Precondición más débil

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Verificación de programas

- Sabemos razonar sobre la corrección de nuestros programas, anotando el código con predicados que representan los estados.
- Nos interesa formalizar estos razonamientos, para estar seguros de que son correctos y para usarlos en el contexto de un verificador automático (!)
- Semánticas formales:
  1. **Operacional:** Simular la ejecución del programa en una máquina virtual.
  2. **Denotacional:** Convertir el programa en una función matemática y analizar la función resultante.
  3. **Axiomática:** Visualizar el programa como el resultado de la aplicación de un conjunto de axiomas y reglas de inferencia.

Semántica axiomática

- Sistema de axiomas y reglas de inferencia ideado para la verificación de programas imperativos.
- Basado en triplas de Hoare:

$$\{P\}\ \textbf{codigo}\ \{Q\}$$

- Esta tripla de Hoare corresponde al cumplimiento de la especificación por parte del código:
  1. Si el programa comienza en un estado que cumple P ...
  2. ... entonces termina luego de un número finito de pasos ...
  3. ... en un estado que cumple Q.

Semántica axiomática

- Definimos un lenguaje imperativo basado en variables y las siguientes instrucciones:
  1. Nada: Instrucción **skip** que no hace nada.
  2. Asignación: Instrucción **x := E**.
- Además, tenemos las siguientes estructuras de control:
  1. Secuencia: **S1; S2** es un programa, si **S1** y **S2** son dos programas.
  2. Condicional: **if B then S1 else S2 endif** es un programa, si **B** es una expresión lógica y **S1** y **S2** son dos programas.
  3. Ciclo: **while B do S endwhile** es un programa, si **B** es una expresión lógica y **S** es un programa.
- Llamaremos SmallLang a este lenguaje sencillo.

Demostraciones de corrección

- Buscamos un mecanismo para demostrar "automáticamente" la corrección de un programa respecto de una especificación (es decir, la validez de una tripla de Hoare).
- ¿Es válida esta tripla?

$$\{x \geq 4\}$$
$$\mathbf{x := x + 1}$$
$$\{x \geq 7\}$$

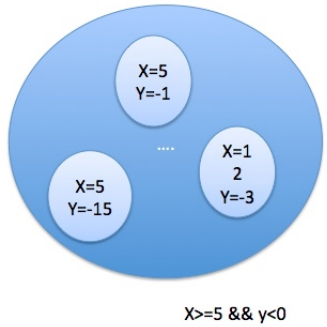
- No. Contrajemplo: con $x = 4$ no se cumple la postcondición.
- ¿Es válida esta tripla?

$$\{x \geq 4\}$$
$$\mathbf{x := x + 1}$$
$$\{x \geq 5\}$$

- Sí. Es válida!

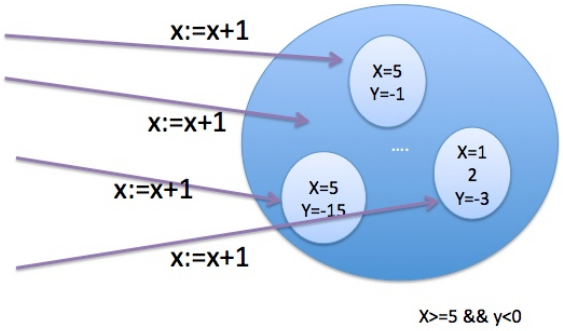
Precondición más débil

$$\{ x \geq 4 \wedge y < -2\}$$
$$\texttt{x := x + 1}$$
$$\{ x \geq 5 \wedge y < 0\}$$



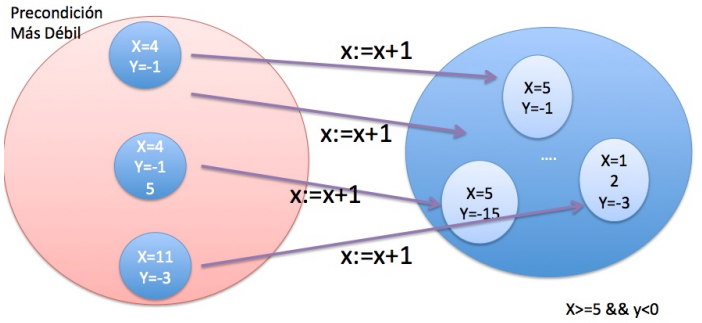
Precondición más débil

$$\{ x \geq 4 \wedge y < -2\}$$
$$\texttt{x := x + 1}$$
$$\{ x \geq 5 \wedge y < 0\}$$



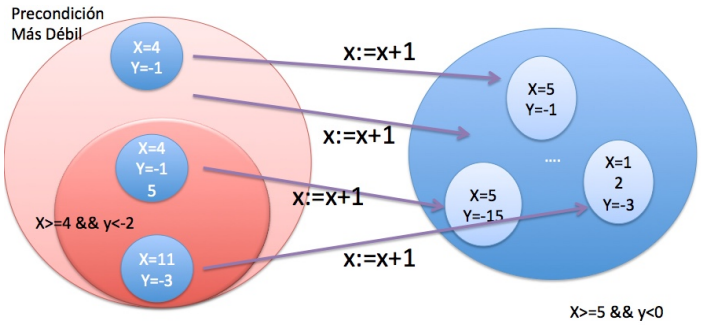
Precondición más débil

$$\{ x \geq 4 \wedge y < -2\}$$
$$\texttt{x := x + 1}$$
$$\{ x \geq 5 \wedge y < 0\}$$



Precondición más débil

$$\{ x \geq 4 \wedge y < -2 \}$$
`x := x + 1`
$$\{ x \geq 5 \wedge y < 0 \}$$



Precondición más débil

- **Definición.** La precondición más débil de un programa **S** respecto de una postcondición Q es el predicado P más débil posible tal que $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$.
- **Notación.** $wp(\mathbf{S}, Q)$.
- Ejemplo:

$$\{wp(\mathbf{x := x+1}, Q)\}$$
$$\mathbf{x := x + 1}$$
$$\{Q : x \geq 7\}$$

- ¿Cuál es la precondición más débil de `x:=x+1` con respecto a la postcondición $x \geq 7$?
- $wp(\mathbf{x := x+1}, Q)) \equiv\ x \geq 6$.

Precondición más débil

- Otro ejemplo:

$$\{wp(\mathbf{S2}, Q)\}$$
$$\mathbf{S2: x := 2 * |x| + 1}$$
$$\{Q : x \geq 5\}$$

- $wp(\mathbf{S2}, Q) \equiv\ x \geq 2 \ \vee\ x \leq -2$.
- Otro más:

$$\{wp(\mathbf{S3}, Q)\}$$
$$\mathbf{S3: x := y*y}$$
$$\{Q : x \geq 0\}$$

- $wp(\mathbf{S3}, Q) \equiv\ \mathbf{true}$.

Asignación

- **Definición.** Dada una expresión E, llamamos def(E) a las condiciones necesarias para que E esté definida.
  1. $\text{def}(x + y) \equiv \text{def}(x) \wedge \text{def}(y)$.
  2. $\text{def}(x/y) \equiv \text{def}(x) \wedge (\text{def}(y) \wedge_L y \neq 0)$.
  3. $\text{def}(\sqrt{x}) \equiv \text{def}(x) \wedge_L x \geq 0$.
  4. $\text{def}(a[i] + 3) \equiv \text{def}(a) \wedge (\text{def}(i) \wedge_L 0 \leq i < |a|)$.
- Suponemos $\text{def}(x) \equiv \mathit{True}$ para todas las variables, para simplificar la notación.
- Con esta hipótesis extra:
  1. $\text{def}(x + y) \equiv \mathit{True}$.
  2. $\text{def}(x/y) \equiv y \neq 0$.
  3. $\text{def}(\sqrt{x}) \equiv x \geq 0$.
  4. $\text{def}(a[i] + 3) \equiv 0 \leq i < |a|$.

Asignación

- **Definición.** Dado un predicado Q, el predicado Q^x_E se obtiene reemplazando en Q todas las apariciones libres de la variable x por E.

  1. $Q \equiv 0 \leq i < j < n \ \wedge_L \ a[i] \leq x < a[j]$.
     $Q^i_k \equiv 0 \leq k < j < n \ \wedge_L \ a[k] \leq x < a[j]$.
     $Q^i_{i+1} \equiv 0 \leq i+1 < j < n \ \wedge_L \ a[i+1] \leq x < a[j]$.
  2. $Q \equiv 0 \leq i < n \ \wedge_L \ (\forall j : \mathbb{Z})(a[j] = x)$.
     $Q^j_k \equiv 0 \leq i < n \ \wedge_L \ (\forall j : \mathbb{Z})(a[j] = x)$.

Asignación

- **Axioma 1.** $wp(\mathbf{x := E}, Q) \equiv \text{def}(E) \wedge_L Q^x_E$.
- Ejemplo:

$$\{??\}$$
$$\mathbf{x := x + 1}$$
$$\{Q : x \geq 7\}$$

- Tenemos que ...

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{x := x+1}, Q) &\equiv \text{def}(x+1) \ \wedge_L \ Q^x_E \\ &\equiv \mathbf{true} \ \wedge_L \ (x+1) \geq 7 \\ &\equiv x \geq 6 \end{aligned}$$

Asignación

- Este axioma está justificado por la siguiente observación. Si buscamos la precondición más débil para el siguiente programa ...

$$\{??\}$$
$$\mathbf{x := E}$$
$$\{Q : x = 25\}$$

- ... entonces tenemos $wp(\mathbf{x := E}, Q) \equiv \text{def}(E) \ \wedge_L \ E = 25$.
- Es decir, si luego de $\mathbf{x := E}$ queremos que $x = 25$, entonces se debe cumplir $E = 25$ antes de la asignación!

Asignación

- Otro ejemplo:

$$\{??\}$$
$$\mathbf{x := 2 * |x| + 1}$$
$$\{Q : x \geq 5\}$$

- Tenemos que ...

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{x := 2 * |x| + 1}, Q) &\equiv \text{def}(2|x|+1) \ \wedge_L \ Q^x_E \\ &\equiv \mathbf{true} \ \wedge_L \ 2|x|+1 \geq 5 \\ &\equiv |x| \geq 2 \\ &\equiv x \geq 2 \ \vee \ x \leq -2 \end{aligned}$$

Asignación

- Un ejemplo más:

$$\{??\}$$
$$\textbf{x := y*y}$$
$$\{Q : x \geq 0\}$$

- Tenemos que ...

$$\begin{aligned} wp(\textbf{x := y*y}, Q) &\equiv \text{def}(y * y) \ \wedge_L \ Q^x_E \\ &\equiv \textbf{true} \ \wedge_L \ y * y \geq 0 \\ &\equiv \textbf{true} \end{aligned}$$

Demostraciones de corrección

- **Definición.** Decimos que $\{P\}$ **S** $\{Q\}$ sii $P \Rightarrow wp(\mathbf{S}, Q)$.
- Es decir, queremos que $P \Rightarrow wp(\mathbf{S}, Q)$ capture el hecho de que si **S** comienza en un estado que satisface P, entonces termina y lo hace en un estado que satisface Q.
- Por ejemplo, la siguiente tripla de Hoare es válida ...

$$\{P : x \geq 10\}$$
$$\textbf{S: x := x+3}$$
$$\{Q : x \neq 4\}$$

- ... puesto que $wp(\mathbf{S}, Q) \equiv x \neq 1$ y $P \Rightarrow x \neq 1$.
- Es importante observar que x tiene significados distintos en SmallLang y en los estados!

Demostraciones de corrección

- La definición anterior implica que:
  1. Si $P \Rightarrow wp(\mathbf{S}, Q)$, entonces $\{P\}$ **S** $\{Q\}$ es válida (i.e., es verdadera).
  2. Si $P \not\Rightarrow wp(\mathbf{S}, Q)$, entonces $\{P\}$ **S** $\{Q\}$ no es válida (i.e., es falsa).
- Por ejemplo: $wp(\textbf{x:=x+1}, x \geq 7) \equiv x \geq 6$.
- Como $x \geq 4 \not\Rightarrow x \geq 6$ (contraejemplo, $x = 5$), entonces se concluye que

$$\{P : x \geq 4\}$$
$$\textbf{S: x := x+1}$$
$$\{Q : x \geq 7\}$$

no es válida.

Más axiomas

- **Axioma 2.** $wp(\textbf{skip}, Q) \equiv Q$.
- **Axioma 3.** $wp(\textbf{S1; S2}, Q) \equiv wp(\textbf{S1}, wp(\textbf{S2}, Q))$.
- Ejemplo:

$$\{wp(\textbf{y := 2*x}, R)\} \equiv \{\text{def}(2 * x) \ \wedge_L \ 2 * x \geq 6\} \equiv \{x \geq 3\}$$
$$\textbf{y := 2*x;}$$
$$\begin{aligned} \{wp(\textbf{x := y+1}, Q)\} &\equiv \{\text{def}(y + 1) \ \wedge_L \ y + 1 \geq 7\} \\ &\equiv \{y \geq 6\} \end{aligned}$$
$$\textbf{x := y + 1}$$
$$\{Q : x \geq 7\}$$

Intercambiando los valores de dos variables

- **Ejemplo:** Recordemos el programa para intercambiar dos variables numéricas.
- $\{wp(\mathbf{a := a + b}, E_2)\}$
  $\equiv \{def(a+b) \wedge_L (b = B_0 \wedge (a+b) - b = A_0)\}$
  $\equiv \{b = B_0 \wedge a = A_0\} \equiv \{E_3\}$

```
a := a + b;
```

  $\{wp(\mathbf{b := a - b}, E_1)\}$
  $\equiv \{def(a-b) \wedge_L (a - (a-b) = B_0 \wedge a - b = A_0)\}$
  $\equiv \{b = B_0 \wedge a - b = A_0\} \equiv \{E_2\}$

```
b := a - b;
```

  $\{wp(\mathbf{a := a - b}, Q)\}$
  $\equiv \{def(a-b) \wedge_L (a - b = B_0 \wedge b = A_0)\}$
  $\equiv \{a - b = B_0 \wedge b = A_0\} \equiv \{E_1\}$

```
a := a - b;
```

  $\{Q\} \equiv \{a = B_0 \wedge b = A_0\}$

Intercambiando los valores de dos variables

- Como $P \Rightarrow E_3 \equiv wp(S, Q)$, entonces podemos concluir que el algoritmo es correcto respecto de su especificación.
- Observar que los estados intermedios que obtuvimos aplicando *wp* son los mismos que habíamos usado para razonar sobre la corrección de este programa!

  $\{a = A_0 \wedge b = B_0\}$
  `a := a + b;`
  $\{a = A_0 + B_0 \wedge b = B_0\}$
  `b := a - b;`
  $\{a = A_0 + B_0 \wedge b = A_0\}$
  `a := a - b;`
  $\{a = B_0 \wedge b = A_0\}$

- En lugar de razonar de manera informal, ahora podemos dar una demostración de que estos estados describen el comportamiento del algoritmo.

Alternativas

- **Axioma 4.** Si **S** = **if B then S1 else S2 endif**, entonces

$$wp(\mathbf{S}, Q) \equiv def(B) \wedge_L \Big((B \wedge wp(\mathbf{S1}, Q)) \vee (\neg B \wedge wp(\mathbf{S2}, Q))\Big)$$

- Ejemplo:

$$\{??\}$$
$$\textbf{S: if (x} > \textbf{0) then y := x else y := -x endif}$$
$$\{Q : y \geq 2\}$$

- Tenemos que ...

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{S}, Q) &\equiv (x > 0 \wedge x \geq 2) \vee (x \leq 0 \wedge -x \geq 2) \\ &\equiv (x \geq 2) \vee (x \leq -2) \\ &\equiv |x| \geq 2 \end{aligned}$$

Alternativas

- La definicion operacional que usamos en la materia para demostrar la corrección de una alternativa es ahora un teorema derivado de este axioma!
- **Teorema.** Si $def(B)$ y

$$\{P \wedge B\} \quad \mathbf{S1} \quad \{Q\}$$
$$\{P \wedge \neg B\} \quad \mathbf{S2} \quad \{Q\}$$

entonces

$$\{P\} \quad \textbf{if B then S1 else S2 endif} \quad \{Q\}.$$

Alternativas

- **Demostración.**

$$
\begin{array}{ll}
 & [P \wedge B \Rightarrow wp(\mathbf{S1}, Q)] \ \wedge \ [P \wedge \neg B \Rightarrow wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & [\neg(P \wedge B) \vee wp(\mathbf{S1}, Q)] \ \wedge \ [\neg(P \wedge \neg B) \vee wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & [\neg P \vee \neg B \vee wp(\mathbf{S1}, Q)] \ \wedge \ [\neg P \vee B \vee wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & \neg P \vee ([\neg B \vee wp(\mathbf{S1}, Q)] \ \wedge \ [B \vee wp(\mathbf{S2}, Q)]) \\
\equiv & P \Rightarrow [B \Rightarrow wp(\mathbf{S1}, Q)] \ \wedge \ [\neg B \Rightarrow wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & P \Rightarrow [B \wedge wp(\mathbf{S1}, Q)] \ \vee \ [\neg B \wedge wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & P \Rightarrow def(B) \wedge_L ([B \wedge wp(\mathbf{S1}, Q)] \ \vee \ [\neg B \wedge wp(\mathbf{S2}, Q)]) \\
\equiv & P \Rightarrow wp(\textbf{if B then S1 else S2 endif}, Q) \ \square
\end{array}
$$

Alternativas

- En el ejemplo anterior, vimos que:

$$\{P : |x| \geq 2\}$$

S: if (x > 0) then y := x else y := -x endif

$$\{Q : y \geq 2\}$$

- Veamos ahora la validez de esta tripla de Hoare por medio del teorema anterior.

$$
\begin{array}{rcl}
P \ \wedge \ B & \Rightarrow & wp(\mathbf{y := x}, Q) \\
|x| \geq 2 \wedge x > 0 & \Rightarrow & def(x) \wedge_L x \geq 2 \ \equiv \ x \geq 2 \quad \checkmark
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
P \ \wedge \ \neg B & \Rightarrow & wp(\mathbf{y := -x}, Q) \\
|x| \geq 2 \wedge x \leq 0 & \Rightarrow & def(x) \wedge_L -x \geq 2 \ \equiv \ x \leq -2 \quad \checkmark
\end{array}
$$

Asignación a elementos de una secuencia

- Si b es una secuencia, i es un entero y e es una expresión del mismo tipo de datos que los elementos de la secuencia, definimos $(b; i : e)$ como la secuencia de longitud igual a b tal que:

$$(b; i : E)[j] \ = \ \begin{cases} E & \text{si } i = j \\ b[j] & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- **Definición.** Definimos el comando $b[i] := E$ como $b := (b; i : E)$.
- Además,

$$
\begin{array}{rcl}
\text{def}((b; i : e)) & = & \text{def}(b) \ \wedge \ (\text{def}(i) \\
 & \wedge_L & 0 \leq i < |b|) \wedge \ \text{def}(e).
\end{array}
$$

- **Observación:** $setAt(b, i, E) \equiv (b; i; E)$

Asignación a elementos de una secuencia

- Aplicando el Axioma 1, tenemos:

$$
\begin{array}{ll}
wp(b[i] := E, Q) & \\
\equiv & wp(b := (b; i : E), Q) \\
\equiv & def((b; i : E)) \wedge_L Q^b_{(b;i:E)} \\
\equiv & (def(b) \wedge (def(i) \wedge_L 0 \leq i < |b|) \wedge \ \text{def}(E)) \wedge_L Q^b_{(b;i:E)}
\end{array}
$$

Asignación a elementos de una secuencia

- **Ejemplo.** Supongamos que i está definida y dentro del rango de la secuencia b.

$$
\begin{aligned}
& wp(\textbf{b[i] := 5}, b[i] = 5) \\
\equiv\ & ((\text{def}(i)\ \wedge_L\ 0 \leq i < |b|)\ \wedge\ \text{def}(5))\ \wedge_L\ (b; i:5)[i] = 5 \\
\equiv\ & (b; i:5)[i] = 5 \\
\equiv\ & 5 = 5\ \equiv\ \mathit{True}
\end{aligned}
$$

- **Ejemplo.** Con las mismas hipótesis.

$$
\begin{aligned}
& wp(\textbf{b[i] := 5}, b[j] = 2) \\
\equiv\ & (b; i:5)[j] = 2 \\
\equiv\ & (i \neq j\ \wedge\ (b; i:5)[j] = 2)\ \vee\ (i = j\ \wedge\ (b; i:5)[j] = 2) \\
\equiv\ & (i \neq j\ \wedge\ b[j] = 2)\ \vee\ (i = j\ \wedge\ (b; i:5)[i] = 2) \\
\equiv\ & (i \neq j\ \wedge\ b[j] = 2)\ \vee\ (i = j\ \wedge\ 5 = 2) \\
\equiv\ & i \neq j\ \wedge\ b[j] = 2
\end{aligned}
$$

Propiedades

- Monotonía:
  - Si $Q \Rightarrow R$ entonces $wp(S, Q) \Rightarrow wp(S, R)$.
- Distributividad:
  - $wp(S, Q) \wedge wp(S, R) \Rightarrow wp(S, Q \wedge R)$,
  - $wp(S, Q) \vee wp(S, R) \Rightarrow wp(S, Q \vee R)$.
- *"Excluded Miracle"*:
  - $wp(S, \mathit{false}) \equiv \mathit{false}$.

Corolario de la monotonía

- **Corolario:** Si
  - $P \Rightarrow wp(S1, Q)$,
  - $Q \Rightarrow wp(S2, R)$,

  entonces
  - $P \Rightarrow wp(S1; S2, R)$.
- **Demostración**.

$$
\begin{array}{lcll}
P & \Rightarrow & wp(S1, Q) & \text{(por hipótesis)} \\
 & \Rightarrow & wp(S1, wp(S2, R)) & \text{(monotonía)} \\
 & \equiv & wp(S1; S2, R) & \text{(Axioma 2)}
\end{array}
$$

Bibliografía

- David Gries - The Science of Programming
  - Part II - The Semantics of a Small Language
    - Chapter 7 - The Predicate Transformer wp
    - Chapter 8 - The Commands skip, abort and Composition
    - Chapter 9 - The Assignment Command
    - Chapter 10 - The Alternative Command