Teoría de Grafos y Algoritmia

Parte 3: Teoría de Grafos

Topicos

- Grafo Ponderado
- El problema del vendedor viajante
- Algoritmo del camino más corto
- Una forma de representar vértices
    - Matriz de Adyacencia
    - Matriz de Incidencia

Teoría de Grafos – Grafo Ponderado

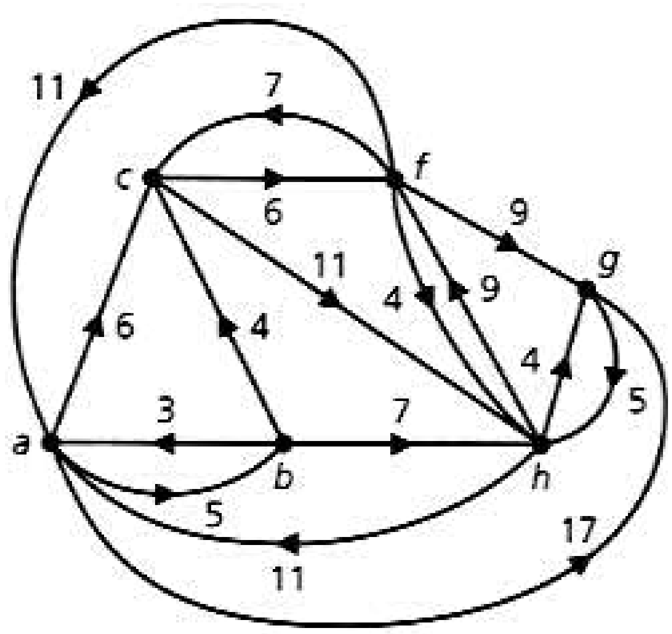
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, conexo, sin lazos. Consideremos que a cada arista $e = (a, b)$ de este grafo le asignamos un número real positivo llamado el peso de e, que denotamos con $w(e)$ o con $w(a, b)$.

Para cualquier $e \in E$, $w(e)$ podría representar la longitud de una carretera, el tiempo que se tarda en ir de un vértice a otro, el costo del ir de un vértice a otro, etc.

Cuando tengamos un grafo $G = (V, E)$ con pesos diremos que el grafo es un grafo ponderado.

Teoría de Grafos – Grafo Ponderado

En la siguiente figura podemos ver el grafo ponderado $G = (V, E)$ representa las rutas de viaje entre algunos pares de ciudades. El peso de cada arista (x, y) indica el tiempo aproximado de un vuelo directo de la ciudad x hasta la ciudad y.

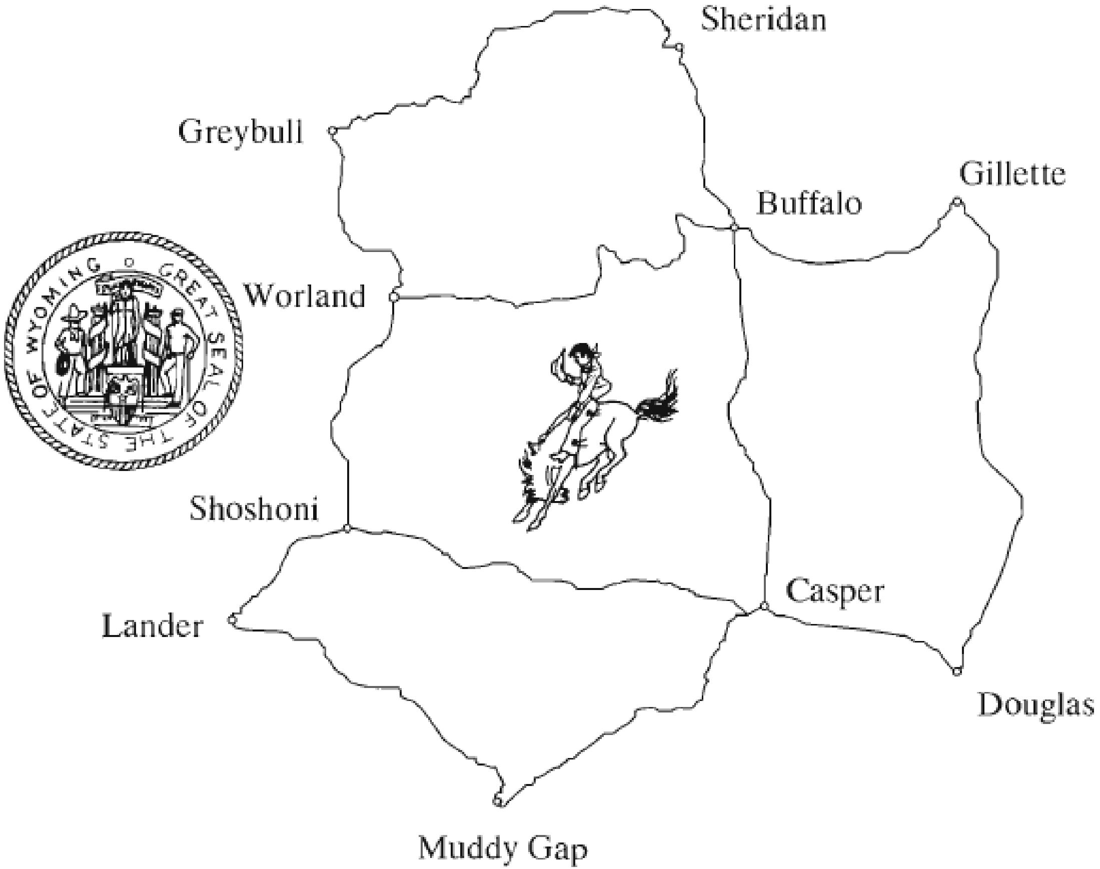


Teoría de Grafos – El problema del vendedor viajante

La siguiente figura muestra el sistema de carreteras en Wyoming, el cual debe ser inspeccionado por una persona.

En particular, este inspector de carreteras debe recorrer cada uno de estos caminos y crear un archivo con información acerca de las condiciones de cada camino, la visibilidad de las líneas en los caminos, el estado de las señales de tráfico, etc.

Teoría de Grafos – El problema del vendedor viajante

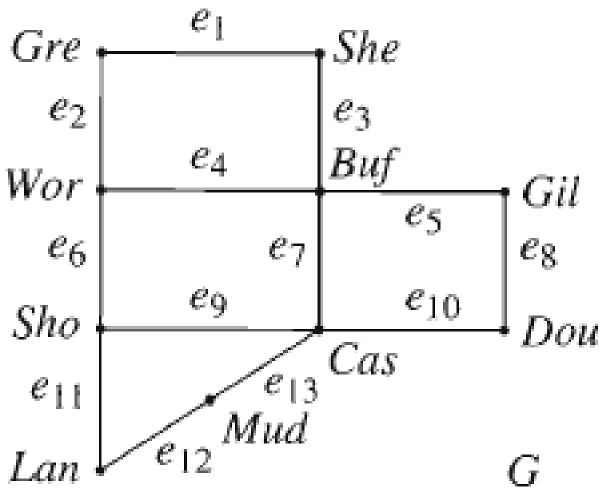


Teoría de Grafos – El problema del vendedor viajante

Como el inspector de carreteras vive en Greybull, la forma más económica de inspeccionar todos los caminos será comenzar en Greybull, recorrer todos los caminos exactamente una vez, y regresar a Greybull. ,Es esto posible? Vea si puede decidir antes de continuar.

Teoría de Grafos – El problema del vendedor viajante

Para esto, vamos a reescribir el mapa como un grafo considerando que las ciudades son vértices y, trazamos un lado entre ellas si existe una carretera que las una por lo que la representación quería así:



Teoría de Grafos – El problema del vendedor viajante

¿Cómo podríamos resolver este problema usando la teoría de grafos vista hasta el momento?

Teoría de Grafos – El problema del vendedor viajante

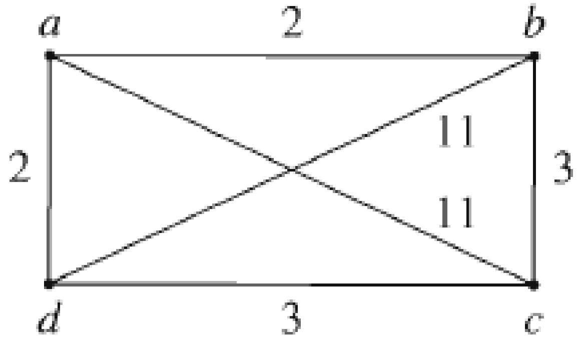
El problema del vendedor viajante se relaciona con el de determinar un ciclo hamiltoniano en un grafo. El problema es:

Dada un grafo con pesos G, determinar un ciclo hamiltoniano de longitud mínima en G.

Si pensamos en los vértices de un grafo ponderado y que los pesos en las aristas son distancias, entonces el problema del vendedor viajante consiste en determinar una ruta más corta mediante la cual el vendedor pueda visitar cada ciudad una vez, partiendo de y regresando a la misma ciudad.

Teoría de Grafos – El problema del vendedor viajante

Si consideramos el grafo a continuación y tratamos de resolver El problema del vendedor viajante comenzando en el vértice a.



Teoría de Grafos – El problema del vendedor viajante

El ciclo a, b, c, d, a es un ciclo hamiltoniano para la gráfica G de la figura anterior.

El reemplazo de cualquiera de las aristas del ciclo por cualquiera de las aristas con la etiqueta 11 incrementaría la longitud del ciclo; así, el ciclo propuesto es un ciclo hamiltoniano de longitud mínima para G.

Así, el ciclo propuesto resuelve el problema del agente viajero para G.

Teoría de Grafos – El problema del vendedor viajante

El ciclo a, b, c, d, a es un ciclo hamiltoniano para la gráfica G de la figura anterior.

El reemplazo de cualquiera de las aristas del ciclo por cualquiera de las aristas con la etiqueta 11 incrementaría la longitud del ciclo; así, el ciclo propuesto es un ciclo hamiltoniano de longitud mínima para G.

Así, el ciclo propuesto resuelve el problema del agente viajero para G.

Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

En los grafos ponderados, con frecuencia queremos determinar la ruta más corta (es decir, un camino de longitud mínima) entre dos vértices dados. El algoritmo que vamos a ver a continuación, debido a E. W. Dijkstra, resuelve de manera eficiente este problema.

Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

En los grafos ponderados, con frecuencia queremos determinar la ruta más corta (es decir, un camino de longitud mínima) entre dos vértices dados. El algoritmo que vamos a ver a continuación, debido a E. W. Dijkstra, resuelve de manera eficiente este problema.

Este algoritmo fue desarrollado por Dijkstra en 1959, cuando tenía 29 años y, el mismo funciona si: el grafo es conexo o, al menos, el vértice de salida y el de llegada están en la misma componente conexa.

Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

Para entender la idea del algoritmo vamos a suponer que queremos encontrar el camino más corto del vértice a al vértice z.

En el algoritmo de Dijkstra se asignan etiquetas a los vértices: notaremos con $L(v)$ la etiqueta del vértice v.

Las etiquetas las vamos a separar en Etiquetas Temporales y Etiquetas Permanentes.

Llamaremos T al conjunto de vértices que tienen etiquetas temporales.

Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

Al mostrar el algoritmo, encerraremos en un círculo los vértices que tienen etiquetas permanentes. Mostraremos posteriormente que si $L(v)$ es la etiqueta permanente del vértice v, entonces $L(v)$ es la longitud del camino más corto de a á v.

En principio, todos los vértices tienen etiquetas temporales.

Cada iteración del algoritmo modifica el estado de una etiqueta, de temporal a permanente; así, podemos concluir el algoritmo cuando z recibe una etiqueta permanente. En ese momento, $L(z)$ proporciona la longitud del camino más corto de a á z.

Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

Entonces, resumiendo lo anterior, podemos afirmar que el algoritmo desarrollado por Dijkstra determina la longitud del camino más corto del vértice a al vértice z en un grafo ponderado.

El peso de la arista (i, j) es $w(i, j) > 0$ y, la etiqueta del vértice x es $L(x)$.

Al concluir el algoritmo, $L(z)$ es la longitud del camino más corto de a á z.

Vamos a ver el algoritmo y un ejemplo de su aplicación.

Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

Algoritmo dijkstra

$L(a) := 0$

$Para$ todos los vértices $x \neq a$ $Hacer$

$$L(x) := \infty$$

$T := V$

$Mientras$ $z \in T$ $Hacer$

$Elegir$ $v \in T$ con $L(v)$ mínimo

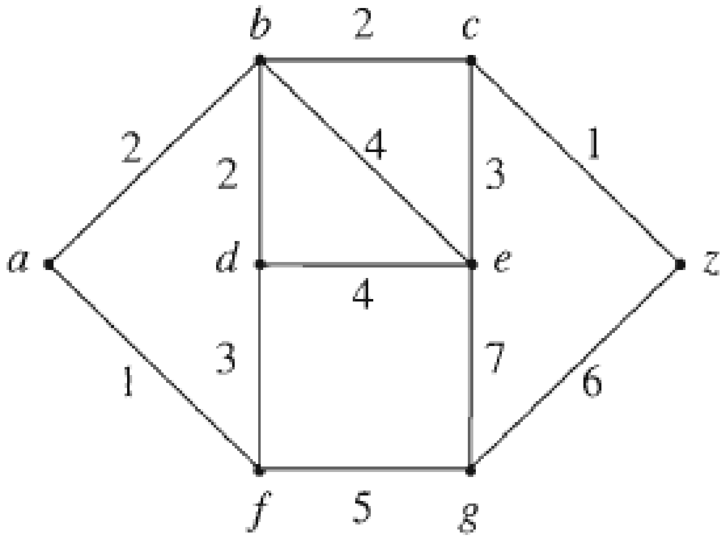
$T := T - \{v\}$

$Para$ cada $x \in T$ adyacente a v $Hacer$

$$L(x) := \min\{L(x), L(v) + w(v, x)\}$$

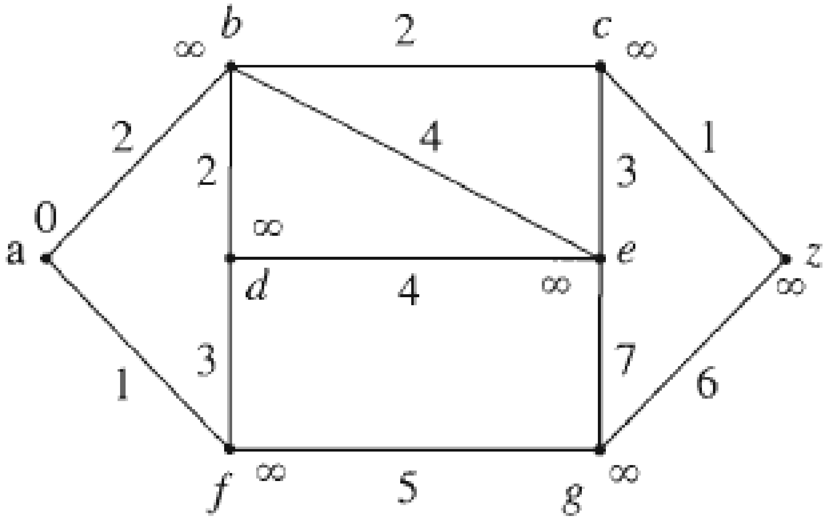
Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

Ahora, veremos un ejemplo de la aplicación del algoritmo. Tomemos en cuenta el siguiente grafo y buscaremos determinar el camino más corto del vértice a al vértice z.



Paso 1: Inicialización

Como primer paso, inicializamos las etiquetas según lo que menciona el algoritmo: el vértice de origen con 0 y, el resto de los vértices con ∞.



Paso 2: Primera iteración del Mientras

En este momento, T es igual a V, es decir, que $T = \{a, b, c, d, e, f, g, z\}$.

Como $z \in T$ entonces, elegimos el vértice con la etiqueta menor que es el vértice a (con 0) y lo sacamos de T, por lo que ahora, $T = \{b, c, d, e, f, g, z\}$.

Lo que resta, es actualizar las etiquetas de los vértices adyacentes; en este caso, al ser el vértice a el que pasó a permanente los vértices adyacentes a él son b y f obteniendo:

$$L(b) = \min\{L(b), L(a) + w(a, b)\} = min\{\infty, 0 + 2\} = 2$$

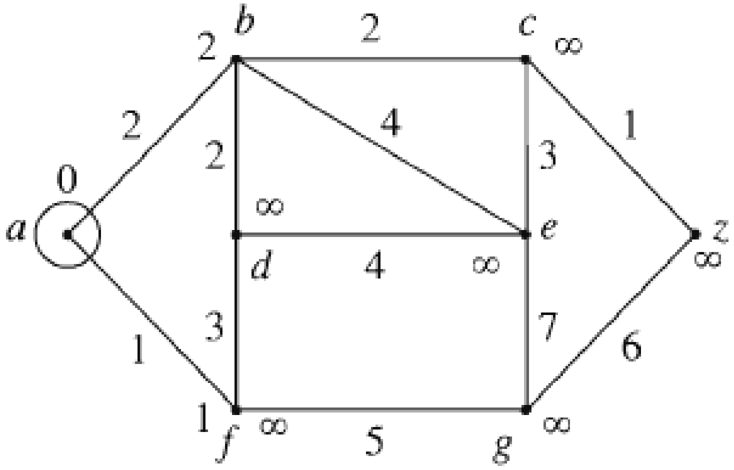
y

$$L(f) = \min\{L(f), L(a) + w(a, f)\} = min\{\infty, 0 + 1\} = 1$$

Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

Paso 2: Primera iteración del Mientras

Siendo el siguiente grafo, el resultante de esta primera iteración.



Paso 3: Segunda iteración del Mientras

En este momento, T es igual a V, es decir, que $T = \{b, c, d, e, f, g, z\}$.

Como $z \in T$ entonces, elegimos el vértice con la etiqueta menor que es el vértice f (con 1) y lo sacamos de T, por lo que ahora, $T = \{b, c, d, e, g, z\}$.

Lo que resta, es actualizar las etiquetas de los vértices adyacentes; en este caso, al ser el vértice f el que pasó a permanente los vértices adyacentes a él son d y g obteniendo:

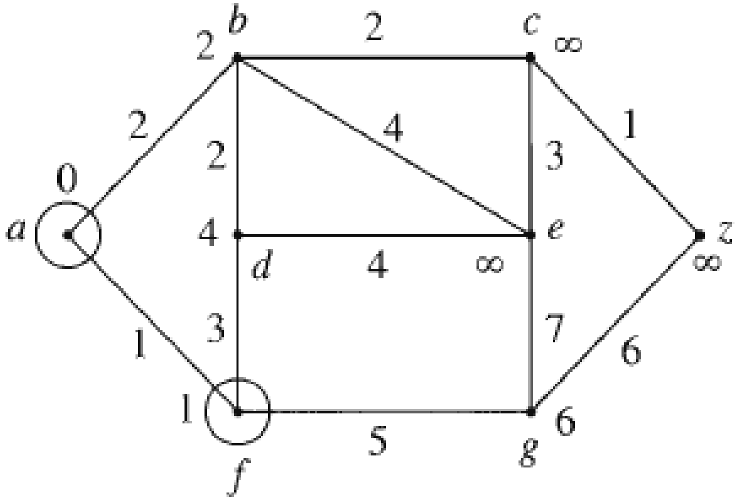
$$L(d) = \min\{L(d), L(f) + w(f, d)\} = min\{\infty, 1 + 3\} = 4$$

y

$$L(g) = \min\{L(g), L(f) + w(f, g)\} = min\{\infty, 1 + 5\} = 6$$

Paso 3: Segunda iteración del Mientras

Siendo el siguiente grafo, el resultante de esta segunda iteración.



Paso 4: Tercera iteración del Mientras

En este momento, T es igual a V, es decir, que $T = \{b, c, d, e, g, z\}$.

Como $z \in T$ entonces, elegimos el vértice con la etiqueta menor que es el vértice b (con 2) y lo sacamos de T, por lo que ahora, $T = \{c, d, e, g, z\}$.

Lo que resta, es actualizar las etiquetas de los vértices adyacentes; en este caso, al ser el vértice b el que pasó a permanente los vértices adyacentes a él son c, d y e obteniendo:

$$L(c) = \min\{L(c), L(b) + w(b, c)\} = min\{\infty, 2 + 2\} = 4$$

además

$$L(d) = \min\{L(d), L(b) + w(b, d)\} = min\{4,2 + 2\} = 4$$

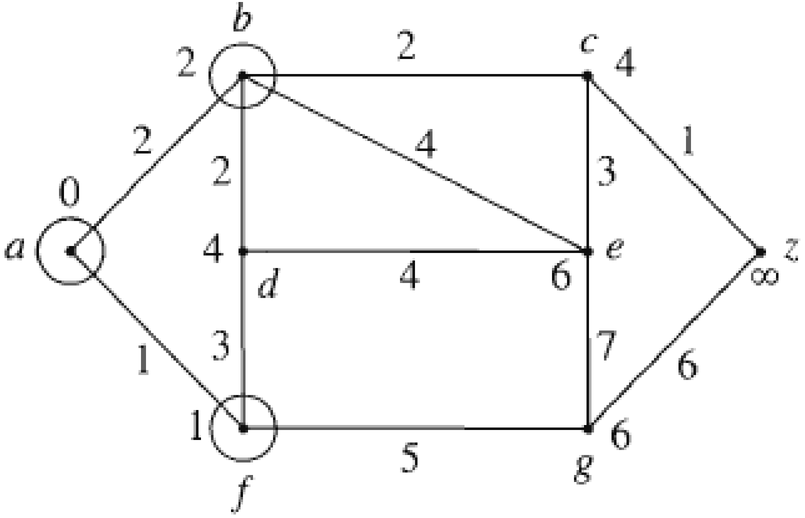
y

$$L(e) = \min\{L(e), L(b) + w(b, e)\} = min\{\infty, 2 + 4\} = 6$$

Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

Paso 4: Tercera iteración del Mientras

Siendo el siguiente grafo, el resultante de esta tercera iteración.



Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

Una aclaración importante sobre el algoritmo es que, al realizar la elección del vértice con la etiqueta menor, nos podemos encontrar con que tenemos más de un vértice con la misma etiqueta. En ese caso, podemos elegir cualquiera de los vértices que cuente con ese valor.

Teoría de Grafos – Algoritmo del camino más corto

Así continuamos hasta llegar que el algoritmo finaliza cuando el vértice z pasa a ser Permanente siendo $L(z) = 5$, lo cual indica que el camino más corto del vértice a al vértice z es 5.

Un camino más corto es a, b, c, z.

Teoría de Grafos – Una forma de representar vértices

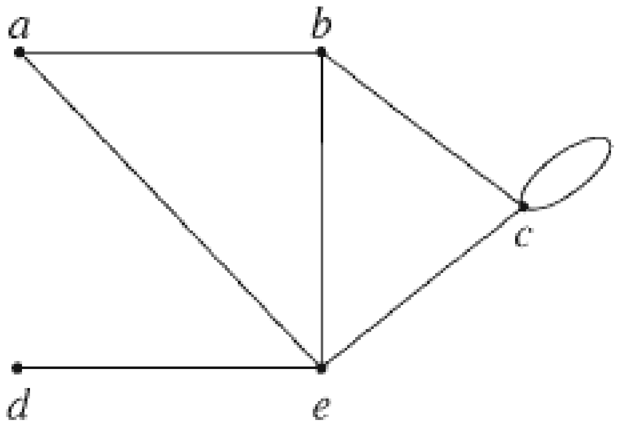
Hasta el momento, representamos un grafo mediante un diagrama. En ciertas ocasiones, como por ejemplo, al utilizar una computadora para analizar un grafo, es necesario una representación más formal.

Para esto vamos a ver dos métodos de representación de grafos utilizando matrices.

Nuestro primer método de representación de un grafo utiliza la matriz de adyacencia.

Teoría de Grafos – Matriz de Adyacencia

Consideremos el grafo de la siguiente figura.



Teoría de Grafos – Matriz de Adyacencia

Para obtener la matriz de adyacencia de este grafo, primero elegimos un orden para los vértices, digamos, a, b, c, d, e. A continuación etiquetamos las filas y las columnas de una matriz con los vértices ordenados. La entrada en esta matriz es 1 si los vértices de la fila y la columna son adyacentes y 0 en caso contrario. La matriz de adyacencia de este grafo sería:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Teoría de Grafos – Matriz de Adyacencia

Observe que podemos obtener el grado de un vértice v en un grafo simple G sumando la fila v o la columna v en La matriz de adyacencia de G.

Además, observe que aunque la matriz de adyacencia nos permite representar lazos, no nos permite representar aristas paralelas; sin embargo, si modificamos la definición de matriz de adyacencia para que ésta pueda contener enteros no negativos arbitrarios, podernos representar las aristas paralelas.

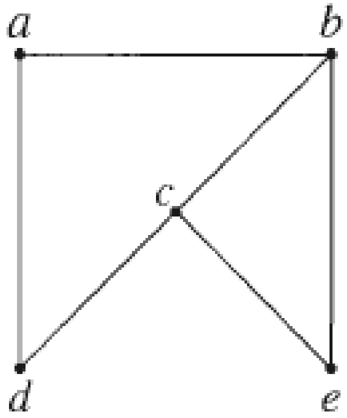
En la matriz de adyacencia modificada, interpretamos la entrada $ij - ésima$ especificando el número de aristas entre i y j.

Teoría de Grafos – Matriz de Adyacencia

La matriz de adyacencia no es una manera muy eficiente para representar un grafo. Como la matriz es simétrica con respecto de la diagonal principal la información aparece dos veces (excepto aquella que se encuentra en La diagonal principal).

Teoría de Grafos – Matriz de Adyacencia – Ejemplo

Considere el siguiente grafo:



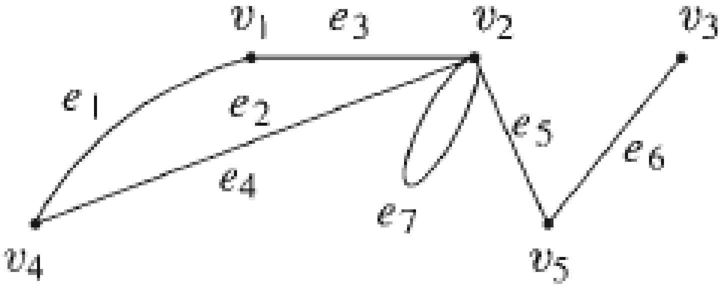
Teoría de Grafos – Matriz de Adyacencia – Ejemplo

Su matriz de adyacencia sería:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Teoría de Grafos – Matriz de Incidencia

Consideremos el grafo de la siguiente figura.



Teoría de Grafos – Matriz de Incidencia

Para obtener la matriz de incidencia del grafo, primero etiquetamos los renglones con los vértices y las columnas con las aristas (en algún orden arbitrario). La entrada de la fila v y la columna e es 1 si e es incidente en v y, 0 en caso contrario. Así, la matriz de incidencia del grafo anterior es:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Una columna como e_7 representa un lazo.

Teoría de Grafos – Matriz de Incidencia

La matriz de incidencia nos permite representar las aristas paralelas y los lazos.

Observemos que en una gráfica sin lazos, cada columna tiene dos $1's$ y que la suma de los elementos de un renglón proporciona el grado del vértice identificado con ese renglón.