Teoría de Grafos y Algoritmia

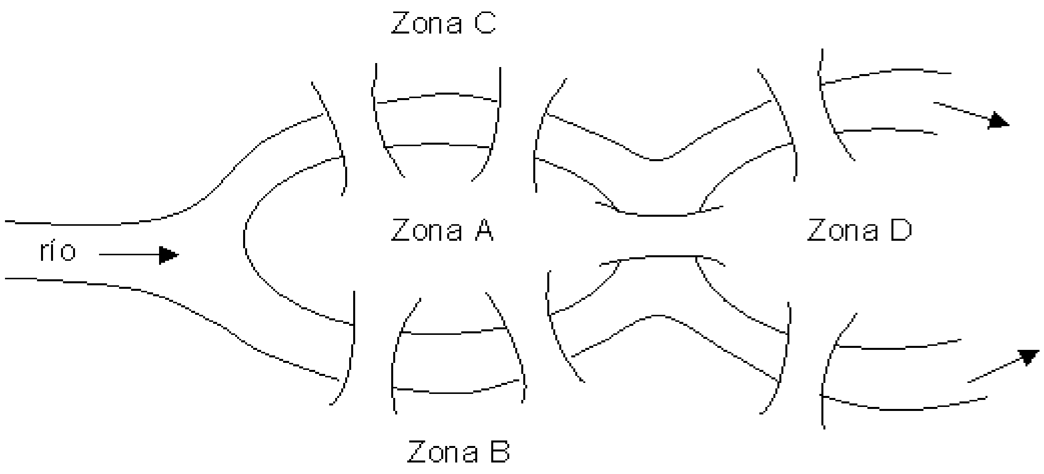
Parte 1: Teoría de Grafos

Topicos

- Introducción.
- Definición
- Tipos
- Terminología
- Caminos y Ciclos.

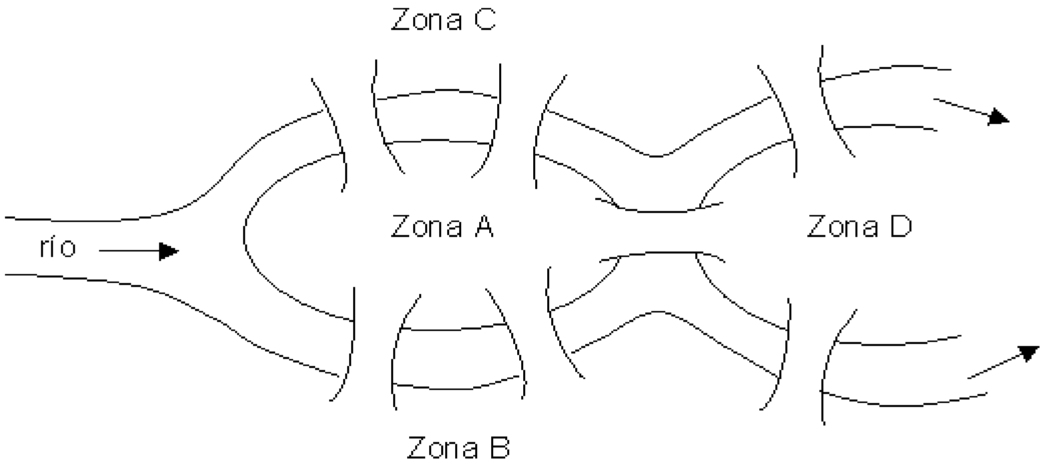
Teoría de Grafos - Introducción

El primer ejemplo de trabajo con grafos fue este trabajo que surgió para resolver un problema en la ciudad de Königsberg (Rusia). La ciudad estaba dividida en cuatro partes por dos brazos del río Pregel estando conectadas por siete puentes.



Teoría de Grafos - Introducción

La pregunta que se hizo L. Euler fue: ¿Es posible recorrer los siete puentes pasando por todos ellos una única vez, partiendo y llegando al mismo sitio?



Teoría de Grafos - Introducción

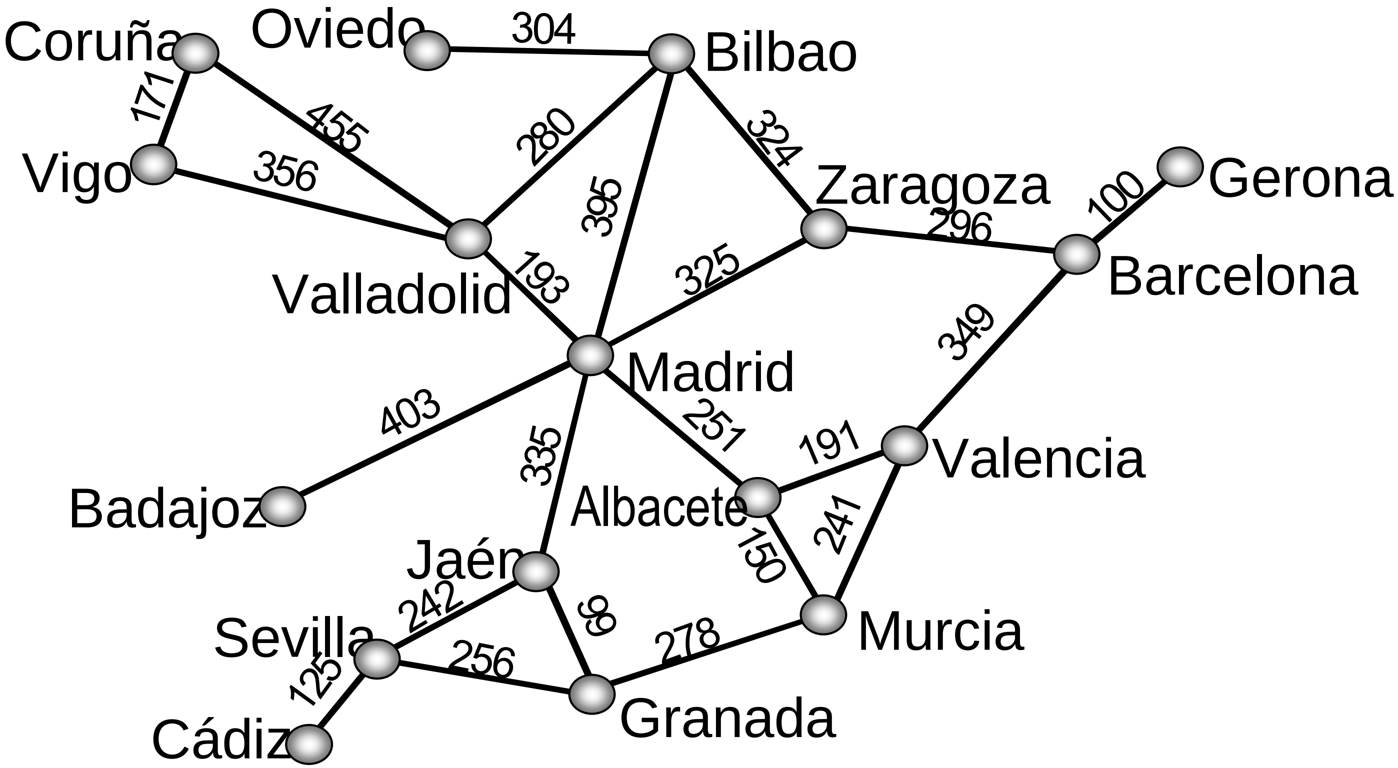
Los grafos se usan para modelar problemas definidos en términos de relaciones o conexiones entre objetos.

Tienen un amplio uso para representar redes de todo tipo:

- transporte (tren, carretera, avión),
- servicios (comunicación, eléctrica, gas, agua),
- de actividades en el planeamiento de proyectos, etc.

Teoría de Grafos - Introducción

Ejemplo: Grafo de carreteras entre ciudades.



Teoría de Grafos - Introducción

Ejemplo: Grafo de carreteras entre ciudades.

- ¿Cuál es el camino más corto de Murcia a Badajoz?
- ¿Existen caminos entre todos los pares de ciudades?
- ¿Cuál es la ciudad más lejana a Barcelona?
- ¿Cuál es la ciudad más céntrica?
- ¿Cuántos caminos distintos existen de Sevilla a Zaragoza?
- ¿Cómo hacer un tour entre todas las ciudades en el menor tiempo posible?

Teoría de Grafos - Definición

Informalmente, un grafo es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones entre pares de elementos de un conjunto.

Teoría de Grafos - Definición

Formalmente, un **Grafo** G es un par (V,E) donde:

- $V = \{v1, \ldots, vn\}$ es un conjunto de vértices o nodos;
- $E = \{e1, \ldots, em\}$ es un conjunto de aristas o lados o arcos, con cada $ek \in \{vi, vj\}$, con $vi, vj \in V$, $vi \neq vj$.

Identifique los conjuntos V y E en el ejemplo dado en el slide 5.

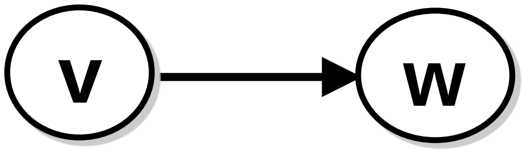
Teoría de Grafos – Tipos de Grafo

Grafos dirigidos (o digrafos).

Las aristas son pares ordenados, es decir, no es lo mismo el lado `(v, w)` que el lado `(w, v)`.

Por ejemplo, si tenemos el lado `(v, w)` podemos decir que `v` es el vértice de origen y, `w` es el vértice destino.

En este caso, se grafica de la siguiente manera, con una flecha en el lado indicando la orientación del mismo.

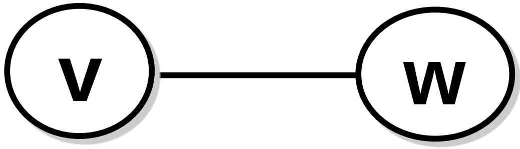


Teoría de Grafos – Tipos de Grafo

Grafo no dirigido.

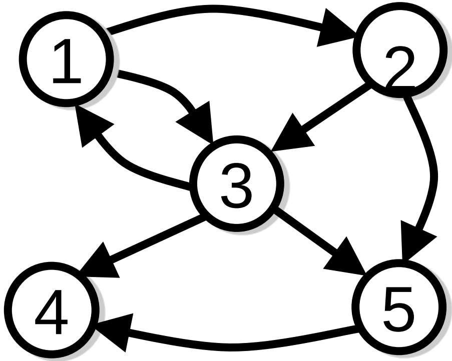
Cuando no importan la dirección de las aristas, el conjunto de lados del grafo, es un conjunto de pares no ordenados, es decir, hablar de un lado como `{v, w}` es lo mismo que hablar del lado `{w, v}`.

En este caso, que no tenemos un orden, el lado se representa, directamente con una línea que una los vértices.



Teoría de Grafos – Terminología

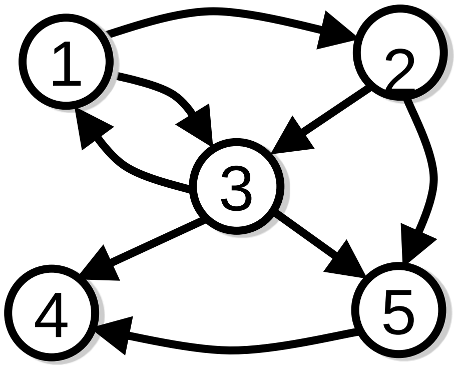
Consideremos el siguiente grafo:



Cuando tenemos un lado como `(1, 3)`, decimos que la arista es incidente con los vértices `1` y `3`.

Teoría de Grafos – Terminología

También, con el mismo grafo, podemos afirmar que:



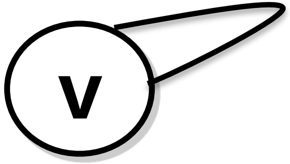
el vértice 1 es adyacente hacia 2 o, que el vértice 2 es adyacente desde 1.

Teoría de Grafos – Tipos de Grafo

Un grafo (dirigido o no) que tenga más de un lado que una un mismo par de vértices (con la misma orientación, en caso de ser dígrafo) se dice que tiene lados paralelos. Por ejemplo:

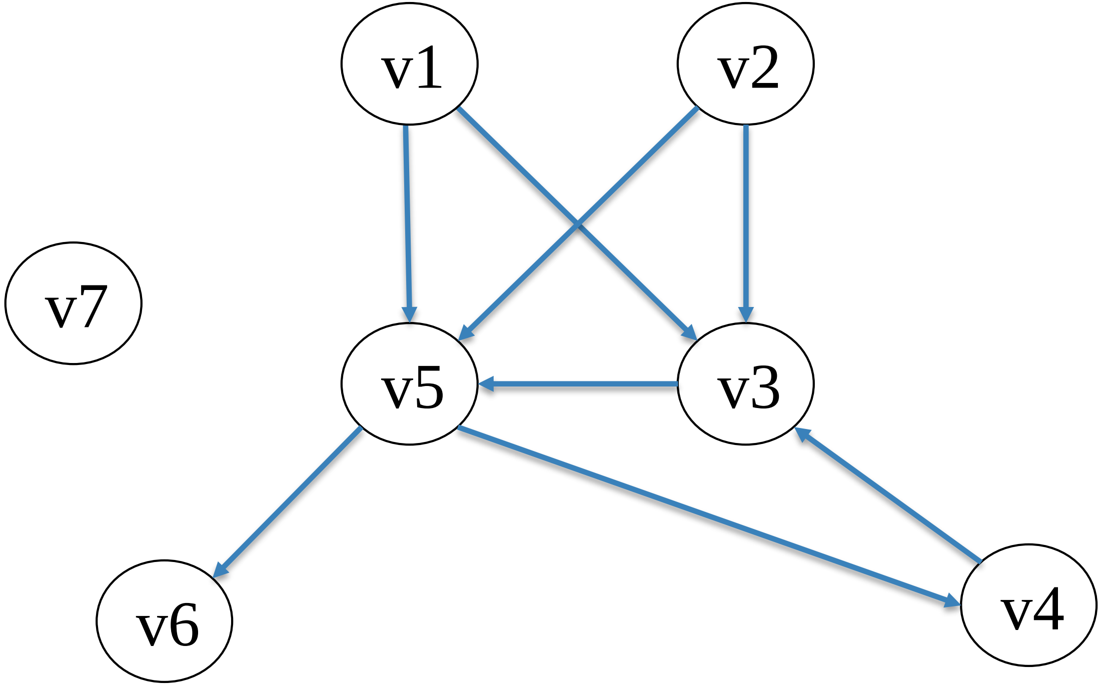
Teoría de Grafos – Tipos de Grafo

Un grafo (dirigido o no) que tenga algún lado de la forma `(v, v)` se dice que tiene bucles (o lazos). Por ejemplo:



Teoría de Grafos – Tipos de Grafo

Un vértice como el vértice v7 del siguiente grafo (dirigido o no) se dice que es un vértice aislado.



Teoría de Grafos – Convención

En general, si no se especifica que un grafo G es dirigido o no, supondremos que es no dirigido.

Cuando no contiene lazos, decimos que es un grafo sin lazos.

Cuando no cuenta con lazos ni con lados paralelos se dice que es un grafo simple.

Un grafo que puede contar con lados paralelos o lazos se dice que es un Multigrafo.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

Sean x e y vértices (no necesariamente distintos) de un grafo no dirigido $G=(V,E)$. Un camino x-y en G es una sucesión alternada finita (sin lazos):

$$x=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n=y$$

de vértices, donde el par $\{x_i,\ x_{(i+1)}\},\ i:0..n-1$ pertenece a E.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

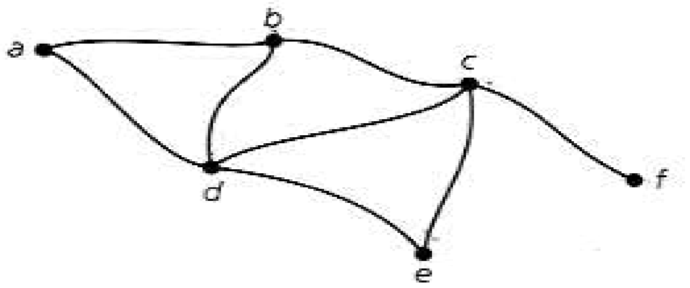
La longitud de un camino, n, es el número de aristas que forman el camino.

Si n es igual a 0, no existen aristas, x=y, y el camino se denomina trivial. Estos caminos, en general, no los tomaremos en cuenta.

Cualquier camino x-y no trivial donde x=y es un camino cerrado. En caso contrario, el camino es abierto.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

Considere el siguiente grafo y analice los siguientes 3 caminos abiertos:



1. `a,b,d,c,e,d,b` : este es un `camino a-b` de longitud `6` en el que se repiten los vértices `d` y `b` así como el lado `{b,d}` (o `{d,b}`).

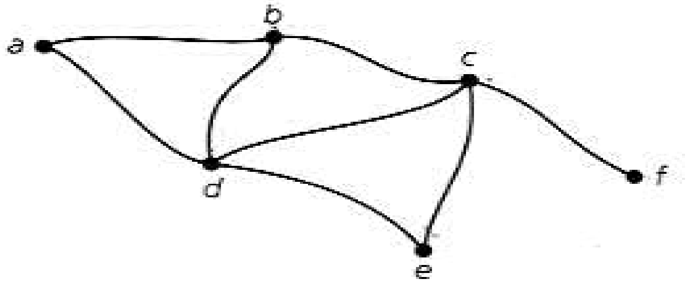
2. `b,c,d,e,c,f` : acá tenemos un `camino b-f` de longitud `5` donde se repite el vértice `c` sin que se repitan aristas.

3. `f,c,e,d,a` : es este caso el `camino f-a` tiene longitud `4`, sin repetición de vértices o aristas.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

Como el grafo anterior es no dirigido, el resultado del camino hallado en primer lugar también es un `camino b-a`.

Además, podemos marcar que el camino formado por: `b,c,d,b` proporciona un `camino b-b cerrado`.



Ahora, veremos algunos tipos especiales de caminos.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

Consideremos un `camino x-y` en un grafo no dirigido `G=(V,E)`.

a. Si no se repite ninguna arista en el `camino x-y`, entonces el camino es un `recorrido x-y`. Un `recorrido x-x cerrado` es un circuito.

b. Cuando ningún vértice del `camino x-y` se presenta más de una vez, el camino es un `camino simple x-y`. El término ciclo se usa para describir un `camino simple cerrado x-x`. Cuando hablemos de ciclo siempre estaremos suponiendo la presencia de, al menos 3 lados en el mismo.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

Sean a y b dos vértices distintos de un grafo G no dirigido. La distancia entre a y b se define como la longitud del camino simple más corto de a a b (si $a = b$ la distancia se define como 0).

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

Cuando estemos en un grafo dirigido, usaremos el adjetivo dirigido, como se usa, por ejemplo, en caminos dirigidos, caminos simples dirigidos y ciclos dirigidos.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

Vértice(s) repetido(s)	Arista(s) repetida(s)	Abierto	Cerrado	Nombre
Sí	Sí	Sí	-	Camino
Sí	Sí	-	Sí	Camino (cerrado)
Sí	No	Sí	-	Recorrido
Sí	No	-	Sí	Circuito
No	No	Sí	-	Circuito simple
No	No	-	Sí	Ciclo

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

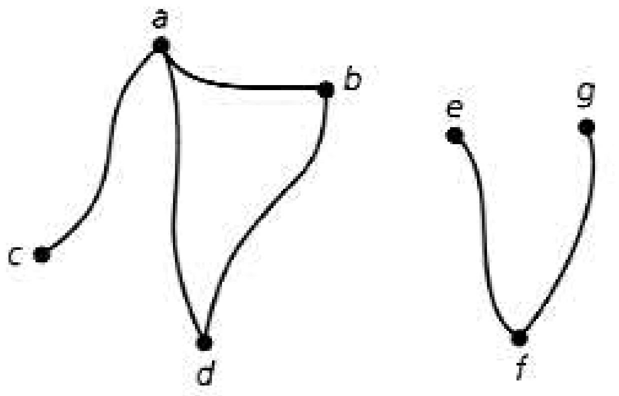
Sea `G=(V,E)` un grafo no dirigido, decimos que `G` es `Conexo` si existe un camino simple entre cada par de vértices distintos de `G`.

Sea `G=(V,E)` un grafo dirigido. Su grafo no dirigido asociado es el grafo obtenido de `G` si no se tienen en cuenta las direcciones de las aristas. Si se obtiene más de una arista no dirigida de un par de vértices distintos de G, entonces sólo una de esas aristas se dibuja en el grafo no dirigido asociado. Cuando este grafo asociado es conexo, consideramos que el dígrafo G es conexo.

Un grafo que no es conexo es `disconexo`.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos

Analicemos el grafo que tenemos a continuación:



Este grafo no es conexo ya que, por ejemplo, no hay un camino simple para llegar de a hasta e. Sin embargo, el grafo está compuesto por piezas que son conexas; estas piezas se denominan Componentes del grafo.

Por lo tanto un grafo no dirigido $G=(V,E)$ es disconexo si y sólo si puede separarse en, al menos, dos piezas.

Un grafo es conexo si y sólo si tiene solamente una componente.

El número de componentes de un grafo G se denota como $\kappa(G)$.