Teoría de Grafos y Algoritmia

Parte 2: Teoría de Grafos

Topicos

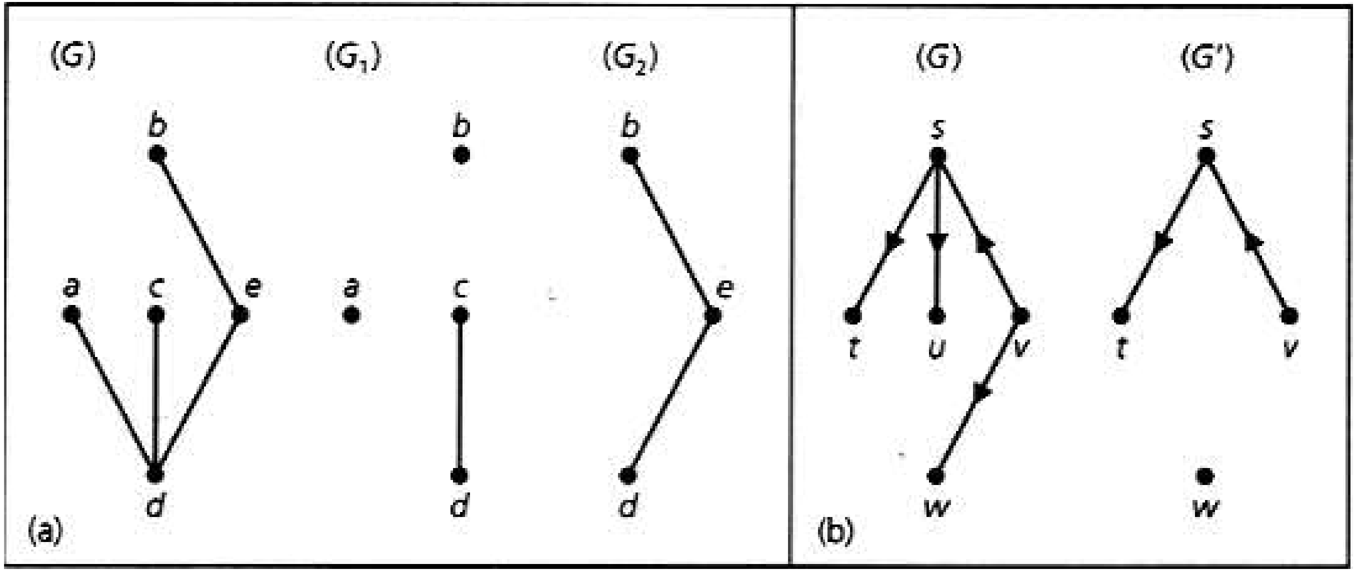
- Subgrafos
- Complemento
- Grado o valencia de un vértice
- Recorridos y circuitos eulerianos
- Caminos y ciclos hamiltonianos

Teoría de Grafos – Subgrafos

Si $G = (V, E)$ es un grafo (dirigido o no), entonces $G_1 = (V_1, E_1)$ es un subgrafo de G si $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$, donde cada arista de E_1 es incidente con los vértices de V_1.

Teoría de Grafos – Subgrafos

Acá podemos ver dos ejemplos donde tenemos dos grafos y, algunos subgrafos de ellos.

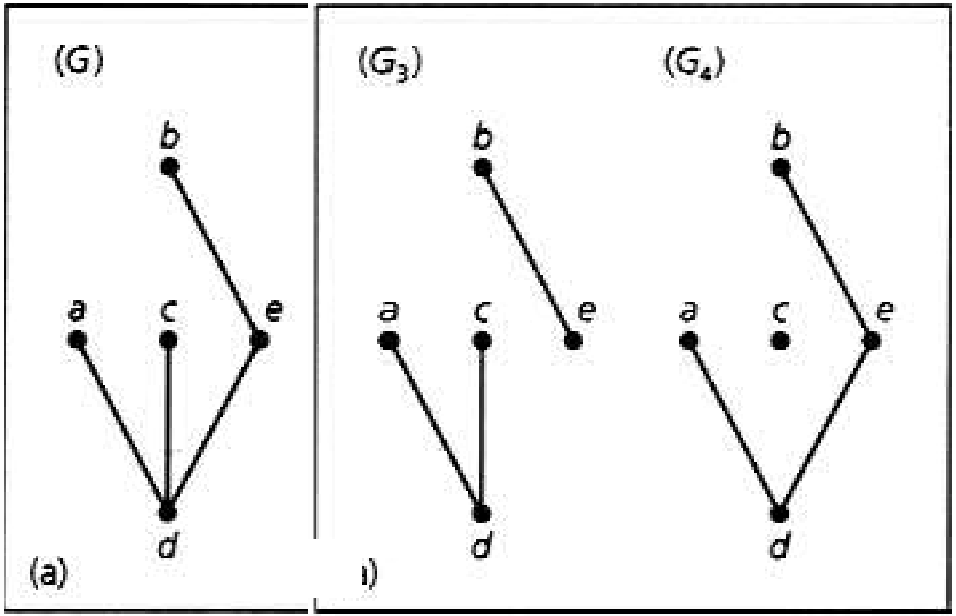


Teoría de Grafos – Subgrafos

Si $G = (V, E)$ es un grafo (dirigido o no) y sea $G_1 = (V_1, E_1)$ un subgrafo de G. Si $V_1 = V$ decimos que G_1 es un subgrafo recubridor de G.

Teoría de Grafos – Subgrafos

Acá podemos ver al grafo del ejemplo anterior con dos subgrafos recubridores.



Teoría de Grafos – Subgrafos

Si $G = (V, E)$ es un grafo (dirigido o no). Si $\emptyset \neq U \subseteq V$, el subgrafo de G inducido por U es el subgrafo cuyo conjunto de vértices es U y que contiene todas las aristas (de G) de la forma:

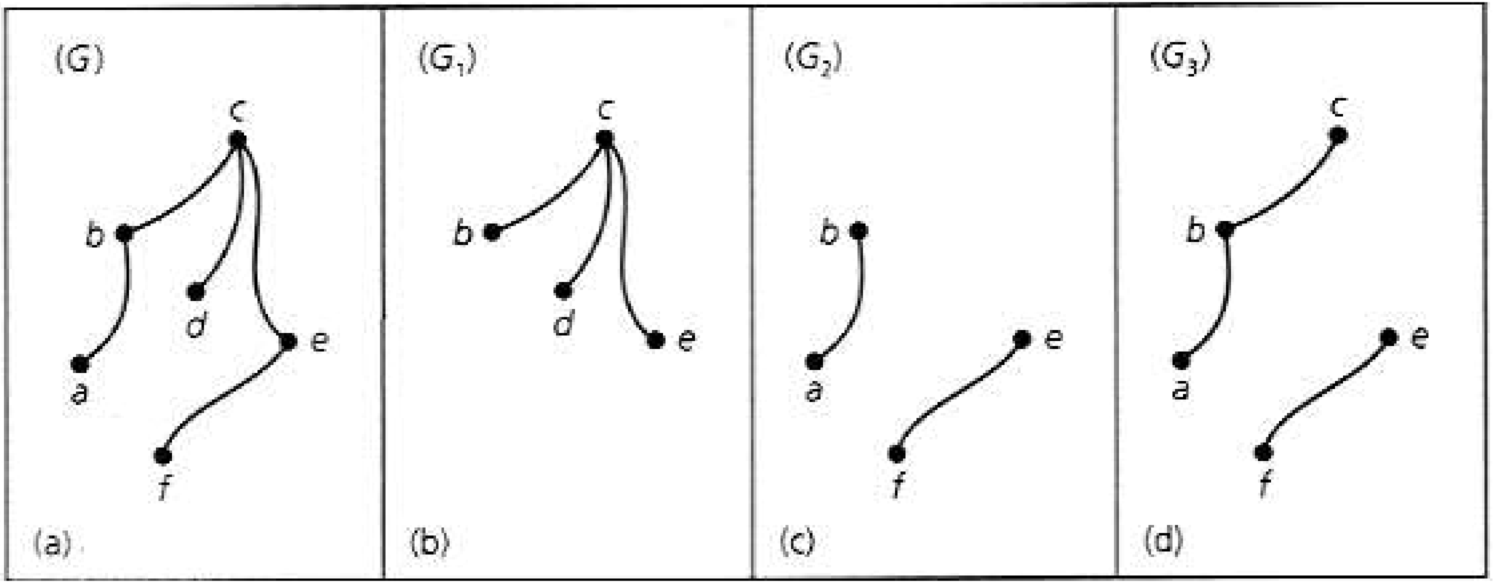
a. (x, y) para $x, y \in U$ (si G es dirigido)

$b.$ $\{x, y\}$ para $x, y \in U$ (si G es no dirigido)

Denotamos este subgrafo con $\langle U \rangle$.

Teoría de Grafos – Subgrafos

Los subgrafos que se ven en la parte b y c son inducidos sobre el grafo de la parte a. El grafo de la parte b es: $\langle\{b, c, d, e\}\rangle$ mientras que el de la parte c es: $\langle\{a, b, e, f\}\rangle$. El de la parte d no es inducido. ¿Por qué?

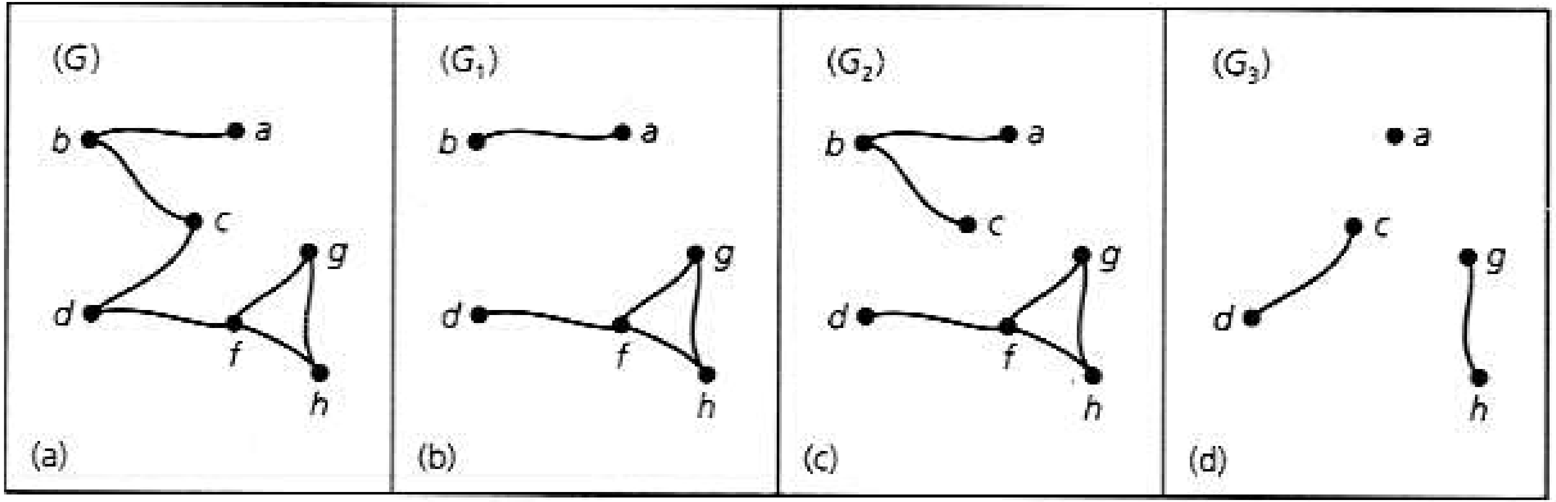


Teoría de Grafos – Subgrafos

Sea v un vértice en un grafo $G = (V, E)$ (dirigido o no). El subgrafo de G denotado por $\mathrm{G} - v$ tiene el conjunto de vértices $V_1 = V - \{v\}$ y el conjunto de aristas $E_1 \subseteq E$, tal que E_1 contiene todas las aristas de E excepto las incidentes con el vértice v. (Por lo tanto, podemos decir que $\mathrm{G} - v$ es el subgrafo de G inducido por V_1.

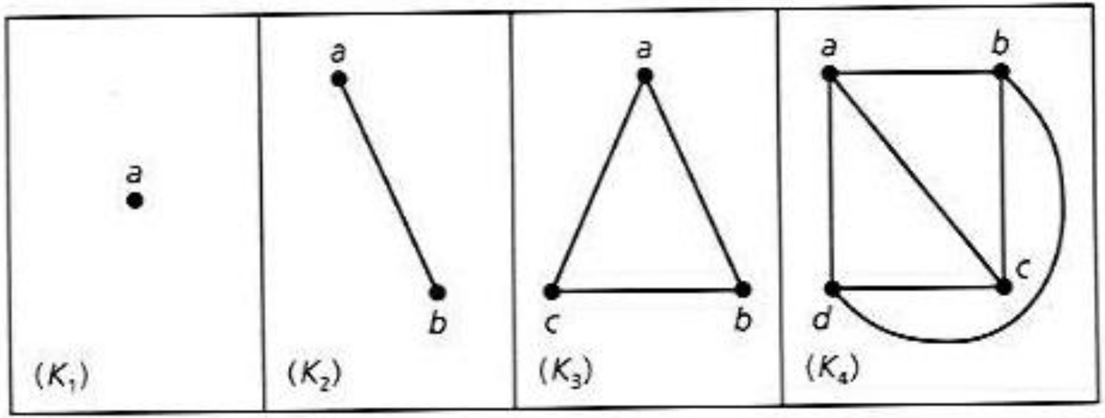
Teoría de Grafos – Subgrafos

Aquí podemos ver que $G_1 = G - c$, $G_2 = G - \{c, d\}$. En el tercer ejemplo, podemos ver que pueden extenderse las ideas anteriores para eliminar más de un vértice (arista). Entonces este grafo sería $G_3 = (G - b) - f = (G - f)$ –b



Teoría de Grafos – Subgrafos

Sea V un conjunto de n vértices. El grafo completo sobre V, que se nota como K_n, es un grafo no dirigido sin lazos tal que para todos $a, b \in V, a \neq b$ existe una arista $\{a, b\}$.

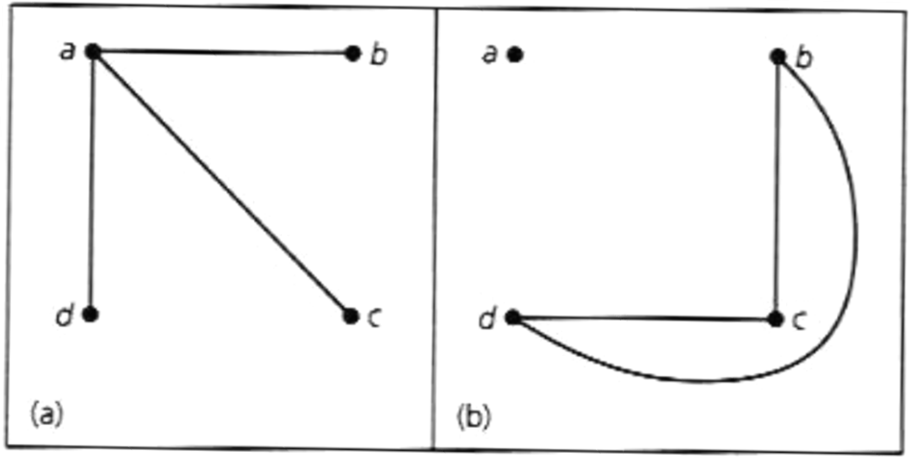


Teoría de Grafos – Subgrafos

Sea G un grafo no dirigido conjunto de n vértices. El grafo complementario de G, que se nota como $\bar{G}$, es el subgrafo de K_n formado por los n vértices de G y todas las aristas que no están en G. (Si $G = K_n$ entonces $\bar{G}$ es un grafo con n vértices y ninguna arista. A este grafo se lo llama Grafo Nulo).

Teoría de Grafos – Subgrafos

Aquí podemos ver un grafo G (parte a) y, su Complementario (parte b).



Teoría de Grafos – Subgrafos

Un grafo $G = (V, E)$ es Bipartito si existen V_1, V_2 tales que

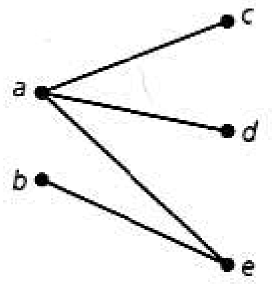
- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

y, cada arista es de la forma: $\{a, b\}$ con $\mathrm{a} \in V_1$ y $\mathrm{b} \in V_2$.

Si cada vértice de V_1 está unido con cada vértice de V_2, entonces tenemos un grafo Bipartito Completo. En este caso, si V_1 tiene m vértices y, V_2 tiene n vértices entonces el grafo se nota como: $K_{m,n}$.

Teoría de Grafos – Subgrafos

El siguiente, es un ejemplo de un grafo bipartito. El cuál no es completo ya que el vértice b debería estar unido con los vértices c y d.

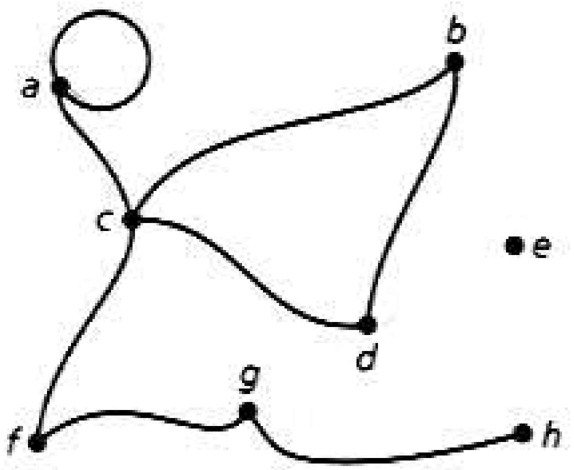


Teoría de Grafos – Grado de un vértice

Sea G un grafo o multigrafo no dirigido. Para cualquier vértice v de G, el grado o valencia de v, que se nota como $\mathrm{grad}(v)$ o $\delta(v)$, es el número de aristas en G que son incidentes con v. En este caso, un lazo en un vértice v se considera como dos aristas incidentes en v.

Teoría de Grafos – Grado de un vértice

Para el siguiente grafo podemos ver que:



- $\delta(b)=\delta(d)=\delta(f)=\delta(g)=2$
- $\delta(e)=0$
- $\delta(h)=1$
- $\delta(c)=4$
- $\delta(a)=3$

Acá vemos que $\delta(a)$ es 3 por tener un bucle.

Como h tiene grado 1, se le dice vértice colgante.

Teoría de Grafos – Grado de un vértice

Si $G=(V,E)$ es un grafo o multigrafo no dirigido, entonces:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \times |E|$$

Como consecuencia de esto, podemos concluir que el número de vértices de grado impar que pueden existir en cualquier grafo o multigrafo no dirigido deber ser par.

Teoría de Grafos – Grado de un vértice

Un grafo o multigrafo no dirigido donde los vértices tienen el mismo grado, se denomina, grafo regular. Si $\delta(v)=k$ para todos los vértices v, entonces el grafo es k-regular.

¿Es posible tener un grafo 4-regular con 10 aristas?

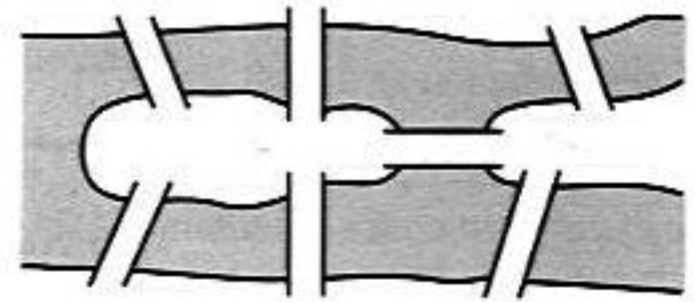
Teoría de Grafos – Recorridos y circuitos Eulerianos

Ahora, veremos la razón por la que Euler desarrolló la idea de grado de un vértice: para resolver el problema de los 7 puentes de Königsberg.

¿En qué consistía este problema?

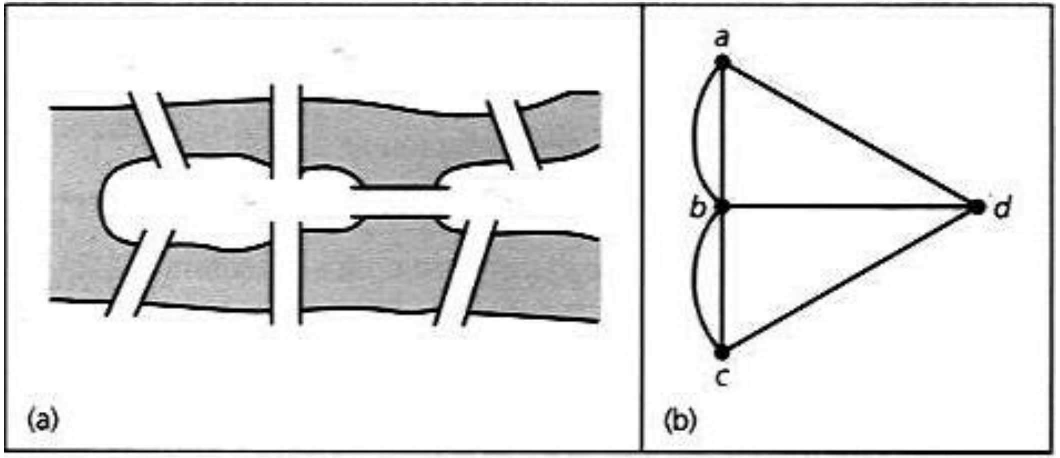
Teoría de Grafos – Recorridos y circuitos Eulerianos

Durante el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg estaba dividida en 4 zonas por el río Pregel. 7 puentes comunicaban esas regiones como podemos ver en la siguiente imagen



Se decía que los habitantes hacían paseos dominicales tratando de encontrar una forma de caminar por la ciudad cruzando cada puente exactamente una vez y regresando al lugar donde se había iniciado el paseo.

Con el fin de determinar si existía o no dicho circuito, Euler representó las 4 zonas de la ciudad y los siete puentes con el siguiente multigrafo:



Encontró 4 vértices con $\delta(a)=\delta(c)=\delta(d)=3$ y, $\delta(b)=5$. También encontró que la existencia de tal circuito dependía del número de vértices de grado impar del grafo.

Antes de ver el resultado general, daremos la siguiente definición:

Sea $G=(V,E)$ un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados. Entonces G tiene un circuito euleriano si existe un circuito en G que recorre cada arista del grafo exactamente una vez. Si existe un recorrido abierto de a á b en G que recorre cada arista de G exactamente una vez, este recorrido se llamará recorrido euleriano.

Entonces, el problema de los 7 puentes quedará resuelto si encontramos una forma de caracterizar los grafos que tienen un circuito euleriano.

Teoría de Grafos – Recorridos y circuitos Eulerianos

Sea `G=(V,E)` un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados. Entonces `G` tiene un circuito euleriano si y solo si, `G` es conexo y todo vértice de `G` tiene grado par.

Como consecuencia de esto, también podemos caracterizar a los grafos que cuenten con un recorrido euleriano:

Sea `G=(V,E)` un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados. Entonces `G` tiene un recorrido euleriano si y solo si, `G` es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Teoría de Grafos – Recorridos y circuitos Eulerianos

Sea `G=(V,E)` un grafo o multigrafo dirigido. Para cualquier vértice `v` de `V`,

a. el grado o valencia de entrada de v, que se nota como `ge(v)` o $\delta^+(v)$, es el número de aristas de `G` que llegan a v.

b. el grado o valencia de salida de v, que se nota como `gs(v)` o $\delta^-(v)$, es el número de aristas de `G` que parten de v.

Si el grafo o multigrafo dirigido tiene uno o más lazos, cada lazo de un vértice dado v contribuye con una unidad a $\delta^+(v)$ y $\delta^-(v)$.

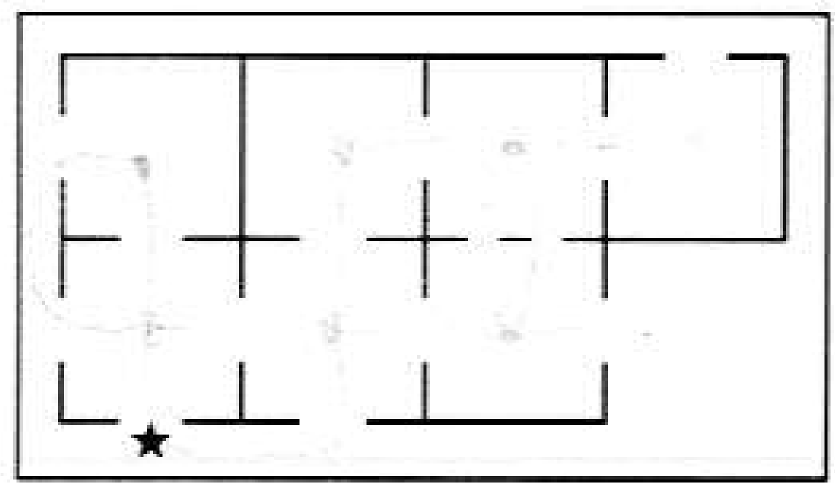
Teoría de Grafos – Recorridos y circuitos Eulerianos

Como consecuencia de esto, establecemos el criterio para afirmar la existencia de un circuito euleriano en un grafo o multigrafo dirigido.

Sea `G=(V,E)` un grafo o multigrafo dirigido sin vértices aislados. Entonces `G` tiene un circuito euleriano dirigido si y solo si, `G` es conexo y $\delta^{+}(v) = \delta^{-}(v)$ para todo $v \in V$.

Teoría de Grafos – Recorridos y circuitos Eulerianos

Al visitar el museo de ciencias, Pablo y David intentan resolver si podrían pasar por las 7 habitaciones y el pasillo que las rodea sin cruzar ninguna puerta más de una vez. Si comienzan desde la posición del pasillo marcada con una estrella en la siguiente figura, ¿pueden lograr su objetivo?



Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos Hamiltonianos

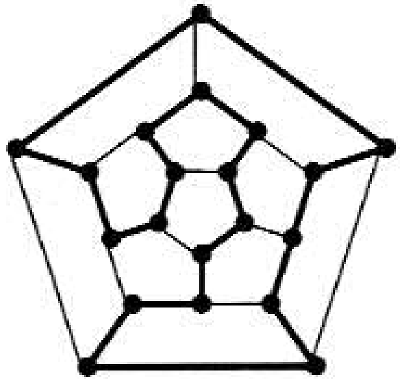
En 1859, el matemático irlandés Sir Williams Hamilton (1805-1865) desarrolló un juego que vendió a un fabricante de juguetes de Dublín.

El juego era un dodecaedro regular de madera con 20 esquinas (vértices) en las que aparecían inscriptos los nombres de ciudades importantes.

El objetivo del juego era encontrar un ciclo alrededor de las aristas del sólido, de modo que, cada ciudad estuviera en el ciclo exactamente una vez.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos Hamiltonianos

La siguiente figura es el grafo de este juego; dicho ciclo está formado por las aristas negras más gruesas.



Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos Hamiltonianos

Si $G=(V,E)$ es un grafo o multigrafo con $|V| \geq 3$, decimos que G tiene un ciclo hamiltoniano si existe un ciclo en G que contenga cada vértice de V.

Un camino hamiltoniano es un camino simple (y no un ciclo) de G que contiene todos los vértices de G.

Dado un grafo con un ciclo hamiltoniano, la eliminación de cualquier arista en el ciclo resulta en un camino hamiltoniano. Sin embargo, es posible que un grafo tenga un camino hamiltoniano sin que tenga un ciclo hamiltoniano.

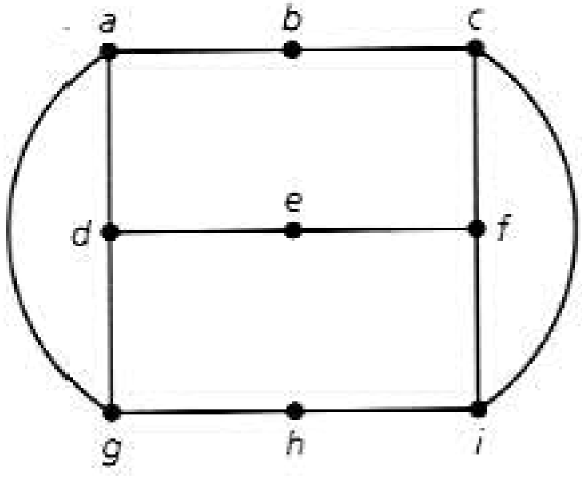
Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos Hamiltonianos

Podría parecer que la existencia de un ciclo (camino) hamiltoniano y la existencia de un circuito (recorrido) euleriano para un grafo son problemas similares. Sin embargo, no sólo no existe una relación útil entre ambos sino que además, a diferencia de los circuitos y recorridos eulerianos donde contábamos con condiciones que nos permitían afirmar si un grafo poseía o no alguno de ellos, no existe algo similar para los ciclos y caminos hamiltonianos.

Por lo que, en los casos de grafos particulares, recurriremos al prueba y error, con criterio, para determinar la existencia o no de un ciclo (camino) hamiltoniano.

Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos Hamiltonianos

En el siguiente grafo, podemos ver que `a,b,c,f,e,d,g,h,i` forman un camino hamiltoniano. Pero, ¿tiene un ciclo hamiltoniano?



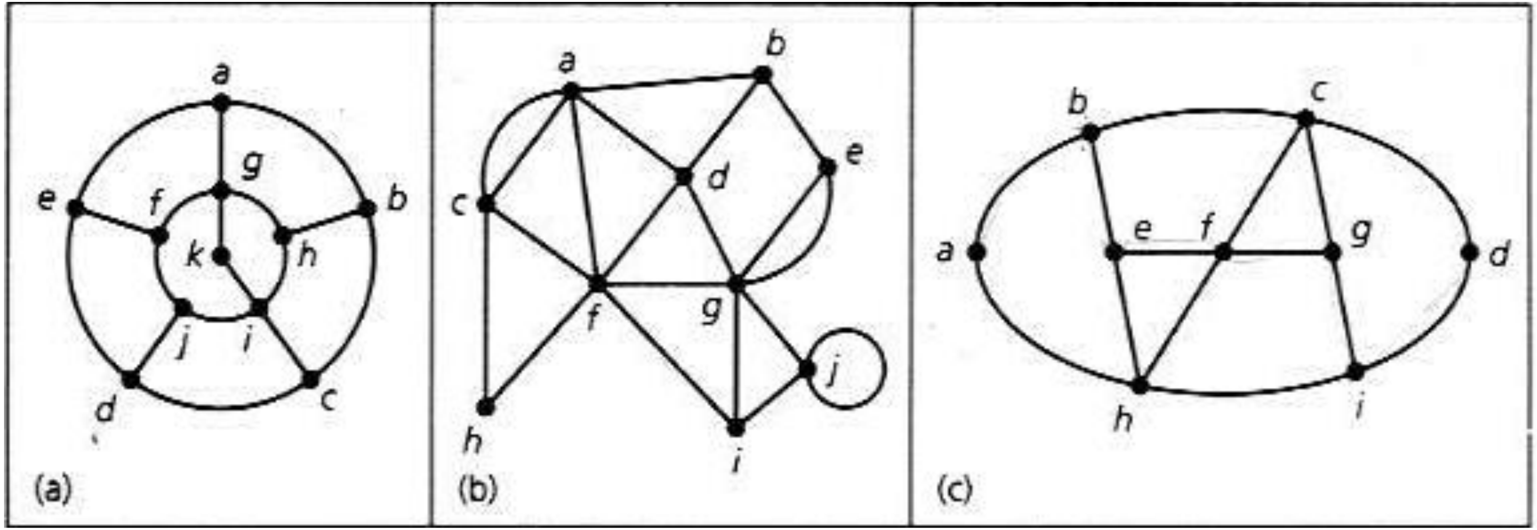
Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos Hamiltonianos

A continuación, marcaremos algunas sugerencias útiles para tratar de encontrar un ciclo hamiltoniano en un grafo $G=(V,E)$.

- Si G tiene un ciclo hamiltoniano entonces para $v \in V$, $\delta(v) \geq 2$.
- Si $a \in V$ y $\delta(a)=2$, entonces las dos aristas incidentes en el vértice a deben formar parte de cualquier ciclo hamiltoniano en G.
- Si $a \in V$ y $\delta(a)>2$, cuando tratamos de construir un ciclo hamiltoniano, una vez que hemos pasado por el vértice a, dejamos de tener en cuenta las aristas no utilizadas incidentes en a.

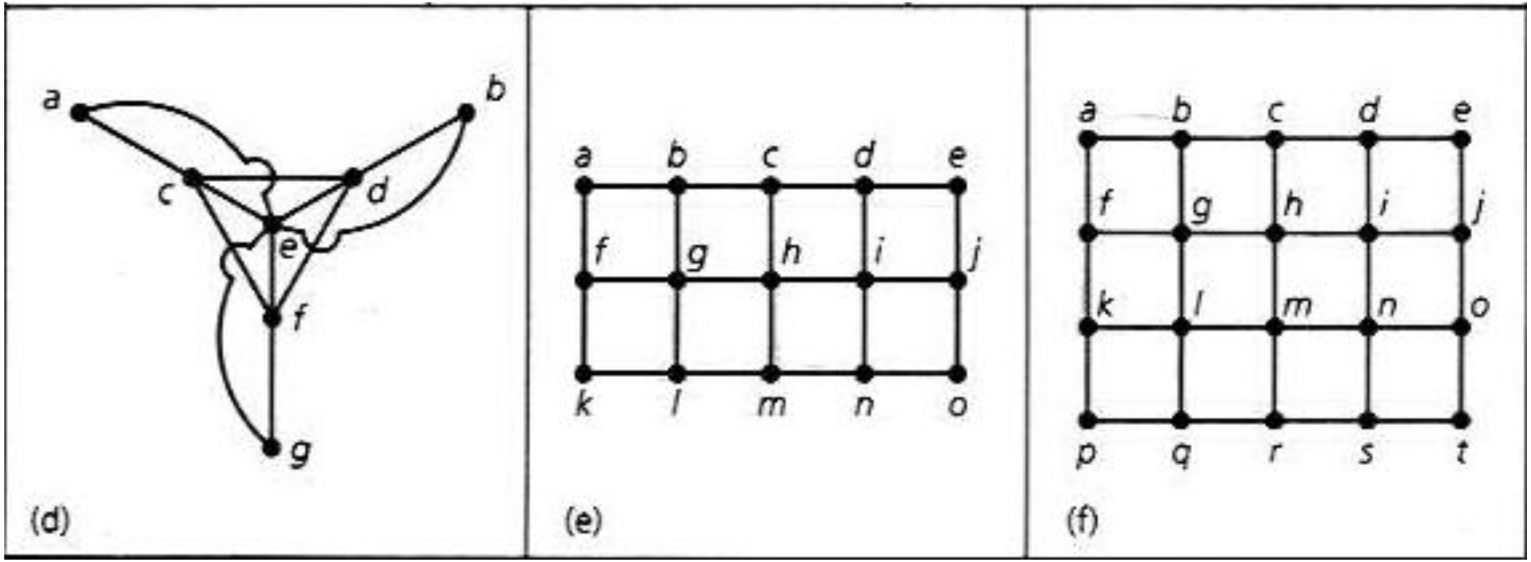
Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos Hamiltonianos

Encuentre un ciclo hamiltoniano, si existe, para cada uno de los grafos o multigrafos que se encuentran a continuación.



Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos Hamiltonianos

Encuentre un ciclo hamiltoniano, si existe, para cada uno de los grafos o multigrafos que se encuentran a continuación.



Teoría de Grafos – Caminos y Ciclos Hamiltonianos

Un problema relacionado con la búsqueda de ciclos hamiltonianos en un grafo, es el problema del viajante: en este caso, el viajante sale de su casa y debe visitar varios lugares antes de regresar. El objetivo, es encontrar una forma de hacer su viaje más eficiente (tal vez en términos de la distancia total recorrida o del costo total). El problema, se puede modelar, mediante un grafo con etiquetas (las aristas tienen distancias o costos asociados a ellas), en el cual se busca el ciclo hamiltoniano más eficiente.