Processos Estocásticos

Jorge Augusto Salgado Salhani
no. USP: 8927418

Março, 2025

1 Lista 1

1. Sejam A e B conjuntos arbitrários, não necessariamente disjuntos. Utilize a lei da probabilidade total para verificar a seguinte equação:

$$Pr\{A\} = Pr\{A \cap B\} + Pr\{A \cap B^c\}$$

onde B^c é o conjunto complementar de B (isto é, o evento B^c ocorre se, e somente se, B não ocorrer)

[**SOLUÇÃO**]

Da lei de probabilidade total temos

$$Pr\{A\} = \sum_i Pr\{A \cap B_i\}$$

onde B_i são eventos disjuntos entre si

Seja B conjunto dentro do espaço amostral. Por definição B^c é disjunto de B de modo que $B \cup B^c = \Omega$. Logo $i = \{1, 2\}$, com $B_1 = B$ e $B_2 = B^c$, o que resulta em

$$Pr\{A\} = Pr\{A \cap B\} + Pr\{A \cap B^c\}$$

2. Sejam A e B conjuntos arbitrários, não necessariamente disjuntos. Derive a lei

$$Pr\{A \cup B\} = Pr\{A\} + Pr\{B\} - Pr\{A \cap B\}$$

[**SOLUÇÃO**]

Sendo válido que

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$$

Pela lei de adição de eventos disjuntos, temos que

$$Pr\{X \cup Y\} = Pr\{X\} + Pr\{Y\}$$

se X e Y disjuntos. Então, como $A \cap B^c$ é disjunto de B, vale que

$$Pr\{A \cup B\} = Pr\{(A \cap B^c) \cup B\} = Pr\{A \cap B^c\} + Pr\{B\}$$

Sabendo, pelo exercício anterior, que

$$Pr\{A \cap B^c\} = Pr\{A\} - Pr\{A \cap B\}$$

então temos que

$$Pr\{A \cup B\} = Pr\{A\} - Pr\{A \cap B\} + Pr\{B\}$$

3. Suponha que X é uma variável aleatória cuja densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} Rx^{R-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $R > 0$ é um parâmetro fixo.

(a) Determine a distribuição acumulada $F_X(x)$

[SOLUÇÃO]

Sendo $F_X(x)$ CDF (cummulative density function) de $f(x)$, sua CDF é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi$$

Dessa forma

$$F_X(x) = 0 + \int_0^x R\xi^{R-1} d\xi = R\frac{\xi^R}{R}\Bigg|_0^x \implies F_X(x) = x^R$$

(b) Determine o valor esperado $E[X]$

[SOLUÇÃO]

Sendo o valor esperado $E[X]$ dado por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Assim

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xRx^{R-1}dx = R\int_0^1 x^R dx = R\frac{x^{R+1}}{R+1}\Bigg|_0^1 \implies E[X] = \frac{R}{R+1}$$

(c) Determine a variância Var$[X]$

[SOLUÇÃO]

Sendo a variância Var$[X] = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2$, temos

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

temos

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 R x^{R-1} = R \int_0^1 x^{R+1} dx = R \frac{x^{R+2}}{R+2}\Bigg|_0^1 \implies E[X^2] = \frac{R}{R+2}$$

Logo

$$\sigma^2 = \frac{R}{R+1} - \left[\frac{R}{R-2}\right]^2$$

4. Dois jogadores, A e B, se alternam numa máquina de jogos até que um deles obtenha sucesso; o primeiro a fazê-lo é considerado vencedor. A probabilidade de sucesso do jogador A é p, enquanto a de B é q. Considere que jogadas sucessivas são independentes.

(a) Determine a probabilidade de que A vença o jogo dado que A jogue primeiro

[SOLUÇÃO]

Seja $X_k = 1$ se A ganha em sua jogada $k = 1, 2, 3, ...$, com $X_k = 0$ caso contrário. Assim, sabendo que $k = 1$ A joga

$$Pr\{X_1 = 1\} = p$$

Como sua probabilidade de ganho não muda com o tempo, se ocorre de $X_1 = 0$, $Pr\{X_2 = 1|X_1 = 0\} = p$ e assim por diante. Logo

$$\begin{aligned}
&Pr\{X_1 = 1\} = p \\
&Pr\{X_2 = 1|X_1 = 0\} = p \\
&Pr\{X_3 = 1|X_1 = 0, X_2 = 0\} = p \\
&... \\
&Pr\{X_k = 1|X_1, X_2, ..., X_{k-1} = 0\} = p
\end{aligned}$$

Pela lei da probabilidade total, sabemos que

$$Pr\{A\} = \sum_i Pr\{A \cap B_i\} = \sum_i Pr\{A|B_i\}Pr\{B_i\}$$

Para as probabilidades marginais $Pr\{B_i\}$ temos

$$Pr\{X_1 = 0\} = (1-p)$$
$$Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = (1-p)(1-q)(1-p)(1-q) = (1-p)^2(1-q)^2$$
$$...$$
$$Pr\{X_1, X_2, ..., X_{k-1} = 0\} = [(1-p)(1-q)]^{k-1}$$

Logo, sendo $\beta = (1-p)(1-q)$temos que

$$Pr\{A\} = \sum_{k=1}^{\infty} p[(1-p)(1-q)]^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1}$$

Fazendo $m = k-1$, temos

$$Pr\{A\} = p\sum_{m=0}^{\infty} \beta^{m} = p\frac{1}{1-\beta} = \frac{p}{1-\beta}$$

(b) Considerando ainda que o jogador A jogue primeiro, determine o número médio de jogadas dada a informação de que A vence

[SOLUÇÃO]

Sabemos que a esperança condicional é dada por

$$E[X = x|Y = y] = \sum_{x} xPr\{X = x|Y = y\}$$

Assim, a probabilidade que tenhamos k jogadas dado que A ganhe, conforme item anterior, é dada por

$$Pr\{X_k = 1|X_1, X_2, ..., X_{k-1} = 0\} = p\beta^{k-1}$$

Logo

$$\begin{aligned} E[X|A] &= \sum_{k=1}^{\infty} kp\beta^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k\beta^{k-1} \\ &= p\frac{d}{d\beta}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k\right] = p\frac{d}{d\beta}\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\right] \\ &= p\frac{d}{d\beta}\left[1 - \frac{1}{1-\beta}\right] = \frac{p}{(1-\beta)^2} \end{aligned}$$

5. São retiradas uma a uma, aleatoriamente, bolas de uma urna até que a primeira bola branca seja obtida. No entanto, a cada tentativa, dobra-se a quantidade de bolas azuis colocadas na urna. Sabendo que a urna contém 4 bolas azuis e 6 brancas, calcule a probabilidade de obter a primeira bola branca no máximo na terceira tentativa. Assuma que as retiradas são feitas com reposição.

[SOLUÇÃO]

Seja X variável aleatória tal que $X = 1$, se evento B (bola branca obtida) ou $X = 0$ caso contrário. Como a probabilidade muda a cada jogada e seja $Pr\{X_k = 1\}$ probabilidade de obter B na jogada de número k, temos

$$
\begin{aligned}
&Pr\{X_1 = 1\} = 6/10 \\
&Pr\{X_2 = 1|X_1 = 0\} = 6/14 \\
&Pr\{X_3 = 1|X_1 = 0, X_2 = 0\} = 6/22
\end{aligned}
$$

Pela lei da probabilidade total e sabendo que $Pr\{A|B\}P\{B\} = P\{A \cap B\}$, temos que

$$Pr\{A\} = \sum_i Pr\{A \cap B_i\} = \sum_i Pr\{A|B_i\}Pr\{B_i\}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
Pr\{X_{1|2|3} = 1\} &= Pr\{X_1 = 1\} \\
&+ Pr\{X_2 = 1|X_1 = 0\}Pr\{X_1 = 0\} \\
&+ Pr\{X_3 = 1|X_1 = 0, X_2 = 0\}Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0\} \\
&= 6/10 + (6/14)[1 - 6/10] + (6/22)[(1 - 6/10)(1 - 6/14)] \\
&= 0.8337
\end{aligned}
$$

6. Um caça-níquel tem dois discos que funcionam independentemente um do outro. Cada disco tem 10 figuras: 4 maçãs, 3 bananas, 2 peras, 1 laranja. Uma pessoa paga 80.00 e aciona a máquina. Se aparecem 2 maçãs, ganha 40.00; se aparecem duas bananas, ganha 80.00; ganha 140 se aparecem duas peras; e ganha 180.00 se aparecem duas laranjas. Qual o lucro esperado em uma única jogada?

[SOLUÇÃO]

Cada disco apresenta os eventos: M,B,P,L. Dessa forma, seja X variável aleatória do lucro obtido, temos que

$$X = \begin{cases} 40 & \text{se MM} \\ 80 & \text{se BB} \\ 140 & \text{se PP} \\ 180 & \text{se LL} \end{cases}$$

Dessa forma, suas respectivas probabilidades são

$$
\begin{aligned}
Pr\{X = 40\} &= (4/10)^2 \\
Pr\{X = 80\} &= (3/10)^2 \\
Pr\{X = 140\} &= (2/10)^2 \\
Pr\{X = 180\} &= (1/10)^2
\end{aligned}
$$

Como desejamos obter o lucro esperado para uma jogada, queremos o valor esperado para uma rodada. Dessa forma

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_i x_i Pr\{X = x_i\} \\
&= 40[(4/10)^2] + 80[(3/10)^2] + 140[(2/10)^2] + 180[(1/10)^2] \\
&= [4(4^2) + 8(3^2) + 14(2^2) + 18(1^2)]/10 \\
&= 21
\end{aligned}
$$

Como gastamos 80.00 na primeira jogada, esperamos um lucro médio de 59.00 ($= 80 - 21$).

7. Uma moeda de dez centavos é lançada repetidamente até que uma cara apareça. Seja N o número de tentativas até que a primeira cara ocorra. Após isso, uma moeda de 5 centavos é lançada N vezes. Seja X o número de vezes que a moeda de 5 centavos sai com coroa. Determine $Pr\{X = 0\}$ e $Pr\{X = 1\}$

[SOLUÇÃO]

Se N o número de tentativas até a primeira ocorrência de cara, se considerarmos $Pr\{k = N\}$, com p probabilidade de o evento cara ocorrer, vale que

$$Pr\{k = N\} = (1-p)^{N-1} p \sim Geom(N, p)$$

Se X o número de vezes que coroa aparece na segunda moeda, temos que $Pr\{X = x\}$, onde sabemos o número de vezes N que a mesma foi lançada. Se p a probabilidade de ocorrência de coroa, assim

$$Pr\{X = x | k = N\} = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \sim Binom(N, p)$$

Pela lei da probabilidade total, vale que

$$Pr\{X = x\} = \sum_{y=0}^{\infty} Pr\{X = x | Y = y\} Pr\{Y = y\}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
Pr\{X = x\} &= \sum_{N=0}^{\infty} \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} (1-p)^{N-1} p \\
&= p^{x+1} \sum_{N=0}^{\infty} \binom{N}{x} (1-p)^{2N-x-1}
\end{aligned}
$$

Para $X = 0$

$$
\begin{aligned}
Pr\{X = 0\} &= p^1 \sum_{N=0}^{\infty} \binom{N}{0} (1-p)^{2N-1} \\
&= p \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N!}{0!(N-0)!} (1-p)^{2N-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{N=0}^{\infty} (1-p)^{2N} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{N=0}^{\infty} [(1-p)^2]^N \\
&= \frac{0.5}{1-0.5} \sum_{N=0}^{\infty} 0.25^N = \frac{0.25}{1-0.25} = 1/3
\end{aligned}
$$

onde impomos que $p = 0.5$.

Para $X = 1$

$$
\begin{aligned}
Pr\{X = 1\} &= p^2 \sum_{N=0}^{\infty} \binom{N}{1} (1-p)^{2N-2} \\
&= p^2 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N!}{1!(N-1)!} (1-p)^{2N-2} \\
&= \left[\frac{p}{1-p}\right]^2 \sum_{N=0}^{\infty} N(1-p)^{2N} \\
&= \left[\frac{p}{1-p}\right]^2 \sum_{N=0}^{\infty} N(0.25)^N \\
&= \left[\frac{0.5}{1-0.5}\right]^2 \frac{0.25}{[1-0.25]^2} = \frac{0.25}{0.5625} = 4/9
\end{aligned}
$$

onde impomos que $p = 0.5$.

8. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros p e N. O parâmetro N, por sua vez, tem distribuição binomial com parâmetros q e M. Em outras palavras $X|N \sim B(p, N)$ e $N \sim B(q, M)$. Encontre a distribuição de probabilidade $Pr\{X = k\}$.

[SOLUÇÃO]

Pela lei da probabilidade total vale que

$$Pr\{X = k\} = \sum_{x=0}^{\infty} Pr\{X = k|N = x\} Pr\{N = x\}$$

Assim

$$
\begin{aligned}
Pr\{X=k\} &= \sum_{N=0}^{\infty} B(p,N)B(q,M) \\
&= \sum_{N=k}^{M} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \binom{M}{N} q^N (1-q)^{M-N} \\
&= \sum_{N=k}^{M} \frac{N!M!}{k!N!(N-k)!(M-N)!} p^k (1-p)^{N-k} q^N (1-q)^{M-N} \\
&= \frac{M!}{k!} p^k (1-q)^M \left[\frac{q}{1-q}\right]^k \sum_{N=k}^{M} \frac{1}{(N-k)!(M-N)!} (1-p)^{N-k} \left[\frac{q}{1-q}\right]^{N-k}
\end{aligned}
$$

Para a soma, temos

$$
\sum_{N=k}^{M} \frac{1}{(N-k)!(M-N)!} (1-p)^{N-k} \left[\frac{q}{1-q}\right]^{N-k} = \frac{1}{(M-k)!} \left[1 + \frac{q(1-p)}{(1-q)}\right]^{M-k}
$$

pois sabemos que, por expansão binomial

$$
(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} y^k x^{N-k} \implies (1+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} y^k
$$

e assim

$$
\begin{aligned}
(1+r)^{M-k} &= \sum_{l=0}^{M-k} \binom{M-k}{l} r^l = \sum_{l=0}^{M-k} \frac{(M-k)!}{l!(M-k-l)!} r^l \\
&= (M-k)! \sum_{l=0}^{M-k} \frac{1}{l!(M-k-l)!} r^l
\end{aligned}
$$

Agora sendo $l = k$, nossos limites serão $l - k \to M - k + k = M$, assim

$$
(1+r)^{M-k} = (M-k)! \sum_{l=k}^{M} \frac{1}{(l-k)!(M-l)!} r^l
$$

Logo, se $l = N$ temos

$$
\frac{1}{(M-k)!}(1+r)^{M-k} = \sum_{N=k}^{M} \frac{1}{(N-k)!(M-N)!} r^{N-k}
$$

como gostaríamos.

Assim, nossa probabilidade é dada por

$$
\begin{aligned}
Pr\{X\} &= \frac{M!}{k!} p^k (1-q)^M \left[\frac{q}{1-q}\right]^k \frac{1}{(M-k)!} \left[1 + \frac{q(1-p)}{1-q}\right]^{M-k} \\
&= \frac{M!}{k!(M-k!)} (pq)^k (1-pq)^{M-k} \\
&= \binom{M}{k} (pq)^k (1-pq)^{M-k}
\end{aligned}
$$

Que representa uma distribuição binomial de fator pq, ou $X \sim Binom(M, pq)$

9. Em um jogo, dois dados são lançados e a soma de suas faces é observada. Se a soma resulta em valores 2, 3, 12, o jogador perde. Se a soma é 7 ou 11, vence. Por outro lado, se a soma é 4,5,6,8,9,10, então outro lançamento é necessário. No caso da soma ser 4, por exemplo, o dado é lançado até que a soma igual a 4 reapareça ou até que a soma igual a 7 seja observada. Se a soma igual a 4 aparecer primeiro, o jogador vence. Se for 7, ele perde. Considerando essa regra, qual a probabilidade de vencer?

[SOLUÇÃO]

Sendo A evento onde jogador vence, $Pr\{A\}$ depende da soma obtida. Assim, sendo Z_n soma das faces do dado no lançamento n

$$Pr\{A|Z_0 = k\} = \begin{cases} 0 & \text{se k = 2,3,12} \\ 1 & \text{se k = 7,11} \end{cases}$$

Assim, pela lei da probabilidade total

$$Pr\{A\} = \sum_{k=2}^{12} Pr\{A|Z_0 = k\} Pr\{Z_0 = k\}$$

Agora sendo B evento onde jogador vence dado que $Z_1 = k$, $k = 4, 5, 6, 8, 9, 10$, temos que

$$Pr\{B|Z_1 = k\} = \begin{cases} 0 & \text{se k = 7} \\ 1 & \text{se k = 4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Pr\{B\} &= \sum_{k=2}^{12} Pr\{B|Z_1 = k\} Pr\{Z_1 = k\} \\ &= 1 \times Pr\{Z_1 = 4\} + 0 \times Pr\{Z_1 = 7\} + \sum_{k \neq 4,7}^{12} Pr\{B|Z_1 = k\} Pr\{Z_1 = k\} \end{aligned}$$

Considerando que, por exemplo $Pr\{B|Z_1 = 5\} = Pr\{B\}$, pois voltamos ao caso base onde ganhamos somente nas próximas rodadas até aparecer 4, vale que

$$\begin{aligned} Pr\{B\} &= Pr\{Z_1 = 4\} + \sum_{k \neq 4,7}^{12} Pr\{B\} Pr\{Z_1 = k\} \\ &= Pr\{Z_1 = 4\} + Pr\{B\} \sum_{k \neq 4,7}^{12} Pr\{Z_1 = k\} \\ &\implies Pr\{B\} \left[1 - \sum_{k \neq 4,7}^{12} Pr\{Z_1 = k\} \right] = Pr\{Z_1 = 4\} \implies \\ Pr\{B\} &= \frac{Pr\{Z_1 = 4\}}{1 - [1 - Pr\{Z_1 = 4\} - Pr\{Z_1 = 7\}]} = \frac{Pr\{Z_1 = 4\}}{Pr\{Z_1 = 4\} + Pr\{Z_1 = 7\}} \end{aligned}$$

Onde usamos o complemento da probabilidade do somatório

Sendo $Pr\{B\} = Pr\{A|Z_0 = k\}$ para $k = 4, 5, 6, 8, 9, 10$, temos

$$Pr\{A\} = Pr\{Z_0 = 7\} + Pr\{Z_0 = 11\} + \sum_{k'} \frac{Pr\{Z_0 = k'\}}{Pr\{Z_0 = k'\} + Pr\{Z_0 = 7\}}$$

com $k' = 4, 5, 6, 8, 9, 10$, lembrando que para $k = 2, 3, 12$, o jogador perde.

10. Considere uma sequência de processos de Bernoulli com probabilidade de sucesso p. Seja X_1 o número de falhas antes do primeiro sucesso e seja X_2 o número de falhas entre os dois primeiros sucessos. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de X_1 e X_2

[**SOLUÇÃO**]

Sendo X_1 número de falhas antes do primeiro sucesso, temos

$$Pr\{X_1 = k\} = (1-p)^k p$$

Agora, sendo X_2 número de falhas entre os dois primeiros sucessos, temos

$$Pr\{X_2 = m|X_1 = k\} = (1-p)^m p$$

Como a probabilidade conjunta de X, Y é dada por

$$Pr\{X = x, Y = y\} = Pr\{X = x|Y = y\}Pr\{Y = y\} \implies$$
$$Pr\{X_1 = k, X_2 = m\} = (1-p)^{m+k} p^2$$

11. Suponha que uma variável aleatória X tem uma distribuição binomial com parâmetros p,n onde n tem distribuição de Poisson com média λ. Determine a distribuição marginal de X.

[**SOLUÇÃO**]

Sendo que, para um dado n $X \sim Binom(n, p)$, temos

$$Pr\{X = k|N = n\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

e como $n \sim Poiss(\lambda)$, temos

$$Pr\{N = n\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Pela lei da probabilidade total, temos

$$Pr\{X\} = \sum_n Pr\{X = k|N = n\}Pr\{N = n\}$$

o que nos leva a

$$
\begin{aligned}
Pr\{X\} &= \sum_n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!} \sum_n \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \lambda^n \left[\frac{\lambda^k}{\lambda^k}\right] \\
&= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!} \sum_n \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \lambda^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

Seja $m = n - k$ termo da soma passa a ser

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^m}{m!}$$

Sabendo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} = e^{\theta}$$

Logo

$$Pr\{X\} = \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$$

que se trata de distribuição de Poisson de média λp

12. Quatro moedas de 5 centavos e seis moedas de 10 centavos são arremessadas e o número de caras, N, é observado. Se $N = 4$, qual a probabilidade condicional de que exatamente duas moedas de 5 centavos saíram cara?

[SOLUÇÃO]

Sendo X_1 número de lançamentos de moedas de 5 centavos e X_2 número de lançamentos de moedas de 10 centavos, $X_1 = 4$ e $X_2 = 6$, com $X = X_1 + X_2 = 10$

Sendo também N_1 número de caras em 5 centavos e N_2 número de caras em 10 centavos, $N = N_1 + N_2 = 4$

Como

$$
\begin{aligned}
Pr\{N_1 = 2|X_1 = 4\} &= \binom{4}{2} p^2 (1-p)^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} 0.5^4 = 6(0.5)^4 \\
Pr\{N_2 = 2|X_2 = 6\} &= \binom{6}{2} p^2 (1-p)^{6-2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} 0.5^6 = 15(0.5)^6
\end{aligned}
$$

e também

$$Pr\{N = 4|X = 10\} = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^{10-4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} 0.5^{10} = 210(0.5)^{10}$$

Como queremos $Pr\{N_1 = 2, N_2 = 2|N = 4\} = \alpha$ e sabendo que

$$Pr\{X = x|Y = y\} = \frac{Pr\{X = x, Y = y\}}{Pr\{Y = y\}} \implies$$
$$Pr\{N_1 = 2, N_2 = 2|N = 4\} = \frac{Pr\{N_1 = 2, N_2 = 2\}}{Pr\{N = 4\}} = \frac{6(0.5)^4 \times 15(0.5)^6}{210(0.5)^{10}}$$
$$\alpha = \frac{90}{210} = 0.42857$$

13. Para as distribuições abaixo, calcule o valor esperado e a variância.

(a) Poisson com parâmetro λ

[SOLUÇÃO]

Sendo $f(x) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!$, $E[X] = \sum x f(x)$ temos

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}\lambda}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

E para a variância $\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2$ temos

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

Fazendo $m = k - 1$ temos

$$\begin{aligned} E[X^2] &= e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{\lambda^{m+1}}{m!} = e^{-\lambda}\left[\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^{m+1}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+1}}{m!}\right] \\ &= e^{-\lambda}\left[\lambda^{-2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\right] = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

(b) Geométrica com probabilidade de sucesso p

[SOLUÇÃO]

Sendo $f(x) = (1-p)^k p$, $E[X] = \sum x f(x)$, temos

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k = p\frac{d}{dp}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k\right](1-p)(-1) \\
&= -p(1-p)\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{1-(1-p)}\right] = -p(1-p)\frac{d}{dp}(p^{-1}) = p(1-p)p^{-2} \\
&= \frac{1-p}{p}
\end{aligned}
$$

Agora sendo $\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2$ com $E[X^2] = \sum x^2 f(x)$ e sendo $q = 1-p$

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^k \\
&= p\frac{d}{dp}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k\right](1-p)(-1)
\end{aligned}
$$

Como sabemos que $E[X] = (1-p)/p$ e

$$
E[X] = p\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k \implies \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k = \frac{E[X]}{p} = \frac{1-p}{p^2}
$$

assim

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= -p\frac{d}{dp}\left[\frac{1-p}{p^2}\right](1-p) = -p\left[\frac{-1}{p^2} - \frac{2(1-p)}{p^3}\right](1-p) \\
&= p\frac{2-p}{p^3}(1-p) = \frac{2-2p-p+p^2}{p^2} = \frac{2-3p+p^2}{p^2}
\end{aligned}
$$

Por fim

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 &= \frac{2-3p+p^2}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} \\
&= \frac{2-3p+p^2-(1-2p+p^2)}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

(c) Exponencial com parâmetro λ

[SOLUÇÃO]

Sendo $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ e como neste caso temos apenas a versão contínua

$$
E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx
$$

Sendo $y = \lambda x$ de modo que $dx = \lambda^{-1} dy$, temos

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int y e^{-y}\lambda^{-1} dy = \frac{1}{\lambda}\int y e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\lambda}\left[-ye^{-y} - \int -e^{-y} dy\right] = \frac{1}{\lambda}\Big[-e^{-y}(y-1)\Big]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

Agora para a variância, temos

$$E[X^2] = \int_{\infty}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} x^2 + \frac{2}{\lambda^2}(-\lambda e^{-\lambda x} x - e^{-\lambda x})\Big|_0^{\infty}$$
$$= 0 - \left[0 + \frac{2}{\lambda^2}(-1)\right] = \frac{2}{\lambda^2}$$

Logo

$$\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

14. Suponha que a pdf conjunta da variável aleatória bidimensional (X,Y) seja dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + xy/3 & x \in (0,1), y \in (0,2) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcular

(a) $P(X > 1/2)$

[SOLUÇÃO]

Para $P(X > x)$ precisamos calcular

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} f_X(x) dx$$

com $f_X(x)$ pdf marginal de X da função conjunta $f(x,y)$.

Conhecendo a distribuição conjunta $f(x,y)$, a pdf marginal $f_X(x)$ é dada por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$$

Assim, temos que

$$f_X(x) = \int_0^2 x^2 + \frac{xy}{3} dy = x^2 y + \frac{x}{3}\frac{y^2}{2}\Big|_0^2$$
$$= 2x^2 + \frac{2x}{3}$$

Agora podemos calcular $P(X > x)$ de modo que

$$P(X > 1/2) = \int_{1/2}^{1} 2x^2 + \frac{2x}{3} dx = 2\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^{1}$$
$$= \frac{5}{6}$$

(b) $P(Y < 1/2 | X = 1/2)$

[SOLUÇÃO] Pela pdf conjunta e sendo a pdf marginal em X $f_X(x)$ temos que

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Como do item anterior temos

$$f_X(x) = 2x^2 + \frac{2x}{3} \implies f_X(x = 1/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Assim, nossa pdf condicional é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x = 1/2) &= \frac{f(1/2, y)}{f_X(1/2)} = \frac{1/4 + y/6}{5/6} \\ &= \frac{6}{5}(1/4 + y/6) = \frac{3 + 2y}{10} \end{aligned}$$

Que nos permite calcular a probabilidade $P(Y < 1/2|X = 1/2)$ da forma

$$\begin{aligned} P(Y < 1/2|X = 1/2) &= \int_0^{1/2} f_{Y|X}(y|x)dy = \int_0^{1/2} \frac{3 + 2y}{10} dy \\ &= \frac{1}{10}\left[3y + 2\frac{y^2}{2}\right]_0^{1/2} = \frac{7}{40} \end{aligned}$$

15. A pdf conjunta da variável aleatória (X,Y) é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & x \in (0,\infty), y \in (0,\infty) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule

(a) $P(X > 1|Y = 1)$

[SOLUÇÃO]

Sendo

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Calculamos a marginal

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}dx \\ &= 2e^{-2y}\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 2e^{-2y}(-e^{-x})_0^{\infty} \\ &= 2e^{-2y}(0 - (-e^0)) = 2e^{-2y} \end{aligned}$$

Sabendo disso, a pdf condicional conjunta é dada por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{2e^{-x}e^{-2y}}{2e^{-2y}} = e^{-x}$$

Conhecendo a pdf conjunta, temos que

$$
\begin{aligned}
P(X > 1|Y = 1) &= \int_{\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{1}^{\infty} e^{-x}dx \\
&= [-e^{-x}]_1^{\infty} = 0 - (-e^{-1}) = e^{-1}
\end{aligned}
$$

(b) $P(X < a)$

[SOLUÇÃO]

Como sabemos que

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \int_{0}^{a} f_X(x)dx$$

precisamos da marginal $f_X(x)$, dada por

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}dy \\
&= e^{-x}\int 2e^{-2y}dy
\end{aligned}
$$

Para a integral, temos

$$\int 2e^{-2y}dy = 2\int e^{-2y}dy = 2\frac{e^{-2y}}{-2} = -e^{-2y}\Big|_0^{\infty} = 1$$

Logo

$$f_X(x) = e^{-x}$$

Assim

$$P(X < a) = \int_0^a e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^a = -(e^{-a} - 1) = 1 - e^{-a}$$

(c) $P(X < 2|Y = y)$

(d) $P(Y > 1|X = x)$

(e) $P(X < 2|0 < Y < 3)$

(f) $E[X]$ e $E[Y]$

16. Suponha que a probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 6xy(2 - x - y) & 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a esperança condicional de X dado $Y = y$, onde $0 < y < 1$.

[SOLUÇÃO]

Sabemos que a esperança $E[X] = \int xf(x)dx$. Para a esperança condicional, precisamos da pdf condicional de modo que

$$E[X|Y=y] = \int xf_{X|Y}(x|y)dx$$

Sabendo a pdf conjunta, temos que

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Para isso, precisamos da probabilidade marginal $f_Y(y)$ dada por

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int f(x,y)dx = \int_0^1 6xy(2-x-y)dx \\
&= 6y\int_0^1 x(2-x-y)dx = 6y\left[2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - y\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= 6y[1-1/3-y/2] = 4y-3y^2
\end{aligned}$$

Agora nossa pdf condicional é dada por

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{6xy(2-x-y)}{4y-3y^2} = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y}$$

E por fim, a esperança condicional

$$\begin{aligned}
E[X|Y=y] &= \int x\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}dx = \frac{6}{4-3y}\int_0^1 x^2(2-x-y)dx \\
&= \frac{6}{4-3x}\left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - y\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{6}{4-3x}(2/3-1/4-y/3) \\
&= \frac{6}{4-3x}\left[\frac{8-3y-3}{12}\right]
\end{aligned}$$

17. A probabilidade conjunta de X e Y é dada abaixo. Determine $E[e^{x/2}|Y=1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} (1/2)ye^{-xy} & 0<x<\infty; 0<y<2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

[SOLUÇÃO]

Sabendo que $E[X=x|Y=y] = \int xf_{X|Y}(x,y)dx$, para $X=g(x)$ vale que

$$E[X=g(x)|Y=y] = \int g(x)f_{X|Y}(x,y)dx$$

Para isso, obtemos a pdf condicional via

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Calculamos a marginal em Y na forma

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int f(x,y)dx = \int_0^\infty \frac{1}{2} y e^{-xy} dx = \frac{y}{2}\int_0^\infty e^{-xy}dx \\
&= \frac{y}{2}\left[\frac{e^{-xy}}{-y}\right]_0^\infty = \frac{y}{2}\left[0 - \frac{1}{-y}\right] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Assim, a pdf condicional é dada por

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{(1/2)ye^{-xy}}{1/2} = ye^{-xy} \implies \\
f_{X|Y}(x|1) &= e^{-x}
\end{aligned}$$

E portanto, nossa esperança condicional vale

$$\begin{aligned}
E[X = e^{x/2}|Y = 1] &= \int_0^\infty e^{x/2}e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x/2}dx \\
&= \left.\frac{e^{-x/2}}{(-1/2)}\right|_0^\infty = 2(0 - 1/(-1/2)) \\
&= 2
\end{aligned}$$