



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

**APLICACIÓN DE MEDICIONES DE VECTORES INERCIALES EN EL
CONTROL DE SEGUIMIENTO DE UN UAV QUADROTOR: UN ENFOQUE
EXPERIMENTAL**

TESIS
PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JORGE MANUEL VILLARREAL MALDONADO

TUTOR PRINCIPAL
DR. YU TANG XU
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. SEPTIEMBRE, 2023

JURADO ASIGNADO:

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:
DR. YU TANG XU

FIRMA

Agradecimientos

Acknowledgment

Resumen

El presente trabajo se centra en la implementación experimental y análisis detallado de un controlador de seguimiento para un vehículo aéreo no tripulado (UAV) tipo quadrotor, con énfasis en el modelo Bebop 2. El diseño inicial del controlador se compone de dos componentes esenciales: un bucle de control de posición saturada externa y un bucle de control de actitud interna. El primero tiene la tarea de definir una dirección de empuje que esté libre de singularidades, garantizando así un seguimiento exponencial global. Por otro lado, el control de actitud interna se fundamenta en mediciones precisas de vectores inerciales y tasas de giro, permitiendo un seguimiento adecuado de la actitud deseada para la correcta posición del UAV.

Para asegurar la eficacia y robustez del controlador propuesto, se estableció un protocolo de pruebas dividido en tres fases esenciales. La primera fase consistió en simulaciones computacionales realizadas en MATLAB, cuyo objetivo principal fue corroborar y afinar los datos teóricos del controlador. Una vez validados estos resultados, se avanzó a la segunda fase, que implicó la creación de un ambiente de simulación controlada en ROS y Gazebo. Esta simulación, más avanzada, incorporó parámetros reales y se basó en las especificaciones técnicas y computacionales del dron Bebop 2, permitiendo así una aproximación más cercana a las condiciones reales de vuelo.

La tercera y última fase representó la culminación del proyecto: la implementación y prueba del controlador en un entorno real utilizando el dron Bebop 2. Los ensayos en este entorno permitieron no solo validar la eficacia del controlador en condiciones reales, sino también evaluar su robustez frente a posibles perturbaciones y variables no consideradas en las simulaciones.

Los resultados obtenidos a lo largo de estas fases demuestran que el controlador propuesto no solo es efectivo en teoría, sino que también es aplicable y confiable en escenarios prácticos, ofreciendo una solución robusta para el seguimiento y control de UAVs tipo quadrotor en diversas condiciones.

Abstract

This study focuses on the experimental implementation and detailed analysis of a tracking controller for a quadrotor unmanned aerial vehicle (UAV), specifically the Bebop 2 model. The initial controller design consists of two essential components: an outer saturated position control loop and an inner attitude control loop. The former is tasked with defining a thrust direction free from singularities, thereby ensuring global exponential tracking. On the other hand, the inner attitude control is grounded on precise inertial vector measurements and gyro rates, enabling accurate tracking of the desired attitude for the UAV's proper positioning.

To ensure the efficacy and robustness of the proposed controller, a three-phase testing protocol was established. The first phase involved computational simulations conducted in MATLAB, primarily aimed at corroborating and refining the controller's theoretical data. Once these results were validated, the study progressed to the second phase, which entailed the creation of a controlled simulation environment in ROS and Gazebo. This more advanced simulation incorporated real parameters and was based on the technical and behavioral specifications of the Bebop 2 drone, allowing for a closer approximation to real flight conditions.

The third and final phase marked the culmination of the project: the implementation and testing of the controller in a real environment using the Bebop 2 drone. Trials in this setting not only validated the controller's efficacy under real conditions but also assessed its robustness against potential disturbances and variables not considered in the simulations.

The results obtained throughout these phases demonstrate that the proposed controller is not only effective in theory but also applicable and reliable in practical scenarios, offering a robust solution for tracking and controlling quadrotor UAVs under various conditions.

Contents

| | |
|--|------------|
| List of Figures | I |
| List of acronyms | III |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Motivación | 1 |
| 1.2 Antecedentes | 2 |
| 1.3 Formulación del problema | 2 |
| 1.4 Objetivos | 3 |
| 1.5 Contribuciones | 3 |
| 1.6 Organización de la tesis | 4 |
| 2 Marco Teorico | 5 |
| 2.1 Homogeneidad | 5 |
| 2.2 Problema estándar de control por HOSM | 5 |
| 2.3 Funcion de lyapunov de control | 5 |
| 2.3.1 CFL para HOSMC | 6 |
| 2.4 Ganancias del controlador | 6 |
| 3 Calculo de ganancias para controladoers discontinuos homogeneos de grado cero | 9 |
| 3.1 Controlador de primer orden | 9 |
| 3.2 Controlador de segundo orden | 9 |
| 3.3 Para grado relativo 3 | 13 |
| 3.4 Para grado relativo 4 | 14 |
| 3.5 Para grado relativo 5 | 15 |
| 3.6 Implementacion en Matlab | 15 |
| 4 Calculo de ganancias para CTA | 17 |
| 4.1 Para grado relativo 3 | 17 |
| 4.2 Implementacion en Matalab | 17 |
| 5 Conclusions | 19 |

List of Figures

3.1 text 12

List of acronyms

| | |
|-------|----------------------------------|
| HOSM | Higher-Order Sliding Modes |
| UIO | Unknown Input Observer |
| SMO | Sliding Mode Observer |
| Bl | Bi-limit |
| LTI | Linear Time Invariant |
| SCB | Special Coordinate Basis |
| MIMO | Multiple-input Multiple-output |
| LF | Lyapunov Function |
| Bl-LF | Bl-homogeneous Lyapunov Function |
| SM | Sliding mode |
| FT | Finite-Time |
| FxT | Fixed-Time |
| RED | Robust Exact Differentiator |
| OMC | Observer Matching Condition |
| ISS | Input to State Stability |

Chapter 1

Introducción

1.1 Motivación

En el vasto panorama de la investigación científica y tecnológica contemporánea, el control de vehículos aéreos no tripulados (UAVs) se ha consolidado como una de las áreas más prometedoras y dinámicas. Esta destacada posición no es mera coincidencia; es el resultado de una serie de avances tecnológicos, industriales y académicos que han convergido en las últimas dos décadas. La aspiración de lograr una autonomía total en estos vehículos no es meramente una ambición académica, sino que tiene profundas implicaciones para una amplia gama de aplicaciones en diversos campos, desde la agricultura y la logística hasta la vigilancia y el entretenimiento.

Dentro del espectro de UAVs, los vehículos de despegue y aterrizaje vertical (VTOL), especialmente los quadrotors, han emergido como objetos de estudio particularmente intrigantes. Su versatilidad inherente, combinada con los desafíos teóricos y prácticos que presentan, los convierte en candidatos ideales para la investigación avanzada. Sin embargo, es precisamente esta complejidad la que ha revelado una serie de brechas en la literatura existente.

A pesar de los avances teóricos significativos, una observación crítica revela que gran parte de la investigación previa opera bajo supuestos ideales, comúnmente distantes de las particularidades y obstáculos de los ambientes reales. Las perturbaciones ambientales, las mediciones ruidosas, la incertidumbre paramétrica y otros factores impredecibles pueden desafiar y, en ocasiones, invalidar los modelos teóricos.

En este contexto, el presente trabajo se propone como una contribución esencial al campo. No se limita a abordar los desafíos teóricos del control de UAVs, sino que se aventura con determinación en el mundo experimental, buscando validar, refinar y, si es necesario, redefinir los paradigmas existentes. Esta transición de la teoría a la experimentación no es un mero ejercicio académico, sino un requisito esencial para asegurar que los modelos y controladores propuestos sean sólidos, duraderos y, primordialmente, funcionales en contextos reales.

La motivación que impulsa este trabajo es, por lo tanto, multifacética. Por un lado, yace la aspiración de aportar de manera sustancial al cuerpo teórico del control de UAVs, introduciendo propuestas vanguardistas y enfrentando vacíos presentes. Por otro lado, hay un reconocimiento explícito de la importancia crítica de la validación experimental. En última instancia, este trabajo aspira a ser un puente entre la teoría y la práctica, reafirmando que la verdadera medida de cualquier avance teórico reside en su capacidad para enfrentar y superar los desafíos del mundo real.

1.2 Antecedentes

El control de vehículos aéreos no tripulados (UAVs) ha sido objeto de intensa investigación en las últimas décadas. Estos sistemas, que alguna vez fueron relegados a aplicaciones militares o de nicho, han encontrado un lugar en una variedad de industrias, desde la agricultura hasta la entrega de paquetes y la cinematografía.

Los UAVs, en particular los de despegue y aterrizaje vertical (VTOL) como los quadrotors, han capturado la atención de los investigadores y entusiastas por igual debido a su versatilidad y capacidad para operar en entornos que otros vehículos aéreos podrían encontrar desafiantes. Sin embargo, con esta versatilidad viene una serie de desafíos únicos en términos de control y estabilidad, especialmente dada la naturaleza subactuada de estos vehículos.

A lo largo de los años, se han propuesto numerosas técnicas para abordar estos desafíos. El enfoque de empuje vectorizado ha sido una solución popular. Sin embargo, un aspecto esencial y emergente en la literatura reciente es la propuesta de utilizar mediciones vectoriales para determinar la actitud del UAV. Esta metodología, que se aleja de las técnicas tradicionales basadas en matrices de rotación, cuaterniones unitarios o ángulos de Euler, ha demostrado ser prometedora.

A pesar de estos avances, ha habido una tendencia en la literatura a operar bajo supuestos ideales, a menudo sin considerar las complejidades y desafíos de los entornos operativos reales. Las perturbaciones ambientales, las mediciones ruidosas y la incertidumbre paramétrica son solo algunos de los factores que pueden afectar la eficacia de los controladores teóricos en situaciones prácticas.

En este contexto, surge la necesidad de investigaciones que no solo aborden los desafíos teóricos asociados con el control de UAVs, sino que también consideren la transición de estos modelos teóricos al ámbito experimental. La validación en entornos reales es esencial para garantizar que los controladores propuestos sean robustos y aplicables en situaciones prácticas.

1.3 Formulación del problema

El control preciso de vehículos aéreos no tripulados (UAVs) es esencial para una amplia gama de aplicaciones. A pesar de los avances teóricos, la implementación práctica de estos controladores en drones reales sigue siendo un desafío significativo. En el artículo "Tracking Control of a Quadrotor UAV by Using Inertial Vector Measurements", dirigido por Eduardo Espíndola y Yu Tang, se presenta un controlador que utiliza mediciones vectoriales inerciales para el seguimiento preciso de trayectorias. La principal característica de este controlador es su capacidad para determinar y corregir errores de posición y orientación utilizando solo mediciones inerciales, sin la necesidad de sistemas de referencia externos.

El comportamiento y la respuesta del dron se describen mediante el siguiente modelo matemático:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ m\dot{v} &= -mge_z + fRe_z + f_d, \\ \dot{R} &= R(\omega)^\wedge, \\ M\dot{\omega} &= (M\omega)^\wedge\omega + \tau + \tau_d.\end{aligned}$$

Donde:

- x representa la posición del UAV.
- v es la velocidad del UAV.

- R es la matriz de rotación que describe la orientación del UAV.
- ω es la velocidad angular del UAV.
- f es la fuerza de empuje generada por los motores.
- τ es el par de torsión.
- f_d y τ_d son las perturbaciones en la fuerza y el par de torsión, respectivamente.
- m es la masa del UAV.
- g es la aceleración debida a la gravedad.
- e_z es el vector unitario en la dirección z.

El controlador propuesto en el artículo se basa en este modelo para diseñar leyes de control que permitan al UAV seguir trayectorias deseadas con alta precisión. Sin embargo, llevar este controlador del papel al mundo real presenta desafíos. La implementación en un entorno de desarrollo controlado, como ROS y Gazebo, es el primer paso y una parte esencial para validar su eficacia. En este entorno, se utilizan las especificaciones exactas del dron Bebop 2, lo que es crucial para garantizar una transición fluida y precisa al dron real. Posteriormente, se realizarán pruebas en el Bebop 2 para evaluar su desempeño en condiciones reales y determinar si cumple con las expectativas basadas en la teoría.

1.4 Objetivos

Objetivo General

Desarrollar, implementar y validar un controlador avanzado para un dron, basándose en el enfoque propuesto en el artículo "Tracking Control of a Quadrotor UAV by Using Inertial Vector Measurements", con el fin de lograr un seguimiento preciso de trayectorias y actitudes deseadas en un dron real Bebop 2.

Objetivos Específicos

- Realizar un análisis exhaustivo del controlador presentado en el artículo de Eduardo Espíndola y Yu Tang, comprendiendo su metodología y la innovación de emplear mediciones vectoriales inerciales para el control de trayectorias en vehículos aéreos no tripulados.
- Estudiar y describir con detalle el modelo matemático del dron, enfocándose en las ecuaciones dinámicas que lo rigen. Este estudio debe permitir una comprensión profunda de la relación entre las variables de control y el comportamiento dinámico del dron.
- Implementar inicialmente el controlador en un entorno de simulación MATLAB, donde se realizarán pruebas en condiciones ideales para verificar su funcionamiento. Posteriormente, se introducirán perturbaciones acotadas para evaluar la robustez y adaptabilidad del controlador frente a situaciones no ideales.
- Adaptar y optimizar el controlador para su implementación en un entorno de simulación más avanzado y realista, como ROS y Gazebo. En este entorno, se utilizarán las especificaciones y características del dron Bebop 2, lo que permitirá una simulación más cercana a las condiciones reales de operación.

- Ejecutar una serie de pruebas en el entorno ROS y Gazebo, evaluando el desempeño del controlador en diferentes escenarios y condiciones. Estas pruebas deben incluir situaciones con y sin perturbaciones, para determinar la eficacia y precisión del controlador en un entorno simulado avanzado.
- Implementar el controlador en un dron real Bebop 2 y llevar a cabo pruebas de campo. Estas pruebas tienen como objetivo validar el desempeño del controlador en condiciones reales, y comparar los resultados obtenidos con las simulaciones previas.
- Documentar y analizar los desafíos, limitaciones y problemas encontrados durante la implementación y las pruebas en el dron real. A partir de este análisis, se propondrán soluciones, mejoras o adaptaciones para futuras investigaciones o implementaciones en otros modelos de drones o en condiciones diferentes.

1.5 Contribuciones

- Encontrar condiciones para obtener
- P
- I
- E

1.6 Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra dividido en cinco capítulos, siendo el presente el que concierne a la introducción. Los siguientes cuatro se describen a continuación:

En el **Capítulo 2**, se presenta el marco teórico

En el **Capítulo 3**, se presenta Para validar el funcionamiento del gemelo digital, en el **Capítulo**

Chapter 2

Marco Teorico

2.1 Homogeneidad

Definicion 1 : [1], [2] Dado un vector $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ y el operador de dilatación definido como:

$$\Delta_\varepsilon^r x := (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n), \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

donde $r_i > 0$ son los pesos de las coordenadas y $r = [r_1, \dots, r_n]$ es el vector de pesos.

Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada r-homogenea de grado $m \in \mathbb{R}$ si la identidad 2.2

$$V(\Delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^m V(x) \quad (2.2)$$

2.2 Problema estándar de control por HOSM

Diseñar un controlador para el sistema SISO afín a la entrada

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z)u \quad (2.3)$$

$$\sigma = h(t, z), \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

el controlador debe llevar la salida a $\sigma(t) \equiv 0$ en un tiempo finito $t \geq T$.

Cuando el grado relativo es conocido y bien definido equivale a diseñar un controlador para el DI

$$\Sigma_{ID} : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, \dots, \rho - 1 \\ \dot{x}_\rho \in [-C, C] + [K_m, K_M]u, \end{cases} \quad (2.5)$$

2.3 Funcion de lyapunov de control

$$\dot{x} \in F(x) + g(x)\xi(x)u$$

Existe una CLF $V(x)$ C^1 r-homogenea para el sistema anterior.

$$L_{g(x)}V = 0 \Rightarrow \sup_{v \in F(x)} L_v V < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$$

2.3.1 CFL para HOSMC

Para $i = 2, \dots, \rho$

$$V_i(\bar{x}_i) = \gamma_{i-1} V_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) + W_i(\bar{x}_i) \quad (2.6)$$

$$W_i(\bar{x}_i) = \frac{r_i}{m} |x_i|^{\frac{m}{r_i}} - \lceil v_{i-1} \rceil^{\frac{m-r_i}{r_i}} x_i + (1 - \frac{r_i}{m}) |v_{i-1}|^{\frac{r_i}{m}} \quad (2.7)$$

$$v_i(\bar{x}_i) = -k_i \lceil \sigma_i \rceil^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}} \quad (2.8)$$

$$\sigma_i(\bar{x}_i) = \lceil x_i \rceil^{\frac{\alpha_i}{r_i}} + k_{i-1}^{\frac{\alpha_i}{r_i}} \lceil \sigma_{i-1} \rceil^{\frac{\alpha_i}{\alpha_i-1}} \quad (2.9)$$

$$V_1(x_1) = \frac{r}{m} |x_1|^{\frac{m}{r}} \quad (2.10)$$

$$v_1(x_1) = -k_1 \lceil \sigma_1 \rceil^{\frac{r_2}{\alpha_1}} = -k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{r_2}{\alpha_1}} \quad (2.11)$$

$$\sigma_1 = \lceil x_1 \rceil^{\frac{\alpha_1}{r_1}} \quad (2.12)$$

donde $\gamma_i > 0$, $k_i > 0$. σ_i es de grado homogénea α_i , v_i de grado r_{i+1} y V_i de grado m .

Teorema: [3] Si el sistema satisface la suposición 1, y que $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es r -homogénea de grado 0, tal que:

$$\varphi(x) L_{g(x)} V(x) > 0 \text{ cuando } L_{g(x)} V(x) \neq 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} u &= -k\varphi \\ u_1 &= -k\varphi_1(x) = -k \lceil L_{g(x)} V(x) \rceil^0 \\ u_2 &= -k\varphi_2(x) = -k \frac{L_{g(x)} V(x)}{M(x)} \end{aligned}$$

donde $M(x)$ es r -homogénea de grado $m + l$. EL sistema en lazo cerrado es GAS en $x = 0$ $\forall k \geq k^* > 0$, y es GFTS si $l < 0$.

Con $r = \rho$

$$\begin{aligned} u_D &= -k_\rho \lceil \sigma_\rho(x) \rceil^0, \quad u_Q = -k_\rho \frac{\sigma_\rho(x)}{M(x)} \\ u &= -k_2 \left[\lceil x_2 \rceil^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} \lceil x_1 \rceil^{\frac{\alpha_2}{2}} \right]^0 \end{aligned}$$

2.4 Ganancias del controlador

Para $k_i, i = 2, \dots, \rho - 1$, con $k_1 > 0$

$$Z_i(\bar{x}_i) = \Phi_i(\bar{x}_i) - k_i s_{i,d} \lceil \sigma_i \rceil^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}} < 0 \quad (2.13)$$

$$k_i > \max_{\bar{x}_i \in S_i} \left\{ \frac{\Phi_i(\bar{x}_i)}{s_{i,d} \lceil \sigma_i(\bar{x}_i) \rceil^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}}} \right\} := G_i(k_{i-1}) \quad (2.14)$$

Para k_ρ

$$\dot{V} \leq \max L_{F(x)} V(x) - k \xi(x) L_{g(x)} V(x) \varphi(x) \quad (2.15)$$

$$\dot{V} \leq \max \left\{ \sum_{j=1}^{\rho-1} \partial_{x_j} V_\rho \right\} + C |s_{\rho,d}(x)| - k_\rho K_m s_{\rho,d} \frac{s_{\rho,d}(x)}{|s_{\rho,d}(x)|} < 0 \quad (2.16)$$

$$k_\rho > \frac{1}{K_m} \left(\max_{x \in S_\rho} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\rho-1} \partial_{x_j} V_\rho}{|s_{\rho,d}(x)|} \right\} + C \right) := G_i(k_{\rho-1}, C, K_m) \quad (2.17)$$

Chapter 3

Calculo de ganancias para controladores discontinuos homogeneos de grado cero

3.1 Controlador de primer orden

Sea el sistema 3.1 afin a la entrada, de grado relativo 1,

$$\dot{x}_1 = f(x) + u \quad (3.1a)$$

Con el algoritmo de control discontinuo

$$u = -k_1 \lceil x_1 \rceil^0 \quad (3.2)$$

Función de Lyapunov de control

$$V_1 = \gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \quad (3.3)$$

3.2 Controlador de segundo orden

Sea el sistema 3.4 afin a la entrada, de grado relativo 2,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.4a)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (3.4b)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \quad (3.5)$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_2 \left[\lceil x_2 \rceil^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} \lceil x_1 \rceil^{\frac{\alpha_2}{2}} \right]^0 \quad (3.6)$$

Función de Lyapunov de control

$$V_2 = \gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - \lceil v_1 \rceil^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m}\right) |v_1|^{\frac{m}{r_2}} \quad (3.7)$$

$$v_1 = -k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{r_2}{r_1}} \quad (3.8)$$

donde

$$W_2 = \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - \lceil v_1 \rceil^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + (1 + \frac{r_2}{m}) |v_1|^{\frac{m}{r_2}} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= -\frac{m-r_2}{r_2} x_2 |v_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{m-r_2}{r_2} \lceil v_1 \rceil^{\frac{m-r_2}{r_2}} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ &\text{sustituimos } x_2 = s_2 + v_1 \\ &= \frac{m-r_2}{r_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left(-|v_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} s_2 - \lceil v_1 \rceil^{\frac{m-r_2}{r_2}} + \lceil v_1 \rceil^{\frac{m-r_2}{r_2}} \right) \\ &= -\frac{m-r_2}{r_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left(|v_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} s_2 \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$v_1 = -k_1 \lceil \sigma_1 \rceil^{\frac{r_2}{\alpha_1}} = -k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{r_2}{r_1}} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{\alpha_1} |\sigma_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{r_1} |x_1|^{\frac{r_2-r_1}{r_1}} \quad (3.12)$$

$$\sigma_1 = \lceil x_1 \rceil^{\frac{\alpha_1}{r_1}} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = \frac{\alpha_1}{r_1} |x_1|^{\frac{\alpha_1-r_1}{r_1}} \quad (3.14)$$

para llegar a la ecuacion del articulo tenemos

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{\alpha_1} |\sigma_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{\alpha_1} \frac{k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}}{k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}} |\sigma_1|^{\frac{r_2}{r_2} \frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \quad (3.15)$$

$$|v_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} = | -k_1 \lceil \sigma_1 \rceil^{\frac{r_2}{\alpha_1}} |^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} = k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} |\lceil \sigma_1 \rceil^{\frac{r_2}{\alpha_1}}|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} = k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} |\sigma_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \quad (3.16)$$

por lo que

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{\alpha_1} \frac{1}{k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}} |v_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = -\frac{r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |v_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \quad (3.17)$$

obtenemos la parcial de nuevo sustituyendo la ecuacion anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= -\frac{m-r_2}{r_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left(|v_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} s_2 \right) \\ &= -\frac{m-r_2}{r_2} \left(-\frac{r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |v_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \right) \left(|v_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} s_2 \right) \\ &= \frac{m-r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |v_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} s_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

obtenemos la forma explicita de la parcial con respecto a x_1 de W_2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= \frac{m-r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |v_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} s_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \\
&= \frac{m-r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |v_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} (x_2 - v_1) \left(\frac{\alpha_1}{r_1} |x_1|^{\frac{\alpha_1-r_1}{r_1}} \right) \\
&= \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} | -k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{r_2}{r_1}} |^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} \left(x_2 + k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{r_2}{r_1}} \right) \left(|x_1|^{\frac{\alpha_1-r_1}{r_1}} \right) \\
&= \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_1}} \left(x_2 + k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{r_2}{r_1}} \right) \left(|x_1|^{\frac{\alpha_1-r_1}{r_1}} \right) \\
&= \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}} \left(x_2 + k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{r_2}{r_1}} \right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

llegando asi a la expresion del articulo con la diferencia de no tener signo negativo

Llamaremos f_2 a la función a maximizar

$$\begin{aligned}
k_2 &> \frac{1}{k_m} (\max [f_2] + C) \\
f_2(\bar{x}_2) &= \frac{x_2 \left(\gamma_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{m-r_1}{r_1}} + \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}} \left(x_2 + k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{r_2}{r_1}} \right) \right)}{\left| \lceil x_2 \rceil^{\frac{m-r_2}{r_2}} + k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \lceil x_1 \rceil^{\frac{m-r_2}{r_1}} \right|} = \frac{\phi_2}{|s_{2d}|}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= |s_{2d}| \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 \left(\frac{\partial |s_{2d}|}{\partial x_2} - \frac{\partial |s_{2d}|}{\partial x_1} \right) \\
&= |s_{2d}| \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 \frac{s_{2d}}{|s_{2d}|} \left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) \\
&= |s_{2d}| \left(|s_{2d}| \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 \frac{s_{2d}}{|s_{2d}|} \left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) \right) \\
&= |s_{2d}|^2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 s_{2d} \left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) \\
&= s_{2d} \left(s_{2d} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) + \phi_2 \left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

en la ultima ecuacion podemos observar que s_{2d} es una solución; sin embargo, corresponde a los puntos donde se va a menos infinito por lo que son puntos minimos y los descartamos.

Como la función es homogénea de grado cero, obtendremos un rayo de máximos con la siguiente forma:

con $x_1 = 1$

$$M_p := \max [f_2] = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}} \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} \right) = c + dx_2 - \left(\frac{a}{e} x_2 + \frac{b}{e} x_2^2 \right) f |x_2|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} \tag{3.22}$$

donde las constantes que dependen del valor de k_1

$$a = \gamma_1 \frac{m-r_1}{r_1} + \frac{m-r_2}{r_1} \frac{m-r_1}{r_1} k_1^{\frac{m}{r_2}} \tag{3.23}$$

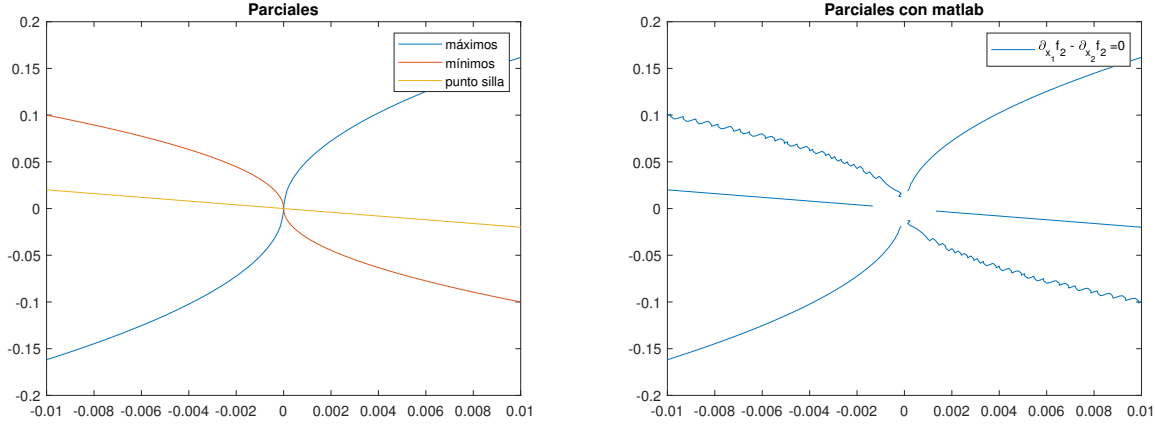


Figure 3.1: text

$$b = \frac{m - r_2}{r_1} \frac{m - r_2 - r_1}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \quad (3.24)$$

$$c = \gamma_1 + \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m}{r_2}} \quad (3.25)$$

$$d = 2 \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \quad (3.26)$$

$$e = \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \quad (3.27)$$

$$f = \frac{m - r_2}{r_2} \quad (3.28)$$

Para encontrar el valor del máximo se debe obtener una raíz del rayo de máximos y evaluar el punto en la función a maximizar f_2

$$max = f(1, x_2)$$

Sustituyendo con los valores del caso mas sencillo: $m = 3, y_1 = k_1 = 1, r = [2, 1]$

$$a = 1; \quad b = 0; \quad c = 2; \quad d = 2; \quad e = 1; \quad f = 2;$$

con $x_2 > 0$

$$M_p = 2 + 2x_2 - 2x_2^2 \quad (3.29)$$

$$x_2 = -0.618; \quad x_2 = 1.618 \quad (3.30)$$

El máximo se obtiene al evaluar en la función original:

$$max = f_2(1, 1.618) = 1.618 \quad (3.31)$$

Por lo tanto $k_2 > 1.618$

3.3 Para grado relativo 3

Sea el sistema 3.32 afín a la entrada, de grado relativo 3,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.32a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (3.32b)$$

$$\dot{x}_3 = u \quad (3.32c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \quad (3.33)$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_3 \left[[x_3]^{\alpha_3} + k_2^{\alpha_3} \left[[x_2]^{\frac{\alpha_2}{2}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{2}} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{3}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^0 \quad (3.34)$$

Funcion de lyapunov de control

$$V_3 = \gamma_2 \left(\gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - [v_1]^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m} \right) |v_1|^{\frac{m}{r_2}} \right) + W_3 \quad (3.35)$$

La función a maximizar en su forma general:

$$k_2 > \max \left[\frac{\phi_2}{s_{2d} [\sigma_2]^{\frac{r_3}{\alpha_2}}} \right] := \max [f_{32}] \quad (3.36)$$

Donde el rayo del máximo tiene la siguiente forma general:

$$M := s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \phi_2 \left[\frac{r_3}{\alpha_2} \frac{s_{2d}}{\sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right]$$

Se fija $x_1 = 1$ y se busca una raiz para obtener el valor de x_2

$$k_3 > \frac{1}{k_m} \max [f_3] + \frac{C}{k_m} := \frac{1}{k_m} \frac{\phi_3}{|s_{3d}|} + \frac{C}{k_m} \quad (3.37)$$

La función a obtener el máximo

$$f_3 := \frac{\gamma_2 \gamma_1 x_2 s_{1d} + \gamma_2 x_2 \frac{\partial W_2}{\partial x_1} + \gamma_2 x_3 \frac{\partial W_2}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial W_3}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial W_3}{\partial x_2}}{|s_{3d}|} \quad (3.38)$$

Como la función es homogénea de grado cero, obtendremos un rayo de máximos con la siguiente forma:

con $x_1 = 1, x_2 = 1$

$$\max [f_3] = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} - \frac{\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2}}{\frac{\partial s_{3d}}{\partial x_2}} \frac{\partial s_{3d}}{\partial x_3} = 0 \quad (3.39)$$

3.4 Para grado relativo 4

Sea el sistema 3.49 afín a la entrada, de grado relativo 4 ,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.40a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (3.40b)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.40c)$$

$$\dot{x}_4 = u \quad (3.40d)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \quad (3.41)$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_4 \left[[x_4]^{\alpha_4} + k_3^{\alpha_4} \left[[x_3]^{\frac{\alpha_3}{2}} + k_2^{\frac{\alpha_3}{2}} \left[[x_2]^{\frac{\alpha_2}{3}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{3}} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{4}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^0 \quad (3.42)$$

Función de Lyapunov de control

$$V_4 = \gamma_3 V_3 + W_4 \quad (3.43)$$

La función a maximizar en su forma general:

$$k_2 > \max \left[\frac{\phi_2}{s_{2d} [\sigma_2]^{\frac{r_3}{\alpha_2}}} \right] := \max [f_{42}] \quad (3.44)$$

Donde el rayo del máximo tiene la siguiente forma general:

$$M := s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \phi_2 \left[\frac{r_3}{\alpha_2} \frac{s_{2d}}{\sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right]$$

Se fija $x_1 = 1$ y se busca una raiz para obtener el valor de x_2

La función a maximizar en su forma general:

$$k_3 > \max \left[\frac{\phi_3}{s_{3d} [\sigma_3]^{\frac{r_4}{\alpha_3}}} \right] := \max [f_{43}] \quad (3.45)$$

Donde el rayo del máximo tiene la siguiente forma general:

$$M := s_{3d} \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \phi_3 \left[\frac{r_4}{\alpha_3} \frac{s_{3d}}{\sigma_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{3d}}{\partial x_2} \right]$$

Se fija $x_1 = 1, x_2 = 1$ y se busca una raiz para obtener el valor de x_3

$$k_4 > \frac{1}{k_m} \max [f_4] + \frac{C}{k_m} := \frac{1}{k_m} \frac{\phi_4}{|s_{4d}|} + \frac{C}{k_m} \quad (3.46)$$

La función a obtener el máximo

$$f_4 := \frac{x_2 \frac{\partial V_4}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial V_4}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial V_4}{\partial x_3}}{|s_{4d}|} \quad (3.47)$$

Como la función es homogénea de grado cero, obtendremos un rayo de máximos con la siguiente forma:

con $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

$$\max[f_4] = \frac{\partial \phi_4}{\partial x_4} - \frac{\frac{\partial \phi_4}{\partial x_3}}{\frac{\partial s_{4d}}{\partial x_3}} \frac{\partial s_{4d}}{\partial x_4} = 0 \quad (3.48)$$

3.5 Para grado relativo 5

Sea el sistema 3.49 afín a la entrada, de grado relativo 4 ,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.49a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (3.49b)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.49c)$$

$$\dot{x}_4 = x_5 \quad (3.49d)$$

$$\dot{x}_5 = u \quad (3.49e)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \quad (3.50)$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_5 [\sigma_5]^0 \quad (3.51)$$

$$V_5 = \gamma_4 V_4 + W_5 \quad (3.52)$$

3.6 Implementacion en Matlab

Calculo de ganancias para CTA

4.1 Para grado relativo 3

4.2 Implementacion en Matalab

Chapter 5

Conclusions

Bibliography

- [1] Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media. [5](#)
- [2] Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., and Polyakov, A. (2014). On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1866–1901. [5](#)
- [3] Cruz-Zavala, E. and Moreno, J. A. (2017). Homogeneous high order sliding mode design: A lyapunov approach. *Automatica*, 80:232–238. [6](#)