Computação Gráfica - Exercícios

Jorge Augusto Salgado Salhani

Outubro, 2023

1 Lista 2 - Transformações Geométricas

1.1 No que consiste um espaço homogêneo, e por que se utiliza coordenadas homogêneas para especificar transformações geométricas em computação gráfica?

Espaço homogêneo consiste em uma representação de um espaço para maiores dimensões. Deste modo, as matrizes relativas ao espaço original ganham novos elementos e conseguem descrever simultâneas transformações coplanares como multiplicações encadeadas

1.2 Quais as propriedades de uma transformação linear? O que diferencia as transformações lineares das transformações afins? Dê exemplos de cada uma.

Transformação linear é um caso particular de transformações afins. Para transformações lineares, temos válidas as seguintes propriedades, supondo $v, w \in V$ espaço vetorial

- $\alpha v \in V$, com α escalar
- $-v \in V$
- $v + w \in V$
- $v - v = 0 \in V$

Já para transformações afins, temos um deslocamento da origem, e portanto a formulação passa de $y = ax$ (linear) para $y = ax + b$ (afim).

Uma transformação linear

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Uma transformação afim

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Agora, no espaço homogêneo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.3 Quais as propriedades das transformações de um corpo rígido? Dê exemplos de transformações de corpo rígido

Para corpos rígidos, as transformações devem ser tais que preservam sua estrutura em termos de comprimento e ângulos, ou seja, não deformam o objeto. Como exemplo, temos as transformações de Rotação e Translação.

1.4 Mostre que

- A composição de rotações em torno de um mesmo eixo de rotação em $\mathbf{R}^2$ e em $\mathbf{R}^3$ é aditiva e comutativa, ou seja:

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1); \quad \theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi]$$

Sendo a transformação de rotação em θ dada por

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Assim

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

Sabendo que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, então

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\phi)} &= cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) \\ &= e^{i\theta}e^{i\phi} = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i[\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta] \end{aligned}$$

Logo é válido que

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$
$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta$$

E portanto

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Como gostaríamos.

Como também vale que

$$R(\theta_2)R(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

Vale a comutação $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1)$.

- A composição de translações em $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ é aditiva e comutativa, ou seja:

$$T(t_1)T(t_2) = T(t_1+t_2) = T(t_2)T(t_1); \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}^n, n = 2, 3$$

Sendo a transformação de translação em $\mathbf{R}^2$ dada por

$$T(t_1) = \begin{bmatrix} t_{1x} \\ t_{2x} \end{bmatrix}$$

podemos representá-la na forma homogênea

$$T(t_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1x} \\ 0 & 1 & t_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que

$$T(t_1)T(t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1x} \\ 0 & 1 & t_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2x} \\ 0 & 1 & t_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2x} + t_{1x} \\ 0 & 1 & t_{2y} + t_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que corresponde à matriz de coordenadas homogêneas $T(t_1 + t_2)$, como gostaríamos.

Como a multiplicação e soma dos elementos da multiplicação acima é comutativa, vale também que $T(t_1)T(t_2) = T(t_2)T(t_1)$.

- A composição de escalas em $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ é multiplicativa e comutativa, ou seja:

$$S(s_1)S(s_2) = S(s_1 s_2) = S(s_2)S(s_1); \quad s_1, s_2 \in \mathbf{R}^n, n = 2, 3$$

Sendo a matriz de escala dada por

$$S(s_1) = \begin{bmatrix} s_{1x} & 0 \\ 0 & s_{1y} \end{bmatrix}$$

então, temos em coordenadas homogêneas

$$S(s_1) = \begin{bmatrix} s_{1x} & 0 \\ 0 & s_{1y} \end{bmatrix}$$

Logo, a composição de escalas

$$S(s_1)S(s_2) = \begin{bmatrix} s_{1x} & 0 \\ 0 & s_{1y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{2x} & 0 \\ 0 & s_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1x}s_{2x} & 0 \\ 0 & s_{1y}s_{2y} \end{bmatrix}$$

Que equivale à afirmação $S(s_1)S(s_2) = S(s_1 s_2)$, como gostaríamos. Tal como para a translação, as multiplicações e somas acima são comutativas, então vale que $S(s_1)S(s_2) = S(s_2)S(s_1)$.

1.5 Mostre que uma escala uniforme seguida de uma rotação define um par de operações comutativas, mas que, no caso geral, escala e rotação não são operações comutativas.

Sabendo que uma escala uniforme é tal que $s_x = s_y = s$, assim $S^T(s) = [s \quad s]$. Vamos a principio tomar uma escala não uniforme e aplicar em conjunto a uma rotação em θ ($\theta \in [-\pi, +\pi]$) temos

$$R(\theta)S(s) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x(\cos\theta) & -s_y(\sin\theta) \\ s_x(\sin\theta) & s_y(\cos\theta) \end{bmatrix}$$

E a comutação $S(s)R(\theta)$ é dada por

$$S(s)R(\theta) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x(\cos\theta) & -s_x(\sin\theta) \\ s_y(\sin\theta) & s_y(\cos\theta) \end{bmatrix}$$

Modo geral, $R(\theta)S(s) \neq S(s)R(\theta)$. No entanto, se uniforme, $s_x = s_y$, a expressão reduz-se a

$$R(\theta)S(s) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s = s \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Que é comutativa $R(\theta)S(s) = S(s)R(\theta)$

1.6 Mostre que a matriz de transformação para uma reflexão em torno da reta $y = x$ é equivalente a uma reflexão em relação ao eico x seguida por uma rotação anti-horária de 90º.

Sendo a matriz de transformação para a reflexão em torno da reta $y = x$

$$R_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo também que a reflexão em relação ao eixo x é dada por

$$R_{x=0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
R(\theta = 90)R_{x=0} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = R_{y=x}
\end{aligned}
$$

Como gostariamos.

1.7 Suponha que um dado objeto 2D representado pelos pontos $\{P_1, P_2\}$

sofra a seguinte sequência de transformações. Dê a representação matricial da transformação composta

- rotação de 60º em torno do ponto $\{0, 1\}$
- escala uniforme de fator 3
- translação para o ponto $\{3, 1\}$

Para o primeiro passo, precisamos transladar o eixo de rotação de z dado por $\{0, 0\}$ para o ponto $\{0, 1\}$, seguido de rotação por $\theta = 60$, seguido de translação de volta para o ponto de origem. Logo

$$
TRT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

Para o segundo, a escala requer um procedimento similar. Primeiro transladamos a origem para um ponto fixo (pode ser os pontos $\{P_1, P_2\}$), executamos a escala, e reposicionamos de volta ao centro

$$
TST^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix}
$$

Por fim, transladamos o objeto para o ponto $\{3, 1\}$

$$
T = \begin{bmatrix} P_1 - 3 \\ P_2 - 1 \end{bmatrix}
$$

Logo, a sequencia de transformações é dada por

$$
\begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 - 3 \\ P_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}
$$

1.8 Dê a matriz que rotacione os objetos presentes em uma cena no sentido horário, para qualquer ângulo θ

1.9 Dê a matriz de rotação em termo de um eixo arbitrário P_1P_2 para eixos dados por

- $P_1 = \{2, 2, 2\}$ e $P_2 = \{5, 5, 5\}$
- $P_1 = \{3, 1, 4\}$ e $P_2 = \{5, -1, 2\}$

Primeiro, devemos definir o versor vinculado ao eixo P_1P_2

$$u = \frac{P_2 - P_1}{||P_2 - P_1||} = \frac{\{-3, -3, -3\}}{||\{-3, -3, -3\}||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$$

Movemos então o ponto P_1 para a origem

$$T^{-1}(-P_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, podemos projetar o versor u sobre o plano yz, de modo que $u' = 1/\sqrt{3}\{0, 1, 1\}$ e determinar o ângulo α que alinha u' com o eixo z.

Sendo válido que

$$u_z * u' = \cos\alpha \implies \frac{1}{\sqrt{3}}\{0, 0, 1\} * \{0, 1, 1\} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\alpha \implies \alpha = \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$$

Então a rotação $R_x(\alpha)$ que leva a componente yz do versor u ao eixo z é dada por

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E agora fazemos o mesmo com o ângulo que projeta a componente do plano xz sobre o eixo z.

Sendo $u'' = 1/\sqrt{3}\{1,0,1\}$ componente de u sobre o plano y, temos válido que

$$u_z * u'' = \cos\beta \implies \frac{1}{\sqrt{3}}\{0,0,1\} * \{1,0,1\} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\beta \implies \beta = \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$$

Então, a rotação $R_y(\beta)$ que leva a componente xz do versor u ao eixo z é dada por

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por fim, podemos aplicar a rotação desejada para o eixo z tal que

$$R(\theta) \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, juntando a translação inicial, rotação em α e β e θ, temos

$$R(\theta) = T(P_1)R_x^{-1}(\alpha)R_y^{-1}(\beta)R_z(\theta)R_x^{-1}(\beta)R_y^{-1}(\alpha)T^{-1}(P_1)$$

Onde $R_x^{-1}(\alpha) = R^T(\alpha)$ e $R_x^{-1}(\beta) = R^T(\beta)$ (pois constituem base ortonormal)