

Capítulo 3

Técnicas de Realce de Imágenes

3.0.1 Realce de la Imagen

El objetivo principal de las técnicas que se explicarán es procesar una imagen de forma tal que resulte más adecuada que la imagen original para una aplicación específica.

Se pueden clasificar estas técnicas en dos grupos perfectamente diferenciados:

- Métodos en el dominio del espacio.
- Métodos en el dominio de la frecuencia.

Métodos en el Dominio del Espacio

Los métodos en el dominio del espacio se basan en la manipulación directa de los píxeles de la imagen. Mientras que los métodos en el dominio de la frecuencia se basa en la modificación de la transformada de Fourier de una imagen.

Los métodos en el dominio espacial son procedimientos que operan directamente sobre los píxeles de la imagen. Las funciones de procesamiento de la imagen en el dominio espacial pueden expresarse como

$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

donde $f(x, y)$ es la imagen de entrada y $g(x, y)$ es la imagen de salida. T es un operador que actúa sobre f definido sobre algún entorno de (x, y) .

Los entornos generalmente son definidos como subimágenes cuadradas o rectangulares centradas en el píxel (x, y) . La forma más simple de T corresponde a un entorno de 1×1 . En este caso g depende solo del valor de f en el punto (x, y) , y T se convierte en una función de transformación del nivel de gris de la forma,

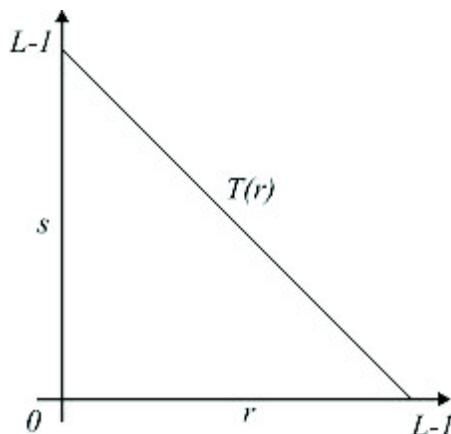


Figura 3.1: Función para obtener el negativo de una imagen.

$$s = T(r)$$

donde r y s son variables que indican el nivel de gris de $f(x, y)$ y de $g(x, y)$.

Negativo de Imágenes

Los negativos de imágenes digitalizadas son útiles en la representación de imágenes médicas. El negativo de una imagen se obtiene empleando la función de transformación que se muestra en la figura 3.1, en las figuras 3.2 y 3.3 se puede observar los efectos de la utilización de esta función.

Aumento de Contraste

Las imágenes con poco contraste se deben a muchas causas, como iluminación deficiente, falta de rango dinámico del sensor o incorrecta selección de la apertura de diafragma en el momento de la captación. La idea principal para un aumento de contraste consiste en incrementar el rango dinámico de los niveles de gris de la imagen. Una transformación típica empleada para la mejora de contraste se muestra en la figura 3.4. La ubicación de los puntos (r_1, s_1) y (r_2, s_2) controla la forma de la función de transformación. Por ejemplo, si $r_1 = s_1$ y $r_2 = s_2$ se genera una función lineal que no produce cambios en los niveles de gris. Si por el contrario $r_1 = r_2$, $s_1 = 0$ y $s_2 = L - 1$ la transformación se convierte en una función umbral (Threshold) que genera una imagen binaria. Se supone que $r_1 \leq r_2$ y $s_1 \leq s_2$ de tal forma que la función sea de valor único y monótonamente creciente. La figura 3.5 muestra una imagen con bajo contraste y la aplicación de la función de la figura 3.4 con dos valores diferentes.

Compresión del rango dinámico

Como se mencionó anteriormente se utiliza esta técnica cuando una imagen procesada excede ampliamente la capacidad del dispositivo de presentación (por ejemplo una transformada de Fourier). Esto se puede expresar por la ecuación,



Figura 3.2: Imagen y su negativo.



Figura 3.3: Imagen y su negativo.

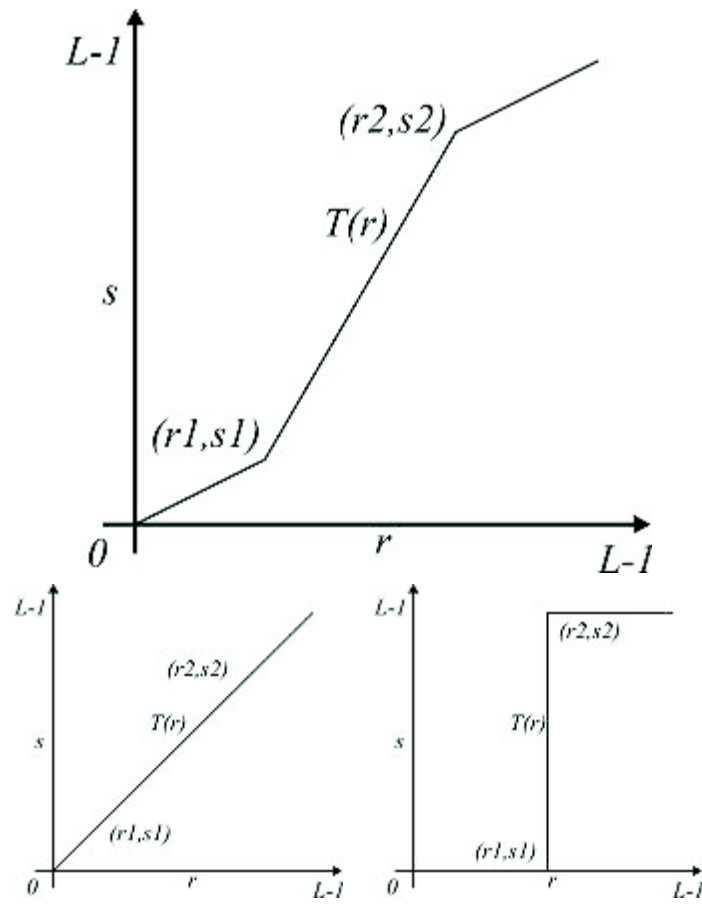


Figura 3.4: Funciones de aumento de contraste.

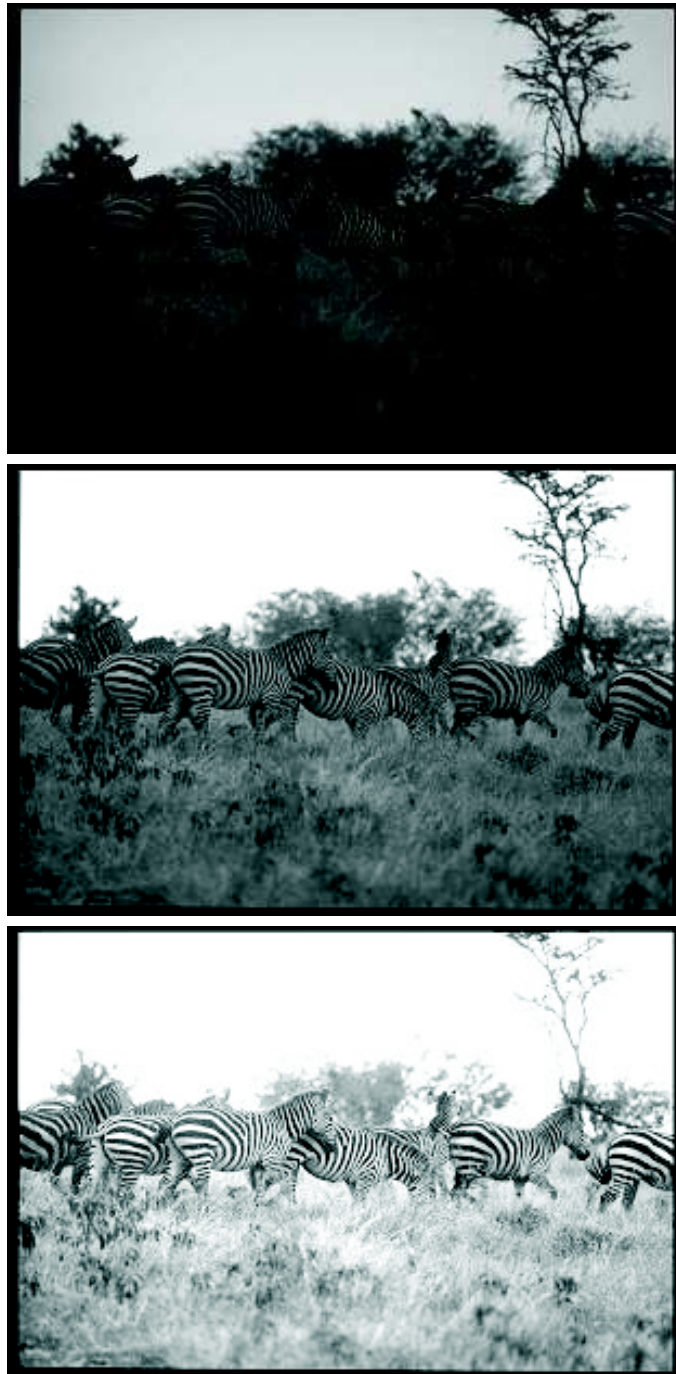


Figura 3.5: Imagen original con bajo contraste y la aplicación de dos instancias de la función de aumento de contraste.

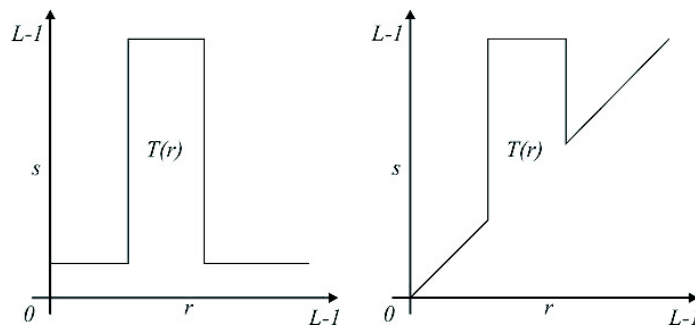


Figura 3.6: Otras funciones de punto.

$$s = c \log(1 + |r|)$$

Otras funciones de punto

La figura 3.6 muestra otras posibles funciones de punto, la primera permite umbralizar un determinado rango de grises y la segunda función permite dejar la imagen tal como la original excepto un rango de niveles de grises que adquieren el valor blanco.

Fraccionamiento del nivel de gris

A menudo se desea destacar un rango especificado de niveles de gris de una imagen. Entre estas aplicaciones se pueden mencionar la mejora de rangos como las masas de agua en las imágenes satelitales o imágenes de rayos X con defectos. Se utilizan dos ideas básicas para esto: La primera es asignar un valor alto al rango de interés y bajo a lo restante. La segunda es similar excepto que se preserva el fondo de la imagen.

Fraccionamiento de Planos de Bits

Como se analizó anteriormente, una imagen digital está representada como una matriz de números binarios. A veces es deseable destacar la contribución que realizan a la imagen total determinados bits específicos, como se muestra en las figuras 3.7 y 3.8.

3.0.2 Histogramas

El histograma de una imagen digital con niveles de gris en el rango $[0, L-1]$ es una función discreta,

$$p(r_k) = \frac{n_k}{n}$$

donde r_k es el k -ésimo nivel de gris. n_k es el número de píxeles con el nivel de gris r_k y n es el número total de píxeles en la imagen.

De forma general se puede decir que el histograma presenta la probabilidad de distribución $p(r_k)$ de las diferentes amplitudes o niveles de gris de la imagen.



Figura 3.7: Imagen original y contribución de algunos bits.



Figura 3.8: Contribución a la imagen total de algunos bits.

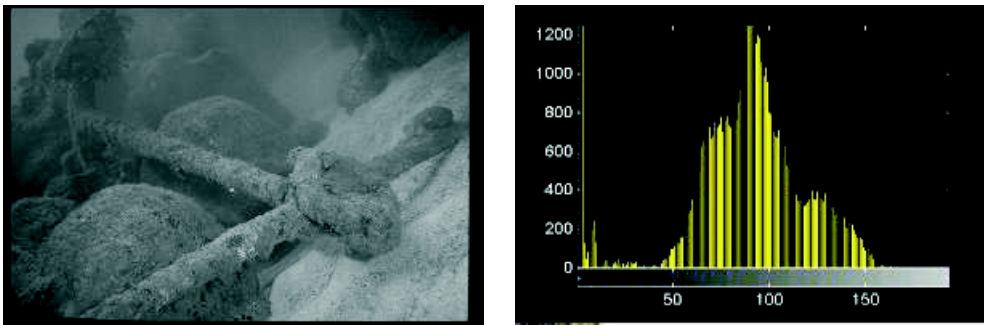


Figura 3.9: Imagen y su histograma.

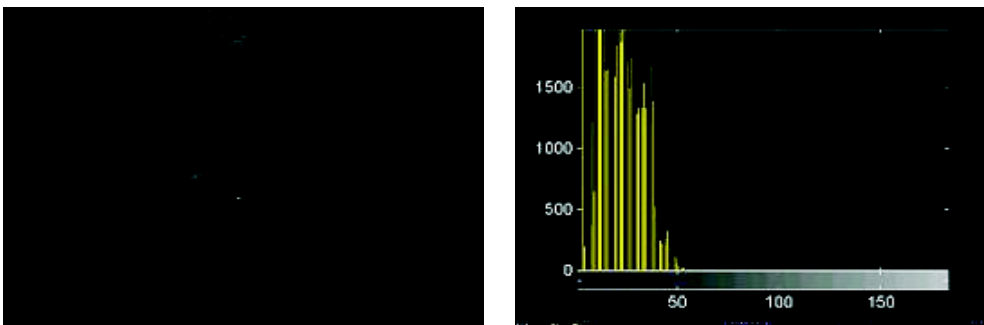


Figura 3.10: Imagen de un buzo con poca iluminación, bajo contraste y su histograma.

La forma del histograma permite evidenciar ciertas particularidades de la imagen, como lo son el tipo de fondo, el contraste y en general si los valores de los niveles de gris están homogéneamente distribuidos o no. En la figura 3.9 se muestra una imagen y su histograma. Los ejemplos de las figuras 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13 subrayan algunas de estas características.

Distintas imágenes pueden presentar distribuciones de los niveles de gris que estén lejos de ser ideales. Ejemplos típicos son imágenes adquiridas bajo malas condiciones de iluminación, donde existe un exceso de sombras o al contrario, demasiados niveles de blanco. La imagen de la figura 3.14 es una fotografía que se presenta tal y como se capturó (en este caso el fotógrafo se preocupó más por tomar la fotografía antes de que salieran los animales del campo visual, que por el ajuste del equipo). Se puede ver claramente que la distribución de los niveles de gris está lejos de ser aceptable. En este caso, es claro que los colores de las cebras deberían verse mucho más claramente contrastados. Si se grafica el histograma, se puede observar que este no muestra una distribución homogénea, sino que muestra una distribución bimodal, es decir, que existen muchos niveles de grises oscuros y muchos niveles claros, con una deficiencia de niveles a la mitad del rango y en los niveles más altos.

En ocasiones es deseable contar con un algoritmo que proporcione automáticamente resultados reproducibles y de buena calidad. El algoritmo más empleado para estos casos es la ecualización o igualación del histograma. Si se trata de efectuar una distribución lo más uniforme posible, se

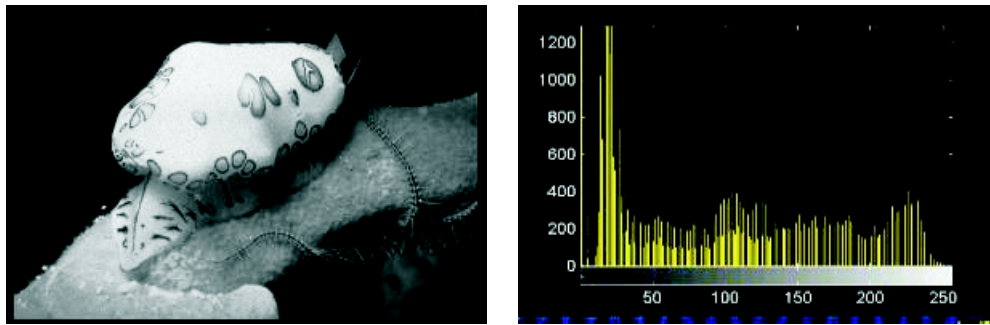


Figura 3.11: Imagen de un caracol y su histograma uniforme.

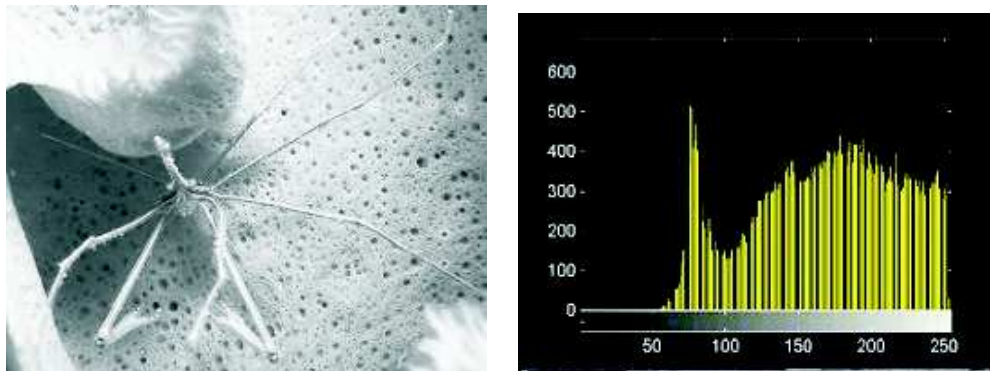


Figura 3.12: Imagen de un cangrejo araña y su histograma.

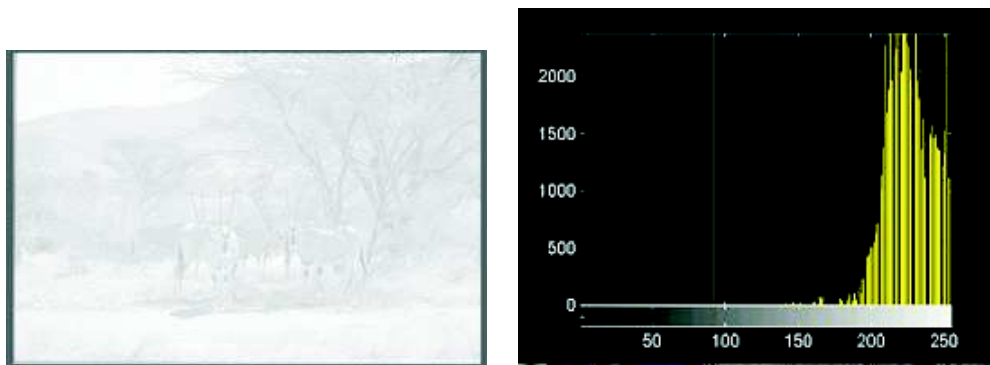


Figura 3.13: Imagen de antílopesdemasiada clara, bajo contraste y su histograma.

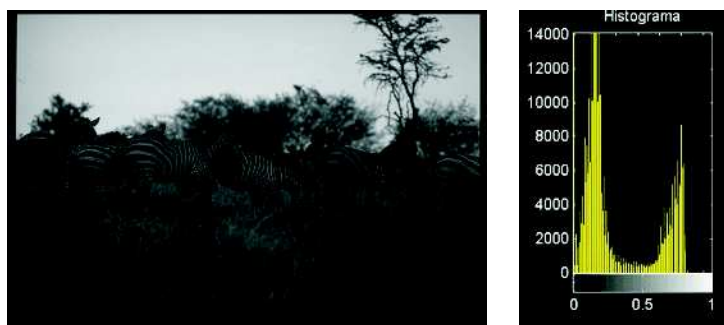


Figura 3.14: Imagen de cebras y su histograma.



Figura 3.15: Imagen de cebras ecualizada.

obtendrá una imagen "ecualizada" o igualada, que no siempre se aproxima a la imagen como debió de verse originalmente. La imagen de la figura 3.15 muestra la imagen original después de haber seguido un procedimiento de igualación a 64 niveles. Si se observa el histograma, se ve que se pudo mejorar la distribución de los niveles de gris, pero esto no necesariamente significa que el resultado sea plano, aunque en una gran cantidad de casos los resultados se aproximan bastante bien a distribuciones ideales. En particular en este caso aún cuando la piel de las cebras se representa adecuadamente, se pierde información interesante acerca de los matorrales que se encuentran en el fondo de la imagen.

Finalmente en la figura 3.16 se presenta una imagen en la que el histograma se especificó de una manera particular y que proporciona resultados más agradables a la vista. Es importante recordar aquí que el juez final acerca de la calidad de este tipo de procesos que sufre la imagen, es el observador humano. Asimismo, se puede ver en el histograma, que no se tiene una distribución homogénea, pero que los resultados son satisfactorios. En particular se debe hacer notar que en este caso, se forzó a la distribución a tomar los valores que justamente habían sido omitidos por el histograma original. En general, se puede decir que al tomar una fotografía con un fotómetro convencional, se tiende hacia la obtención de un nivel de gris medio, y como en el fondo de la imagen original se presenta mucha luz, el fotómetro trata de conservar este valor promedio, y al hacerlo, se representan las imágenes sombrías con valores más oscuros de lo que realmente deberían ser. La aplicación de una distribución particular presenta resultados satisfactorios.



Figura 3.16: Imagen de cebras con especificación de histograma.

3.0.3 Equalización de Histograma

El principio básico de este tipo de operaciones es la redistribución de los niveles de gris de la imagen original sobre todos los niveles disponibles en el sistema, siguiendo una ley particular que determina el tipo de modificación.

Sea r una variable que represente los niveles de gris de la imagen a mejorar. Suponga que la intensidad de los píxeles son cantidades continuas que han sido normalizadas en el rango $[0, 1]$, donde $r = 0$ es negro y $r = 1$ representa el blanco. Sea la transformación, $s = T(r)$.

Condiciones:

1. $T(r)$ es de valor único y monótonamente creciente en el intervalo $0 \leq r \leq 1$.
2. $0 \leq T(r) \leq 1$ para $0 \leq r \leq 1$.

La condición a) preserva el orden entre el negro y el blanco de la escala de grises. La condición b) garantiza una aplicación que es coherente con el rango de valores permitidos para la intensidad de los píxeles. La función de transformación inversa de s a r se indica por,

$$r = T^{-1}(s) \text{ para } 0 \leq s \leq 1$$

Se asume que r y s son variables aleatorias continuas en el rango $[0, 1]$. Los niveles de gris originales y su transformada se pueden caracterizar por sus funciones de densidad de probabilidad $p_r(r)$ y $p_s(s)$. De la teoría elemental de probabilidades, si $p_r(r)$ y $T(r)$ son conocidas y $T^{-1}(s)$ verifica la condición a), entonces la función de distribución de probabilidad de los niveles de gris transformados es,

$$p_s(s) = [p_r(r) \frac{dr}{ds}]_{r = T^{-1}(s)}$$

Considérese la función de transformación,

$$s = T(r) = \int_0^r [p_r(w)] dw$$

que se denomina función de distribución acumulada r . De esta ecuación, la derivada de s respecto de r es,

$$\frac{ds}{dr} = p_r(r)$$

y sustituyendo en la primera se obtiene,

$$p_s(s) = [p_r(r) \frac{dr}{ds}]_r = T^{-1}(s) = 1$$

que da una densidad uniforme en el intervalo de definición de la variable s . Esto significa que cuando se emplee una función de transformación igual a la función de distribución acumulada se produce una imagen con niveles de gris uniformemente distribuidos.

Para poder ser aplicado en el procesamiento digital de imágenes los conceptos antes vistos deben ser expresados en forma discreta.

Para los niveles de gris que constituyen los valores discretos se tienen las probabilidades:

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \text{ para } 0 \leq r_k \leq 1 \text{ y } k = 0, 1, \dots, L-1$$

La representación gráfica de $p_r(r_k)$ en función de r se denomina histograma. Para la ecualización del histograma de una imagen la relación continua antes vista se expresa como,

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k \left[\frac{n_j}{n} \right] = \sum_{j=0}^k [p_r(r_j)]$$

la función inversa se indica por, $r_k = T^{-1}(s_k)$.

En la aproximación discreta se puede observar que existe una redistribución de los niveles de grises, lo cual no significa que el histograma deba ser plano, es decir uniforme como se observa en la figura 3.17.

Sea la imagen de la figura 3.18 y su histograma,

El procedimiento de ecualización conduce a la imagen de la figura 3.19,

Considere el Monumento Scott en Edimburgo, como se muestra en la figura 3.20.

Mientras la ecualización de histograma ha mejorado el contraste de la región del cielo, la imagen parece ahora mas artificial debido a que hay muy poca variedad de niveles de gris medios, figura 3.21. Esto ocurre pues la función de transferencia está basada en la pendiente de la función acumulativa.

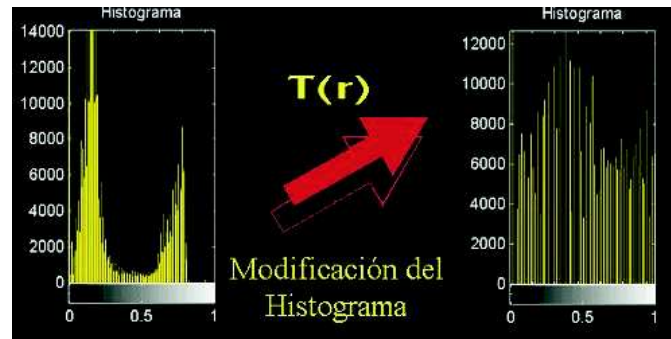


Figura 3.17: Histograma original y ecualizado.

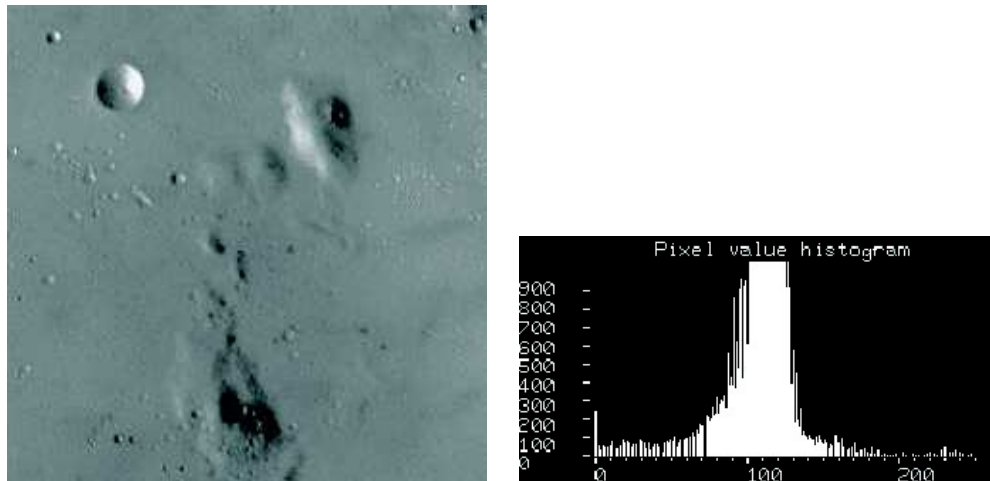


Figura 3.18: Imagen de una porción de la luna y su histograma.



Figura 3.19: Imagen de una porción de la luna y su histograma ecualizado.



Figura 3.20: Imagen del Monumento Scott en Edimburgo y su histograma.

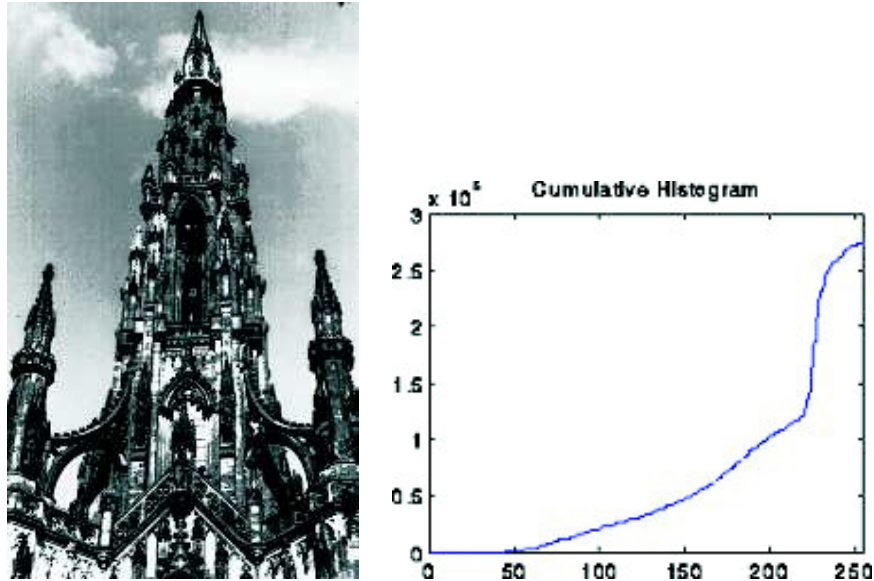


Figura 3.21: Imagen del Monumento Scott en Edimburgo y su histograma ecualizado.

Se puede mejorar el resultado anterior si se define un mapeo basado en una subsección de la imagen que contenga una mejor distribución de densidades de intensidad de niveles de gris bajos, medios y altos. Si se recorta la imagen original para aislar una región se obtiene la imagen de la figura 3.22.

3.0.4 Especificación de Histograma

La ecualización de histograma está limitada en que es capaz de producir solo un resultado: una imagen con una distribución de intensidades uniforme. Algunas veces es deseable controlar la forma del histograma de la imagen de salida para resaltar ciertos niveles de gris. Esto se puede hacer a través de una técnica conocida como especificación de histograma.

Otra vez se hará el estudio en el espacio continuo y luego se extenderán los resultados al discreto. Sean $p_r(r)$ y $p_z(z)$ las funciones de probabilidad original y deseada, respectivamente. Supongase que se hace una ecualización del histograma de la imagen original a través de,

$$s = T(r) = \int_0^r [p_r(w)]dw$$

Si la imagen deseada estuviera disponible, sus niveles de gris también podrían ser ecualizados empleando la ecuación,

$$v = G(z) = \int_0^z [p_z(w)]dw$$

El proceso inverso, $z = G^{-1}(v)$, proporcionaría los niveles de z de la imagen deseada. Desde luego

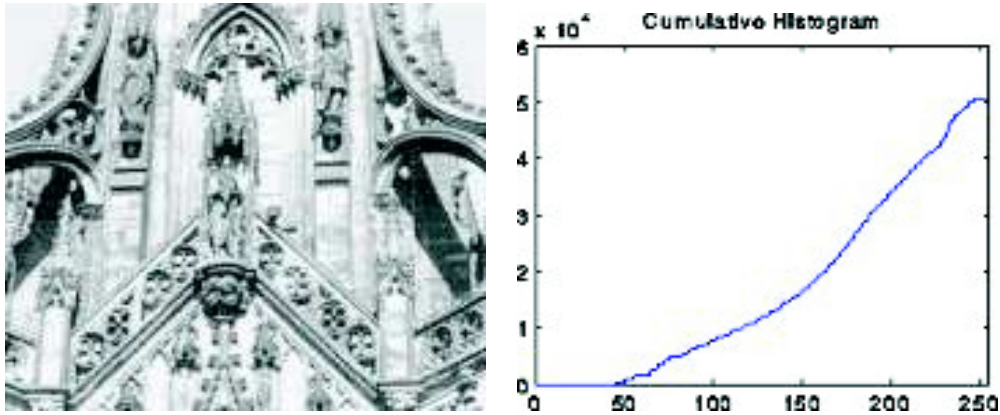


Figura 3.22: Imagen del Monumento Scott en Edimburgo y su función de distribución acumulativa obtenido con una porción de la imagen original.



Figura 3.23: Imagen mejorada con la técnica de la figura 3.22.

esta transformación es hipotética puesto que son los z niveles de gris los que se están buscando. Como, $p_s(s)$ y $p_v(v)$ corresponden a densidades de probabilidad uniformes idénticas, entonces se podrían sustituir los niveles de v y de s , o lo que es lo mismo, $z = G^{-1}(s)$, que daría la función de densidad de probabilidad deseada.

Procedimiento (válido si $G^{-1}(s)$ posee valor único).

- Ecuilizar los niveles de la imagen original.
- Especificar la función de densidad deseada y obtener la función $G(z)$.
- Aplicar la función de transformación inversa, $z = G^{-1}(s)$ a los niveles obtenidos en la etapa 1.

El método explicado para variables continuas posee el problema de expresar la función inversa en términos analíticos. En el caso discreto se soluciona a través de métodos numéricos. En la práctica, a menudo la transformación de s a z no es de valor único, esto sucede cuando en el histograma especificado quedan niveles de gris sin llenar (la función de distribución acumulada es constante en estos intervalos), o en el proceso de redondeo de $G^{-1}(s)$ al nivel de gris mas próximo. Generalmente la solución mas sencilla es asignar los niveles de forma tal que se ajusten lo mas posible al histograma.

3.1 Mejora Local

Los métodos de procesamiento de histogramas discutidos hasta aquí son globales en el sentido que aplican una función de transformación cuya forma está basada en la distribución de los niveles de intensidad de una imagen completa. Aunque este método puede mejorar el contraste total y el rango dinámico de una imagen, existen casos en donde se desea la mejora de detalles sobre regiones pequeñas (es decir áreas cuya contribución total de pixeles al numero total de pixeles de la imagen tiene influencia despreciable sobre la transformada total). La solución en este caso es derivar una transformación basada sobre la distribución de intensidades en la vecindad local de todo pixel en la imagen.

La técnicas de procesamiento de histograma descritas anteriormente se pueden adaptar para mejora local. El procedimiento involucra la definición de una vecindad alrededor de cada pixel y usando las características del histograma de esa vecindad derivar una función de transferencia que produzca el nivel de gris de la imagen de salida.

En lugar de emplear la técnica del histograma se pueden utilizar propiedades relativas a las intensidades de los pixeles en un entorno. El valor medio (medida del brillo) y la varianza (medida del contraste) son propiedades útiles. Una transformación local general basada en estas propiedades aplica la intensidad de una imagen de entrada $f(x, y)$ en una nueva imagen $g(x, y)$ con la siguiente transformación para cada pixel,

$$g(x, y) = A(x, y)[f(x, y) - m(x, y)] + f(x, y)$$

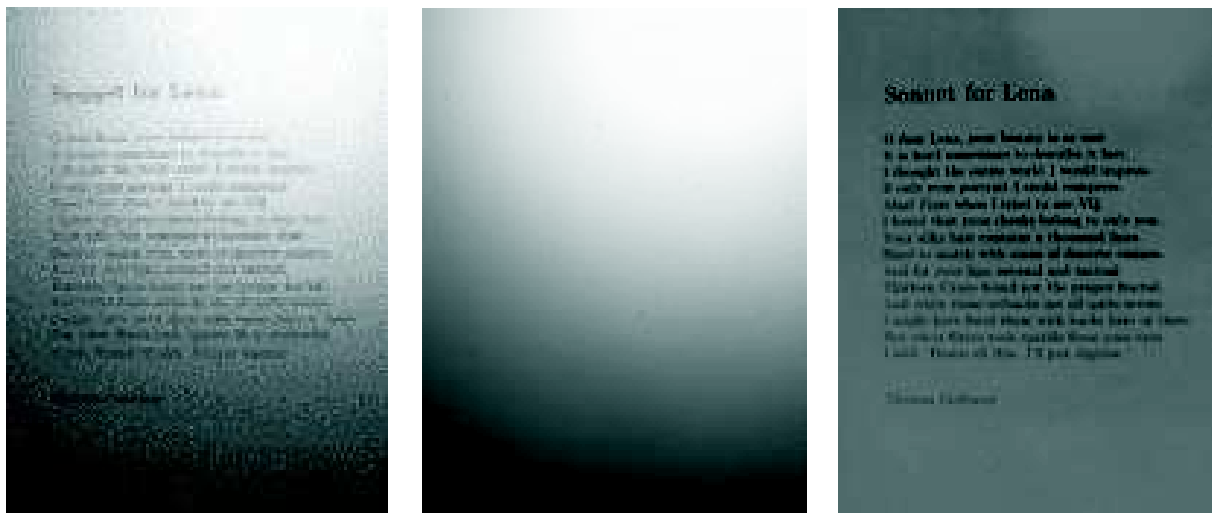


Figura 3.24: Imagen original con gradiente de iluminación, imagen de un papel bajo las mismas condiciones de iluminación y resultado de la sustracción.

con $A(x, y) = k(M/\sigma(x, y))$ y donde $0 < k < 1$, $m(x, y)$ y $\sigma(x, y)$ representan la media y la desviación estándar de los niveles de gris calculados en un entorno cerrado. M es la media global de $f(x, y)$ y k es una constante.

3.2 Sustracción de Imágenes

La diferencia entre dos imágenes $f(x, y)$ y $g(x, y)$ expresada como,

$$h(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$$

es una herramienta muy útil en la etapa de segmentación y en la de mejora de una imagen. La figura 3.24 muestra el resultado de la sustracción para la eliminación del gradiente de iluminación sobre la hoja de papel.

3.3 Promediado de Imágenes

Considérese una imagen $g(x, y)$ formada por la suma de una imagen original $f(x, y)$ y de una función de ruido $n(x, y)$ con media cero y varianza $\sigma_2(x, y)$, es decir,

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y)$$

El objetivo de esta técnica es reducir la influencia del ruido a través de la promediación de un



Figura 3.25: Diagrama en bloques de un filtro.

conjunto $\{g_i(x, y)\}$ de imágenes ruidosas. La promediación de este conjunto de imágenes se calcula por,

$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M [g_i(x, y)]$$

entonces se tiene,

$$\begin{aligned} E\{\bar{g}(x, y)\} &\Rightarrow f(x, y) \\ \sigma_2[\bar{g}(x, y)] &= \frac{1}{M} \sigma_2[n(x, y)] \end{aligned}$$

3.3.1 Filtrado Espacial

El empleo de mascarar espaciales para el procesamiento de imágenes se denomina frecuentemente como filtrado espacial, y las mascarar utilizadas se denominan filtros espaciales.

Muchas operaciones de realce de imágenes se hacen sobre vecindades de los píxeles o regiones de interés (ROI). Esto se debe a que las regiones cercanas al píxel en cuestión pueden proporcionar información valiosa acerca de los niveles de iluminación y los detalles de la escena. El uso de esta información de los píxeles adyacentes está ligada al concepto del filtrado espacial. La figura 3.25 muestra un modelo del proceso de filtrado.

La entrada al sistema es la imagen a filtrar, determinado por $f(x, y)$, la función de transferencia del filtro es $h(x, y)$ (función impulsiva) y la salida será $g(x, y)$, y la relación que define al filtrado es:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y).$$

Existen muchas clases de filtros, pero una clasificación se puede pensar en términos de,

Filtros Pasa Bajo Atenúan las altas frecuencias (ruido).

Filtros Pasa Alto Atenúan las bajas frecuencias (realzan detalles).

Filtros Pasa Banda Atenúan bajas y altas frecuencias.

Filtros Rechaza banda Atenúan una banda específica de frecuencias.

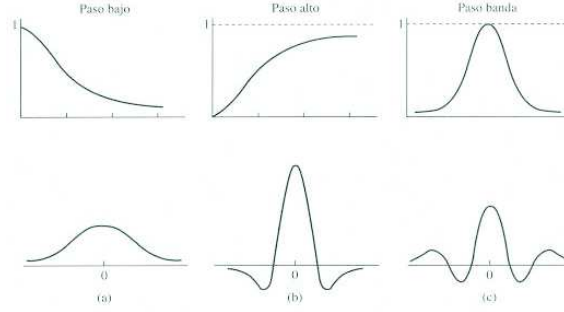


Figura 3.26: Secciones transversales de los tipos de filtros.

En la figura 3.26 se muestran las secciones transversales de los filtros mencionados anteriormente, en el dominio de la frecuencia y en el espacio. La utilización de estos filtros en el dominio espacial se basan en uso de las mascarar espaciales apropiadas. Por ejemplo, si la mascara es de 3×3 elementos con coeficientes w_i entonces la respuesta para el pixel central se obtiene,

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_9 z_9$$

Filtro Espacial Pasa Bajo

La idea del filtro pasa bajos o filtro promediador es simplemente reemplazar el valor de cada pixel en una imagen con el valor promedio (a veces pesado) de sus vecinos, incluyendose el mismo. Esto posee el efecto de eliminar valores de pixeles los cuales son poco representativos de sus vecinos. Este tipo de filtros también se pueden expresar como la convolución de la imagen con una mascara que representa la forma y el tamaño de la vecindad a tener en cuenta. Frecuentemente se utiliza una mascara cuadrada de 3×3 elementos, aunque mascarar mas grandes (por ejemplo 5×5 , 7×7) también se pueden utilizar para lograr un alisamiento más severo.

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las figuras 3.27, 3.28, 3.29, y 3.30 ejemplifican el uso de estos filtros. Además estas figuras muestran dos problemas potenciales de este tipo de filtros.



Figura 3.27: Imagen original e imagen con ruido gaussiano.



Figura 3.28: Imagen Filtrada con filtro pasa bajos de 3×3 elementos e Imagen Filtrada con filtro pasa bajos de 5×5 elementos.



Figura 3.29: Imagen con mayor cantidad de ruido gaussiano e Imagen filtrada con filtro pasa bajos de 3×3 elementos.



Figura 3.30: Imagen con ruido sal y pimienta e Imagen filtrada con filtro pasa bajos de 3×3 elementos.



Figura 3.31: Imagen Original e Imagen filtrada con mascara de 3×3 elementos.

- Un pixel con un nivel poco representativo puede afectar significativamente el valor medio de todos los pixeles en la vecindad.
- Cuando el filtro encuentra un limite de objeto, se interpola a nuevos valores desdibujando el contorno.

Considerese ahora la imagen de la figura 3.31a la cual muestra una escena que posee un rango mas amplio de frecuencias (detalles). Después de suavizar la imagen con una mascara de 3×3 elementos se obtiene la imagen de la figura 3.31b y 3.32.

3.3.2 Filtro Gaussiano Pasa Bajo

El filtro gaussiano pasa bajos es un operador bidimensional de convolución que se utiliza para eliminar ruido y suavizar bordes. En este sentido es similar al filtro promediador pero utiliza una mascara diferente que representa la forma de una campana gaussiana, como se muestra en la figura 3.33. Esta mascara pose algunas propiedades interesantes.

La idea del suavizado gaussiano es utilizar la distribución gaussiana $2D$ como una función de desviación puntual (point-spread), lo que se logra con la convolución. Debido a que la imagen es almacenada como un conjunto de pixeles discretos se necesita producir una versión discreta aproximada de la función gaussiana. En teoría, la distribución gaussiana es distinta de cero siempre, lo cual requeriría una mascara de convolución infinita, pero en la práctica podemos suponer que se anula a 3 veces la desviación estándar y truncan en ese lugar.



Figura 3.32: Imagen filtrada con mascara de 7×7 elementos e imagen filtrada con mascara de 3×3 elementos 3 veces.

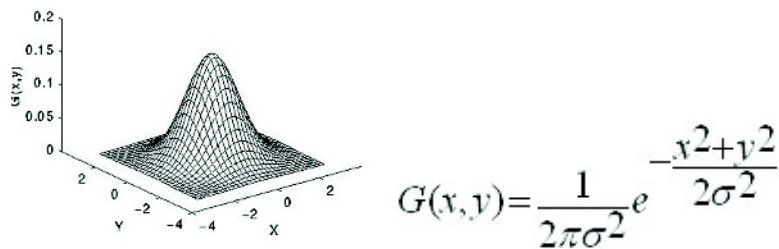


Figura 3.33: Campana Gaussiana y su ecuación.

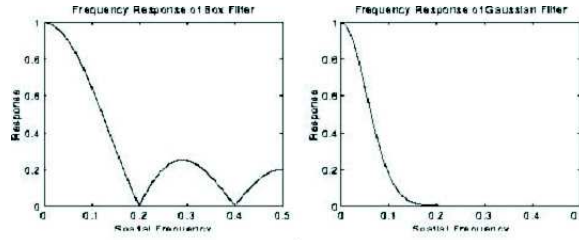


Figura 3.34: Respuesta en frecuencia de: filtro de media (7×7) y filtro Gaussiano con desviación estándar 3.

$$\frac{1}{115} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \sigma = 1.4$$

El efecto del suavizado gaussiano es desdibujar una imagen, como lo hace el filtro de media ya visto. El grado de suavizado se determina a través del valor de la desviación estándar (mientras mas grande la desviación requiere una mascara de mayor tamaño).

La salida de este filtro es un promedio pesado de cada pixel y su vecindad, siendo el de mayor peso el pixel central. Esto lo diferencia del filtro de media donde todos los pesos son iguales a $1/9$. Debido a esto, con este tipo de filtro se obtienen mejores resultados.

Una de las principales justificaciones para utilizar un filtro gaussiano es su respuesta en frecuencia, lo que se puede apreciar en la figura 3.34.

Las imágenes de la figura 3.35 muestran la aplicación de un filtro gaussiano con diferentes tamaños de máscaras. Observe el profundo efecto que este tipo de mascarar posee a medida que el tamaño aumenta. La figura 3.36 muestra otro ejemplo de aplicación de este filtro. Observe en la figura 3.37 la pobre respuesta de este filtro a un ruido del tipo sal y pimienta.

3.3.3 Otros ejemplos

Otras máscaras de convolución

$$a) \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c) \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La figura 3.38 muestra el resultado de la aplicación de estas máscaras.

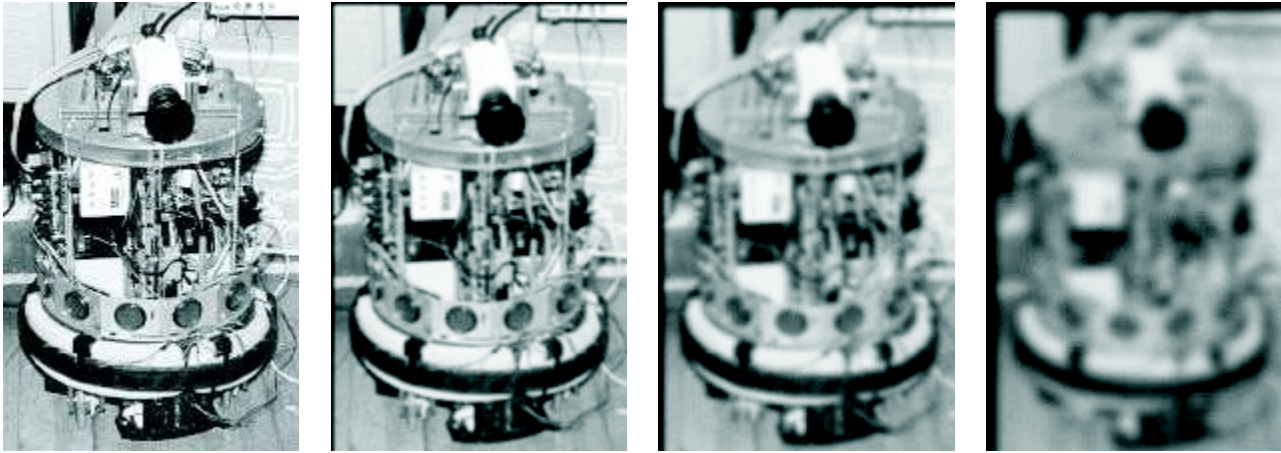


Figura 3.35: Imágenes: Original, Filtradas con mascara 5×5 ($\sigma = 1$), 9×9 ($\sigma = 2$), 15×15 ($\sigma = 4$).



Figura 3.36: Imagen con ruido gaussiano. Imagen filtrada con mascara gaussiana de 5×5 .



Figura 3.37: Imagen con ruido sal y pimienta. Imagen filtrada con mascara gaussiana de 5×5 .

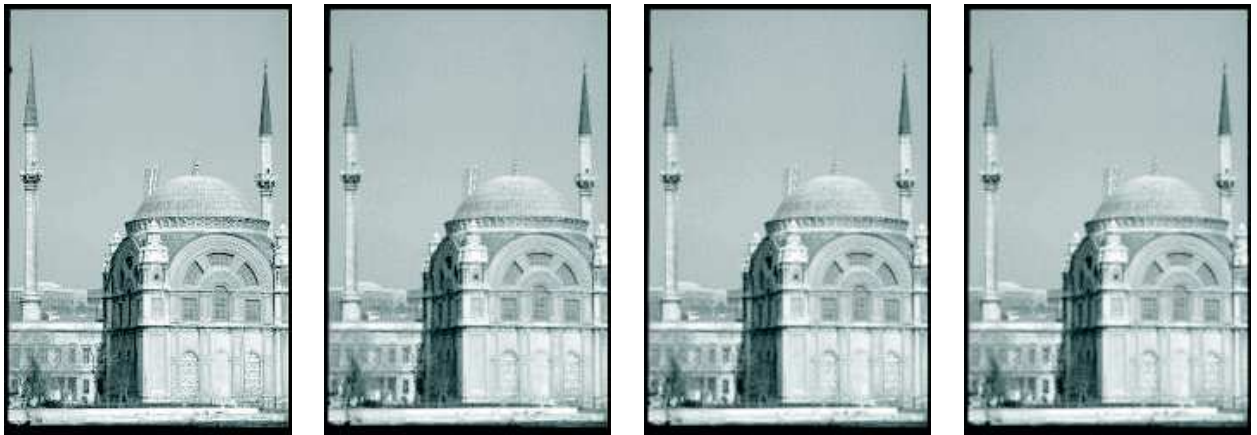


Figura 3.38: Imagen Original y filtrada con máscaras a, b y c.

123	125	126	130	140
122	124	126	127	135
118	120	150	125	134
119	115	119	123	133
111	116	110	120	130

Neighbourhood values:
115, 119, 120, 123, 124,
125, 126, 127, 150

Median value: 124

Figura 3.39: Ejemplo de cálculo del filtro de mediana.

3.3.4 Filtrado de Mediana

Como el filtro promediador, el filtro de mediana en lugar de promediar el pixel con sus vecinos lo reemplaza con la mediana de estos valores. La mediana se calcula primero ordenando todos los valores de los pixeles en la vecindad y luego se reemplaza el nivel de gris del pixel central por el valor del pixel del medio (Si la vecindad contiene un numero par de elementos se reemplaza el pixel central por el promedio de los dos pixeles del medio), como se muestra en la figura 3.39.

El filtro de la mediana tiene dos ventajas respecto al filtro de media:

- La mediana es un promedio mas robusto que la media y por lo tanto un pixel poco representativo no afecta el valor de la mediana significativamente.
- Debido a que el valor de la mediana es el nivel de gris de uno de los pixeles en la vecindad, el filtro no crea nuevos valores poco realistas. Por esta razón este tipo de filtros conserva mucho mejor las formas abruptas de los bordes.

Las imágenes de las figuras 3.40, 3.41 y 3.42 muestran diferentes aplicaciones del filtrado de mediana.

3.3.5 Comparación entre filtro promediador y de mediana

Las imágenes de las figuras 3.43, 3.44, 3.45 y 3.46 permiten comparar los filtros de media (promediador) y mediana para diferentes condiciones de ruido en las imágenes originales.

3.3.6 Filtrado de Alisado Conservativo

El suavizado conservativo es una técnica de reducción de ruido que deriva su nombre del hecho que emplea un simple pero rápido algoritmo que sacrifica potencia de supresión de ruido para preservar los detalles de las frecuencias espaciales altas en una imagen. Está explícitamente diseñado para remover picos de ruido y por lo tanto es menos efectivo para remover ruido del tipo aditivo. Como la mayoría de los filtros para supresión de ruido, este filtro supone que el ruido posee una frecuencia espacial elevada. Por lo tanto se puede atenuar por operación local lo cual hace que la intensidad



Figura 3.40: Imagen original, imagen con ruido gaussiano e imagen filtrada por la mediana con vecindad de 3×3 .



Figura 3.41: Imagen con ruido sal y pimienta, imagen filtrada con la mediana 3×3 .



Figura 3.42: Imagen original, con ruido sal y pimienta, filtro de mediana de 7×7 .



Figura 3.43: Imagen original e Imagen con ruido impulsivo.



Figura 3.44: Mascara de mediana 3×3 , Mascara de media 3×3 .

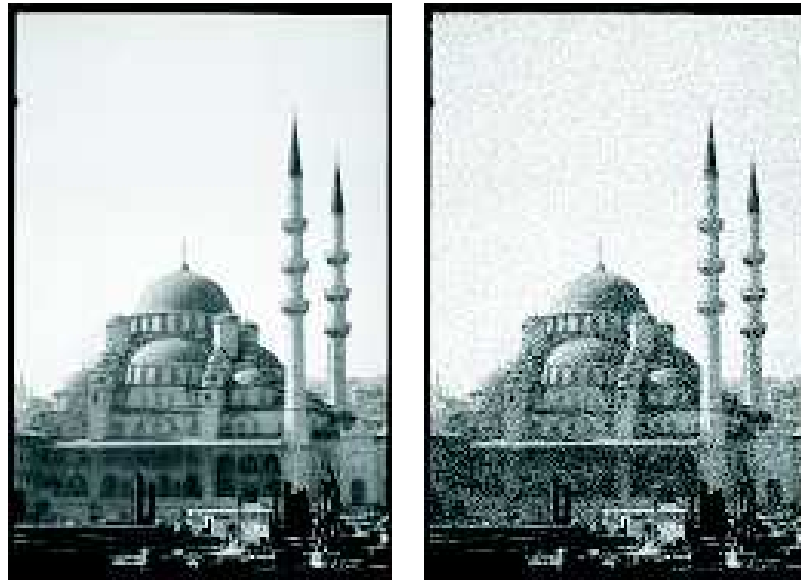


Figura 3.45: Imagen original e Imagen corrupta con ruido gaussiano.

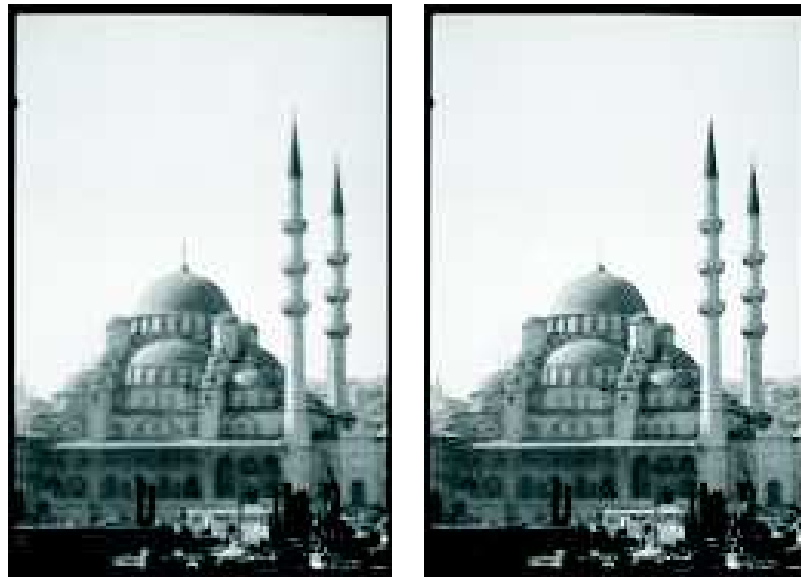


Figura 3.46: Mascara de media 3×3 y Mascara de mediana 3×3 .

123	125	126	130	140
122	124	126	127	135
118	120	150	125	134
119	115	119	123	133
111	116	110	120	130

Neighborhood values:
115, 119, 120, 123, 124,
125, 126, 127, 150

Max: 127, Min: 115

Figura 3.47: .



Figura 3.48: Imagen con ruido gaussiano e imagen filtrada.

de cada pixel sea bastante consistente con el de sus vecinos. El suavizado conservativo asegura que la intensidad del pixel está acotado dentro del rango de valores definidos por sus vecinos. Esto esta acompañado por un procedimiento el cual primero encuentra los valores máximos y mínimos de todos los pixeles dentro de una ventana alrededor del pixel en cuestión.

Si la intensidad del pixel central yace dentro del rango de intensidades definido por sus vecinos, el valor del pixel no se altera. Si por el contrario, la intensidad del pixel central es mas grande que el máximo, se coloca el valor del máximo. Lo mismo para el mínimo. Ver figura 3.47.

Las imágenes de las figuras 3.48, 3.49 y 3.50 muestran el comportamiento de este filtro frente a diferentes condicones de ruido.



Figura 3.49: Imagen con ruido impulsivo e imagen filtrada

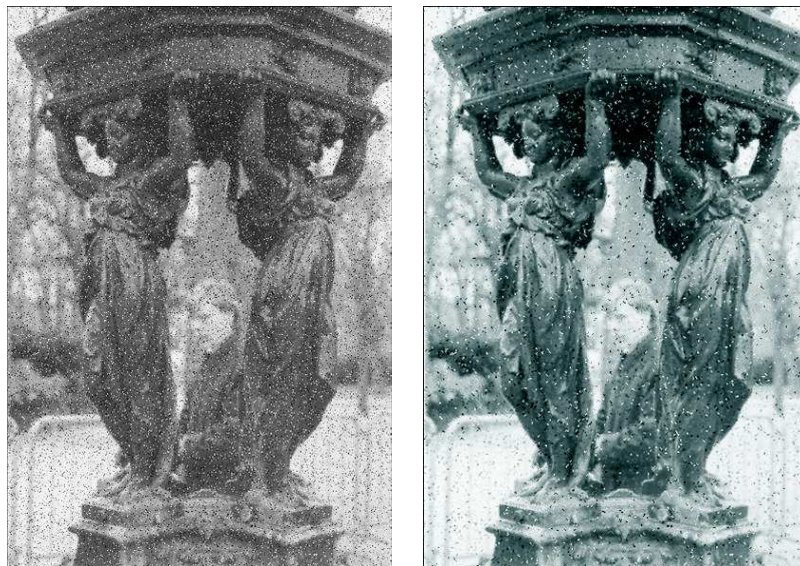


Figura 3.50: Imagen con ruido impulsivo con mas de un pixel corrupto en la vecindad e Imagen Filtrada

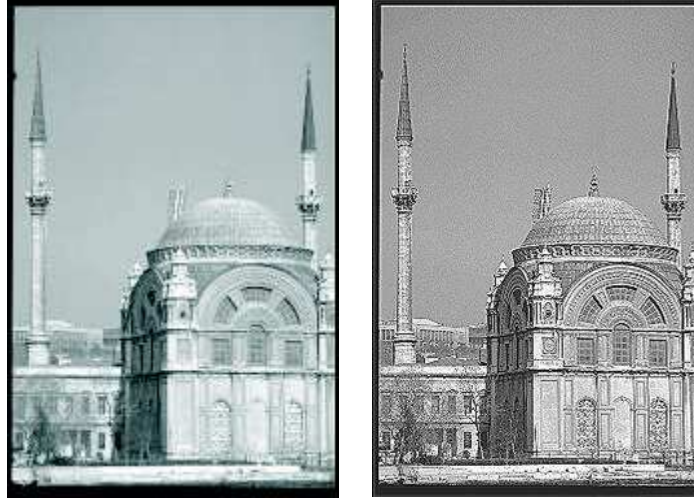


Figura 3.51: Imagen original, filtrada con mascara a.

3.3.7 Filtro Espacial Pasa Alto

El objetivo principal de las operaciones de realce es destacar los detalles finos de una imagen o intensificar detalles que han sido difuminados, por error o por efecto natural del método de captura de la imagen. El perfil de la respuesta a un impulso indica que este debe poseer coeficientes positivos cerca de su centro y negativos en la periferia. Por ejemplo,

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Otros ejemplos de mascarar son,

$$a) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Las imágenes de las figuras 3.51 y 3.52 muestran el resultado de la aplicación del filtro pasa alto.

3.3.8 Filtro High-Boost

Se puede filtrar una imagen con un filtro pasa alto como la diferencia entre la imagen original y una versión suavizada (pasa bajo) de la misma. De esta manera se mejoran los bordes y otros detalles de alta frecuencia. Este tipo de técnica se utiliza muy a menudo en fotografía e impresiones para remarcar los bordes, figura 3.53.

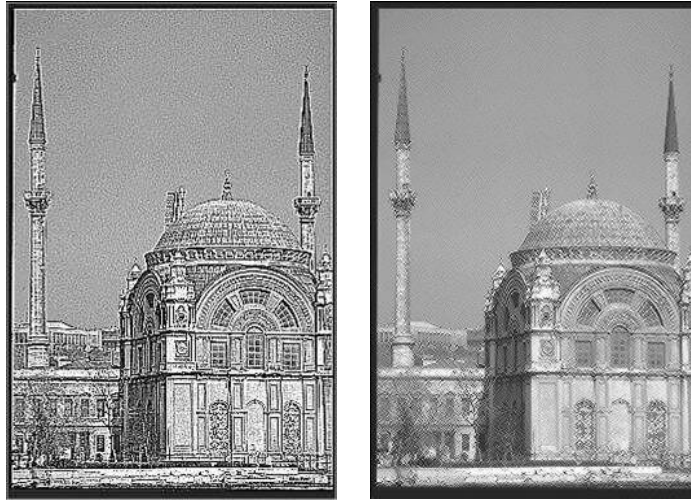


Figura 3.52: Imagen filtrada con mascara b y c.

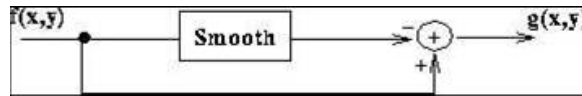


Figura 3.53: Diagrama en bloques de un filtro pasa alto.

$$g(x, y) = f(x, y) - f_{suave}(x, y)$$

Se puede comprender mejor la operación de este filtro examinando las características de las señales. Supongase la señal mostrada en en la figura 3.54(a), si le restamos las componentes de baja frecuencia 3.54(b) conduce a la señal de alta frecuencia 3.54(c).

Si se suma la señal filtrada pasa alto a la señal original se obtiene la señal de la figura 3.55. El diagrama en bloques de esta operación se muestra en la figura 3.56.

Se puede combinar lo anterior para ser aplicado a imágenes de acuerdo a la ecuación,

$$F_{pa}(x, y) = f(x, y) + k * g(x, y)$$

donde k es una constante de escala. Valores típicos de k varían desde 0.2 a 0.7 en donde los valores mas grandes proveen cantidades mayores de filtrado.

Otra formulación encontrada en los libros es,

$$f_{pa}(x, y) = (A - 1)f(x, y) + g(x, y)$$

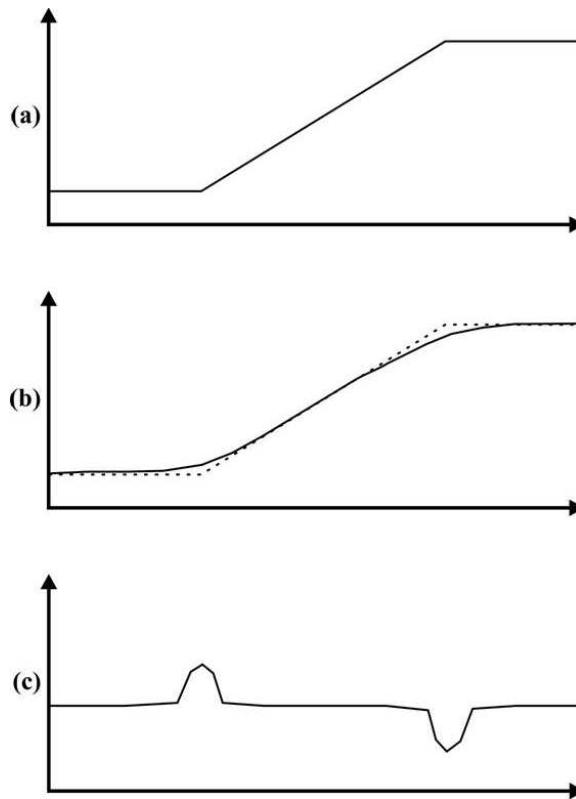


Figura 3.54: Proceso de filtrado pasa alto.

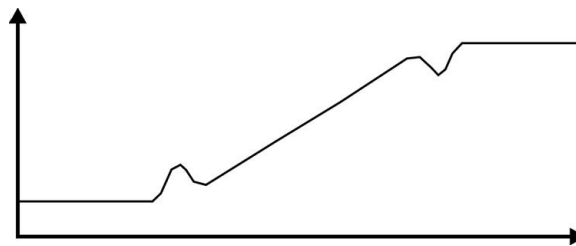


Figura 3.55: Perfil de la señal original con el agregado de la señal filtrada.

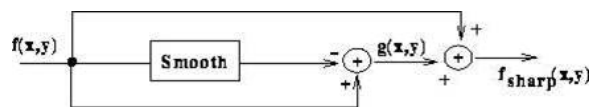


Figura 3.56: Diagrama en bloques del filtro con el agregado de la imagen original.

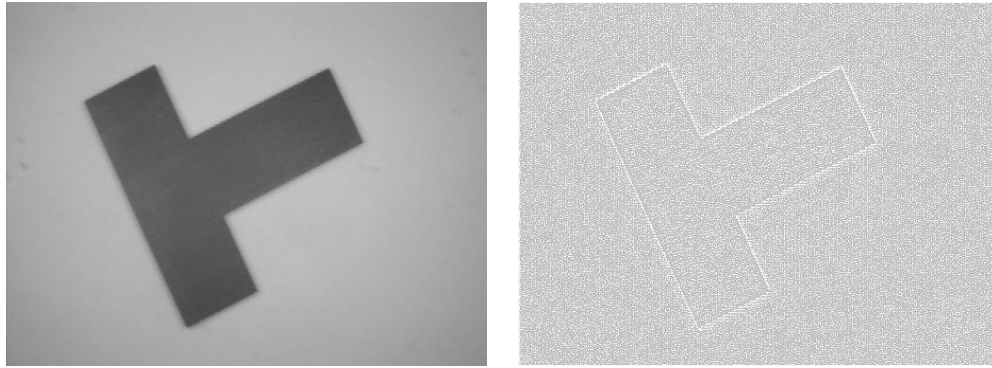


Figura 3.57: Imagen original y filtrado pasa alto.

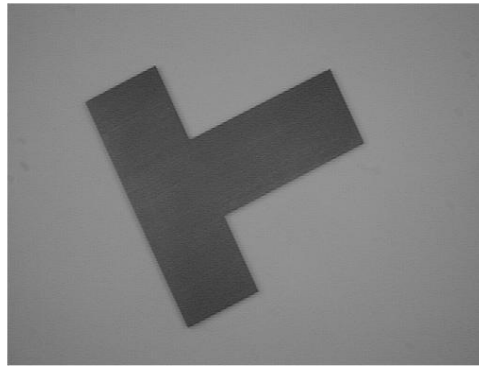


Figura 3.58: Imagen con bordes resaltados.

donde A es el factor de escala. Si $A = 1$ se obtiene un filtro pasa alto convencional. Si $A > 1$ se obtiene el filtro High Boost.

La implementación de este filtro se hace en base a la elección apropiada del filtro pasa bajos, luego se resta pixel a pixel de la imagen original para producir el filtro pasa alto. Consideremos la imagen de la figura 3.57,

cuyos bordes abruptos han sido suavizados por desenfoco de la cámara. Para extraer los bordes se alisa la imagen con una filtro de media (3×3) y luego se resta de la original.

Debido a que se han restado todas las componentes de baja frecuencia de la imagen original, se ha dejado solo la información relativa al contorno. A veces es deseable tener la imagen original con el contorno mejorado o resaltado. Para lograr este efecto se le suma una porción de la imagen anterior ($k = 0.7$) a la imagen original, figura 3.58.

Una forma mas común de implementar este filtro es a través del uso del operador Laplaciano negativo para extraer la información pasa alto directamente, figura 3.59.

Algunas mascarar para producir aproximaciones discretas al filtro Laplaciano son,

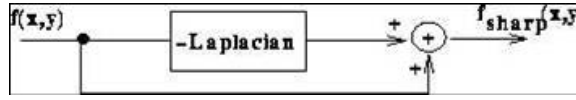


Figura 3.59: Diagrama en bloques del filtro pasa alto Laplaciano.

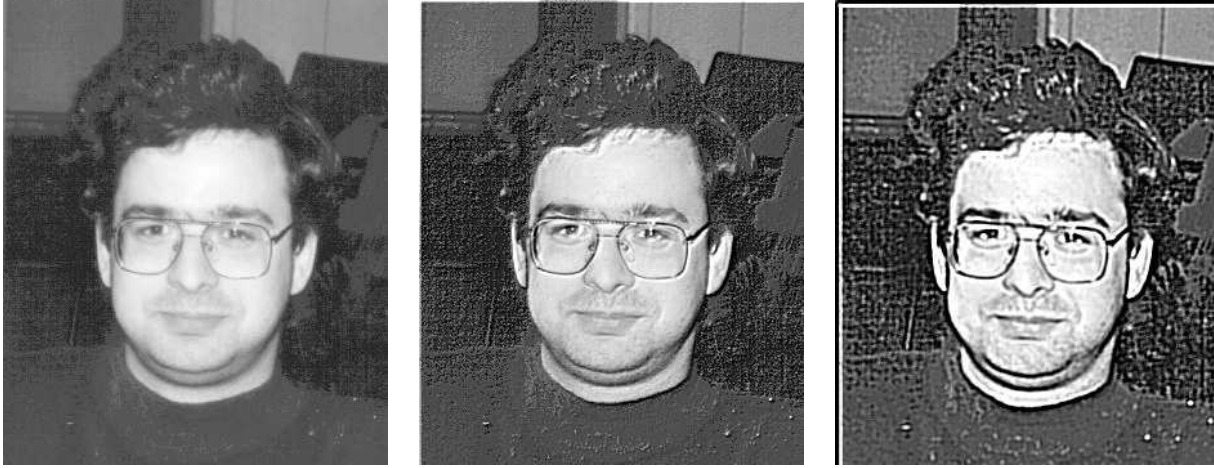


Figura 3.60: Imágenes original, high boost Laplaciano 3x3 y 7x7.

$$a) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Después de convolucionar una imagen con una mascara como las anteriores solo se debe escalar y sumar a la imagen original para producir el efecto deseado, figura 3.60.

3.3.9 Filtrado en el dominio de la Frecuencia

Los filtros frecuenciales procesan la imagen en el dominio de la frecuencia. Primero se debe obtener la Transformada de Fourier de la imagen, se multiplica por la función del filtro y luego se anti-transforma para obtener la imagen filtrada en el dominio espacial. Todos los filtros frecuenciales se pueden implementar en el dominio espacial siempre y cuando exista un kernel de convolución simple. Siempre es conveniente trabajar en el dominio espacial pues es computacionalmente mejor. Estos filtros se utilizan cuando es muy complejo obtener la mascara espacial y también puede ser mas eficiente.

Los filtros espaciales están basados en la Transformada de Fourier. El operador usualmente toma una imagen y la función de un filtro en el dominio de Fourier, luego son multiplicadas pixel a pixel, es decir,

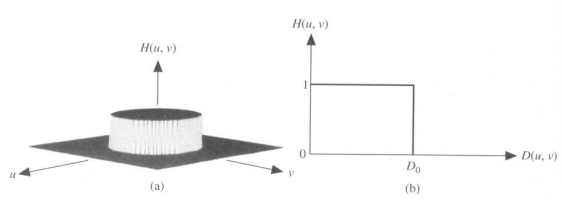


Figura 3.61:

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

donde $F(u, v)$ es la transformada de Fourier de la imagen de entrada, $H(u, v)$ es la función del filtro en el dominio de Fourier y $G(u, v)$ es la transformada de Fourier de la imagen filtrada. Para obtener la imagen resultante en el dominio espacial, $G(u, v)$ debe ser transformada utilizando la transformada inversa de Fourier.

Debido a que el producto en el dominio frecuencial es idéntico a la convolución en el dominio espacial, en teoría todos los filtros frecuenciales pueden ser implementados como mascarar espaciales. Sin embargo en la práctica la función del filtro en la frecuencia solo puede aproximarse por el kernel de filtrado en el dominio espacial.

La forma de la función del filtro determina el efecto del operador. Como sabemos existen básicamente tres tipos de filtros, pasa bajos, pasa altos y pasa banda.

Filtro Ideal

El filtro pasa bajo mas simple es el filtro pasa bajos ideal, figura 3.61. Suprime todas las frecuencias mas altas que la frecuencia de corte D_o y no modifica las frecuencias bajas.

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \leq D_o \\ 0 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \geq D_o \end{cases}$$

En la practica D_o se especifica como una fracción de la frecuencia mas alta representada en el dominio de Fourier. La desventaja de este filtro es un efecto de *ringing* que ocurre a lo largo de los contornos de la imagen en el dominio espacial. La figura 3.62 muestra la respuesta en frecuencia y espacial del filtro ideal para dos frecuencias de corte distintas, tambien se observa el efecto de ringing. La forma del filtro 2D se obtiene rotando la función 1D alrededor del eje y.

La figura 3.63 muestra el aporte de energía a la imagen de cada frecuencia de corte.

Las imágenes de las figuras 3.64, 3.65, 3.66 y 3.67 muestran el efecto del ringing.

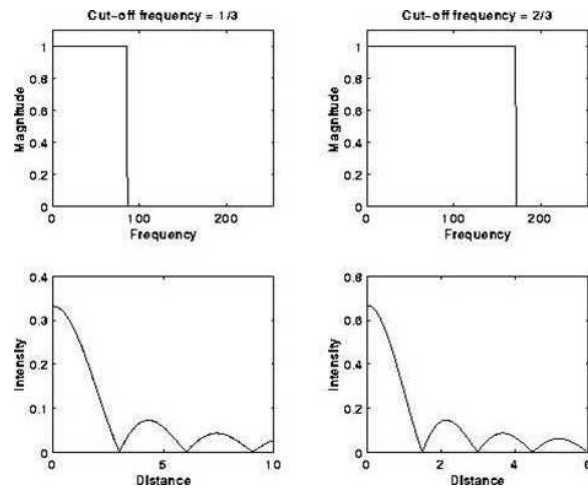


Figura 3.62:

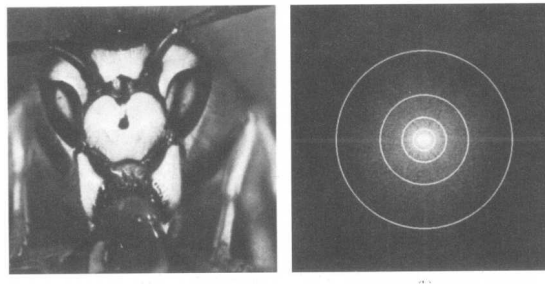


Figura 3.63: Imagen y su Transformada de Fourier. Los círculos corresponden a 90,93,95,99,99.5% de la energía de la imagen. (radios 8, 18, 43, 78, 152).

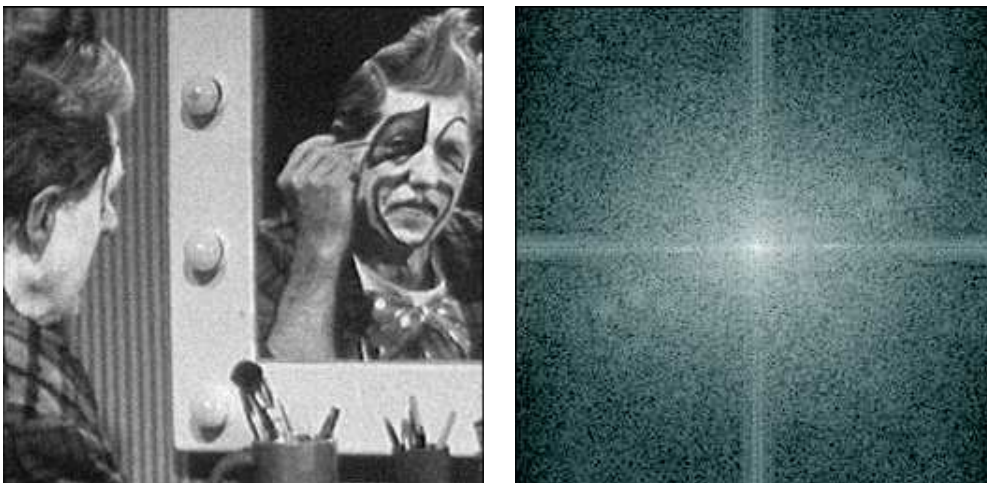


Figura 3.64: Imagen contaminada con ruido gaussiano $\sigma = 8$ y el espectro de Fourier.



Figura 3.65: Imágenes filtradas con filtro ideal, $D_o = 1/3$ y $1/2$, efecto de ringing.

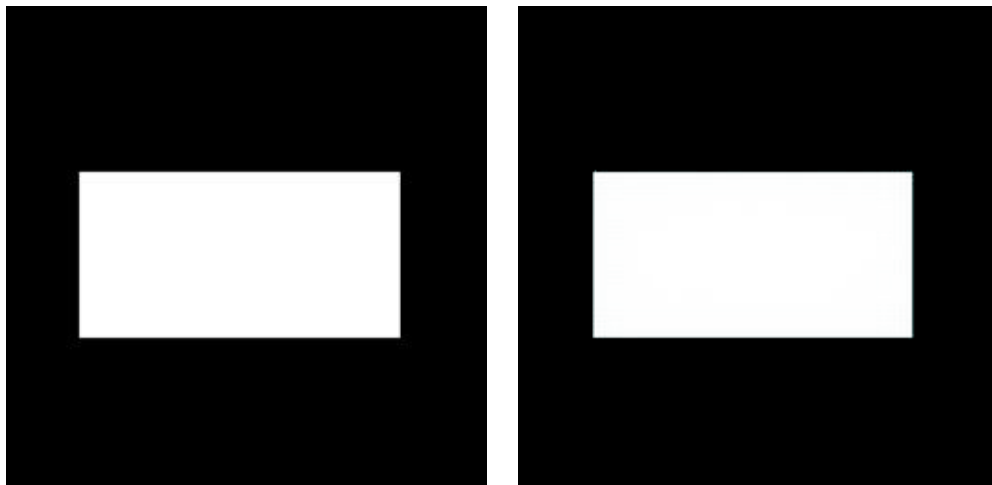


Figura 3.66: Imagen Original y filtrada con filtro ideal $D_o = 2/3$.

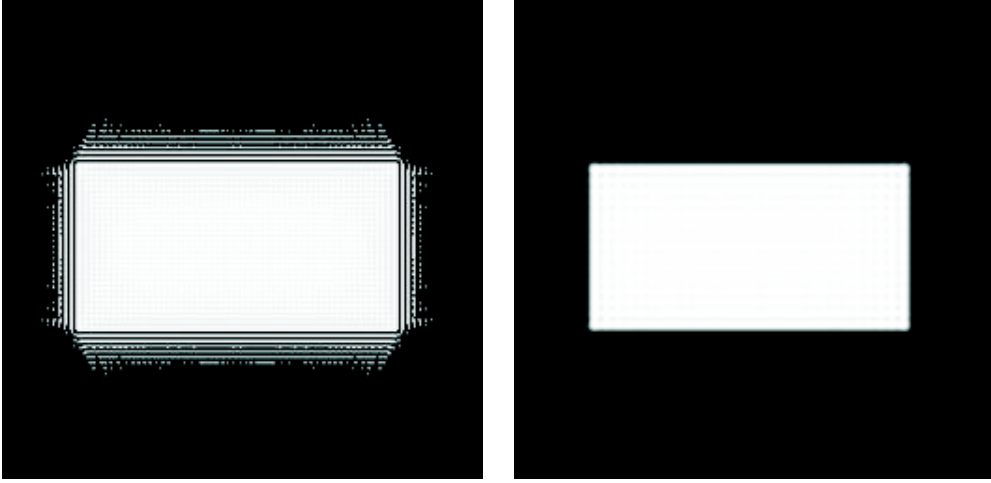


Figura 3.67: Imagen filtrada anterior con ecualización de histograma. Imagen filtrada con $D_o = 1/3$. Notar el efecto de ringing.

3.3.10 Filtros Pasa Bajos No Ideales

Se pueden lograr mejores resultados con una función filtro de forma gaussiana. La ventaja de este filtro es que posee la misma forma en el dominio espacial y en el frecuencial. Una aproximación discreta a la forma gaussiana es el filtro de Butterworth. Aplicando este filtro en el dominio frecuencial muestra un resultado similar al filtrado suavizante de un filtro gaussiano. Una diferencia es que el costo computacional del filtro espacial se incrementa con la desviación estándar (el tamaño de la mascara), mientras que el costo computacional del filtro frecuencial es independiente de la función del filtro. De aquí que, el filtro espacial gaussiano es mas apropiado para filtros pasa bajos estrechos, mientras que el de Butterworth es mejor implementarlo para filtros pasa bajos con mucho ancho de banda.

Filtro Pasa Bajo de Butterworth

La función de transferencia frecuencial del filtro de orden n esta dado por la ecuación, figura 3.68:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{D_o} \right]^{2n}}$$

Las imagenes de las figuras 3.69 y 3.70 muestran el resultado de la aplicación de este filtro comparado con el filtro ideal.

La función del filtro pasa bajos de Butterworth carece de una discontinuidad brusca que establezca un corte claro entre la banda de paso y la de rechazo. Para este tipo de filtros es común definir la frecuencia de corte D_o , a partir del lugar en el cual $H(u, v)$ corresponde a una determinada fracción de su valor máximo. Para la definición dada esto se obtiene cuando $H(u, v) = 0.5$. Otro

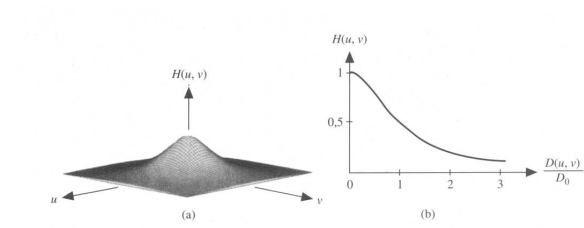


Figura 3.68: Espectro de Fourier del Filtro de Butterworth.



Figura 3.69: Imagen con ruido gaussiano. Filtro ideal $D_o = 1/3$. Filtro de Butterworth $D_o = 1/3$.

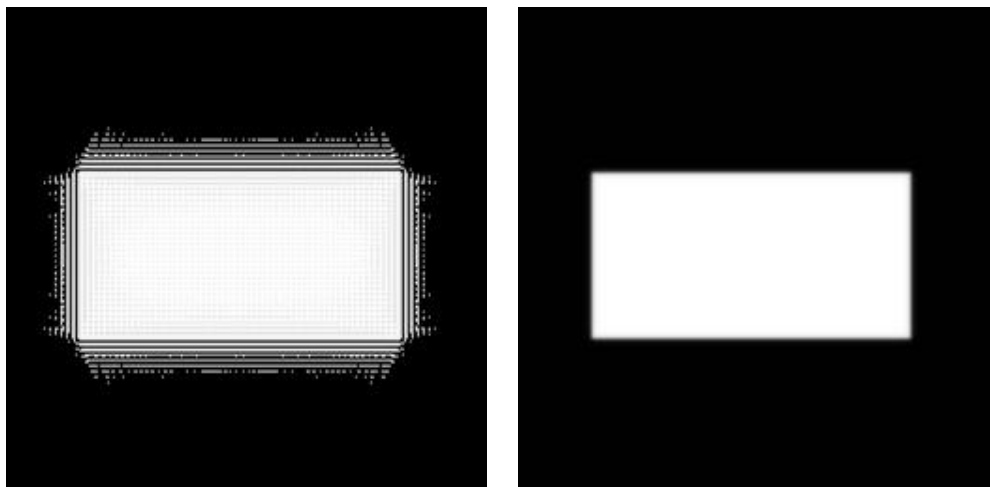


Figura 3.70: Imagen filtrada con filtro ideal y con filtro de Butterworth, $D_o=1/3$.

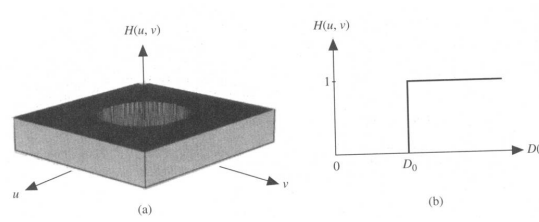


Figura 3.71:

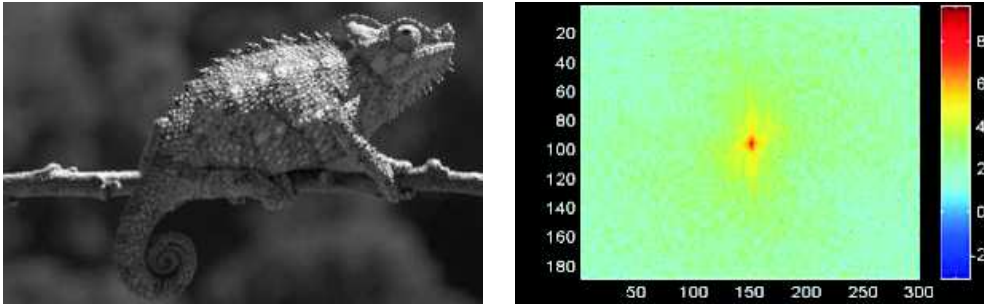


Figura 3.72: Imagen de un camaleón y su espectro de Fourier.

valor utilizado es $H(u, v) = 1/\sqrt{2}$.

3.3.11 Filtro Pasa Alto

Se pueden atenuar las bajas frecuencias de una imagen a través de un filtro pasa alto especificado en la frecuencia. Para esto se debe multiplicar la transformada de Fourier de la imagen con la función del filtro y luego aplicar al resultado la transformada inversa de Fourier para obtener la imagen en el dominio espacial filtrada.

Filtro Pasa Alto Ideal

Un filtro pasa alto ideal como el mostrado en la figura 3.71, posee la función,

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} < D_o \\ 1 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \geq D_o \end{cases}$$

Las imágenes de las figuras 3.72, 3.73 y 3.74 muestran la aplicación de este tipo de filtro. Observar también el fenómeno de Gibbs (similar al ringing).

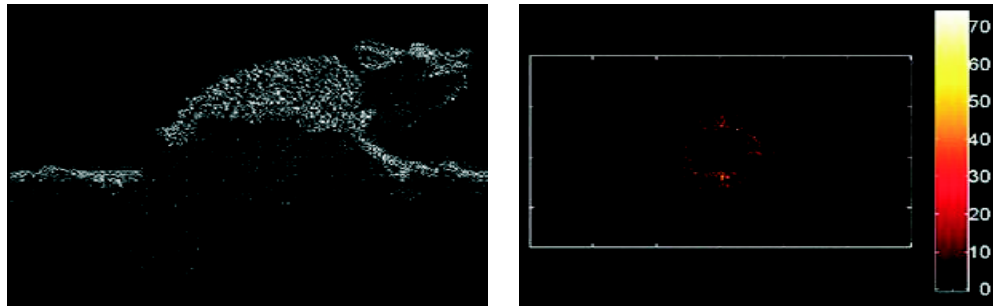


Figura 3.73: Imagen filtrada y espectro con bajas frecuencias eliminadas.

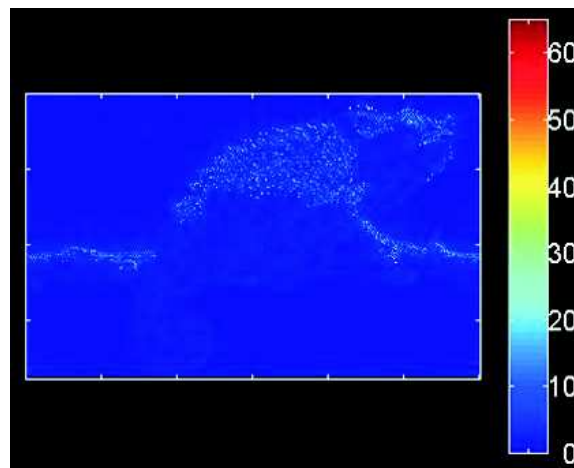


Figura 3.74: Existe un fenómeno de oscilación que se puede ver a las orillas de la imagen del camaleón y más particularmente cerca de la rama donde está sostenido. Esta oscilación se conoce como "fenómeno de Gibbs" y es debido al filtrado por medio de una ventana rectangular.

Filtro Pasa Alto de Butterworth

La función de transferencia de un filtro pasa alto de Butterworth de orden n y con frecuencia de corte ubicada a la distancia D_o del origen se define por la relación,

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_o}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right]^{2n}}$$

Note que cuando $\sqrt{u^2 + v^2} = D_o$ la función cae a la mitad de su valor máximo. Como para el caso del filtro pasa bajo de Butterworth es práctica común seleccionar la ubicación de la frecuencia de corte en un punto para el cual $H(u, v)$ sea $1/\sqrt{2}$ de su máximo valor. Para este caso se puede modificar la ecuación anterior para que satisfaga esta restricción.

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[(\sqrt{2} - 1)\frac{D_o}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right]^{2n}}$$

Filtro Homomórfico

El principio básico de este tipo de filtrado es el de utilizar el modelo iluminación - reflectancia visto en capítulos anteriores. Una imagen $f(x, y)$ puede describirse en términos de sus componentes de iluminación y de reflectancia: $f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$. Resulta que la transformada de Fourier del producto de estas dos funciones no es separable, así que para poder trabajar independientemente con los dos componentes es necesario efectuar una transformación logarítmica, es decir:

$$z(x, y) = \ln[f(x, y)] = \ln[i(x, y)] + \ln[r(x, y)].$$

Aplicando ahora sí la transformada de Fourier a la ecuación se obtiene:

$$Z(u, v) = I(u, v) + R(u, v).$$

$$S(x, y) = H(u, v)Z(u, v) = H(u, v)I(u, v) + H(u, v)R(u, v)$$

Aplicando Transformada de Fourier inversa se obtiene,

$$\begin{aligned} s(x, y) &= F^{-1}[S(u, v)] = F^{-1}[H(u, v)I(u, v)] + F^{-1}[H(u, v)R(u, v)] \\ s(x, y) &= i'(x, y) + r'(x, y) \end{aligned}$$

Como $z(x, y)$ se tomo en base al logaritmo entonces el proceso inverso es,

$$\begin{aligned} g(x, y) &= e^{[s(x, y)]} = e^{[i'(x, y) + r'(x, y)]} \\ g(x, y) &= e^{[i'(x, y)]} e^{[r'(x, y)]} \end{aligned}$$

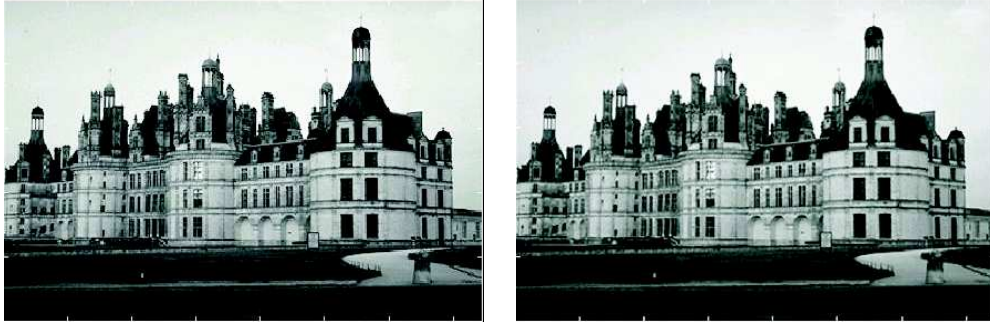


Figura 3.75: Imagen original e imagen ecualizada.

$$g(x, y) = i_o(x, y)r_o(x, y)$$

El primer componente contiene en general la información sobre el nivel de gris promedio, mientras que el segundo varía abruptamente, sobre todo en las vecindades de bordes y fronteras entre objetos. Normalmente se asocia a las bajas frecuencias de la transformada de Fourier del logaritmo de la imagen a la iluminación, mientras que las altas frecuencias se asocian a la reflectancia. La iluminación proporciona el rango dinámico que se aplica en la imagen, mientras que el contraste depende de las características de la imagen y más particularmente, de su capacidad de reflejar la luz.

Al emplear un filtro homomórfico, se define una función de transferencia de un filtro $H(u, v)$ que opera sobre los componentes de alta y baja frecuencia de manera diferente entre ellos. Esta función tiende a disminuir las bajas frecuencias y a realzar las altas. El resultado final será una compresión del rango dinámico acompañado de un realce del contraste:

Entonces, la secuencia de operaciones para el filtro homomórfico es,

$$f(x, y) \rightarrow \langle \ln \rangle \rightarrow \langle FFT \rangle \rightarrow \langle H(u, v) \rangle \rightarrow \langle FFT_{inv} \rangle \rightarrow \langle exp \rangle \rightarrow g(x, y)$$

las imágenes de las figuras 3.75, 3.76 y 3.77 ejemplifican el uso de este filtro.

Una posible función para el filtro homomórfico se muestra en la figura 3.78.

Algunas de las aplicaciones de este tipo de filtrado es para imágenes que tienen ruido de "speckle", semejante a la textura característica en las imágenes de ultrasonido médico. En el caso de imágenes con bajo contraste, este tipo de ruido reduce su resolución significativamente, de tal manera que la supresión de este tipo de ruido es importante. El problema de reducción de este ruido es diferente en general de otros tipos, ya que no es un ruido aditivo, sino multiplicativo.

Para este tipo de imágenes se puede efectuar una combinación entre el filtrado homomórfico convencional y un filtrado de Wiener para producir el filtrado homomórfico de Wiener [Jain, 1989]. Al tenerse un ruido multiplicativo, parte de la solución puede darse por una transformación logarítmica, seguida por un filtrado de Wiener y una transformación final exponencial. Las imágenes de las figuras 3.79, 3.80 y 3.81 ejemplifican el uso de este filtro.

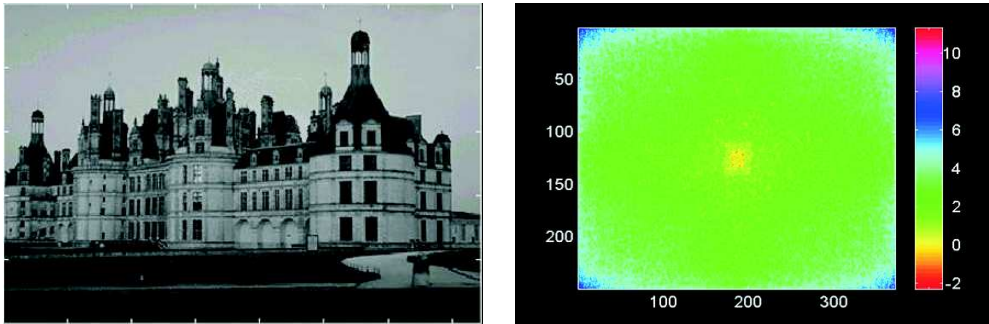


Figura 3.76: Aplicación del Logaritmo Natural. Espectro de Fourier al que se aplicó una ventana.

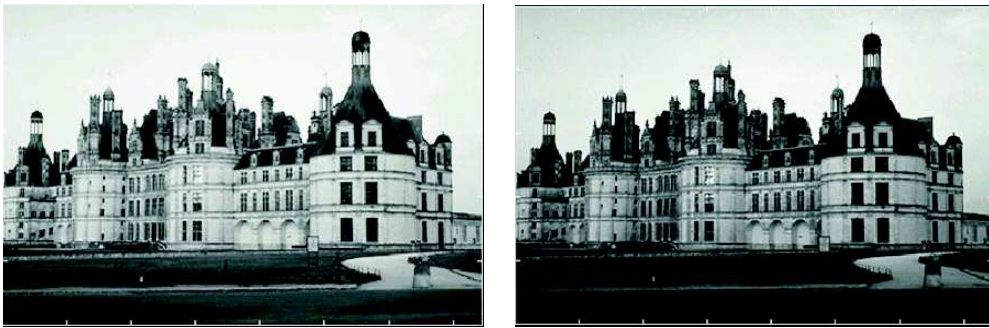


Figura 3.77: Después de la aplicación de la transformada inversa Después de la aplicación de la exponencial. (Compresión de rango dinámico, realce del contraste)

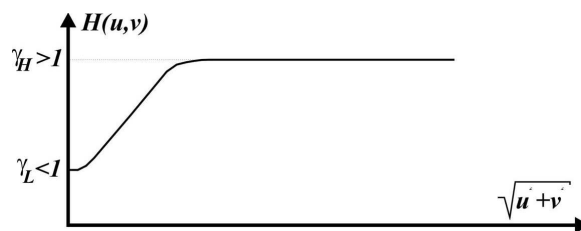


Figura 3.78:



Figura 3.79: Imagen original, imagen con ruido multiplicativo.

3.4 Mascaras Espaciales

3.4.1 Generación de mascarar especiales mediante especificaciones en el dominio de la frecuencia

La técnica que se desarrollará permitirá construir mascarar de filtros espaciales que aproximan un determinado filtro frecuencial. El proceso de filtrado en la frecuencia está basado en la ecuación $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$ donde $H(u, v)$ es la función de transferencia del filtro. Por el teorema de convolución esto se puede implementar en el dominio espacial por,

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h(x-i, y-k)f(i, k)$$

por simplicidad se suponen imágenes cuadradas y que las funciones han sido extendidas según corresponde.

Como h de $N \times N$ es la mascarar de convolución espacial su transformada de Fourier es,

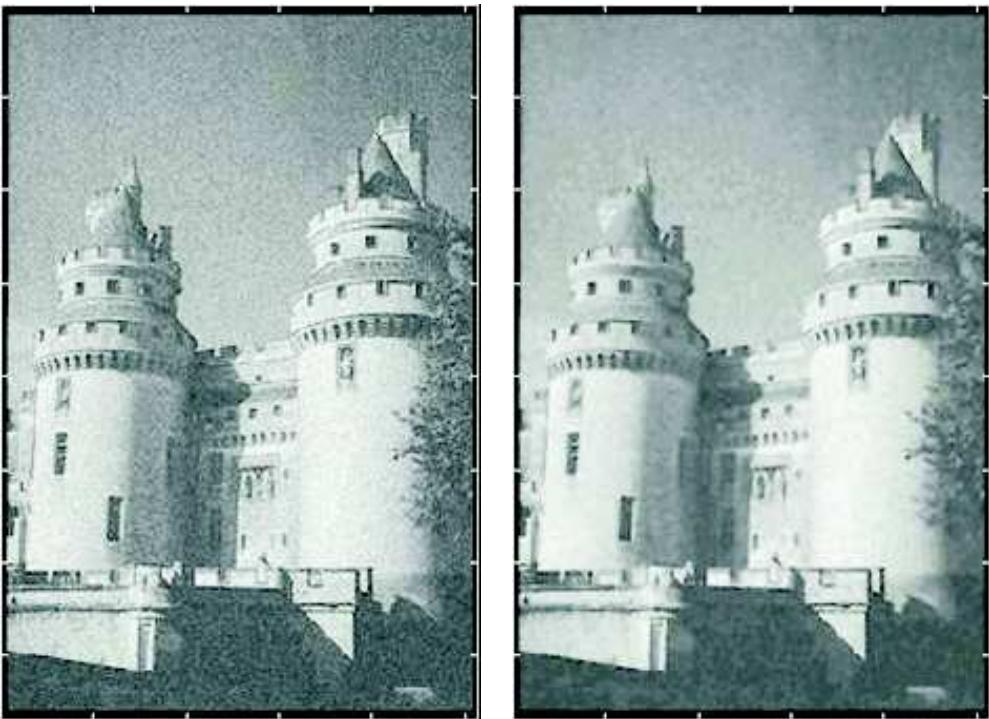


Figura 3.80: Imagen después de una transformación logarítmica. Imagen después del filtrado de Wiener.

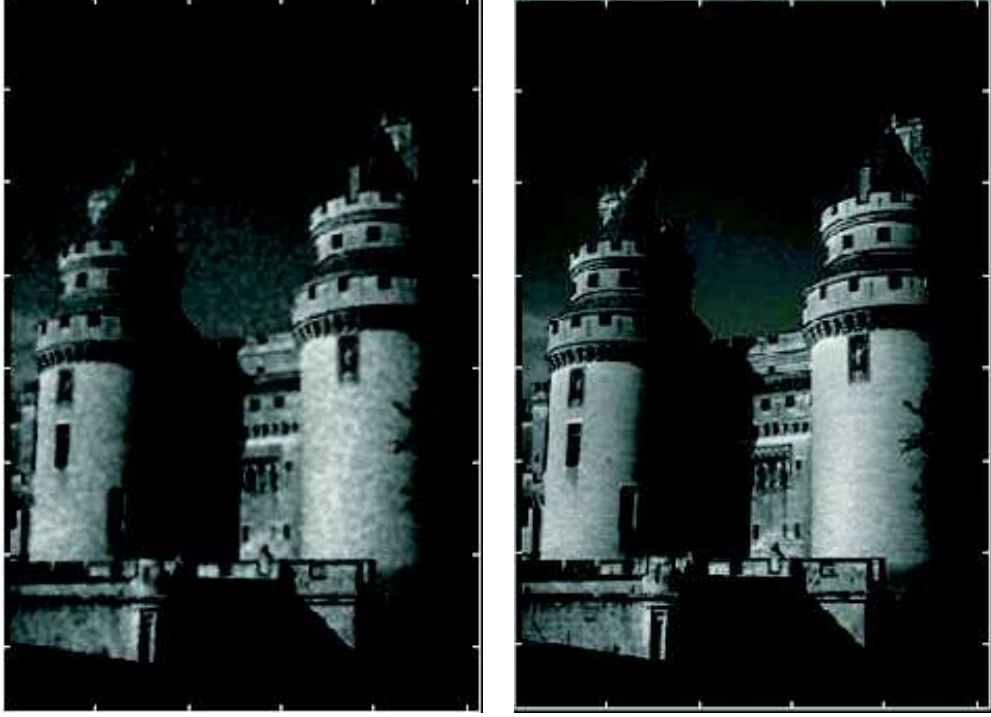


Figura 3.81: Imagen después de una transformación exponencial e imagen original.

$$H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} h(x, y) e^{-j2\pi \frac{(ux+vy)}{N}}$$

Sin embargo suponemos que $h(x, y)$ está restringido a cero para valores de $x > n$ y de $y > n$ con $n < N$. Esto da por resultado una mascara de convolución de $n \times n$ elementos y por lo tanto se obtiene una cuya transformada de Fourier es,

$$H(\hat{u}, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} h(\hat{x}, y) e^{-j2\pi \frac{(ux+vy)}{N}}$$

El objetivo que se persigue es encontrar los coeficientes de de forma tal que el error,

$$e^2 = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} |H(u, v) - H(\hat{u}, v)|^2$$

sea mínimo.

La transformada de Fourier se puede expresar matricialmente de la forma,

$$\hat{H} = C\hat{h}$$

donde \hat{H} es un vector columna de N^2 elementos y \hat{h} es un vector columna de n^2 elementos. C es una matriz de $N^2 \times n^2$ de términos exponenciales cuyas posiciones están determinados por el orden de \hat{H} y \hat{h} .

Un procedimiento simple para generar los vectores a partir de las matrices es considerar,

$$\begin{aligned} H(\hat{u}, v) &\Rightarrow \hat{H}(i), i = uN + v \\ h(\hat{u}, v) &\Rightarrow \hat{h}(k), k = xn + y \end{aligned}$$

Finalmente, los elementos de la matriz C indicados por (i, k) se generan por los términos exponenciales,

$$\frac{1}{N} e^{-j2\pi \frac{(ux+vy)}{N}} \Rightarrow C(i, k), i = uN + v, k = xn + y$$

En notación matricial la ecuación del error se escribe como,

$$e^2 = (\hat{H} - H)^*(\hat{H} - H) = \|\hat{H} - H\|^2 = \|C\hat{h} - H\|^2$$

Calculando la derivada parcial del error respecto de la mascara espacial e igualando a cero se obtiene el mínimo de error, es decir,

$$\frac{\partial e^2}{\partial \hat{h}} = 2C^*(C\hat{h} - H) = 0$$

despejando de esta ecuación la mascara espacial se obtiene,

$$\hat{h} = (C^*C)^{-1}C^*H$$

donde la matriz $(C^*C)^{-1}C^*$ se denomina inversa generalizada. En general los elementos de la mascara espacial serán cantidades complejas. Sin embargo si la función del filtro en el dominio frecuencial es real y simétrica entonces la mascara poseerá coeficientes reales y simétricos.