UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA–CONTROL

CÁLCULO E IMPLEMENTACIÓN DE GANANCIAS DE CONTROLADORES HOMOGÉNEOS DE ALTO ORDEN MEDIANTE FUNCIONES DE LYAPUNOV DE CONTROL EN MATLAB

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
MATIAS IGLESIAS RIOS

TUTOR PRINCIPAL
DR. LEONID FRIDMAN
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. AGOSTO 2023

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	
Secretario:	Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto
1er. Vocal:	Dr. Fridman Leonid
2o. Vocal:	
3er. Vocal:	

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:
DR. LEONID FRIDMAN

____

FIRMA

Índice general

Índice de figuras

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

1.2. Antecedentes

1.3. Formulación del problema

1.4. Objetivos

El presente trabajo de tesis tiene como objetivos:

- D
- P
- I
- E

1.5. Contribuciones

- D
- P
- I
- E

1.6. Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra dividido en cinco capítulos, siendo el presente el que concierne a la introducción. Los siguientes cuatro se describen a continuación:

En el **Capítulo 2**, se presenta el marco teórico del gemelo digital, es decir, la definición del concepto, el aporte de valor y los niveles de madurez o sofisticación que puede alcanzar el gemelo digital de un sistema físico. Además se abordan los conceptos básicos sobre neumática, diseño asistido por computadora, que nos permiten sentar la bases del desarrollo del modelo tridimensional del sistema electroneumático, también se presentan los conceptos básicos de mecánica y termodinámica que se utilizan posteriormente en el Capítulo 3 para proponer un modelo matemático que describa la dinámica del sistema, de igual forma en el Capítulo 2 se hace referencia al emulador de procesos en tiempo real desarrollado en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México

En el **Capítulo 3**, se presenta la implementació Para validar el funcionamiento del gemelo digital, en el **Capítulo 4**

Capítulo 2

Marco Teorico

2.1. Homogeneidad

Definicion 1 : [1], [2] Dado un vector $x = [x_1, ..., x_n]^T$ y el operador de dilatación definido como:

$$\triangle_{\varepsilon}^{r} x := (\varepsilon^{r_1} x_1, ... \varepsilon^{r_n} x_n)\,, \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

donde $r_i > 0$ son los pesos de las coordenadas y $r = [r_1, ..., r_n]$ es el vector de pesos.

Una función $V : \mathbb{R}^n - > \mathbb{R}$ es llamada r-homogenea de grado $m \in \mathbb{R}$ si la identidad 2.2

$$V(\triangle_{\varepsilon}^{r} x) = \varepsilon^m V(x) \tag{2.2}$$

2.2. Problema estándar de control por HOSM

Diseñar un controlador para el sistema SISO afín a la entrada

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z)u \tag{2.3}$$

$$\sigma = h(t, z), \;\; z \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

el controlador debe llevar la salida a $\sigma(t) \equiv 0$ en un tiempo finito $t \geq T$.

Cuando el grado relativo es conocido y bien definido equivale a diseñar un controlador para el DI

$$\Sigma_{ID} : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, ..., \rho - 1 \\ \dot{x}_\rho \in [-C, C] + [K_m, K_M]u, \end{cases} \tag{2.5}$$

2.3. Funcion de lyapunov de control

$$\dot{x} \in F(x) + g(x)\xi(x)u$$

Existe una CLF $V(x)$ C^1 r-homogenea para el sistema anterior.

$$L_{g(x)}V = 0 \Rightarrow sup_{\upsilon \epsilon F(x)} L_\upsilon V < 0, \; \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$$

2.3.1. CFL para HOSMC

Para $i = 2, ..., \rho$

$$V_i(\overline{x}_i) = \gamma_{i-1} V_{i-1}(\overline{x}_{i-1}) + W_i(\overline{x}_i) \tag{2.6}$$

$$W_i(\overline{x}_i) = \frac{r_i}{m}|x_i|^{\frac{m}{r_i}} - \lceil \upsilon_{i-1} \rfloor^{\frac{m-r_i}{r_i}} x_i + (1 - \frac{r_i}{m})|\upsilon_{i-1}|^{\frac{r_i}{m}} \tag{2.7}$$

$$\upsilon_i(\overline{x}_i) = -k_i \lceil \sigma_i \rfloor^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}} \tag{2.8}$$

$$\sigma_i(\overline{x}_i) = \lceil x_i \rfloor^{\frac{\alpha_i}{r_i}} + k_{i-1}^{\frac{\alpha_i}{r_i}} \lceil \sigma_{i-1} \rfloor^{\frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1}} \tag{2.9}$$

$$V_1(x_1) = \frac{r}{m}|x_1|^{\frac{m}{r}} \tag{2.10}$$

$$\upsilon_1(x_1) = -k_1 \lceil \sigma_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}} = -k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}} \tag{2.11}$$

$$\sigma_1 = \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_1}{r_1}} \tag{2.12}$$

donde $\gamma_i > 0$, $k_i > 0$. σ_i es de grado homogénea α_i, υ_i de grado r_{i+1} y V_i de grado m.

Teorema: [3] Si el sistema satisface la suposición 1, y que $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es r-homogénea de grado 0, tal que:

$$\varphi(x) L_{g(x)} V(x) > 0 \;\; cuando \; L_{g(x)} V(x) \neq 0$$

Entonces

$$u = -k\varphi$$

$$u_1 = -k\varphi_1(x) = -k \lceil L_{g(x)} V(x) \rfloor^0$$

$$u_2 = -k\varphi_2(x) = -k \frac{L_{g(x)} V(x)}{M(x)}$$

donde $M(x)$ es r-homogenea de grado $m+l$. EL sistema en lazo cerrado es GAS en $x = 0 \; \forall k \geq k^* > 0$, y es GFTS si $l < 0$.

Con $r = \rho$

$$u_D = -k_\rho \lceil \sigma_\rho(x) \rfloor^0, \;\; u_Q = -k_\rho \frac{\sigma_\rho(x)}{M(x)}$$

$$u = -k_2 \left\lceil \lceil x_2 \rfloor^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{2}} \right\rfloor^0$$

2.4. Ganancias del controlador

Para $k_i, i = 2, ...\rho - 1$, con $k_1 > 0$

$$Z_i(\overline{x}_i) = \Phi_i(\overline{x}_i) - k_i s_{i,d} \lceil \sigma_i \rfloor^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}} < 0 \tag{2.13}$$

$$k_i > \max_{\overline{x}_i \in S_i} \left\{ \frac{\Phi_i(\overline{x}_i)}{s_{i,d} \lceil \sigma_i(\overline{x}_i) \rfloor^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}}} \right\} := G_i(k_{i-1}) \tag{2.14}$$

Para k_ρ

$$\dot{V} \leq max \; L_{F(x)} V(x) - k\xi(x) L_{g(x)} V(x) \varphi(x) \tag{2.15}$$

$$\dot{V} \leq max\left\{\sum_{j=1}^{\rho-1}\partial_{x_j}V_\rho\right\} + C|s_{\rho,d}(x)| - k_\rho K_m s_{\rho,d}\frac{s_{\rho,d}(x)}{|s_{\rho,d}(x)|} < 0 \tag{2.16}$$

$$k_\rho > \frac{1}{K_m}\left(\max_{x\in S_\rho}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{\rho-1}\partial_{x_j}V_\rho}{|s_{\rho,d}(x)|}\right\} + C\right) := G_i(k_{\rho-1}, C, K_m) \tag{2.17}$$

Capítulo 3

Calculo de ganancias para controladoers discontinuos homogeneos de grado cero

3.1. Controlador de primer orden

Sea el sitema 3.1 afin a la entrada, de grado relativo 1,

$$\dot{x}_1 = f(x) + u \tag{3.1a}$$

Con el algoritmo de control discontinuo

$$u = -k_1 \lceil x_1 \rfloor^0 \tag{3.2}$$

Función de Lyapunov de control

$$V_1 = \gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \tag{3.3}$$

3.2. Controlador de segundo orden

Sea el sitema 3.4 afin a la entrada, de grado relativo 2,

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.4a}$$
$$\dot{x}_2 = u \tag{3.4b}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \tag{3.5}$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_2 \left[\lceil x_2 \rfloor^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{2}} \right]^0 \tag{3.6}$$

Función de Lyapunov de control

$$V_2 = \gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - \lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m}\right) |\upsilon_1|^{\frac{m}{r_2}} \tag{3.7}$$

$$\upsilon_1 = -k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{r_1}} \tag{3.8}$$

donde

$$W_2 = \frac{r_2}{m}|x_2|^{\frac{m}{r_2}} - \lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + (1 + \frac{r_2}{m})|\upsilon_1|^{\frac{m}{r_2}} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= -\frac{m-r_2}{r_2} x_2 |\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{m-r_2}{r_2} \lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} \\
&\textbf{sustituimos } x_2 = s_2 + \upsilon_1 \\
&= \frac{m-r_2}{r_2}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}\left(-|\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} s_2 - \lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} + \lceil \upsilon_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}}\right) \\
&= -\frac{m-r_2}{r_2}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}\left(|\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} s_2\right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde

$$\upsilon_1 = -k_1 \lceil \sigma_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}} = -k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r_2}{r_1}} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{\alpha_1} |\sigma_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{r_1} |x_1|^{\frac{r_2-r_1}{r_1}} \tag{3.12}$$

$$\sigma_1 = \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_1}{r_1}} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = \frac{\alpha_1}{r_1} |x_1|^{\frac{\alpha_1 - r_1}{r_1}} \tag{3.14}$$

para llegar a la ecuacion del articulo tenemos

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{\alpha_1} |\sigma_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{\alpha_1} \frac{k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}}{k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}} |\sigma_1|^{\frac{r_2}{r_2}\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \tag{3.15}$$

$$|\upsilon_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} = |-k_1 \lceil \sigma_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}}|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} = k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} |\lceil \sigma_1 \rfloor^{\frac{r_2}{\alpha_1}}|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} = k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} |\sigma_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \tag{3.16}$$

por lo que

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} = -k_1 \frac{r_2}{\alpha_1} \frac{1}{k_1^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}}} |\upsilon_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = -\frac{r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |\upsilon_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \tag{3.17}$$

obtenemos la parcial de nuevo sustituyendo la ecuacion antetior

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= -\frac{m-r_2}{r_2}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}\left(|\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} s_2\right) \\
&= -\frac{m-r_2}{r_2}\left(-\frac{r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |\upsilon_1|^{\frac{r_2-\alpha_1}{r_2}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1}\right)\left(|\upsilon_1|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} s_2\right) \\
&= \frac{m-r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} |\upsilon_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} s_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

obtenemos la forma explicita de la parcial con respecto a x_1 de W_2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= \frac{m-r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} \left|\upsilon_1\right|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} s_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \\
&= \frac{m-r_2}{\alpha_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} \left|\upsilon_1\right|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} (x_2-\upsilon_1) \left(\frac{\alpha_1}{r_1}|x_1|^{\frac{\alpha_1-r_1}{r_1}}\right) \\
&= \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{\alpha_1}{r_2}} \left|-k_1\lceil x_1\rfloor^{\frac{r_2}{r_1}}\right|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_2}} \left(x_2+k_1\lceil x_1\rfloor^{\frac{r_2}{r_1}}\right) \left(|x_1|^{\frac{\alpha_1-r_1}{r_1}}\right) \\
&= \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2-\alpha_1}{r_1}} \left(x_2+k_1\lceil x_1\rfloor^{\frac{r_2}{r_1}}\right) \left(|x_1|^{\frac{\alpha_1-r_1}{r_1}}\right) \\
&= \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}} \left(x_2+k_1\lceil x_1\rfloor^{\frac{r_2}{r_1}}\right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

llegando asi a la expresion del articulo con la diferencia de no tener signo negativo

Llamaremos f_2 a la función a maximizar

$$k_2 > \frac{1}{k_m}\left(max\left[f_2\right]+C\right)$$

$$f_2(\overline{x}_2) = \frac{x_2\left(\gamma_1\lceil x_1\rfloor^{\frac{m-r_1}{r_1}} + \frac{m-r_2}{r_1}k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}}|x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}}\left(x_2+k_1\lceil x_1\rfloor^{\frac{r_2}{r_1}}\right)\right)}{\left|\lceil x_2\rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} + k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}}\lceil x_1\rfloor^{\frac{m-r_2}{r_1}}\right|} = \frac{\phi_2}{|s_{2d}|} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= |s_{2d}|\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}\right) + \phi_2\left(\frac{\partial |s_{2d}|}{\partial x_2} - \frac{\partial |s_{2d}|}{\partial x_1}\right) \\
&= |s_{2d}|\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}\right) + \phi_2\frac{s_{2d}}{|s_{2d}|}\left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}\right) \\
&= |s_{2d}|\left(|s_{2d}|\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}\right) + \phi_2\frac{s_{2d}}{|s_{2d}|}\left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}\right)\right) \\
&= |s_{2d}|^2\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}\right) + \phi_2 s_{2d}\left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}\right) \\
&= s_{2d}\left(s_{2d}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}\right) + \phi_2\left(\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} - \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

en la ultima ecuacion podemos observar que s_{2d} es una solución; sin embargo, corresponde a los puntos donde se va a menos infinito por lo que son puntos minimos y los descartamos.

Como la función es homogénea de grado cero, obtendremos un rayo de máximos con la siguiente forma:
con $x_1 = 1$

$$M_p := max\left[f_2\right] = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}}\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2}\right) = c + dx_2 - \left(\frac{a}{e}x_2 + \frac{b}{e}x_2^2\right) f|x_2|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} \tag{3.22}$$

donde las constantes que dependen del valor de k_1

$$a = \gamma_1\frac{m-r_1}{r_1} + \frac{m-r_2}{r_1}\frac{m-r_1}{r_1}k_1^{\frac{m}{r_2}} \tag{3.23}$$

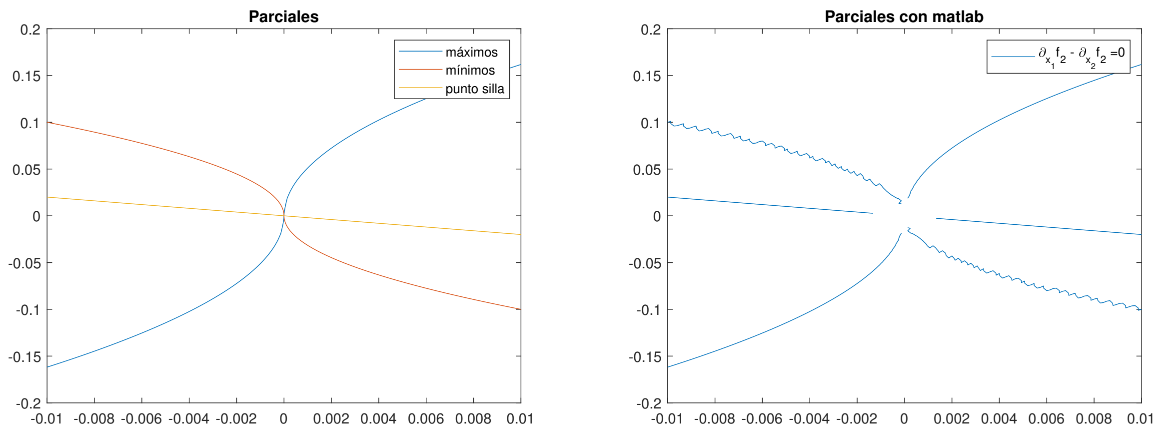

Figura 3.1: text

$$b = \frac{m - r_2}{r_1}\frac{m - r_2 - r_1}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \tag{3.24}$$

$$c = \gamma_1 + \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m}{r_2}} \tag{3.25}$$

$$d = 2\frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \tag{3.26}$$

$$e = \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \tag{3.27}$$

$$f = \frac{m - r_2}{r_2} \tag{3.28}$$

Para encontrar el valor del máximo se debe obtener una raíz del rayo de máximos y evaluar el punto en la función a maximizar f_2

$$max = f(1, x_2)$$

Sustituyendo con los valores del caso mas sencillo: $m = 3$,$y_1 = k_1 = 1$, $r = [2, 1]$

$$a = 1; \quad b = 0; \quad c = 2; \quad d = 2; \quad e = 1; \quad f = 2;$$

con $x_2 > 0$

$$M_p = 2 + 2x_2 - 2x_2^2 \tag{3.29}$$

$$x_2 = -0{,}618; \quad x_2 = 1{,}618 \tag{3.30}$$

El máximo se obtine al evaluar en la función original:

$$max = f_2(1, 1{,}618) = 1{,}618 \tag{3.31}$$

Por lo tanto $k_2 > 1{,}618$

3.3. Para grado relativo 3

Sea el sitema 3.32 afin a la entrada, de grado relativo 3,

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.32a}$$
$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{3.32b}$$
$$\dot{x}_3 = u \tag{3.32c}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \tag{3.33}$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_3 \left[\lceil x_3 \rfloor^{\alpha_3} + k_2^{\alpha_3} \left[\lceil x_2 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{2}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{2}} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{3}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^0 \tag{3.34}$$

Funcion de lyapunov de control

$$V_3 = \gamma_2 \left(\gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - \lceil v_1 \rfloor^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m}\right) |v_1|^{\frac{m}{r_2}} \right) + W_3 \tag{3.35}$$

La función a maximizar en su forma general:

$$k_2 > max \left[\frac{\phi_2}{s_{2d} \lceil \sigma_2 \rfloor^{\frac{r_3}{\alpha_2}}} \right] := max\,[f_{32}] \tag{3.36}$$

Donde el rayo del máximo tiene la siguiente forma general:

$$M := s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \phi_2 \left[\frac{r_3}{\alpha_2} \frac{s_{2d}}{\sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right]$$

Se fija $x_1 = 1$ y se busca una raiz para obtener el valor de x_2

$$k_3 > \frac{1}{k_m} max\,[f_3] + \frac{C}{k_m} := \frac{1}{k_m} \frac{\phi_3}{|s_{3d}|} + \frac{C}{k_m} \tag{3.37}$$

La función a obtener el máximo

$$f_3 := \frac{\gamma_2 \gamma_1 x_2 s_{1d} + \gamma_2 x_2 \frac{\partial W_2}{\partial x_1} + \gamma_2 x_3 \frac{\partial W_2}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial W_3}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial W_3}{\partial x_2}}{|s_{3d}|} \tag{3.38}$$

Como la función es homogénea de grado cero, obtendremos un rayo de máximos con la siguiente forma:
con $x_1 = 1, x_2 = 1$

$$max\,[f_3] = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} - \frac{\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2}}{\frac{\partial s_{3d}}{\partial x_2}} \frac{\partial s_{3d}}{\partial x_3} = 0 \tag{3.39}$$

3.4. Para grado relativo 4

Sea el sitema 3.49 afin a la entrada, de grado relativo 4 ,

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.40a}$$
$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{3.40b}$$
$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{3.40c}$$
$$\dot{x}_4 = u \tag{3.40d}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \tag{3.41}$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_4 \left\lceil \lceil x_4 \rfloor^{\alpha_4} + k_3^{\alpha_4} \left\lceil \lceil x_3 \rfloor^{\frac{\alpha_3}{2}} + k_2^{\frac{\alpha_3}{2}} \left\lceil \lceil x_2 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{3}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{3}} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{\alpha_2}{4}} \right\rfloor^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right\rfloor^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right\rfloor^{0} \tag{3.42}$$

Función de Lyapunov de control

$$V_4 = \gamma_3 V_3 + W_4 \tag{3.43}$$

La función a maximizar en su forma general:

$$k_2 > max \left[\frac{\phi_2}{s_{2d} \lceil \sigma_2 \rfloor^{\frac{r_3}{\alpha_2}}} \right] := max\,[f_{42}] \tag{3.44}$$

Donde el rayo del máximo tiene la siguiente forma general:

$$M := s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \phi_2 \left[\frac{r_3}{\alpha_2} \frac{s_{2d}}{\sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right]$$

Se fija $x_1 = 1$ y se busca una raiz para obtener el valor de x_2

La función a maximizar en su forma general:

$$k_3 > max \left[\frac{\phi_3}{s_{3d} \lceil \sigma_3 \rfloor^{\frac{r_4}{\alpha_3}}} \right] := max\,[f_{43}] \tag{3.45}$$

Donde el rayo del máximo tiene la siguiente forma general:

$$M := s_{3d} \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \phi_3 \left[\frac{r_4}{\alpha_3} \frac{s_{3d}}{\sigma_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{3d}}{\partial x_2} \right]$$

Se fija $x_1 = 1, x_2 = 1$ y se busca una raiz para obtener el valor de x_3

$$k_4 > \frac{1}{k_m} max\,[f_4] + \frac{C}{k_m} := \frac{1}{k_m} \frac{\phi_4}{|s_{4d}|} + \frac{C}{k_m} \tag{3.46}$$

La función a obtener el máximo

$$f_4 := \frac{x_2 \frac{\partial V_4}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial V_4}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial V_4}{\partial x_3}}{|s_{4d}|} \tag{3.47}$$

Como la función es homogénea de grado cero, obtendremos un rayo de máximos con la siguiente forma:
con $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

$$max\,[f_4] = \frac{\partial \phi_4}{\partial x_4} - \frac{\frac{\partial \phi_4}{\partial x_3}}{\frac{\partial s_{4d}}{\partial x_3}} \frac{\partial s_{4d}}{\partial x_4} = 0 \tag{3.48}$$

3.5. Para grado relativo 5

Sea el sitema 3.49 afin a la entrada, de grado relativo 4 ,

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.49a}$$
$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{3.49b}$$
$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{3.49c}$$
$$\dot{x}_4 = x_5 \tag{3.49d}$$
$$\dot{x}_5 = u \tag{3.49e}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &\in [-C, C] + [k_m, k_M]u \end{aligned} \tag{3.50}$$

Con el algoritmo de control discontinuo anidado

$$u = -k_5 \lceil \sigma_5 \rfloor^0 \tag{3.51}$$

$$V_5 = \gamma_4 V_4 + W_5 \tag{3.52}$$

3.6. Implementacion en Matlab

Capítulo 4

Conclusions

Bibliografía

[1] Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory.* Springer Science & Business Media. 3

[2] Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., and Polyakov, A. (2014). On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1866–1901. 3

[3] Cruz-Zavala, E. and Moreno, J. A. (2017). Homogeneous high order sliding mode design: A lyapunov approach. *Automatica*, 80:232–238. 4