Processos Estocásticos

Jorge Augusto Salgado Salhani
no. USP: 8927418

Abril, 2025

1 Lista 2

1. Uma cadeia de Markov de três estados $X_n \in [0, 1, 2]$, possui a seguinte matriz de probabilidade de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Determine $Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}$, sabendo que $Pr\{X_0 = 0\} = p_0 = 0.3$, $Pr\{X_0 = 1\} = p_1 = 0.4$ e $Pr\{X_0 = 2\} = p_2 = 0.3$

[SOLUÇÃO]

Por definição uma cadeia de Markov apresenta probabilidades dadas por

$$Pr\{X_{n+1} = x | X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n\} = P\{X_{n+1} = x | X_n = x_n\}$$

Assim, conhecendo a matriz de transição P temos

$$Pr\{X_1 = 0 | X_0 = 0\} = a_{00} = 0.1$$

$$Pr\{X_1 = 1 | X_0 = 0\} = a_{01} = 0.2$$

$$Pr\{X_1 = 2 | X_0 = 0\} = a_{02} = 0.7$$

$$Pr\{X_1 = 0 | X_0 = 1\} = a_{10} = 0.9$$

$$...$$

$$Pr\{X_1 = l | X_0 = k\} = a_{kl}$$

Assim, para um caminho definido $s \equiv X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2$ temos

$$
\begin{aligned}
&Pr\{X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 0\} = Pr\{X_2 = 2|X_1 = 1, X_0 = 0\}Pr\{X_1 = 1, X_0 = 0\}\\
&\implies Pr\{s\} = Pr\{X_2 = 2|X_1 = 1\}Pr\{X_1 = 1, X_0 = 0\}\\
&\implies Pr\{s\} = a_{12}Pr\{X_1 = 1, X_0 = 0\} = a_{12}Pr\{X_1 = 1|X_0 = 0\}Pr\{X_0 = 0\}\\
&\implies Pr\{s\} = a_{12} \times a_{01} \times p_0
\end{aligned}
$$

Logo $Pr\{s\} = a_{12} \times a_{01} \times p_0 = 0 \times 0.2 \times 0.3 = 0$

2. Uma cadeia de Markov de três estados $X_n \in [0, 1, 2]$ possui a seguinte matriz de probabilidade de transição

$$
P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}
$$

Calcule

(a) $Pr\{X_2 = 1, X_3 = 1|X_1 = 0\}$

[SOLUÇÃO]

Por definição de probabilidade condicional, temos válido que

$$
\begin{aligned}
Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_n = i_n\} =& \\
&Pr\{X_n = i_n|X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\}\times \\
&Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\}
\end{aligned}
$$

Também por definição de cadeia de Markov, temos válido que

$$
\begin{aligned}
Pr\{X_n = i_n|X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\} &= Pr\{X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}\}\\
&\equiv P_{i_{n-1},i_n}
\end{aligned}
$$

Logo, temos que

$$
\begin{aligned}
Pr\{X_0 = i_0, ..., X_n = i_n\} &= P_{i_{n-1},i_n} \times Pr\{X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\}\\
&= P_{i_{n-1},i_n} \times Pr\{X_{n-1} = i_{n-1}|X_0 = i_0, ..., X_{n-2} = i_{n-2}\} \times Pr\{X_0 = i_0, ..., X_{n-2} = i_{n-2}\}\\
&= P_{i_{n-1},i_n} \times Pr\{X_{n-1} = i_{n-1}|X_{n-2} = i_{n-2}\} \times Pr\{X_0 = i_0, ..., X_{n-2} = i_{n-2}\}\\
&= P_{i_{n-1},i_n} \times P_{i_{n-2},i_{n-1}} \times Pr\{X_0 = i_0, ..., X_{n-2} = i_{n-2}\}\\
&...\\
&= p_{i_0} \times P_{i_0,i_1} \times ... \times P_{i_{n-2},i_{n-1}} \times P_{i_{n-1},i_n}
\end{aligned}
$$

Por fim, denotando $P_{i,j} \equiv P_{i\to j}$, nosso resultado desejado pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
Pr\{X_2 = 1, X_3 = 1|X_0 = 0\} = \frac{Pr\{X_2 = 1, X_3 = 1, X_0 = 0\}}{Pr\{X_0 = 0\}} &= \frac{p_0 P_{0\to 1} P_{1\to 1}}{p_0} \\
&= P_{0\to 1} P_{1\to 1} \\
&= 0.2 \times 0.6 = 0.12
\end{aligned}$$

(b) $Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 0\}$

[SOLUÇÃO]

Usando resultado do item anterior, temos

$$\begin{aligned}
Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 0\} = \frac{Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_0 = 0\}}{Pr\{X_0 = 0\}} &= \frac{p_0 P_{0\to 1} P_{1\to 1}}{p_0} \\
&= 0.2 \times 0.6 = 0.12
\end{aligned}$$

3. Uma cadeia de Markov de três estados $X_n \in [0, 1, 2]$ possui a seguinte matriz de probabilidade de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sabendo que o processo começa em $X_0 = 1$, determine a provabilidade $Pr\{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2\}$.

[SOLUÇÃO]

Pelos itens anteriores

$$\begin{aligned}
Pr\{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2\} &= p_1 P_{1\to 0} P_{0\to 2} \\
&= 1 \times 0.3 \times 0.1 \\
&= 0.03
\end{aligned}$$

4. Uma cadeia de Markov de três estados $X_n \in [0, 1, 2]$ possui a seguinte matriz de probabilidade de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

A distribuição inicial é dada por $p_0 = 0.5$ e $p_1 = 0.5$. Calcule as probabilidades

a) $Pr\{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0\}$

[SOLUÇÃO]

Dos resultados anteriores

$$\begin{aligned} Pr\{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0\} &= p_1 P_{1\to1} P_{1\to0} \\ &= 0.5 \times 0.1 \times 0.5 \\ &= 0.025 \end{aligned}$$

b) $Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\}$

[SOLUÇÃO]

Neste cenário, não temos o primeiro estado. Logo, por definição

$$\begin{aligned} Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\} &= Pr\{X_3 = 0 | X_1 = 1, X_2 = 1\} Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1\} \\ &= Pr\{X_3 = 0 | X_2 = 1\} Pr\{X_2 = 1 | X_1 = 1\} Pr\{X_1 = 1\} \\ &= P_{1\to0} P_{1\to1} Pr\{X_1 = 1\} \\ &= 0.5 \times 0.1 \times Pr\{X_1 = 1\} = 0.05 \times Pr\{X_1 = 1\} \end{aligned}$$

Mas $Pr\{X_1 = 1\}$ é tal que depende de $Pr\{X_0 = i_0\}$. Pela lei da probabilidade total, sabemos que

$$\begin{aligned} Pr\{X_1 = 1\} &= \sum_k Pr\{X_1 = 1 | X_0 = k\} Pr\{X_0 = k\} = \sum_{k\in[0,1,2]} P_{k\to1} p_k \\ &= P_{0\to1} p_0 + P_{1\to1} p_1 + P_{2\to1} p_2 \\ &= 0.2 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 + 0.2 \times 0 \\ &= 0.1 + 0.05 = 0.15 \end{aligned}$$

Onde sabemos que, como precisamos estar em algum estado em $t = 0$, $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, e como $p_0 = 0.5 = p_1$, então $p_2 = 0$

Por fim

$$Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\} = 0.05 \times 0.15 = 0.0075$$

5. Resolver os problemas 1.1 a 1.4 do capítulo 3 do livro texto (Taylor & Karlin)

5.1 Uma cadeia de Markov $X_0, X_1, ...$ nos estados $0, 1, 2$ tem matriz de transição de probabilidade

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}$$

e distribuição inicial $p_0 = Pr\{X_0 = 0\} = 0.3$, $p_1 = Pr\{X_0 = 1\} = 0.4$, $p_2 = Pr\{X_0 = 2\} = 0.3$. Determinar $Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}$.

[SOLUÇÃO]

Pela probabilidade conjunta temos

$$Pr\{X,Y\} = Pr\{X|Y\}Pr\{Y\}$$

e como também pela definição dos elementos da matriz de probabilidade de transição $P_{i,j} = Pr\{X_{n+1} = j|X_n = i\}$, temos

$$\begin{aligned}
Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\} &= Pr\{X_2 = 2|X_0 = 0, X_1 = 1\}Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1\} \\
&= Pr\{X_2 = 2|X_1 = 1\}Pr\{X_1 = 1|X_0 = 0\}Pr\{X_0 = 0\} \\
&= P_{1,2}P_{0,1}p_0 \\
&= 0 \times 0.2 \times 0.3 = 0
\end{aligned}$$

5.2 Uma cadeia de Markov $X_0, X_1, X_2, ...$ tem a matriz de probabilidade de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Determine as probabilidades condicionais $Pr\{X_2 = 1, X_3 = 1|X_1 = 0\}$ e $Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 0\}$

[SOLUÇÃO]

Por definição, temos

$$Pr\{X,Y\} = Pr\{X|Y\}Pr\{Y\}$$

assim

$$\begin{aligned}
Pr\{X_2 = 1, X_3 = 1|X_1 = 0\} &= \frac{Pr\{X_2 = 1, X_3 = 1, X_1 = 0\}}{Pr\{X_1 = 0\}} \\
&= Pr\{X_3 = 1|X_2 = 1, X_1 = 0\}Pr\{X_2 = 1, X_1 = 0\} \\
&= Pr\{X_3 = 1|X_2 = 1\}Pr\{X_2 = 1|X_1 = 0\}Pr\{X_1 = 0\} \\
&= P_{1,1}P_{0,1}p_0 = P_{1,1}P_{0,1} \\
&= 0.6 \times 0.2 = 0.012
\end{aligned}$$

E também, de modo análogo

$$\begin{aligned}
Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 0\} &= \frac{Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_0 = 0\}}{Pr\{X_0 = 0\}} \\
&= Pr\{X_2 = 1|X_1 = 1\}Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1\} \\
&= P_{1,1}P_{0,1}p_0 = P_{1,1}P_{0,1} \\
&= 0.6 \times 0.2 = 0.012
\end{aligned}$$

6. Uma partícula se movimenta entre os estados 0,1,2 de acordo com o processo de Markov cuja matriz de probabilidade de transição é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja X_n a posição da partícula no n-ésimo movimento. Calcule $Pr\{X_n = 0|X_0 = 0\}$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

[SOLUÇÃO]

Pela propriedade de cadeias de Markov, a probabilidade de atingir o estado j após n passos é dado por $P_{ij}^n = Pr\{X_n = j|X_0 = i\}$.

Para $n = 0$, $Pr\{X_0 = 0|X_0 = 0\} = 1$.

Para $n = 1$, $Pr\{X_1 = 0|X_0 = 0\} = P_{00} = 0$.

Para $n = 2$,

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Logo $P_{00}^2 = 1/2$

Para $n = 3$,

$$P^3 = P^2P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Logo $P_{00}^3 = 1/4$

Para $n = 4$

$$P^4 = P^3P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 & 5/16 & 5/16 \\ 5/16 & 3/8 & 5/16 \\ 5/16 & 5/16 & 3/8 \end{bmatrix}$$

Logo $P_{00}^4 = 3/8$

7. Três moedas são lançadas. Suponha que X_1 moedas tenham saído como cara. Essas moedas que saíram com cara no primeiro lançamento são então selecionadas e lançadas novamente. Seja X_2 o número de coroas total, incluindo as do primeiro lançamento. No terceiro lançamento, todas as coroas são selecionadas e lançadas novamente. Seja X_3 o número de caras, incluindo as que sobraram dos lançamentos anteriores. O processo continua da seguinte forma: conte as caras, lance as caras, conte as coroas, lance as coroas, conte as caras, lance as caras, e assim por diante. Escreva a matriz de transição de probabilidade para o processo de Markov $\{X_n\}$ considerando que $X_0 = 3$

[SOLUÇÃO]

Seja X_n número de moedas como cara no passo n, sabemos que $X_n \sim Binom(N, p)$, com p probabilidade de obtenção de cara para N moedas lançadas. Como N representa o número de coroas do passo $n-1$, dado por X_{n-1}, então temos que $N = X_{n-1}$ e que, portanto $X_n \sim Binom(X_{n-1}, p)$. Sendo p probabilidade de obter cara e q, coroa, temos

$$
\begin{aligned}
Pr\{X_0 = 3\} &= 1 \\
Pr\{X_1 = k | X_0 = 3\} &= \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k} \\
&= \binom{3}{k} p^3 \quad k = 0, 1, 2, 3 \\
Pr\{X_2 = l | X_1 = k, X_0 = 3\} &= Pr\{X_2 = l | X_1 = k\} \\
&= \binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} \\
&= \binom{k}{l} q^k \quad l \leq k = 1, 2, 3 \\
Pr\{X_3 = m | X_2 = l, X_k, X_0 = 3\} &= Pr\{X_3 = m | X_2 = l\} \\
&= \binom{l}{m} p^m (1-p)^{l-m} \\
&= \binom{l}{m} p^l \quad m \leq l = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

Logo, considerando $p = q = 1/2$ e $Pr\{X_k = j | X_l = i\} \equiv P_{i,j}$, para $3 \to k$, $k = 0, 1, 2, 3$

$$
\begin{aligned}
P_{3,0} &= \binom{3}{0} (1/2)^3 = (1/2)^3 = 1/8 \\
P_{3,1} &= \binom{3}{1} (1/2)^3 = 3(1/2)^3 = 3/8 \\
P_{3,2} &= \binom{3}{2} (1/2)^3 = 3(1/2)^3 = 3/8 \\
P_{3,3} &= \binom{3}{3} (1/2)^3 = (1/2)^3 = 3/8
\end{aligned}
$$

Para $2 \to l$, $l = 0, 1, 2$

$$
\begin{aligned}
P_{2,0} &= \binom{2}{0} (1/2)^2 = 1/4 \\
P_{2,1} &= \binom{2}{1} (1/2)^2 = 2(1/2)^2 = 1/2 \\
P_{2,2} &= \binom{2}{2} (1/2)^2 = 1/4
\end{aligned}
$$

Para $1 \to m$, $m = 0, 1$

$$P_{1,0} = \binom{1}{0}(1/2)^1 = 1/2$$
$$P_{1,1} = \binom{1}{1}(1/2)^1 = 1/2$$

Para $0 \to 0$, a probabilidade é fixa $P_{0,0} = 1$

Assim a matriz de transição de probabilidade é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

8. Uma urna contém uma bola vermelha e uma bola verde. Uma bola é removida aleatoriamente e trocada por uma bola da outra cor. Este processo é repetido de tal modo que sempre haja exatamente duas bolas na urna. Seja X_n o número de bolas vermelhas na urna na n-ésima retirada, com $X_0 = 1$. Determine a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov $\{X_n\}$.

[**SOLUÇÃO**]

Supondo que ambas as bolas tenham mesma probabilidade p de ser removida e substituída e por serem duas bolas sempre, $p = 1/2$. Também por esse motivo, $X_n \in \{0, 1, 2\}$. Assim, sabendo que pela probabilidade conjunta temos

$$Pr\{X, Y\} = Pr\{X|Y\}Pr\{Y\}$$

Logo

$$Pr\{X_1 = 0|X_0 = 1\} = Pr\{X_0 = 1, X_1 = 0\} = 1/2 \qquad \text{troca vermelha}$$
$$Pr\{X_1 = 1|X_0 = 1\} = Pr\{X_0 = 1, X_1 = 1\} = 0 \qquad \text{impossível}$$
$$Pr\{X_1 = 2|X_0 = 1\} = Pr\{X_0 = 2, X_1 = 0\} = 1/2 \qquad \text{troca verde}$$

De forma análogo, para X_2 temos

$$Pr\{X_2 = 0|X_1 = 0\} = Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = 0 \qquad \text{impossível}$$
$$Pr\{X_2 = 1|X_1 = 0\} = Pr\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = 1 \qquad \text{troca verde}$$
$$Pr\{X_2 = 2|X_1 = 0\} = Pr\{X_1 = 0, X_2 = 2\} = 0 \qquad \text{impossível}$$

$$Pr\{X_2 = 0|X_1 = 1\} = Pr\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = 1/2 \qquad \text{troca vermelha}$$
$$Pr\{X_2 = 1|X_1 = 1\} = Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = 0 \qquad \text{impossível}$$
$$Pr\{X_2 = 2|X_1 = 1\} = Pr\{X_1 = 1, X_2 = 2\} = 1/2 \qquad \text{troca verde}$$

$$Pr\{X_2 = 0|X_1 = 2\} = Pr\{X_1 = 2, X_2 = 0\} = 0 \qquad \text{impossível}$$
$$Pr\{X_2 = 1|X_1 = 2\} = Pr\{X_1 = 2, X_2 = 1\} = 1 \qquad \text{troca vermelha}$$
$$Pr\{X_2 = 2|X_1 = 2\} = Pr\{X_1 = 2, X_2 = 2\} = 0 \qquad \text{impossível}$$

Assim, sendo $P_{i,j}$ probabilidade de transitar do número de bolas vermelhas i para j, temos a matrix de transição de probabilidade

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Encontre o tempo médio (número médio de passos) para o processo alcançar o estado 3 dado que o processo se iniciou no estado 0 para uma cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[**SOLUÇÃO**]

Usando do vetor de probabilidade first-hitting, é válido que

$$h_{iA} = \begin{cases} 1 & i \in A \\ \sum_{j \in S} p_{ij} h_{jA} & i \notin A \end{cases}$$

Logo

$$h_i^{(k)} = 1 + \sum_{j \neq k} P_{ij} h_j$$

Onde $h_i^{(k)} \equiv E[T_k | X_0 = i]$, com T_k tempo esperado de atingir o estado k

Assim, vale que

$$h_0 = 1 + 0.4h_0 + 0.3h_1 + 0.2h_2$$
$$h_1 = 1 + 0.7h_1 + 0.2h_2$$
$$h_2 = 1 + 0.9h_2$$
$$h_3 = 0$$

$$h_2(1 - 0.9) = 1 \implies h_2 = 10$$
$$h_1 = 1 + 0.7h_1 + 2 = 3 + 0.7h_1 \implies h_1 = 10$$
$$h_0 = 1 + 0.4h_0 + 3 + 2 = 6 + 0.4h_0 \implies h_0 = 10$$

Logo $h_0 = 10$ e $h = [10 \quad 10 \quad 10]^T$.

10. Considere uma cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição entre os estados 0,1,2

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Iniciando no estado 1, determine a probabilidade da cadeia terminar no estado 0

[SOLUÇÃO]

Sabendo que os estados absorventes são 0 e 2, precisamos reordenar a matriz P para a forma canônica

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

onde Q são as probabilidades de transição entre estados transientes e R, transições para estados absorventes.

Assim

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo válida a matriz de probabilidade de absorção B dada por

$$B = NR, \quad N = (I - Q)^{-1}$$

com N matriz fundamental. Temos então

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.6 \end{bmatrix} \implies$$
$$N = [0.4]^{-1} = 2.5$$

Portanto

$$B = [2.5]\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.25 & 0.75\end{bmatrix}$$

Logo a probabilidade de terminar em 0 é dada por 0.25 e a probabilidade de terminar em 2 é 0.75.

b) Determine o tempo médio de absorção

[**SOLUÇÃO**]

Utilizando da equação para o tempo médio de primeiro atingir um estado, temos que para atingir um estado k iniciando em i

$$h_i = 1 + \sum_{j \neq k} P_{ij} h_j$$

Para atingir o estado 2

$$\begin{aligned}
&h_0 = 0 \\
&h_1 = 1 + 0.1h_0 + 0.6h_1 \\
&h_2 = 1 \\
&\quad \implies \\
&h_1 = 1 + 0.6h_1 \implies h_1(1 - 0.6) = 1 \\
&h_1 = 1/0.4 = 2.5
\end{aligned}$$

Para atingir o estado 0

$$\begin{aligned}
&h_0 = 1 \\
&h_1 = 1 + 0.6h_1 + 0.3h_2 \\
&h_2 = 0 \\
&\quad \implies \\
&h_1 = 1 + 0.6h_1 \implies h_1(1 - 0.6) = 1 \implies h_1 = 1/0.4 = 2.5 \\
&h_1 = 2.5
\end{aligned}$$

Logo $h_1 = min\{2.5, 2.5\} = 2.5$

11. Considere uma cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iniciando no estado 1, determine o número médio de vezes que o processo passa pelos estados 1 e 2 antes da absorção. Verifique que a soma de ambos é igual ao número médio de passos até a absorção

[SOLUÇÃO]

Sabemos que, dada matriz P na forma canônica, vale que $N = (I - Q)^{-1}$ tal que N_{ij} representa o número esperado de vezes que o processo está no estado j ao iniciar em i, denominada matriz fundamental.

Assim, sendo a forma canônica

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

com Q transições entre estados transientes, R transições para estados absorventes, e reconhecendo os estados 1 e 2 como transientes e os estados 0 e 3 como absorventes, temos

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$P' = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que

$$N^{-1} = I - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Para calcular a inversa $N^{-1} = A$, podemos optar pela eliminação de Gauss-Jordan de modo que

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.8 & -0.1 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0.4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -0.125 & 1.25 & 0 \\ -0.1 & 0.4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -0.125 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0.3875 & 0.125 & 1 \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -0.125 & 1.25 & 0 \\ 0 & 1 & 0.323 & 2.581 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1.290 & 0.323 \\ 0 & 1 & 0.323 & 2.581 \end{array}\right]$$

Portanto

$$N = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.290 & 0.323 \\ 0.323 & 2.581 \end{bmatrix}$$

indicando que $N_{11} = 1.290$, número médio de vezes que o processo passa por 1 iniciando em 1, e $N_{12} = 0.323$ número médio de vezes que passa por 2 iniciando em 1.

Por outro lado, considerando a expressão para a primeira chegada ao estado k iniciando em i como sendo

$$h_i = 1 + \sum_{j \neq k} P_{ij} h_j$$

temos, para chegada ao estado $k = 2$

$$\begin{aligned}
&h_0 = 1 + 0.2h_0 + 0.1h_1 + 0.2h_3 \\
&h_1 = 1 + 0.1h_0 + 0.6h_1 + 0.1h_3 \\
&h_3 = 0 \\
&\quad \Longrightarrow \\
&h_0 = 1 + 0.2h_0 + 0.1h_1 \\
&h_1 = 1 + 0.1h_0 + 0.6h_1 \\
&\quad \Longrightarrow \\
&h_0 = 1.613 \\
&h_1 = 2.903
\end{aligned}$$

E para a chegada ao estado $k = 3$

$$\begin{aligned}
&h_0 = 1 + 0.2h_0 + 0.1h_1 + 0.5h_2 \\
&h_1 = 1 + 0.1h_0 + 0.6h_1 + 0.2h_2 \\
&h_2 = 0 \\
&\quad \Longrightarrow \\
&h_0 = 1 + 0.2h_0 + 0.1h_1 \\
&h_1 = 1 + 0.1h_0 + 0.6h_1 \\
&\quad \Longrightarrow \\
&h_0 = 1.613 \\
&h_1 = 2.903
\end{aligned}$$

Juntando os resultados, temos que $N_{11} + N_{12} = 1.613 = min\{h_i\} = h_0$, indicando que o tempo médio para absorção é igual ao tempo médio de passagem pelos estados transientes 1 e 2.

12. Uma moeda é lançada sucessivamente até que duas caras apareçam em sequência. Escreva a matriz de probabilidades de transição desse processo e determine o número médio de lançamentos necessários.

[SOLUÇÃO]

Para o processo descrito, podemos considerar cada estado o número de caras em sequência, e portanto $X_n \in [0, 1, 2]$ e também que a probabilidade de obtenção de cara e coroa é $p = q = 1/2$. Dessa forma temos a matriz de transição de probabilidades

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, similar aos problemas anteriores, podemos partir da equação para o número de passos até o primeiro acerto sobre o estado de absorção 2.

Para atingir o estado k dado que iniciamos no estado i é válido que

$$h_i = 1 + \sum_{j \neq k} P_{ij} h_j$$

e assim, para atingir o estado 2,

$$\begin{aligned}
&h_0 = 1 + (1/2)h_0 + (1/2)h_1 \\
&h_1 = 1 + (1/2)h_0 \\
&\quad \Longrightarrow \\
&h_0 = 1 + h_0/2 + (1 + h_0/2)/2 \implies 2h_0 = 2 + h_0 + 1 + h_0/2 \\
&h_0 = 3 + h_0/2 \implies h_0/2 = 3 \implies h_0 = 6 \\
&h_1 = 1 + 6/2 = 4
\end{aligned}$$

Como partimos do caso onde $i = 0$, o número de jogadas até a obtenção de duas caras consecutivas partindo de $i = 0$ é $h_0 = 6$.

13. Qual dos seguintes padrões necessitam de menos lançamentos na média?

a) sucessivos lançamentos até que o padrão cara-cara-coroa apareça

b) sucessivos lançamentos até que cara-coroa-cara apareça

[SOLUÇÃO

Considerando a obtenção da sequência de **a)**, onde temos um número consecutivo de 2 caras e 1 coroa, temos a matriz de probabilidade de transição

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a equação para o primeiro acerto do estado de absorção $k = 3$ temos

$$h_i = 1 + \sum_{j \neq k} P_{ij} h_j$$

$$\begin{aligned}
h_0 &= 1 + h_0/2 + h_1/2 \\
h_1 &= 1 + h_0/2 + h_2/2 \\
h_2 &= 1 + h_2/2 \\
&\implies \\
h_2 &= 1/(1/2) = 2 \\
h_1 &= 1 + h_0/2 + 1 = 2 + h_0/2 \\
h_0 &= 1 + h_0/2 + (2 + h_0/2)/2 = 1 + h_0/2 + 1 + h_0/4 \\
&\implies \\
h_0(1 - 1/2 - 1/4) = 2 &\implies h_0 = 2/(4 - 2 - 1/4) = 8/1 = 8 \\
h_0 &= 8
\end{aligned}$$

Logo, com início em 0 lançamentos são necessários em média 8 passos para obtenção do padrão cara-cara-coroa.

Agora, considerando a sequência cara-coroa-cara, temos a seguinte matriz de probabilidade de transição

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde, utilizando a equação para primeiro acerto do estado de absorção $k = 3$ temos

$$\begin{aligned}
h_0 &= 1 + h_0/2 + h_1/2 \\
h_1 &= 1 + h_1/2 + h_2/2 \\
h_2 &= 1 + h_0/2 \\
&\implies \\
h_1 &= 1 + h_1/2 + (1 + h_0/2)/2 = 1 + h_1/2 + 1/2 + h_0/4 \\
&\implies h_1 = 3/2 + h1/2 + h_0/4 \implies h_1/2 = 3/2 + h_0/4 \\
h_0 &= 1 + h_0/2 + 3/2 + h_0/4 = 5/2 + 3h_0/4 \\
h_0(1 - 3/4) = 5/2 &\implies h_0(1/4) = (5/2) \implies h_0 = 10
\end{aligned}$$

Logo, iniciando com 0 lançamentos, o número médio de passos até a obtenção do padrão cara-coroa-cara é igual a $h_0 = 10$.

Comparando os resultados, o padrão cara-cara-coroa necessita de menos lançamentos em média.

14. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 verdes. As bolas são selecionadas uma por uma, de forma aleatória. Se uma bola vermelha é escolhida, ela é removida. Qualquer bola verde que for escolhida é recolocada na urna. O processo se seleção continua até que não reste nenhuma bola vermelha dentro da urna. Qual o tempo médio de duração do jogo?

Para o problema descrito, temos a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/7 & 4/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando a equação para o tempo médio de chegada no estado k a partir de i, temos

$$h_i = 1 + \sum_{j \neq k} P_{ij} h_j$$

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 + 3/8h_0 + 5/8h_1 \\ h_1 &= 1 + 3/7h_1 + 4/7h_2 \\ h_2 &= 1 + 3/6h_2 + 3/6h_3 \\ h_3 &= 1 + 3/5h_3 + 2/5h_4 \\ h_4 &= 1 + 3/4h_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_4 &= 4 \\ h_3 &= 6.5 \\ h_2 &= 8.5 \\ h_1 &= 10.25 \\ h_0 &= 11.85 \end{aligned}$$

Logo o tempo médio do jogo é de $h_0 = 11.85$