Teoría de Grafos y Algoritmia

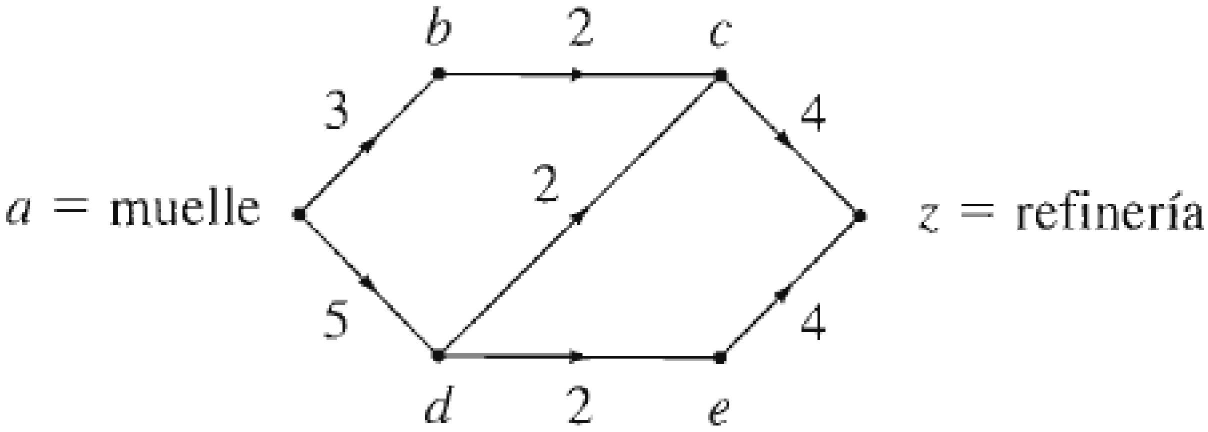
Teoría de Redes

Tópicos

- Red de Transporte
- Definiciones
- Red de Bombeo
- Red de Flujo de Tráfico
- Algoritmo del Flujo Máximo

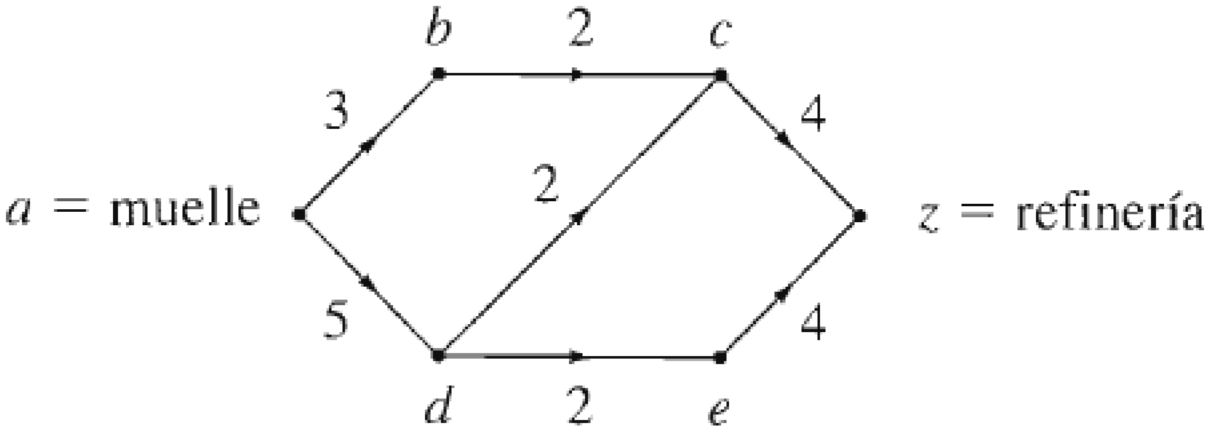
Red de Transporte

Consideremos el grafo dirigido de la siguiente figura, el cual representa una red de tuberías de petróleo. El petróleo se descarga en el muelle a y se bombea a través de la red hasta la refinería z.



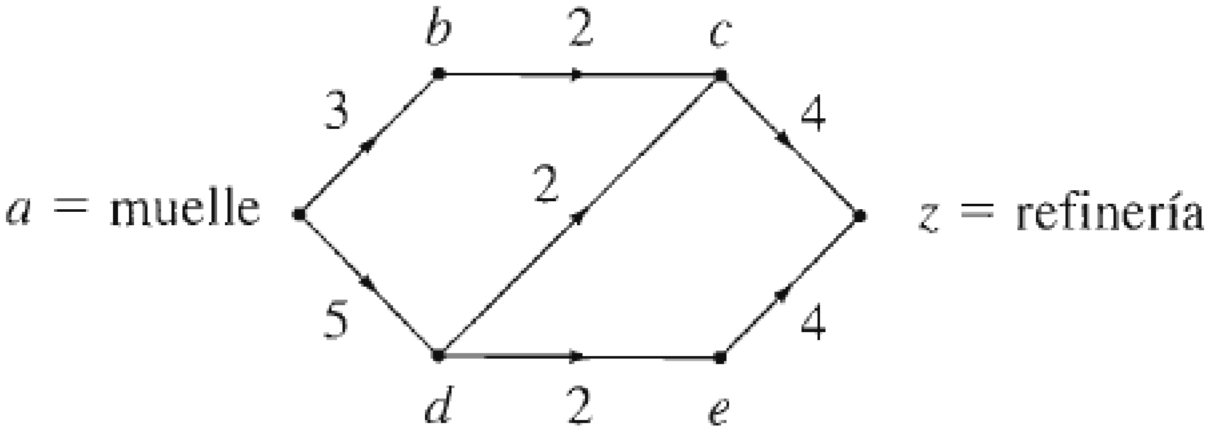
Red de Transporte

Los vértices b, c, d y e representan estaciones de bombeo intermedias. Las aristas dirigidas representan sub-tuberías del sistema y muestran la dirección en que puede fluir el petróleo. Las etiquetas sobre las aristas muestran las capacidades de las sub-tuberías.



Red de Transporte

El problema consiste en determinar una forma de maximizar el flujo del muelle a la refinería y calcular el valor de este flujo máximo.



Red de Transporte – Definición

Una Red de Transporte (o mis simple, una red) es una gráfica dirigida, simple, con pesos, que satisface:

- Un vértice fijo, la fuente, no tiene aristas de entrada
- Un vértice fijo, el sumidero (o destino), no tiene aristas de salida
- El peso de la arista dirigida (i, j) llamado la capacidad de (i, j) es un número no negativo.

Red de Transporte – Definición

Un Flujo en una red asigna un flujo en cada arista dirigida que no excede la capacidad de dicha arista. Además, se supone que el flujo de entrada a un vértice v, que no sea la fuente ni el sumidero, es igual al flujo de salida de v. La siguiente definición precisa estas ideas.

Red de Transporte – Definición

Sea G una red de transporte. Sea C_{ij} la capacidad de la arista dirigida (i,j). Un flujo F en G asigna a cada arista dirigida (i,j) un número no negativo F_{ij} tal que:

- $F_{ij} \leq C_{ij}$
- Para cada vértice que no sea la fuente ni el sumidero se cumple que

$$\sum_i F_{ij} = \sum_i F_{ji}$$

Para cualquier vértice j, podemos ver que $\sum_i F_{ij}$ es el flujo de entrada a j y, la suma $\sum_i F_{ji}$ es el flujo de salida de j.

La expresión anterior se llama Conservación del Flujo.

Red de Transporte – Definición

Dado un flujo F en una red, el flujo de salida de la fuente a es igual al flujo de entrada del sumidero z; es decir,

$$\sum_i F_{ai} = \sum_i F_{iz}$$

A esta suma se la llama el valor del flujo F.

Red de Transporte – Definición

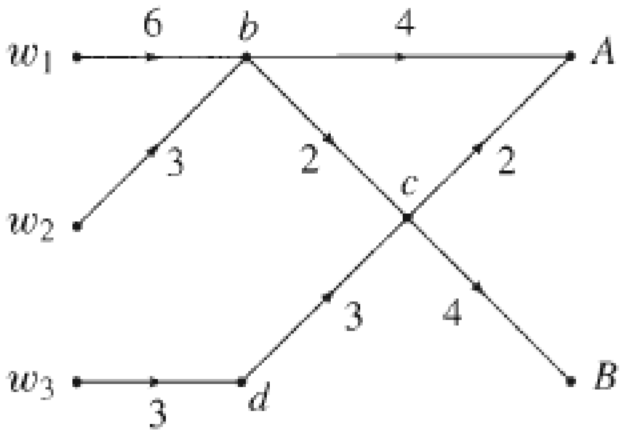
El problema de una red de transporte G se puede establecer así:

Determinar un flujo máximo en G; es decir, entre todos los flujos posibles en G, determinar un flujo F tal que el valor de F sea máximo.

En próximas slides daremos un algoritmo que resuelve este problema de manera eficiente.

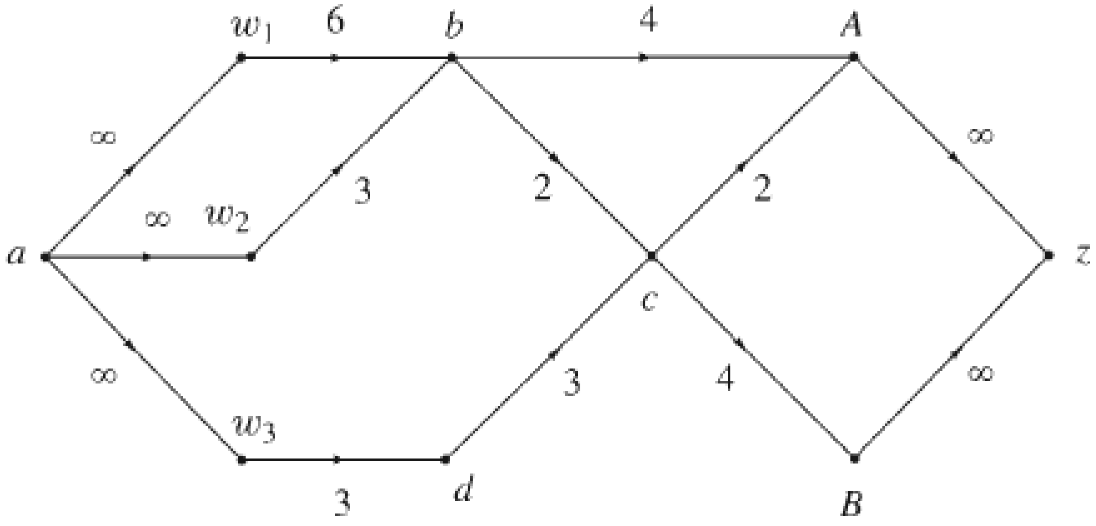
Red de Bombeo

La figura representa una red de bombeo por medio de la cual se envía agua a dos ciudades, A y B, desde tres pozos, w_1, w_2 y w_3. Las capacidades de los sistemas intermedios aparecen sobre las aristas. Los vértices b, c y d representan estaciones de bombeo intermedias. Modelar este sistema como una red de transporte.



Red de Bombeo

Para obtener una fuente y un sumidero fijos, podemos obtener una red de transporte equivalente, uniendo las fuentes en una súper-fuente y los sumideros en un súper-sumidero (como se muestra en la siguiente imagen). En la figura, ∞ representa una capacidad ilimitada.



Red de Flujo de Tráfico

Es posible ir de la ciudad A a la ciudad C directamente o pasar por la ciudad B. Durante el periodo de 6pm a 7pm los tiempos promedio de viaje son:

- A a B (15 minutos)
- B a C (30 minutos)
- A a C (30 minutos)

Las capacidades máximas de las carreteras son:

- A a B (3000 vehículos)
- B a C (2000 vehículos)
- A a C (4000 vehículos)

Representar el flujo de tráfico de A a C durante el periodo de 6pm a 7pm como una red.

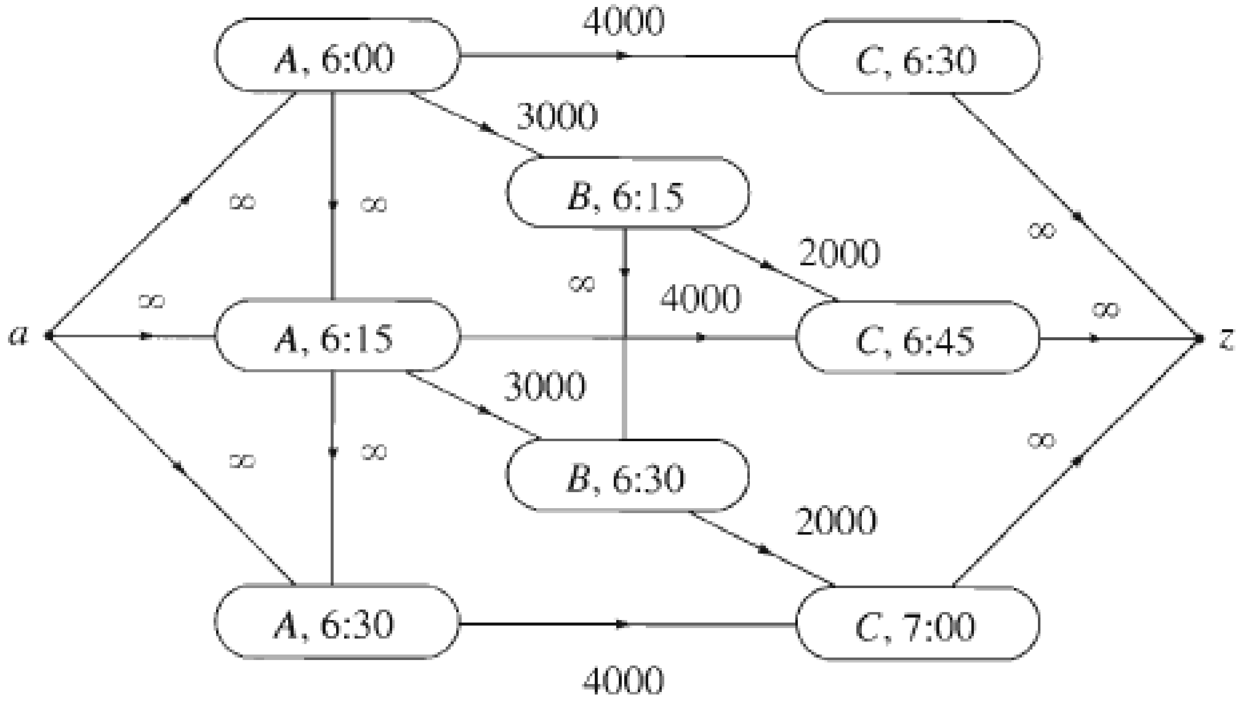
Red de Flujo de Tráfico

Un vértice representa una ciudad en un instante dado: una arista conecta el vértice (X,t_1) con (Y,t_2) si podemos salir de la ciudad X en el instante t_1 pm y llegar a la ciudad Y en el instante t_2 pm. La capacidad de una arista es la capacidad de la ruta.

Existen aristas de capacidad infinita que conectan a (A,t_1) con (A,t_2) y (B,t_1) con (B,t_2) para indicar que una cantidad arbitraria de autos puede esperar en la ciudad A o la ciudad B.

Por último, introducimos una súper-fuente y un súper-sumidero.

Red de Flujo de Tráfico



Algoritmo del Flujo Máximo

Si G es una red de transporte, un flujo máximo en G es un flujo con valor máximo. En general, existirán varios flujos con el mismo valor máximo. La idea fundamental para determinar el valor máximo es sencilla: comenzar con cierto flujo inicial e incrementar de manera iterativa el valor del flujo hasta que no pueda mejorarse más. El flujo resultante será entonces un flujo máximo.

Algoritmo del Flujo Máximo

Podemos considerar como flujo inicial aquél en el que el flujo en cada arista es igual a cero. Para incrementar el valor de un flujo dado, debemos determinar un camino de la fuente al sumidero e incrementar el flujo a lo largo de este camino.

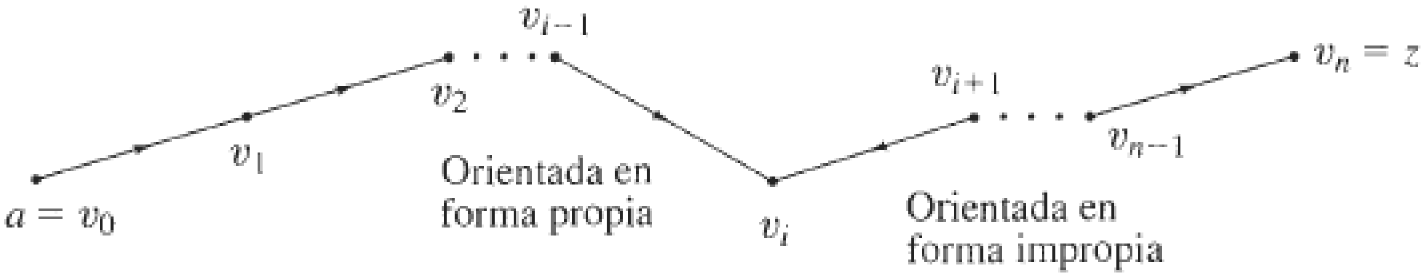
En este caso vamos a acordar la siguiente Terminología: G denota una red con fuente a, sumidero z y capacidad c.

Algoritmo del Flujo Máximo

Por el momento, consideraremos a las aristas de G no dirigidas, y sea:

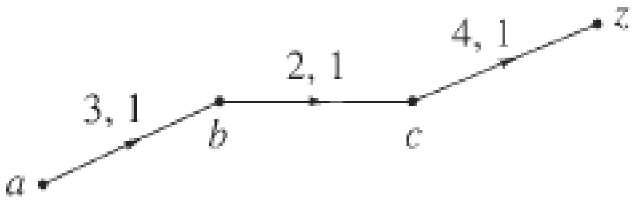
$$P = (v_0, v_1, \ldots, v_n),\ \ v_0 = a,\ \ v_n = z$$

un camino de a a z en este grafo no dirigido (todos los caminos harán referencia a un grafo no dirigido subyacente). Si una arista e en P está dirigida de v_{i-1} a v_i decimos que e está orientada en forma propia (respecto de P); en caso contrario, decimos que e está orientada en forma impropia (con respecto de P).

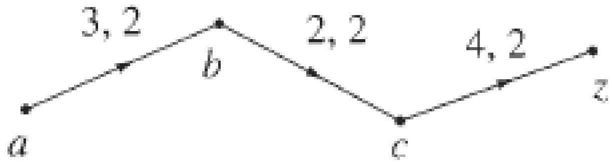


Algoritmo del Flujo Máximo

Consideremos el camino de a a z de la figura:

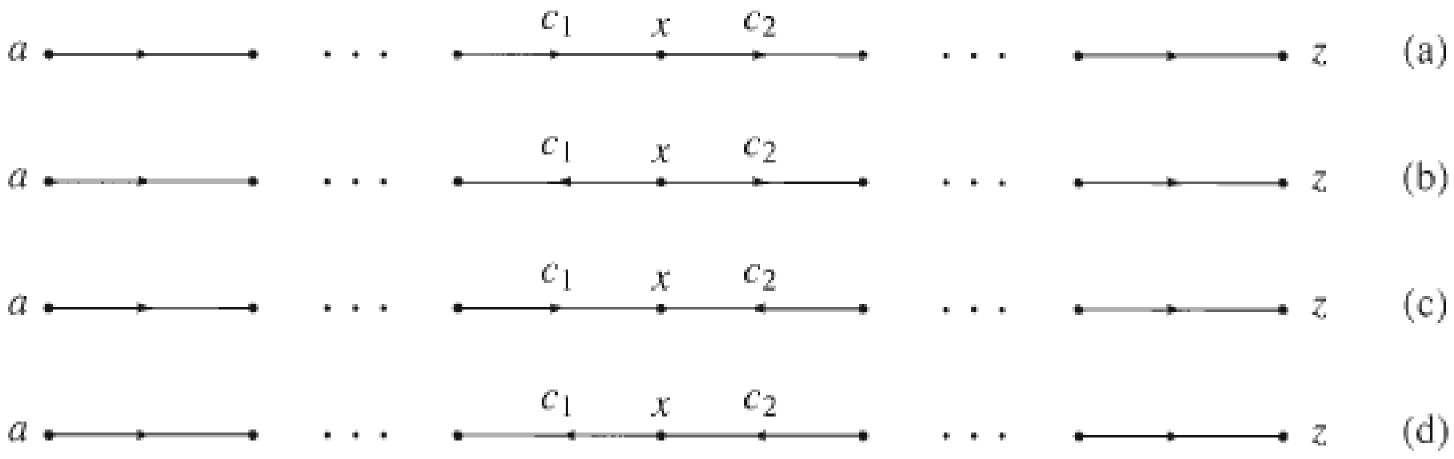


Todas las aristas de P están orientadas en forma propia. El valor del flujo puede incrementarse en 1, como podemos ver en la siguiente figura.



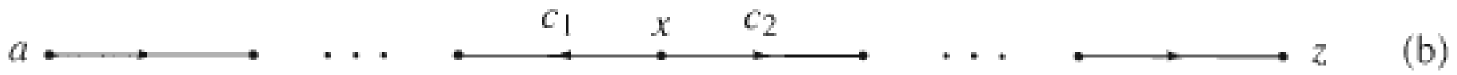
Algoritmo del Flujo Máximo

También es posible incrementar el flujo en ciertos caminos de la fuente al sumidero que tengan aristas orientadas en forma propia e impropia. Sea P un camino de a a z y sea x un vértice en P que no sea a ni z (véase la siguiente figura). Existen cuatro posibilidades para las orientaciones de las aristas e_1 y e_2 incidentes en x.



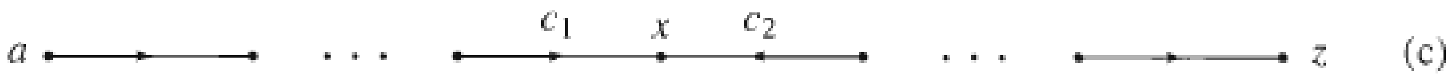
Algoritmo del Flujo Máximo

a) Ambas aristas están orientadas en forma propia. En este caso, si incrementamos el flujo en cada arista en Δ, el flujo de entrada en x seguirá siendo igual al flujo de salida de x.

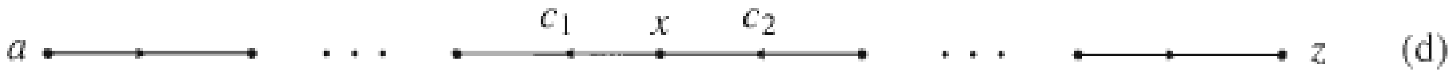


b) Si incrementamos el flujo en e_2 en Δ, debemos disminuir el flujo en e_1 en Δ de modo que el flujo de entrada en x siga siendo igual al flujo de salida en x.

Algoritmo del Flujo Máximo



c) Es análogo al anterior, excepto que incrementamos el flujo en e_1 en Δ y disminuimos el flujo en e_2 en Δ.



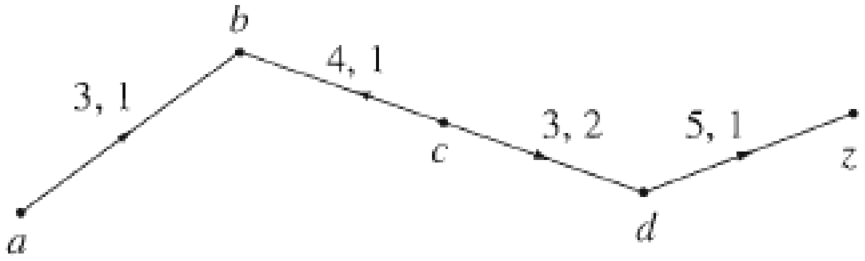
d) Si incrementamos el flujo en e_2 en Δ, debemos disminuir el flujo en e_1 en Δ de modo que el flujo de entrada en x siga siendo igual al flujo de salida en x.

Algoritmo del Flujo Máximo

Por supuesto, para realizar estas alteraciones, debemos tener un flujo menor que la capacidad en una arista orientada en forma propia y un flujo distinto de cero en una arista orientada en forma impropia.

Algoritmo del Flujo Máximo

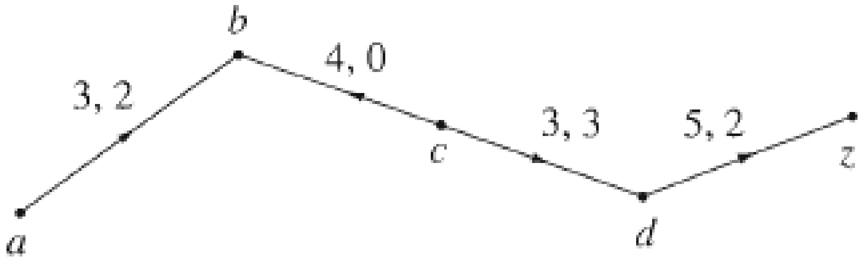
Consideremos el camino de a a z de la siguiente figura:



Las aristas (a, b), (c, d), (d, z) están orientadas en forma propia y la arista (c, b) está orientada en forma impropia.

Algoritmo del Flujo Máximo

Disminuimos el flujo en 1 en la arista orientada en forma impropia (c, b) y aumentamos el flujo en 1 en las aristas orientadas en forma propia (a, b), (c, d) y (d, z) (véase la figura). El valor del nuevo flujo es 1 más que el valor del flujo original.



Algoritmo del Flujo Máximo

Sea P un camino de a a z en una red G tal que:

a. Para cada arista (i, j) de P, orientada en forma propia $F_{ij} \leq C_{ij}$

b. Para cada arista (i, j) de P, orientada en forma impropia $0 < F_{ij}$

Sea $\Delta = \min X$, donde X consta de $C_{ij} - F_{ij}$ para las aristas (i, j) de P orientadas en forma propia y F_{ij} para las aristas (i, j) de P orientadas en forma impropia. Definimos:

$$F_{ij}^{*} = \begin{cases} F_{ij} & en\ caso\ contrario, es\ decir, si(i, j)\ no\ está\ en\ P \\ F_{ij} + \Delta & si\ (i, j)\ está\ orientado\ en\ forma\ propia\ en\ P \\ F_{ij} - \Delta & si(i, j)\ está\ orientado\ en\ forma\ impropia\ en\ P \end{cases}$$

Entonces F^{*} es un flujo cuyo valor es Δ unidades mayor que el valor de F.