Cálculo Numérico - Estudos

Jorge Augusto Salgado Salhani

Março, 2024

1 Sistemas Lineares - Métodos Diretos

Seja uma transformação linear L, entendemos u como um vetor de "causas" e f como um vetor de "efeitos" de modo que

$$Lu = f$$

Conhecendo a transformação L e a causa u, sabemos o efeito. Mas também podemos, conhecendo o efeito f, determinar a causa "u"

Considerando A matriz $n \times n$, A é não-singular se

- A possui inversa A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- $det(A) \neq 0$
- $rank(A) = n$ (número máximo de colunas ou linhas LI)
- $Ker(A) = 0$ (única solução de $Ax = 0$ é $x = 0$)

e caso A não-singular, vale que x é solução única de modo que $x = A^{-1}b$

1.1 Sistemas LU

Seja A tal que possa ser escrito $A = LU$, onde L matriz triangular inferior e U matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = LU$$

Neste caso, teremos que

$$Ax = b \implies LUx = b$$
$$Ux = y$$
$$Ly = b$$

Que facilita, já que a resolução de sistemas triangulares pode ser feita por substituição direta

1.2 Substituição progressiva

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$l_{11}x_1 = b_1 \implies x_1 = b_1/l_{11}$$
$$l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2 \implies x_2 = (b_2 - l_{21}x_1)/l_{22}$$
$$l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = b_3 \implies x_3 = (b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2)/l_{33}$$

E para o termo geral, temos

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j\right]$$

1.3 Substituição regressiva

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ 0 & u_{22} & u_{32} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$u_{33}x_3 = b_3 \implies x_3 = b_3/u_{33}$$
$$u_{22}x_2 + u_{32}x_3 = b_2 \implies x_2 = (b_2 - u_{32}x_3)/u_{22}$$
$$u_{11}x_1 + u_{21}x_2 + u_{31}x_3 = b_1 \implies x_1 = (b_1 - u_{31}x_3 - u_{21}x_2)/u_{11}$$

Com termo geral

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=i}^{n} u_{ij}x_j\right]$$

1.4 Decomposição LU

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = LU$$