Computação Gráfica

Jorge Augusto Salgado Salhani
no. USP: 8927418

Abril, 2025

1 Lista 1

1. Qual a diferença entre Processamento de Imagens, Visão Computacional e Síntese de Imagens?

[SOLUÇÃO]

Processamento de imagens é o estudo e técnica de aplicar operações matemáticas sobre imagens de modo a melhorar ou realçar algum aspecto da imagem, como filtros de ruídos, destaque de bordas, entre outros.

Visão computacional é o estudo e técnica de extrair informações de uma imagem capturada, por exemplo reconhecimento de objetos em observados por uma câmera, profundidade, distancia relativa, entre outros

Já a Síntese de Imagens é o estudo e processo de criação de novas imagens por métodos indiretos, sem que tal imagem tenha sido observada, por exemplo na construção de uma imagem 3D via recortes 2D de tomografias

2. O que é e por qual motivo utilizar coordenada homogênea para especificar transformações geométricas em CG?

[SOLUÇÃO]

A coordenada homogênea é uma coordenada adicional no espaço de parâmetros que aumenta sua dimensionalidade e nos permite construir transformações geométricas que operem via multiplicação matricial. Isso é relevante porque hardwares de computação gráfica são otimizados para processar multiplicação matricial (construídos dessa forma pelo fato de podermos descrever operações sobre objetos como multiplicação de matrizes) e também porque é possível aglutinar diversas operações em uma mesma matriz a ser aplicada sobre as coordenadas de cada objeto

3. Apresente a matriz que representa uma transformação geométrica consistindo de uma translação seguida de uma rotação

[SOLUÇÃO]

Seja a matriz de translação

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de rotação

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E a matriz de translação seguida de rotação é dada por $R(\alpha, \beta, \gamma)T(t_x, t_y, t_z)$

4. Discuta como é feito o posicionamento e orientação de cada objeto em uma cena

[SOLUÇÃO]

Cada objeto possui uma representação no espaço local (minimundo), onde suas coordenadas são definidas relativas entre si. Para que estejam posicionados em relação a outros objetos na cena, cada objeto também deve ser definido relativo a um espaço global (mundo).

A matriz que orienta cada objeto na cena é chamada de Model. Cada objeto apresenta sua matriz Model exclusiva capaz de aplicar sobre ele translação, rotação, escala, ...

5. Apresente a matriz que representa uma transformação consistindo de uma translação $tx = M$ e $ty = D$ seguida de uma escala uniforme $s = 2$. Qual o impacto dessa transformação para objetos definidos em relação à origem e para objetos fora da origem?

[SOLUÇÃO]

Vamos assumir transformação 2D. Nesse caso, temos como matriz de translação

$$T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de escala

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a transformação desejada L é dada por

$$L = ST = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & M \\ 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2M \\ 0 & 2 & 2D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como a operação de escala é definida em relação à origem, aplicar T para, depois, aplicar S, para objetos fora da origem será aplicada não apenas o deslocamento de (M, D), mas também um deslocamento $(2M, 2D)$ proveniente da escala.

6. Verifique se $R(M+D)$ irá obter a mesma matriz de transformação que $R(M) \times R(D)$, onde R é transformação de rotação.

[SOLUÇÃO]

Vamos considerar uma rotação 2D. Nesse caso, temos

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim

$$\begin{aligned} R(M+D) &= \begin{bmatrix} \cos(M+D) & -\sin(M+D) & 0 \\ \sin(M+D) & \cos(M+D) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R(M)R(D) &= \begin{bmatrix} \cos M & -\sin M & 0 \\ \sin M & \cos M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos D & -\sin D & 0 \\ \sin D & \cos D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos M \cos D - \sin M \sin D & -\cos M \sin D - \sin M \cos D & 0 \\ \sin M \cos D + \cos M \sin D & -\sin M \sin D + \cos M \cos D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Assim

$$R(M)R(D) = \begin{bmatrix} \cos{(M+D)} & -\sin{(M+D)} & 0 \\ \sin{(M+D)} & \cos{(M+D)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo vale que $R(M+D) = R(M)R(D)$. Podemos interpretar como sendo uma rotação de um ângulo $M+D$ é equivalente à rotação com ângulo M seguida por uma rotação com ângulo D.

7. Forneça a matriz de transformação que realiza a transformação abaixo. Em seguida apresente as coordenadas do objeto para uma escala uniforme $s = M$.

[**SOLUÇÃO**]

Para a matriz de translação temos

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a escala, precisamos transladá-lo à origem, aplicar escala, e voltar à posição inicial. Dessa forma $T_1^{-1}ST_1$, onde T_1 é relativa à translação da posição final (objeto em cor preta) à origem.

$$T_1^{-1}ST_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & -120 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Considere a seguinte transformação linear, partindo do quadrado na origem

a) Expresse a transformação como o produto de três matrizes. Considere que o quadrado azul possui lados de comprimento 4

[**SOLUÇÃO**]

Pela imagem, o objeto original teve suas arestas aumentadas em 2x, translação da origem para $(5, -4.5)$ e rotação de 45. Como o objeto já encontra-se na origem, temos a ordem: escala $S(2)$, rotação $R(45)$, translação $T(5, -4.5)$

$$L = TRS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) O que precisa ser feito para obter uma matriz de transformação do quadrado azul para o vermelho?

[SOLUÇÃO]

Precisamos realizar as operações inversas. Nesse caso T^{-1}, $R(-45)$, $S(-2)$

$$L = SRT^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos -45 & -\sin -45 & 0 \\ \sin -45 & \cos -45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Forneça a sequência de transformações que leva o triângulo T1 ao triângulo T2 e dê a matriz resultante. É suficiente mostrar as matrizes que compõe a matriz resultante explicando o que é cada matriz e seus componentes.

[SOLUÇÃO]

Podemos realizar as operações: $R(45)$, rotação de 45 graus em relação ao eixo z, seguida de uma translação $T(t_x, t_y)$

Como a rotação $R(90)$ leva o ponto $P1$ para $(-2, 5)$ e a translação T deverá trazê-lo para $(4, 1)$, $(t_x, t_y) = (6, -4)$.

Logo

$$T(6, -4)R(90) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando para cada ponto, temos

$$P1' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P2' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P3' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10. Mostre que a ordem das transformações pode modificar a matriz de transformação resultante (problema da comutatividade). **OBS**. É suficiente fornecer um exemplo

[SOLUÇÃO]

Usando as matrizes do exercício anterior temos

$$T(6,-4)R(90) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(90)T(6,-4) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notamos que $T(6,-4)R(90) \neq R(90)T(6,-4)$

11. As transformações de rotação e escala são comutativas entre sim? Leve em conta tanto escalas uniformes quanto não uniformes.

[SOLUÇÃO]

Sejam as matrizes $S(s_x, s_y)$ e $R(\alpha)$

$$RS = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x\cos\alpha & -s_y\sin\alpha & 0 \\ s_x\sin\alpha & s_y\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SR = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x\cos\alpha & -s_y\sin\alpha & 0 \\ s_x\sin\alpha & s_y\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $SR = RS$, as matrizes de rotação e escala são comutativas

12. As transformações de transação e escala são comutativas entre si? E entre translação e rotação?

[SOLUÇÃO]

Sejam as matrizes $S(s_x, s_y)$ e $T(t_x, t_y)$

$$ST = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & s_x t_x \\ 0 & s_y & s_y t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & t_x \\ 0 & s_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $ST \neq TS$, as matrizes de translação e escala não são comutativas. Vale análogo para a rotação, onde $RT \neq TR$.

13. Dado um vértice/ponto posicionado em $x = D$ e $y = M$, apresente as matrizes de transformação para (1) espelhar esse vértice em relação ao eixo X e (2) espelhar esse vértice em relação ao eixo Y.

[SOLUÇÃO] Para espelhar em relação à x temos $S(1, -1)$ e para espelhar em relação ao eixo y, temos $S(-1, 1)$.

Assim

$$P'_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ -M \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ M \\ 1 \end{bmatrix}$$

14. Diferencie as matrizes de rotação 3D de acordo com o eixo de rotação. Por que a rotação 3D é mais complexa que a 2D?

[SOLUÇÃO]

Para 3D temos $R(\theta, \phi)$ (latitude / longitude) e não apenas $R(\theta)$, por isso ganha maior complexidade.

Para cada eixo, temos as matrizes $R_x(\alpha)$, $R_y(\beta)$, $R_z(\gamma)$ conforme exercício 3.

15. Uma rotação 3D em torno do eixo $A = x, y, z$ mantém ou altera o valor da coordenada A dos vértices do objeto? Por que isso ocorre?

[SOLUÇÃO]

Como uma rotação ao longo de um eixo mantém fixo valores do mesmo, temos que R_x inaltera x e modifica (y, z); R_y inaltera y e modifica (x, z); R_z inaltera z e modifica (x, y)

16. Explique o mapeamento 2D de uma imagem de textura para um objeto 3D. Descreva ao menos três tipos de mapeamento.

[SOLUÇÃO]

Sabemos que objetos são compostos por vértices que, quando conexos, definem uma coleção de faces. Podemos, para cada face, vincular uma imagem de modo que o objeto seja envolvido por ela.

Se considerarmos que um objeto se apresenta em um arranjo 3D (x, y, z) e uma textura como sendo é um arranjo 2D de tamanho $u \times v$, podemos mapear cada ponto $(u, v) \rightarrow (x, y, z)$ de algumas formas

Mapeamento planar: definimos um eixo de projeção e a face (u, v) é mapeada sobre uma das faces. Para faces perpendiculares ao plano de projeção, temos distorções

Mapeamento cúbico: definimos regiões de (u, v) que serão projetadas em cada face do objeto considerando cada face uma das faces de um cubo que envolve o objeto. Para fronteiras entre planos pode haver distorções.

Mapeamento esférico: cada ponto (u, v) é mapeado para uma região de uma esfera que envolve o objeto. Também gera distorções

Mapeamento em duas fases: modelos mais complexos podem ser pensados como contendo duas superfícies. Uma intermediária e a superfície do objeto de fato. Neste mapeamento, escolhemos uma superfície intermediária e realizamos mapeamento esférico ou cúbico, por exemplo, sobre ela. Feito isso, na direção perpendicular à superfície de fato do objeto encontramos a coordenada do plano intermediário que contém a textura relativa à face em análise

17. Explique a relação entre pixel e texel

[SOLUÇÃO]

Um pixel é a menor unidade de representação em um monitor. Já um texel é a menor unidade de uma malha de textura (u, v). Neste sentido, um texel pode ser mapeado a vários pixels (magnificação de texel, pois texels precisam ser reduzidos para que exista uma relação 1:1) ou um pixel poder ter como base múltiplos texels (minificação de texel, pois texels precisam ser aglutinados para que exista uma relação 1:1)

18. Na parametrização de texturas, explique a diferença entre os parâmetros REPEAT e CLAMP.

Caso uma textura não esteja normalizada no espaço (u, v), ou seja, existem regiões de u, v que não apresentam correspondência de textura, devemos estender a textura original para todo o espaço u, v. Uma das formas utiliza do REPEAT, que repete a textura fora do intervalo original. MIRROR_REPEAT é análogo, mas apresenta efeito de espelhamento da textura ao invés de somente repetí-la; O CLAMP, por sua vez, fixa a textura apenas ao espaço em que está definida e interpola a região restante com repetição das linhas e colunas das bordas (CLAMP_TO_EDGE) ou utilizando uma cor sólida (CLAMP_TO_BORDER)

[SOLUÇÃO]

19. Durante o mapeamento de pixels e texels, qual a diferença entre as técnicas LINEAR e NEAREST?

[SOLUÇÃO]

Conforme mencionado no exercício 17, pixels e texels podem não apresentar correspondência 1:1, por isso escolhemos, para um determinado pixel, qual o valor do texel correspondente. A técnica LINEAR interpola o valor dos quatro texels mais próximos (causa efeito blur). Já a técnica NEAREST escolhe o valor de texel mais próximo da coordenada da textura (causa efeito de destaque de bordas)

20. As matrizes Model, View, Projection utilizam transformações geométricas 3D para compor as coordenadas de mundo, visão e clip. Esse processamento também é chamado de pipeline do Vieweing 3D. Escreva a função de cada etapa do pipeline.

[SOLUÇÃO]

Matriz **Model** é responsável pelas operações geométricas básicas de cada objeto e de transpor as coordenadas do objeto para coordenadas de mundo (relativo a outros objetos na cena). A próxima etapa refere-se à Matriz **View**, que representa as coordenadas dos objetos no mundo em relação às coordenadas da câmera via mudança de base.

Com objetos no espaço de visão (view space) precisamos projetá-los sobre um plano para definir o que será exibido na tela. A Matriz **Projection** é responsável por delimitar o espaço que será exibido (volume de frustum) e normalizar o volume de visão para o espaço NDC (Normalized Device Coordinates - **Clip Space**) para que seja, em sequência, exibido no monitor via transformação de **Viewport**.

21. Apresente a matriz Model para transladar a pirâmide mais ao "fundo" no espaço de mundo. Uma vez posicionada, quais são suas novas coordenadas?

[SOLUÇÃO]

Para transladar a pirâmide, a matriz é dada por

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como queremos transladá-la ao fundo, no sistema de coordenadas da figura, temos $T(0, 0, -1)$.

22. Quais são os três parâmetros necessários para definir uma câmera?

[SOLUÇÃO]

Definimos uma câmera via coordenadas de sua posição (P_{pos}), seu ponto focal (P_f) e sua orientação relativa à cena (P_{up}, vetor normal, indicativo da direção de cima da câmera). Assim temos

$$\begin{aligned} \vec{P}_{pos} &= (p_x, p_i, p_z) \\ \vec{P}_f &= (f_x, f_y, f_z) \\ \vec{P}_{up} &= (u_x, u_y, y_z) \end{aligned}$$

23. Explique como calcular os vetores ortonormais do sistema de coordenadas da câmera utilizando os parâmetros mencionados no exercício anterior.

[SOLUÇÃO]

Os vetores ortonormais do sistema de coordenadas da câmera são Z_c, como eixo z da câmera (direção contrária para onde a câmera aponta); X_c, como eixo x da câmera; Y_c, como eixo y da câmera

Como temos o ponto focal sobre o eixo z, sabemos que

$$\vec{Z}_c = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_{pos}}{|\vec{p}_f - \vec{p}_{pos}|}$$

Como também temos o vetor $\vec{p}_{up}$ que, por definição, é perpendicular à Z_c e X_c, então

$$\vec{X}_c = \frac{\vec{p}_{up} \times \vec{Z}_c}{|\vec{p}_{up} \times \vec{Z}_c|}$$

E por fim, como ambas coordenadas estão normalizadas e sabendo que X_c, Y_c e Z_c são perpendiculares, vale que

$$\vec{Y}_c = \vec{Z}_c \times \vec{X}_c$$

24. Apresente uma matriz View, com parâmetros definidos por você, para a pirâmide do exercício 21. Dê as coordenadas da pirâmide no espaço de visão.

[SOLUÇÃO]

Para o espaço **View**, vamos supor que a câmera apresente as seguintes coordenadas

$$\begin{aligned} \vec{p}_{pos} &= (1, 0, 1) \\ \vec{p}_f &= (0, 0, 0) \\ \vec{p}_{up} &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

Primeiro, precisamos realizar a mudança de base da origem do mundo (0,0,0) para a posição da câmera e, para isso, precisamos definir a base $\{X_c, Y_c, Z_c\}$

$$Z_c = \frac{(-1, 0, -1)}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, -1)$$

Para $X_c = p_{up} \times Z_c$, sabemos do produto cartesiano

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \hat{i}(-1) + \hat{j}(0) + \hat{k}(1) = (-1, 0, 1)$$

$$X_c = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

E para $Y_c = X_c \times Z_c$

$$Y_c = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \hat{i}(0) = \hat{j}(2) + \hat{k}(0) = (0, 2, 0)$$

$$Y_c = \frac{(0,2,0)}{\sqrt{2^2}} = (0,1,0)$$

Assim temos a base ortonormal sobre a câmera. Precisamos agora aplicar a mudança de base do sistema de mundo para o sistema da câmera. Nossa matriz de mudança de base é dada por

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ X_c & Y_c & Z_c \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Sendo que

$$[\vec{v}]_{B_1} = P^{-1}\vec{v}_{B_0} \implies [\vec{v}]_{B_1} = P^T\vec{v}_{B_0}$$

caso P ortonormal, temos

$$P^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

E portanto, para os vetores $(0,1,0), (-0.5,0,0.5), (0.5,0,0.5)$

$$v_0' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E assim por diante para os demais vértices

25. Considere um objeto 3D dado pelos vértices

$$P_1 = (-1,-1,+1)$$
$$P_2 = (+1,-1,-1)$$
$$P_3 = (-1,+1,-1)$$

no sistema de coordenadas do mundo. Dados os parâmetros de câmera abaixo, dê as coordenadas dos vértices no sistema de coordenadas da câmera.

$$P_{pos} = (4,2,0)$$
$$P_f = (0,0,0)$$
$$P_{up} = (0,-1,0)$$

[**SOLUÇÃO**]

Similar ao exercício anterior, conhecendo as coordenadas da câmera precisamos definir a base ortonormal sobre ela para que seja possível aplicar sobre os vértices no sistema mundo a mudança de base para as coordenadas de câmera.

$$Z_c = \frac{(-4,-2,0)}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}} = \frac{(-4,-2,0)}{\sqrt{20}}$$

$$X_c = p_{up} \times Z_c = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \hat{i}(0) + \hat{j}(0) + \hat{k}(-4) = (0,0,-4)$$
$$X_c = \frac{(0,0,-4)}{\sqrt{(-4)^2}} = (0,0,-1)$$

$$Y_c = Z_c \times X_c = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \hat{i}(0) + \hat{j}(4) + \hat{k}(0) = (0,4,0)$$
$$Y_c = \frac{(0,4,0)}{\sqrt{(4)^2}} = (0,1,0)$$

Logo, nossa matriz de mudança de base é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4/\sqrt{20} \\ 0 & 1 & -2\sqrt{20} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E sobre cada vértice, para determinarmos suas posições em relação à nova base, vale que

$$[\vec{v}]_{B_1} = P^{-1}\vec{v}_{B_0} \implies [\vec{v}]_{B_1} = P^T\vec{v}_{B_0}$$

Onde usamos que a matriz P é ortonormal. Logo

$$v_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/\sqrt{20} & -2\sqrt{20} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 6/\sqrt{20} \end{bmatrix}$$
$$v_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/\sqrt{20} & -2\sqrt{20} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2/\sqrt{20} \end{bmatrix}$$
$$v_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/\sqrt{20} & -2\sqrt{20} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/\sqrt{20} \end{bmatrix}$$

26. Pesquise e descreva brevemente o que são as transformações de câmera *pitch*, *yaw*, *roll*.

[SOLUÇÃO]

São termos relativos ao controle de eixos de rotação de um objeto. Assim como mencionado no exercício 3, onde **yaw** é relativo a $R_z(\alpha)$; **pitch** é relativo a $R_y(\beta)$; e **roll**, à $R_y(\gamma)$.

27. Apresente uma matriz Projection, com parâmetros definidos por você, para a pirâmide do exercício 21. Dê as coordenadas da pirâmide no espaço clip.

[SOLUÇÃO]

Vamos considerar a câmera na posição definida no exercício 24 e o plano Near pelo vetor normal $(0, 0, -1)$. Dessa forma precisamos da matriz que, dada posição (x, y, z) de um vértice, o projeta sobre o plano sobre $(0, 0, -1)$.

Como o vértice original é definido em relação à posição da câmera e também vale para o vértice projetado, temos que para θ ângulo entre o eixo $-z$ e o vértice,

$$\tan\theta = \frac{x}{-z} = \frac{h_x}{d}$$

onde h_x representa a altura que o vértice foi projetado sobre o plano Near. Logo $h_x = (x/d)/-z$ que, normalizado por $w = -z/d$, temos $h_x = x/w$. Como h_x é a coordenada projetada do vértice, temos $x' = x/w$
A relação vale para as demais coordenadas de modo que

$$P_{proj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, os vértices (0,1,0), $1/\sqrt{2}(1, 0, 0)$ e $1/\sqrt{2}(0, 0, 1)$ temos

$$v_1 = P_{proj}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = (0, 1, 0)$$
$$v_2 = P_{proj}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

28. Qual o objetivo dos parâmetros Near e Far na matriz de projeção?

[SOLUÇÃO]

Os parâmetros Near e Far sã relativos aos planos de corte do volume de frustum, onde definimos quais são os objetos contidos na cena que serão exibidos em tela (internos ao frustum) no sentido horizontal e vertical (lados do tronco de pirâmide) quanto em relação à sua profundidade em relação à posição da câmera (base e topo do tronco de pirâmide). A base e topo são os planos Far e Near, respectivamente

29. Dê três exemplos de uso das projeções paralela, ortogonal e perspectiva.

[SOLUÇÃO]

Projeção paralela e ortogonal são análogas, preservando ângulos e distâncias relativas em um mesmo objeto, por isso é uma boa representação para uso de desenhos técnicos, com uso em engenharia, arquitetura, entre outros.

Projeção perspectiva, por outro lado, pressupõe um ponto de fuga que não no infinito (que ocorre na projeção paralela). Dessa forma, linhas paralelas podem convergir ao ponto de fuga e, portanto, são distorcidas as distâncias relativas e ângulos em um mesmo objeto. Apesar disso, a representação dos objetos é mais realística.

30. O que é um frustrum na projeção perspectiva? Comente as três etapas para transformá-la em um NDC (Espaço normalizado).

[SOLUÇÃO]

O frustum é um volume de visão que envolve todos os objetos que serão exibidos na cena.

Primeiro definimos um centro de projeção, dado pela posição da câmera. Entre a câmera e os objetos definimos um plano de projeção e um plano de fundo, que serão os planos Near e Far do frustum. Em seguida, para cada objeto, determinamos as posições (x', y', z') de cada vértice, onde x', y' são coordenadas projetadas e z', distância do vértice ao plano Near

Em seguida, como o espaço NDC é normalizado, com centro do cubo como origem do sistema de coordenadas, precisamos transladar o frustum (e os objetos nele contidos) para que o centro (0,0,0); aplicar escala para que o apresente tamanho 2 de lados (vértices -1 a 1); aplicar reflexão em relação à coordenada z, pois por definição, o plano Near deve ter normal positiva definida pelo vetor $(0, 0, 0) - (-1, -1, 0)$.

31. Diferencie clipping de culling.

[SOLUÇÃO]

Culling representa a remoção de objetos completos que não estarão presentes na exibição da cena por estarem ocultos ou fora do campo de visão. São removidos no início da pipeline gráfica, pois não é necessário realizar nenhuma operação sobre seus vértices

Clipping, por outro lado, ocorre em estágio já avançado da pipeline gráfica, onde uma vez definido nosso frustum de visão, sabemos quais partes de cada objeto deverá ser exibida. Com isso, partes não contidas no frustum podem ser recortadas da cena por meio de técnicas diversas, tais como clipping de pontos, linhas ou polígonos