 13. Se X é uma v.a. com distribuição de Poisson, com média igual 2. Qual é a distribuição de probabilidade de $Y = 2X$? e de $Z = X^2$?

Exercício 14. Na checagem de bagagens de um aeroporto, sabe-se que 3% das pessoas revistadas tem objetos ilícitos em suas bagagens. Se as bagagens de uma pessoa contem objetos ilícitos, isto é detectado com a revisão com probabilidade 80%. Quando é detectada uma pessoa com objetos ilícitos, essa pessoa demora 10 minutos em liberar a fila. No caso contrário, o processo leva apenas 2 minutos.

Seja a variável aleatória T definida como "o tempo que demoram em passar todas as pessoas de uma fila de 10 pessoas". Qual é a função de distribuiçao acumulada de T? Explicar as hipôteses de independência necessárias para que o cálculo esteja certo.

Exercício 15. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a distribuição binomial e a Poisson e compare os resultados.

E se a probabilidade de ser defeituoso fosse 0,02 e o número de itens selecionados ao acaso fosse 100?