UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

BL-HOMOGENEOUS SLIDING-MODE OBSERVERS DESIGN FOR MIMO LINEAR SYSTEMS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
RENE MELENDEZ PEREZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. LEONID FRIDMAN
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. AGOSTO 2022

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio
Secretario:	Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto
1er. Vocal:	Dr. Fridman Leonid
2o. Vocal:	Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel
3er. Vocal:	Dr. Dávila Montoya Jorge Ángel

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:
DR. LEONID FRIDMAN

____

FIRMA

Agradecimientos

A mi familia,
por su apoyo incondicional.

Al Dr. Leonid Fridman y al Dr. Jaime Moreno,
por su apoyo y aporte fundamental en el desarrollo y orientación de esta tesis.
Pero sobre todo, por los conocimientos transmitidos durante estos dos años.

A mis colegas en el grupo de modos deslizantes,
por sus consejos y comentarios.

Al programa de posgrado en ingeniería eléctrica y sus profesores.

Y a la UNAM,
por abrirme sus puertas y por el apoyo económico brindado
a través de los proyectos PAPIIT-DGAPA IN115419, IN106622, IN102621 e IN102121.

Acknowledgment

To my family,
for their unconditional support.

To Dr. Leonid Fridman and Dr. Jaime Moreno,
for their support and fundamental contribution in the development and guidance in this thesis.
But above all, for the knowledge transmitted over these two years.

To my colleagues in the sliding mode group for their advice and feedback.

To the graduate program in electrical engineering and its professors.

And, to UNAM,
for opening the doors and the financial support
given through the projects PAPIIT-DGAPA IN115419, IN106622, IN102621 and IN102121.

Resumen

Abstract

Contents

List of Figures

List of acronyms

HOSM	Higher-Order Sliding Modes
UIO	Unknown Input Observer
SMO	Sliding Mode Observer
Bl	Bi-limit
LTI	Linear Time Invariant
SCB	Special Coordinate Basis
MIMO	Multiple-input Multiple-output
LF	Lyapunov Function
Bl-LF	Bl-homogeneous Lyapunov Function
SM	Sliding mode
FT	Finite-Time
FxT	Fixed-Time
RED	Robust Exact Differentiator
OMC	Observer Matching Condition
ISS	Input to State Stability

Chapter 1

Introducción

1.1 Motivación

1.2 Antecedentes

1.3 Formulación del problema

1.4 Objetivos

El presente trabajo de tesis tiene como objetivos:

- D
- P
- I
- E

1.5 Contribuciones

- Encontrar condiciones para obtener
- P
- I
- E

1.6 Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra dividido en cinco capítulos, siendo el presente el que concierne a la introducción. Los siguientes cuatro se describen a continuación:

En el **Capítulo 2**, se presenta el marco teórico

En el **Capítulo 3**, se presenta Para validar el funcionamiento del gemelo digital, en el **Capítulo 4**

Chapter 2

Marco Teorico

2.1 Homogeneidad

Definicion 1 : [1], [2] Dado un vector $x = [x_1, ..., x_n]^T$ y el operador de dilatación definido como:

$$\triangle_{\varepsilon}^{r} x := (\varepsilon^{r_1} x_1, ...\varepsilon^{r_n} x_n)\,, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

donde $r_i > 0$ son los pesos de las coordenadas y $r = [r_1, ..., r_n]$ es el vector de pesos.

Una función $V : \mathbb{R}^n - > \mathbb{R}$ es llamada r-homogenea de grado $m \in \mathbb{R}$ si la identidad 2.2

$$V(\triangle_{\varepsilon}^{r} x) = \varepsilon^m V(x) \tag{2.2}$$

2.2 Problema estándar de control por HOSM

Diseñar un controlador para el sistema SISO afín a la entrada

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z)u \tag{2.3}$$

$$\sigma = h(t, z), \quad z \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

el controlador debe llevar la salida a $\sigma(t) \equiv 0$ en un tiempo finito $t \geq T$.

Cuando el grado relativo es conocido y bien definido equivale a diseñar un controlador para el DI

$$\Sigma_{ID} : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, ..., \rho - 1 \\ \dot{x}_\rho \in [-C, C] + [K_m, K_M]u, \end{cases} \tag{2.5}$$

2.3 Funcion de lyapunov de control

$$\dot{x} \in F(x) + g(x)\xi(x)u$$

Existe una CLF $V(x)$ C^1 r-homogenea para el sistema anterior.

$$L_{g(x)}V = 0 \Rightarrow sup_{\upsilon \epsilon F(x)} L_{\upsilon} V < 0, \; \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$$

2.3.1 CFL para HOSMC

Para $i = 2, ..., \rho$

$$V_i(\overline{x}_i) = \gamma_{i-1} V_{i-1}(\overline{x}_{i-1}) + W_i(\overline{x}_i) \tag{2.6}$$

$$W_i(\overline{x}_i) = \frac{r_i}{m}|x_i|^{\frac{m}{r_i}} - \lceil \upsilon_{i-1} \rfloor^{\frac{m-r_i}{r_i}} x_i + (1 - \frac{r_i}{m})|\upsilon_{i-1}|^{\frac{r_i}{m}} \tag{2.7}$$

$$\upsilon_i(\overline{x}_i) = -k_i \lceil \sigma_i \rfloor^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}} \tag{2.8}$$

$$\sigma_i(\overline{x}_i) = \lceil x_i \rfloor^{\frac{\alpha_i}{r_i}} + k_{i-1}^{\frac{\alpha_i}{r_i}} \lceil \sigma_{i-1} \rfloor^{\frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1}} \tag{2.9}$$

$$V_1(x_1) = \frac{r}{m}|x_1|^{\frac{m}{r}} \tag{2.10}$$

$$\upsilon_1(x_1) = -k_1 \lceil \sigma_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}} = -k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}} \tag{2.11}$$

$$\sigma_1 = \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_1}{r_1}} \tag{2.12}$$

donde $\gamma_i > 0$, $k_i > 0$. σ_i es de grado homogénea α_i, υ_i de grado r_{i+1} y V_i de grado m.

Teorema: [3] Si el sistema satisface la suposición 1, y que $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es r-homogénea de grado 0, tal que:

$$\varphi(x) L_{g(x)} V(x) > 0 \;\; cuando \; L_{g(x)} V(x) \neq 0$$

Entonces

$$u = -k\varphi$$

$$u_1 = -k\varphi_1(x) = -k \lceil L_{g(x)} V(x) \rfloor^0$$

$$u_2 = -k\varphi_2(x) = -k \frac{L_{g(x)} V(x)}{M(x)}$$

donde $M(x)$ es r-homogenea de grado $m + l$. EL sistema en lazo cerrado es GAS en $x = 0$ $\forall k \geq k^* > 0$, y es GFTS si $l < 0$.
Con $r = \rho$

$$u_D = -k_\rho \lceil \sigma_\rho(x) \rfloor^0, \;\; u_Q = -k_\rho \frac{\sigma_\rho(x)}{M(x)}$$

$$u = -k_2 \left\lceil \lceil x_2 \rfloor^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{2}} \right\rfloor^0$$

2.4 Ganancias del controlador

Para $k_i, i = 2, ...\rho - 1$, con $k_1 > 0$

$$Z_i(\overline{x}_i) = \Phi_i(\overline{x}_i) - k_i s_{i,d} \lceil \sigma_i \rfloor^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}} < 0 \tag{2.13}$$

$$k_i > \max_{\overline{x}_i \in S_i} \left\{ \frac{\Phi_i(\overline{x}_i)}{s_{i,d} \lceil \sigma_i(\overline{x}_i) \rfloor^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}}} \right\} := G_i(k_{i-1}) \tag{2.14}$$

Para k_ρ

$$\dot{V} \leq max \; L_{F(x)} V(x) - k\xi(x) L_{g(x)} V(x) \varphi(x) \tag{2.15}$$

$$\dot{V} \leq max \left\{ \sum_{j=1}^{\rho-1} \partial_{x_j} V_\rho \right\} + C|s_{\rho,d}(x)| - k_\rho K_m s_{\rho,d} \frac{s_{\rho,d}(x)}{|s_{\rho,d}(x)|} < 0 \tag{2.16}$$

$$k_\rho > \frac{1}{K_m} \left(\underset{x \in S_\rho}{max} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\rho-1} \partial_{x_j} V_\rho}{|s_{\rho,d}(x)|} \right\} + C \right) := G_i(k_{\rho-1}, C, K_m) \tag{2.17}$$

Chapter 3

Calculo de ganancias para controladoers discontinuos homogeneos de grado cero

3.1 Controlador de primer orden

Sea el sitema 3.1 afin a la entrada, de grado relativo 1,

$$\dot{x}_1 = f(x) + u \tag{3.1a}$$

Con el algoritmo de control discontinuo

$$u = -k_1 \lceil x_1 \rfloor^0 \tag{3.2}$$

Función de Lyapunov de control

$$V_1 = \gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \tag{3.3}$$

3.2 Controlador de segundo orden

Sea el sitema 3.4 afin a la entrada, de grado relativo 2,

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.4a}$$
$$\dot{x}_2 = u \tag{3.4b}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &\in [-C, C] + [k_m, k_M] u \end{aligned} \tag{3.5}$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_2 \left\lceil \lceil x_2 \rfloor^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{2}} \right\rfloor^0 \tag{3.6}$$

Función de Lyapunov de control

$$V_2 = \gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - \lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m}\right) |\upsilon_1|^{\frac{m}{r_2}} \tag{3.7}$$

$$\upsilon_1 = -k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{r_1}} \tag{3.8}$$

donde

$$W_2 = \frac{r_2}{m}|x_2|^{\frac{m}{r_2}} - \lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + (1+\frac{r_2}{m})|\upsilon_1|^{\frac{m}{r_2}} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= -\frac{m-r_2}{r_2}x_2|\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{m-r_2}{r_2}\lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} \\ &\textbf{sustituimos } x_2 = s_2 + \upsilon_1 \\ &= \frac{m-r_2}{r_2}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}\left(-|\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}}s_2 - \lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} + \lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}}\right) \\ &= -\frac{m-r_2}{r_2}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}\left(|\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}}s_2\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde

$$\upsilon_1 = -k_1\lceil \sigma_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}} = -k_1\lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{r_1}} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} = -k_1\frac{r_2}{\alpha_1}|\sigma_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = -k_1\frac{r_2}{r_1}|x_1|^{\frac{r_2-r_1}{r_1}} \tag{3.12}$$

$$\sigma_1 = \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_1}{r_1}} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = \frac{\alpha_1}{r_1}|x_1|^{\frac{\alpha_1-r_1}{r_1}} \tag{3.14}$$

para llegar a la ecuacion del articulo tenemos

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} = -k_1\frac{r_2}{\alpha_1}|\sigma_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = -k_1\frac{r_2}{\alpha_1}\frac{k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}}{k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}}|\sigma_1|^{\frac{r_2}{r_2}\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \tag{3.15}$$

$$|\upsilon_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} = |-k_1\lceil \sigma_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}}|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} = k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}|\lceil \sigma_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}}|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} = k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}|\sigma_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \tag{3.16}$$

por lo que

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} = -k_1\frac{r_2}{\alpha_1}\frac{1}{k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}}|\upsilon_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = -\frac{r_2}{\alpha_1}k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}}|\upsilon_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \tag{3.17}$$

obtenemos la parcial de nuevo sustituyendo la ecuacion antetior

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= -\frac{m-r_2}{r_2}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}\left(|\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}}s_2\right) \\ &= -\frac{m-r_2}{r_2}\left(-\frac{r_2}{\alpha_1}k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}}|\upsilon_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1}\right)\left(|\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}}s_2\right) \\ &= \frac{m-r_2}{\alpha_1}k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}}|\upsilon_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}}s_2\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1}\end{aligned} \tag{3.18}$$

obtenemos la forma explicita de la parcial con respecto a x_1 de W_2

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= \frac{m-r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |\upsilon_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} s_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \\ &= \frac{m-r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |\upsilon_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} (x_2 - \upsilon_1) \left(\frac{\alpha_1}{r_1} |x_1|^{\frac{\alpha_1 - r_1}{r_1}} \right) \\ &= \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |-k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{r_1}}|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} \left(x_2 + k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{r_1}} \right) \left(|x_1|^{\frac{\alpha_1 - r_1}{r_1}} \right) \\ &= \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_1}} \left(x_2 + k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{r_1}} \right) \left(|x_1|^{\frac{\alpha_1 - r_1}{r_1}} \right) \\ &= \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}} \left(x_2 + k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{r_1}} \right)\end{aligned} \tag{3.19}$$

llegando asi a la expresion del articulo con la diferencia de no tener signo negativo

Llamaremos f_2 a la función a maximizar

$$k_2 > \frac{1}{k_m} \left(max\left[f_2 \right] + C \right)$$

$$f_2(\overline{x}_2) = \frac{x_2 \left(\gamma_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{m-r_1}{r_1}} + \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}} \left(x_2 + k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{r_1}} \right) \right)}{\left| \lceil x_2 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} + k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_1}} \right|} = \frac{\phi_2}{|s_{2d}|} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= |s_{2d}| \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 \left(\frac{\partial |s_{2d}|}{\partial x_2} - \frac{\partial |s_{2d}|}{\partial x_1} \right) \\ &= |s_{2d}| \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 \frac{s_{2d}}{|s_{2d}|} \left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) \\ &= |s_{2d}| \left(|s_{2d}| \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 \frac{s_{2d}}{|s_{2d}|} \left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) \right) \\ &= |s_{2d}|^2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 s_{2d} \left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) \\ &= s_{2d} \left(s_{2d} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 \left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) \right)\end{aligned} \tag{3.21}$$

en la ultima ecuacion podemos observar que s_{2d} es una solución; sin embargo, corresponde a los puntos donde se va a menos infinito por lo que son puntos minimos y los descartamos.

Como la función es homogénea de grado cero, obtendremos un rayo de máximos con la siguiente forma:
con $x_1 = 1$

$$M_p := max\left[f_2 \right] = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}} \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} \right) = c + dx_2 - \left(\frac{a}{e} x_2 + \frac{b}{e} x_2^2 \right) f |x_2|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} \tag{3.22}$$

donde las constantes que dependen del valor de k_1

$$a = \gamma_1 \frac{m-r_1}{r_1} + \frac{m-r_2}{r_1} \frac{m-r_1}{r_1} k_1^{\frac{m}{r_2}} \tag{3.23}$$

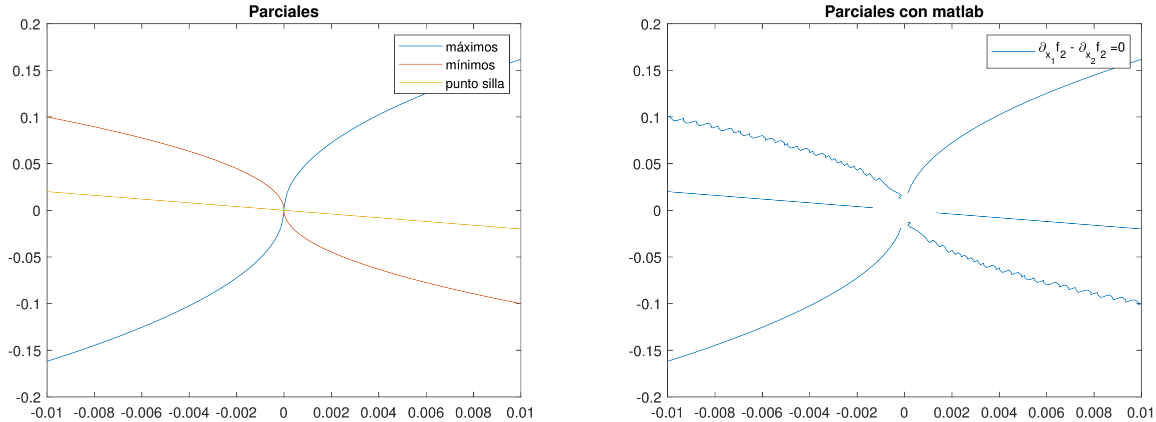

Figure 3.1: text

$$b = \frac{m - r_2}{r_1} \frac{m - r_2 - r_1}{r_1} k_1^{\frac{m - r_2}{r_2}} \tag{3.24}$$

$$c = \gamma_1 + \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m}{r_2}} \tag{3.25}$$

$$d = 2\frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m - r_2}{r_2}} \tag{3.26}$$

$$e = \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m - r_2}{r_2}} \tag{3.27}$$

$$f = \frac{m - r_2}{r_2} \tag{3.28}$$

Para encontrar el valor del máximo se debe obtener una raíz del rayo de máximos y evaluar el punto en la función a maximizar f_2

$$max = f(1, x_2)$$

Sustituyendo con los valores del caso mas sencillo: $m = 3$,$y_1 = k_1 = 1$, $r = [2, 1]$

$$a = 1; \quad b = 0; \quad c = 2; \quad d = 2; \quad e = 1; \quad f = 2;$$

con $x_2 > 0$

$$M_p = 2 + 2x_2 - 2x_2^2 \tag{3.29}$$

$$x_2 = -0.618; \quad x_2 = 1.618 \tag{3.30}$$

El máximo se obtine al evaluar en la función original:

$$max = f_2(1, 1.618) = 1.618 \tag{3.31}$$

Por lo tanto $k_2 > 1.618$

3.3 Para grado relativo 3

Sea el sitema 3.32 afin a la entrada, de grado relativo 3,

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.32a}$$
$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{3.32b}$$
$$\dot{x}_3 = u \tag{3.32c}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \tag{3.33}$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_3 \left[\lceil x_3 \rfloor^{\alpha_3} + k_2^{\alpha_3} \left[\lceil x_2 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{2}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{2}} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{3}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^0 \tag{3.34}$$

Funcion de lyapunov de control

$$V_3 = \gamma_2 \left(\gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - \lceil v_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m}\right) |v_1|^{\frac{m}{r_2}} \right) + W_3 \tag{3.35}$$

La función a maximizar en su forma general:

$$k_2 > max \left[\frac{\phi_2}{s_{2d} \lceil \sigma_2 \rfloor^{\frac{r_3}{\alpha_2}}} \right] := max\, [f_{32}] \tag{3.36}$$

Donde el rayo del máximo tiene la siguiente forma general:

$$M := s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \phi_2 \left[\frac{r_3}{\alpha_2} \frac{s_{2d}}{\sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right]$$

Se fija $x_1 = 1$ y se busca una raiz para obtener el valor de x_2

$$k_3 > \frac{1}{k_m} max\, [f_3] + \frac{C}{k_m} := \frac{1}{k_m} \frac{\phi_3}{|s_{3d}|} + \frac{C}{k_m} \tag{3.37}$$

La función a obtener el máximo

$$f_3 := \frac{\gamma_2 \gamma_1 x_2 s_{1d} + \gamma_2 x_2 \frac{\partial W_2}{\partial x_1} + \gamma_2 x_3 \frac{\partial W_2}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial W_3}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial W_3}{\partial x_2}}{|s_{3d}|} \tag{3.38}$$

Como la función es homogénea de grado cero, obtendremos un rayo de máximos con la siguiente forma:
con $x_1 = 1, x_2 = 1$

$$max\, [f_3] = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} - \frac{\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2}}{\frac{\partial s_{3d}}{\partial x_2}} \frac{\partial s_{3d}}{\partial x_3} = 0 \tag{3.39}$$

3.4 Para grado relativo 4

Sea el sitema 3.49 afin a la entrada, de grado relativo 4 ,

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.40a}$$
$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{3.40b}$$
$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{3.40c}$$
$$\dot{x}_4 = u \tag{3.40d}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \tag{3.41}$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_4 \left\lceil \lceil x_4 \rfloor^{\alpha_4} + k_3^{\alpha_4} \left\lceil \lceil x_3 \rfloor^{\frac{\alpha_3}{2}} + k_2^{\frac{\alpha_3}{2}} \left\lceil \lceil x_2 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{3}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{3}} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{4}} \right\rfloor^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right\rfloor^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right\rfloor^{0} \tag{3.42}$$

Función de Lyapunov de control

$$V_4 = \gamma_3 V_3 + W_4 \tag{3.43}$$

La función a maximizar en su forma general:

$$k_2 > max \left[\frac{\phi_2}{s_{2d} \lceil \sigma_2 \rfloor^{\frac{r_3}{\alpha_2}}} \right] := max\,[f_{42}] \tag{3.44}$$

Donde el rayo del máximo tiene la siguiente forma general:

$$M := s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \phi_2 \left[\frac{r_3}{\alpha_2} \frac{s_{2d}}{\sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right]$$

Se fija $x_1 = 1$ y se busca una raiz para obtener el valor de x_2

La función a maximizar en su forma general:

$$k_3 > max \left[\frac{\phi_3}{s_{3d} \lceil \sigma_3 \rfloor^{\frac{r_4}{\alpha_3}}} \right] := max\,[f_{43}] \tag{3.45}$$

Donde el rayo del máximo tiene la siguiente forma general:

$$M := s_{3d} \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \phi_3 \left[\frac{r_4}{\alpha_3} \frac{s_{3d}}{\sigma_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{3d}}{\partial x_2} \right]$$

Se fija $x_1 = 1, x_2 = 1$ y se busca una raiz para obtener el valor de x_3

$$k_4 > \frac{1}{k_m} max\,[f_4] + \frac{C}{k_m} := \frac{1}{k_m} \frac{\phi_4}{|s_{4d}|} + \frac{C}{k_m} \tag{3.46}$$

La función a obtener el máximo

$$f_4 := \frac{x_2 \frac{\partial V_4}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial V_4}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial V_4}{\partial x_3}}{|s_{4d}|} \tag{3.47}$$

Como la función es homogénea de grado cero, obtendremos un rayo de máximos con la siguiente forma:
con $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

$$max\,[f_4] = \frac{\partial \phi_4}{\partial x_4} - \frac{\frac{\partial \phi_4}{\partial x_3}}{\frac{\partial s_{4d}}{\partial x_3}} \frac{\partial s_{4d}}{\partial x_4} = 0 \tag{3.48}$$

3.5 Para grado relativo 5

Sea el sitema 3.49 afin a la entrada, de grado relativo 4 ,

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.49a}$$
$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{3.49b}$$
$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{3.49c}$$
$$\dot{x}_4 = x_5 \tag{3.49d}$$
$$\dot{x}_5 = u \tag{3.49e}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \tag{3.50}$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_5 \lceil \sigma_5 \rfloor^0 \tag{3.51}$$

$$V_5 = \gamma_4 V_4 + W_5 \tag{3.52}$$

3.6 Implementacion en Matlab

Chapter 4

Calculo de ganancias para CTA

4.1 Para grado relativo 3

4.2 Implementacion en Matalab

Chapter 5

Conclusions

Bibliography

[1] Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media. 3

[2] Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., and Polyakov, A. (2014). On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1866–1901. 3

[3] Cruz-Zavala, E. and Moreno, J. A. (2017). Homogeneous high order sliding mode design: A lyapunov approach. *Automatica*, 80:232–238. 4