1 TOPSIS

Основная цель метода TOPSIS достигается сбором оценок соответствия альтернатив заданным критериям в матрицу и дальнейшими действиями над ней. Поэтому для вычислений требуется матрица оценок $X = (x_{ij})$, которая заполняется значениями, выражающими степень соответствия каждой альтернативы каждому критерию.

Также необходим вектор $W = (w_1, ..., w_n)$, который представляет собой значения весов критериев, то есть значимости этих критериев.

1. Вычисления с четкими оценками

1.1 Нормализация чисел в матрице

Для удобства дальнейших вычислений, необходимо нормализовать все значения в матрице. Также для корректности вычислений необходимо нормализовать и веса критериев, чтобы их сумма была равна 1 (случай чисел).

Числа в матрице нормализуются одним из следующих способов [1]:

$$n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}} \quad \text{или} \quad n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max\, x_{ij}} \tag{1}$$

где n_{ij} - число на (i, j) позиции в нормализованной матрице, x_{ij} - число в исходной матрице, представляющее оценку соответствия i-ой альтернативы j-ому критерию, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Веса, заданные в виде чисел, нормализуются следующим образом:

$$w_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j} \tag{2}$$

где y_j - заданное значение веса для j-ого критерия, $j = \overline{1, n}$.

Следует отметить, что веса также могут быть заданы в виде интервала значений. В таком случае они нормализуются одним из следующих способов [2]:

$$w_j = \left[\underline{w_j}, \overline{w_j}\right] = \left[\frac{\underline{y_j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\underline{y_j} + \overline{y_j}\right)}, \frac{\overline{y_j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\underline{y_j} + \overline{y_j}\right)}\right] \quad \text{или} \quad w_j = \left[\underline{w_j}, \overline{w_j}\right] = \left[\frac{\underline{y_j}}{\sum_{j=1}^{n} \overline{y_j}}, \frac{\overline{y_j}}{\sum_{j=1}^{n} \underline{y_j}}\right] \tag{3}$$

где $\underline{w_j}, \overline{w_j}$ - нижняя и верхняя границы интервала нормализованного значения веса j-ого критерия, $\underline{y_j}, \overline{y_j}$ - нижняя и верхняя граница интервала исходного значения веса j-ого критерия, $j = \overline{1, n}$.

1.2 Вычисление взвешенной матрицы

Теперь, когда значения в матрице и веса нормализованы, необходимо получить взвешенные значения, чтобы сравнивать альтернативы между собой, так как критерии часто могут быть не равны по значимости. Именно для этого и были необходимы веса критериев.

Значения взвешенной матрицы, при условии, что веса задаются числами, вычисляются следующим образом [1]:

$$v_{ij} = w_j \cdot n_{ij}$$

где v_{ij} - число во взвешенной матрице, n_{ij} и w_j вычисляются в соответствии с формулами (1) и (2), соответственно.

Если веса заданы в виде интервалов, то числа во взвешенной матрице вычисляются следующим способом:

$$v_{ij} = \frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot n_{ij}$$

где $\underline{w_j}, \overline{w_j}$ вычисляются по формуле (3).

1.3 Определение положительно-идеального и отрицательно-идеального решений

В методе TOPSIS альтернативы ранжируются на основе их сопоставления с идеальными решениями, поэтому их нужно определить, исходя из полученных значений взвешенной матрицы.

Положительно-идеальное решение определяется следующим образом [1]:

$$A^+ = (v_1^+, v_2^+, ...v_n^+) = \left\{ \left(\max v_{ij} \middle| j \in I \right), \left(\min v_{ij} \middle| j \in J \right) \right\} \tag{4}$$

Отрицательно-идеальное определяется следующим способом [1]:

$$A^- = (v_1^-, v_2^-, ...v_n^-) = \left\{ \left(\min v_{ij} \middle| j \in I \right), \left(\max v_{ij} \middle| j \in J \right) \right\} \tag{5}$$

где I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты, A^+, A^- - положительно-идеальное и отрицательно-идеальное решения, с оценками v_j^+ и v_j^-, соответственно, по j-ому критерию, $j = \overline{1, n}$.

1.4 Вычисление расстояний до идеальных решений

Когда определены идеальные решения, нужно их сопоставить с заданными альтернативами путем вычисления расстояний до них, которые являются показателем удаленности альтернатив друг от друга.

Расстояние до положительно-идеального решения для i-ой альтернативы вычисляется следующим образом [1]:

$$d_i^+ = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^+)^p}$$

Аналогично расстояние до отрицательно-идеального решения для i-ой альтернативы вычисляется следующим способом:

$$d_i^- = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}(v_{ij} - v_j^-)^p}$$

где v_j^-, v_j^+ - из формул (4) и (5), $p \geq 1$, $i = \overline{1,m}$.

В качестве значения p можно взять простые числа 2 и 3, как наиболее часто используемые на практике значения для данных вычислений.

Таким образом для вычисления расстояния до положительно-идеального решения имеем 2 способа:

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(v_{ij} - v_j^+)^2} \quad \text{или} \quad d_i^+ = \sqrt[3]{\sum_{j=1}^{n}(v_{ij} - v_j^+)^3} \tag{6}$$

Аналогично для расстояния до отрицательно-идеального решения:

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(v_{ij} - v_j^-)^2} \quad \text{или} \quad d_i^- = \sqrt[3]{\sum_{j=1}^{n}(v_{ij} - v_j^-)^3} \tag{7}$$

где $i = \overline{1,m}$.

1.5 Вычисление коэффициентов относительной близости к положительно идеальному решению

Теперь на основании вычисленных расстояний можно ранжировать заданные альтернативы по близости к положительно-идеальному и удаленности от отрицательно-идеального решения. Это и будет показателем того, насколько хороша альтернатива в контексте рассматриваемой проблемы.

Коэффициент относительной близости к положительно идеальному решению для i-ой альтернативы вычисляется следующим образом [1]:

$$R_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}$$

где d_i^+, d_i^- определяются по формулам (6) и (7), соответственно, R_i - коэффициент, который принимает значения в диапазоне от 0 до 1.

2. Вычисление с оценками в виде интервалов

Так как часто трудно дать четкую оценку соответствия альтернативы заданному критерию, то выходом из ситуации могут быть интервалы, в пределах которых ограничено данное значение. Все шаги метода TOPSIS с интервалами аналогичны пунктам 1.1-1.5, однако обладают своей спецификой вычислений.

2.1 Нормализация интервальных значений в матрице

Интервалы в матрице нормализуются одним из следующих способов [2]:

$$\underline{n_{ij}} = \frac{\underline{x_{ij}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\underline{x_{ij}}^2 + \overline{x_{ij}}^2)}}\ ,\ \overline{n_{ij}} = \frac{\overline{x_{ij}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\underline{x_{ij}}^2 + \overline{x_{ij}}^2)}}$$
$$\text{или}$$
$$\underline{n_{ij}} = \frac{\underline{x_{ij}}}{\max \overline{x_{ij}}}\ ,\ \overline{n_{ij}} = \frac{\overline{x_{ij}}}{\max \overline{x_{ij}}} \tag{8}$$

где $\underline{n_{ij}}, \overline{n_{ij}}$ - нижняя и верхняя границы интервала значения в нормализованной матрице, $\underline{x_{ij}}, \overline{x_{ij}}$ - нижняя и верхняя границы интервала значения в исходной матрице, представляющего оценку i-ой альтернативы j-ому критерию, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Нормализация весов представлена в пункте 1.1.

2.2 Вычисление взвешенной матрицы

Интервалы во взвешенной матрице, при условии, что веса задаются числами, вычисляются следующим образом [1]:

$$\underline{v_{ij}} = w_j \cdot \underline{n_{ij}}\ ,\ \overline{v_{ij}} = w_j \cdot \overline{n_{ij}} \tag{9}$$

где $\underline{v_{ij}}, \overline{v_{ij}}$ - нижняя и верхняя границы интервала значения во взвешенной матрице, $\underline{n_{ij}}, \overline{n_{ij}}$ получаются из формул (8).

Если веса заданы в виде интервалов, то числа во взвешенной матрице вычисляются следующим способом:

$$\underline{v_{ij}} = \frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot \underline{n_{ij}}\ ,\ \overline{v_{ij}} = \frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot \overline{n_{ij}} \tag{10}$$

где $\underline{v_{ij}}, \overline{v_{ij}}$ - нижняя и верхняя границы интервала значения во взвешенной матрице, $\underline{n_{ij}}, \overline{n_{ij}}$ - из формул (8), а $\underline{w_j}, \overline{w_j}$ получаются из формул (3).

2.3 Определение положительно-идеального и отрицательно-идеального решений

Положительно-идеальное решение определяется следующим образом [1]:

$$A^+ = (v_1^+, v_2^+, ...v_n^+) = \left\{ \left(\max \overline{v_{ij}} \middle| j \in I \right), \left(\min \underline{v_{ij}} \middle| j \in J \right) \right\}$$

Отрицательно-идеальное определяется следующим способом [1]:

$$A^- = (v_1^-, v_2^-, ... v_n^-) = \left\{ \left(\min \underline{v_{ij}} \middle| j \in I \right), \left(\max \overline{v_{ij}} \middle| j \in J \right) \right\}$$

где I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты, A^+, A^- - положительно-идеальное и отрицательно-идеальное решения, с оценками в виде чисел v_j^+ и v_j^-, соответственно, по j-ому критерию, $j = \overline{1, n}$.

2.4 Вычисление расстояний до идеальных решений

Аналогично пункту 1.4 расстояние до положительно-идеального решения для i-ой альтернативы вычисляется одним из следующих способов [1]:

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\underline{v_{ij}} - v_j^+)^2 + \sum_{j=1}^{n} (\overline{v_{ij}} - v_j^+)^2}$$

или

$$d_i^+ = \sqrt[3]{\sum_{j=1}^{n} (\underline{v_{ij}} - v_j^+)^3 + \sum_{j=1}^{n} (\overline{v_{ij}} - v_j^+)^3}$$

Также расстояние до отрицательно-идеального решения для i-ой альтернативы вычисляется одним из следующих способов:

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\underline{v_{ij}} - v_j^-)^2 + \sum_{j=1}^{n} (\overline{v_{ij}} - v_j^-)^2}$$

или

$$d_i^- = \sqrt[3]{\sum_{j=1}^{n} (\underline{v_{ij}} - v_j^-)^3 + \sum_{j=1}^{n} (\overline{v_{ij}} - v_j^-)^3}$$

где $\underline{v_{ij}}, \overline{v_{ij}}$ и v_j^-, v_j^+ определяются вычислениями, представленными в пунктах 2.2 и 2.3, соответственно, $i = \overline{1, m}$.

2.5 Вычисление коэффициентов относительной близости к положительно идеальному решению

Все необходимые детали представлены в пункте 1.5.

3. Вычисление с оценками в виде интервалов, с применением алгоритма А. Сенгупты

Алгоритм, предложенный Атану Сенгуптой (A. Sengupta) описывает ранжирование интервалов, что помогает избежать четких вычислений на шагах 2.4 и 2.5, которые приводят к потере информации о сомнениях, выражаемых формально в виде интервалов [3].

Таким образом можно задавать не четкие значения для расстояний до идеальных решений и коэффициентов относительной близости, а интервалы, а затем уже их ранжировать.

Поэтому шаги 3.1 - 3.2 аналогичны 2.1-2.2. Дальнейшие шаги описаны в [3].

3.3 Определение положительно-идеального и отрицательно-идеального решений

Положительно-идеальное решение теперь тоже состоит из интервальных значений и определяется следующим способом:

$$A_j^+ = \left[\underline{v_j^+}, \overline{v_j^+}\right]$$

где A_j^+ - оценка в виде интервала положительно-идеального решения по j-ому критерию, $\underline{v_j^+}, \overline{v_j^+}$ - нижняя и верхняя границы этого интервала.

$$\overline{A^+} = \left(\overline{v_1^+}, ...\overline{v_n^+}\right) = \left\{\left(\max \overline{v_{ij}}\middle| j \in I\right), \left(\min \underline{v_{ij}}\middle| j \in J\right)\right\}$$

$$\underline{A^+} = \left(\underline{v_1^+}, ...\underline{v_n^+}\right) = \left\{\left(\max_{i \neq k}\{\overline{v_{ij}}, \underline{v_{kj}}\}\middle| j \in I\right), \left(\min_{i \neq k}\{\underline{v_{ij}}, \overline{v_{kj}}\}\middle| j \in J\right)\right\}$$

где $\underline{A^+}, \overline{A^+}$ - множества нижних и верхних границ оценок положительно-иделаьного решения по всем критериям, k - номер альтернативы с лучшей оценкой по j-ому критерию, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

Отрицательно-идеальное решение определяется следующим образом:

$$A_j^- = \left[\underline{v_j^-}, \overline{v_j^-}\right]$$

где A_j^- - оценка в виде интервала отрицательно-идеального решения по j-ому критерию, $\underline{v_j^-}, \overline{v_j^-}$ - нижняя и верхняя границы этого интервала.

$$\underline{A^-} = \left(\underline{v_1^-}, ...\underline{v_n^-}\right) = \left\{\left(\min \underline{v_{ij}}\middle| j \in I\right), \left(\max \overline{v_{ij}}\middle| j \in J\right)\right\}$$

$$\overline{A^-} = \left(\overline{v_1^-}, ...\overline{v_n^-}\right) = \left\{\left(\min_{i \neq k}\{\underline{v_{ij}}, \overline{v_{kj}}\}\middle| j \in I\right), \left(\max_{i \neq k}\{\overline{v_{ij}}, \underline{v_{kj}}\}\middle| j \in J\right)\right\}$$

где $\underline{A^-}, \overline{A^-}$ - множества нижних и верхних границ оценок отрицательно-идеального решения по всем критериям, k - номер альтернативы с худшей оценкой по j-ому критерию, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

3.4 Вычисление расстояний до идеальных решений

Расстояние теперь должно задавать степень удаленности двух альтернатив, каждая из которых содержит интервальные значения в отличие от случая 2.4. Поэтому в данном случае расстояния до идеальных решений представлены не четкими значениями, а интервалами.

Расстояние до положительно-идеального решения для i-ой альтернативы вычисляется одним из следующих способов:

$$\underline{d_i^+} = \sqrt{\sum_{j\in J}\left(\underline{v_{ij}} - \underline{v_j^+}\right)^2 + \sum_{j\in I}\left(\overline{v_{ij}} - \underline{v_j^+}\right)^2}$$

$$\overline{d_i^+} = \sqrt{\sum_{j\in J}\left(\overline{v_{ij}} - \overline{v_j^+}\right)^2 + \sum_{j\in I}\left(\underline{v_{ij}} - \overline{v_j^+}\right)^2}$$

или

$$\underline{d_i^+} = \sqrt[3]{\sum_{j\in J}\left(\underline{v_{ij}} - \underline{v_j^+}\right)^3 + \sum_{j\in I}\left(\overline{v_{ij}} - \underline{v_j^+}\right)^3}$$

$$\overline{d_i^+} = \sqrt[3]{\sum_{j\in J}\left(\overline{v_{ij}} - \overline{v_j^+}\right)^3 + \sum_{j\in I}\left(\underline{v_{ij}} - \overline{v_j^+}\right)^3}$$

где $\underline{d_i^+}$ - расстояние между лучшими оценками[1] i-ой альтернативы и $\underline{A^+}$, а $\overline{d_i^+}$ - расстояние между худшими оценками[2] i-ой альтернативы и $\overline{A^+}$, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

Аналогично расстояние до отрицательно-идеального решения для i-ой альтернативы вычисляется одним из следующих способов:

$$\underline{d_i^-} = \sqrt{\sum_{j\in J}\left(\overline{v_{ij}} - \overline{v_j^-}\right)^2 + \sum_{j\in I}\left(\underline{v_{ij}} - \overline{v_j^-}\right)^2}$$

$$\overline{d_i^-} = \sqrt{\sum_{j\in J}\left(\underline{v_{ij}} - \underline{v_j^-}\right)^2 + \sum_{j\in I}\left(\overline{v_{ij}} - \underline{v_j^-}\right)^2}$$

или

$$\underline{d_i^-} = \sqrt[3]{\sum_{j\in J}\left(\overline{v_{ij}} - \overline{v_j^-}\right)^3 + \sum_{j\in I}\left(\underline{v_{ij}} - \overline{v_j^-}\right)^3}$$

$$\overline{d_i^-} = \sqrt[3]{\sum_{j\in J}\left(\underline{v_{ij}} - \underline{v_j^-}\right)^3 + \sum_{j\in I}\left(\overline{v_{ij}} - \underline{v_j^-}\right)^3}$$

где $\underline{d_i^-}$ - расстояние между худшими оценками[2] i-ой альтернативы и $\overline{A^-}$, а $\overline{d_i^-}$ - расстояние между лучшими оценками[1] i-ой альтернативы и $\underline{A^-}$, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

1 - Лучшими оценками альтернативы является множество верхних границ интервалов оценок по критериям, описывающим преимущества, и нижних границ интервалов оценок по критериям, описывающим затраты.

2 - Худшими оценками альтернативы является множество нижних границ интервалов оценок по критериям, описывающим преимущества, и верхних границ интервалов оценок по критериям, описывающим затраты.

3.5 Вычисление коэффициентов относительной близости к положительно идеальному решению

Учитывая, что расстояния до идеальных решений теперь представлены интервалами, то и коэффициент относительной близости к положительному решению будет является интервалом, который вычисляется следующим образом:

$$R_i = [\underline{r_i}, \overline{r_i}] = \left[\frac{\underline{d_i^-}}{\overline{d_i^-} + \overline{d_i^+}}, \frac{\overline{d_i^-}}{\underline{d_i^-} + \underline{d_i^+}} \right]$$

где $\underline{d_i^-}, \overline{d_i^-}, \underline{d_i^+}, \overline{d_i^+}$ вычисляются так, как показано в пункте 3.4.

Далее эти интервалы ранжируются с помощью алгоритма А. Сенгупты [4]:

Пусть $m(E) = \frac{\underline{e}+\overline{e}}{2}$ - середина отрезка, а $w(E) = \frac{\underline{e}-\overline{e}}{2}$ - половина длины интервала. Тогда два интервала E и D ранжируются следующим путем:

1) Сравниваются $m(E)$ и $m(D)$, если они приблизительно равны, то переходим к следующему шагу, иначе: если $m(E) > m(D)$, то $E > D$ и наоборот, если $m(E) < m(D)$, то $E < D$.

2) Сравниваем $w(E)$ и $w(D)$, если они приблизительно равны, то считаем интервалы равными, иначе: если $w(E) > w(D)$, то $E < D$ и наоборот, если $w(E) < w(D)$, то $E > D$.

4. Вычисление с нечеткими множествами T1FS

Бывают ситуации когда и с помощью интервалов трудно дать оценку соответствия альтернативы, например, когда оценка наиболее близка к 5, но сохраняется возможность, что она окажется между 4 и 6. На помощь приходят нечеткие множества, которые можно задать не константной функцией принадлежности на некотором интервале.

В общем случае функция принадлежности может быть любой, но с целью упрощения вычислений и способа дать оценку соответствия альтернативы критерию определим, что нечеткие множества T1FS могут задаваться кусочно-линейными функциями, т. е. определяться 3-мя $[a, b, c]$ или 4-мя $[a, b, c, d]$ числами, которые обозначают вершины треугольника или трапеции, задающей функцию принадлежности [5].

4.1 Нормализация нечетких множеств в матрице

Нечеткие множества T1FS, у которых функция принадлежности задана 3-мя вершинами, нормализуются в матрице следующими способами [5]:

$$n_{ij} = [a_{ij}^n, b_{ij}^n, c_{ij}^n] = \left[\frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_{ij}^2 + c_{ij}^2)}}, \frac{b_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_{ij}^2 + c_{ij}^2)}}, \frac{c_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_{ij}^2 + c_{ij}^2)}} \right]$$

или

$$n_{ij} = \left[\frac{a_{ij}}{\max\ c_{ij}}, \frac{b_{ij}}{\max\ c_{ij}}, \frac{c_{ij}}{\max\ c_{ij}} \right], \text{ если } j \in I$$

$$n_{ij} = \left[\frac{\min\ a_{ij}}{c_{ij}}, \frac{\min\ a_{ij}}{b_{ij}}, \frac{\min\ a_{ij}}{a_{ij}} \right], \text{ если } j \in J \qquad (11)$$

где n_{ij} - нормализованное нечеткое множество, $a_{ij}^n, b_{ig}^n, c_{ij}^n$ - точки изгиба функции принадлежности нормализованного нечеткого множества, a_{ij}, b_{ig}, c_{ij} - точки изгиба функции принадлежности исходного нечеткого множества, представляющего оценку i-ой альтернативы по j-ому критерию, для $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

Если функция принадлежности нечеткого множества задана 4-мя вершинами (трапеция), то такие нечеткие множества нормализуются следующим образом:

$$n_{ij} = \left[\frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}^2 + d_{ij}^2)}}, \frac{b_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}^2 + d_{ij}^2)}}, \frac{c_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}^2 + d_{ij}^2)}}, \frac{d_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}^2 + d_{ij}^2)}}\right]$$

или

$$n_{ij} = \left[\frac{a_{ij}}{\max\ d_{ij}}, \frac{b_{ij}}{\max\ d_{ij}}, \frac{c_{ij}}{\max\ d_{ij}}, \frac{d_{ij}}{\max\ d_{ij}}\right], \text{ если } j \in I \qquad (12)$$

$$n_{ij} = \left[\frac{\min\ a_{ij}}{d_{ij}}, \frac{\min\ a_{ij}}{c_{ij}}, \frac{\min\ a_{ij}}{b_{ij}}, \frac{\min\ a_{ij}}{a_{ij}}\right], \text{ если } j \in J$$

где $a_{ij}^n, b_{ig}^n, c_{ij}^n, d_{ij}^n$ - точки изгиба функции принадлежности нормализованного нечеткого множества, $a_{ij}, b_{ig}, c_{ij}, d_{ij}$ - точки изгиба функции принадлежности исходного нечеткого множества, представляющего оценку i-ой альтернативы по j-ому критерию, для $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

4.2 Вычисление взвешенной матрицы

Если функция принадлежности нечетких множеств задана 3-мя числами (треугольник), то нечеткие множества T1FS взвешенной матрицы, при условии, что веса задаются числами, вычисляются следующим способом:

$$v_{ij} = \left[w_j \cdot a_{ij}^n, w_j \cdot b_{ij}^n, w_j \cdot c_{ij}^n\right] \qquad (13)$$

где $a_{ij}^n, b_{ig}^n, c_{ij}^n$ и w_j вычисляются в соответствии с формулами (11) и (2), соответственно.

Если веса заданы в виде интервалов, то нечеткие множества во взвешенной матрице вычисляются следующим образом:

$$v_{ij} = \left[\frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot a_{ij}, \frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot b_{ij}, \frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot c_{ij}\right] \qquad (14)$$

где $\underline{w_j}, \overline{w_j}$ вычисляются в соответствии с формулой (3).

Если функция принадлежности нечетких множеств задана 4-мя числами (трапеция), то нечеткие множества T1FS взвешенной матрицы, при условии, что веса задаются числами, вычисляются следующим способом:

$$v_{ij} = \left[w_j \cdot a_{ij}^n, w_j \cdot b_{ij}^n, w_j \cdot c_{ij}^n, w_j \cdot d_{ij}^n\right] \qquad (15)$$

где $a_{ij}^n, b_{ij}^n, c_{ij}^n, d_{ij}^n$ и w_j вычисляются в соответствии с формулами (12) и (2), соответственно.

Если веса заданы в виде интервалов, то нечеткие множества во взвешенной матрице вычисляются следующим образом:

$$v_{ij} = \left[\frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot a_{ij}, \frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot b_{ij}, \frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot c_{ij}, \frac{\underline{w_j} + \overline{w_j}}{2} \cdot d_{ij} \right] \tag{16}$$

где $\underline{w_j}, \overline{w_j}$ вычисляются в соответствии с формулой (3).

4.3 Определение положительно-идеального и отрицательно-идеального решений

В данном случае идеальные решения будут состоять также, как и заданные альтернативы, из оценок соответствия в виде нечетких множеств.

Если функция принадлежности нечетких множеств задана 3-мя числами (треугольник), то положительно-идеальное решение определяется следующим образом:

$$A^{+} = (v_1^{+}, ...v_n^{+}) = \left(\left[a_1^{+}, b_1^{+}, c_1^{+} \right], ..., \left[a_n^{+}, b_n^{+}, c_n^{+} \right] \right) \tag{17}$$

где $a_j^{+} = \left\{ \left(\max\, a_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\min\, a_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\}, b_j^{+} = \left\{ \left(\max\, b_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\min\, b_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\},$ $c_j^{+} = \left\{ \left(\max\, c_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\min\, c_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\}$, $a_{ij}^{v}, b_{ij}^{v}, c_{ij}^{v}$ - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества во взвешенной матрице, представляющего оценку соответствия i-ой альтернативы j-ому критерию, для $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

Отрицательно-идеальное определяется следующим способом:

$$A^{-} = (v_1^{-}, ...v_n^{-}) = \left(\left[a_1^{-}, b_1^{-}, c_1^{-} \right], ..., \left[a_n^{-}, b_n^{-}, c_n^{-} \right] \right) \tag{18}$$

где $a_j^{-} = \left\{ \left(\min\, a_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\max\, a_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\}, b_j^{-} = \left\{ \left(\min\, b_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\max\, b_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\},$ $c_j^{-} = \left\{ \left(\min\, c_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\max\, c_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\}$, $a_{ij}^{v}, b_{ij}^{v}, c_{ij}^{v}$ - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества во взвешенной матрице, представляющего оценку соответствия i-ой альтернативы j-ому критерию, для $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

Если функция принадлежности нечетких множеств задана 4-мя числами (трапеция), то положительно-идеальное решение определяется следующим образом:

$$A^{+} = (v_1^{+}, ...v_n^{+}) = \left(\left[a_1^{+}, b_1^{+}, c_1^{+}, d_1^{+} \right], ..., \left[a_n^{+}, b_n^{+}, c_n^{+}, d_n^{+} \right] \right) \tag{19}$$

где $a_j^{+} = \left\{ \left(\max\, a_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\min\, a_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\}, b_j^{+} = \left\{ \left(\max\, b_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\min\, b_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\},$ $c_j^{+} = \left\{ \left(\max\, c_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\min\, c_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\}$, $d_j^{+} = \left\{ \left(\max\, d_{ij}^{v} \middle| j \in I \right), \left(\min\, d_{ij}^{v} \middle| j \in J \right) \right\}$,

$a_{ij}^v, b_{ij}^v, c_{ij}^v, d_{ij}^v$ - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества во взвешенной матрице, представляющего оценку соответствия i-ой альтернативы j-ому критерию, для $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$.

Отрицательно-идеальное решение определяется следующим способом:

$$A^- = (v_1^-, ...v_n^-) = \left(\left[a_1^-, b_1^-, c_1^-, d_1^-\right], ..., \left[a_n^-, b_n^-, c_n^-, d_n^-\right]\right) \tag{20}$$

где $a_j^- = \left\{\left(\min a_{ij}^v \middle| j \in I\right), \left(\max a_{ij}^v \middle| j \in J\right)\right\}$, $b_j^- = \left\{\left(\min b_{ij}^v \middle| j \in I\right), \left(\max b_{ij}^v \middle| j \in J\right)\right\}$, $c_j^- = \left\{\left(\min c_{ij}^v \middle| j \in I\right), \left(\max c_{ij}^v \middle| j \in J\right)\right\}$, $d_j^- = \left\{\left(\min d_{ij}^v \middle| j \in I\right), \left(\max d_{ij}^v \middle| j \in J\right)\right\}$, $a_{ij}^v, b_{ij}^v, c_{ij}^v, d_{ij}^v$ - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества во взвешенной матрице, представляющего оценку соответствия i-ой альтернативы j-ому критерию, для $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

4.4.1 Вычисление расстояний до идеальных решений с использованием α-срезов

Для реализации дальнейших шагов отметим, что оценки идеальных решений A^+ и A^-, а также значения во взвешенной матрице, являются нечеткими множествами. Чтобы определить расстояния между нечеткими множествами типа T1FS преобразуем их к обычным интервалам, что позволит применить уже известные операции над интервалами для дальнейших вычислений.

Определим преобразование нечеткого множества T1FS в обычный интервал (см. пункт 7.4).

Теперь опираясь на вышеуказанные вычисления, преобразуем нечеткие множества A_j^+, A_j^- и v_{ij}, для $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$, в обычные интервалы и выполним шаг 3.4. или 2.4, дополнительно преобразуя A_j^+ и A_j^- в числа, как показано в пункте 7.5.

4.4.2 Вычисление расстояний до идеальных решений без использования α-срезов

Так как использование α-срезов и преобразование T1FS в обычный интервал может иметь большие погрешности и быть неинтуитивным, имеет смысл рассмотреть еще один вариант вычислений расстояний, который обходится без преобразований и использует такой же принцип, как и описанный в пунктах 1.4 и 2.4, но адаптированный для нечетких множеств. Данный подход описан в [5].

Если функция принадлежности нечетких множеств задается 3-мя числами (треугольник), то расстояние до положительно-идеального решения находится одним из следующих способов:

$$d_i^+ = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^+ - a_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^+ - b_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^+ - c_{ij}^v)^2\right)}$$

или

$$d_i^+ = \sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^+ - a_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^+ - b_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^+ - c_{ij}^v)^3\right)}$$

где a_j^+, b_j^+, c_j^+ определены в формуле (17). Расстояние до отрицательно-идеального решения находится одним из следующих способов:

$$d_i^- = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^- - a_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^- - b_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^- - c_{ij}^v)^2\right)}$$

или

$$d_i^- = \sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^- - a_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^- - b_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^- - c_{ij}^v)^3\right)}$$

где a_j^-, b_j^-, c_j^- определены в формуле (18), $a_{ij}^v, b_{ij}^v, c_{ij}^v$ - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества во взвешенной матрице, представляющего оценку соответствия i-ой альтернативы j-ому критерию, для $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$.

Если функция принадлежности нечетких множеств задается 4-мя числами (трапеция), то расстояние до положительно-идеального решения находится одним из следующих способов:

$$d_i^+ = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^+ - a_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^+ - b_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^+ - c_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(d_j^+ - d_{ij}^v)^2\right)}$$

или

$$d_i^+ = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^+ - a_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^+ - b_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^+ - c_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(d_j^+ - d_{ij}^v)^3\right)}$$

где $a_j^+, b_j^+, c_j^+, d_j^+$ определены в формуле (19). Расстояние до отрицательно-идеального решения находится одним из следующих способов:

$$d_i^- = \sqrt{\frac{1}{4}\left((a_j^- - a_{ij}^v)^2 + (b_j^- - b_{ij}^v)^2 + (c_j^- - c_{ij}^v)^2 + (d_j^- - d_{ij}^v)^2\right)}$$

или

$$d_i^- = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left((a_j^- - a_{ij}^v)^3 + (b_j^- - b_{ij}^v)^3 + (c_j^- - c_{ij}^v)^3 + (d_j^- - d_{ij}^v)^3\right)}$$

где $a_j^-, b_j^-, c_j^-, d_j^-$ определены в формуле (20), $a_{ij}^v, b_{ij}^v, c_{ij}^v, d_{ij}^v$ - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества во взвешенной матрице, представляющего оценку соответствия i-ой альтернативы j-ому критерию, для $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$.

4.5 Вычисление коэффициентов относительной близости к положительно-идеальному решению

Если предыдущий шаг был выполнен с помощью вычислений, описанных в пунктах 4.4.1 и 2.4 или 4.4.2, то вычисление коэффициентов идентично пункту 1.5, так как все расстояния до идеальных решений, представлены обычными числами.

Если предыдущий шаг был выполнен с помощью вычислений, описанных в пунктах 4.4.1 и 3.4, то вычисление коэффициентов идентично пункту 3.5, так как все расстояния до идеальных решений, представлены интервалами.

5. Вычисление с нечеткими множествами AIFS

Нечеткие множества T1FS являются частным случаем интуиционистских нечетких множеств (или, нечетких множеств К. Атанасова, AIFS), которые описывают более общую структуру нечетких множеств. Нечеткие множества AIFS характеризуются не только функцией принадлежности, но и функцией непринадлежности, причем [8]:

$$v(x) + \mu(x) \leq 1 \ \forall x \in U$$

где $v(x)$ - функция принадлежности, а $\mu(x)$ - функция непринадлежности, U - область определения функций. Причем функция:

$$\pi(x) = 1 - v(x) - \mu(x)$$

характеризует сомнение в точной оценки нечеткого множества [8].

Таким образом, T1FS являются частным случаем AIFS с функцией соменения $\pi(x) = 0$ $\forall x \in U$.

В общем случае, функции $v(x)$, $\mu(x)$ и $\pi(x)$ могут быть произвольными в каждой точке, однако, с целью упрощения вычислений и способа дать оценку соответствия альтернативы критерию, определим, что нечеткое множество AIFS задается следующим образом:

$$f = [a, b, c, \pi]$$

или

$$f = [a, b, c, d, \pi]$$

где a, b, c, d - точки изгиба функции принадлежности $v(x)$ в виде треугольника или трапеции, π - константное значение фунции сомнения, причем $0 \leq \pi < 1$.

То есть, функция сомнения принимает константное значение на всем нечетком множестве, и тогда функция непринадлежности однозначно определяется как: $\mu(x) = 1 - v(x) - \pi$.

Дальнейшие шаги алгоритма рассмотрим только для нечетких множеств AIFS с функцией принадлежности в виде треугольника (для трапеции всё будет выглядеть аналогично).

5.1 Нормализация нечетких множеств AIFS в матрице

Нечеткие множества AIFS нормализуются подобно нечетким множествам T1FS. Единственное, что не нормализуется, это коэффициент сомнения π. Вершины же функции принадлежности нормализуются согласно формулам (11) и (12) пункта 4.1.

5.2 Вычисление взвешенной матрицы

Вычисление взвешенных нечетких множеств AIFS аналогично вычислению взвешенных нечетких множеств T1FS. Единственное, что не умножается на вес критерия, это коэффициент сомнения π. Вершины же функции принадлежности умножаются на вес критерия согласно формулам (13), (14), (15) и (16) пункта 4.2.

5.3 Определение положительно-идеального и отрицательно идеального решений

Положительно и отрицательно идеальные решения в данном случае представляют собой набор нечетких множеств AIFS.

Положительно-идеальное решение определяется следующим образом:

$$A^{+} = (v_1^{+}, ...v_n^{+}) = \left(\left[a_1^{+}, b_1^{+}, c_1^{+}, \pi_1^{+}\right], ..., \left[a_n^{+}, b_n^{+}, c_n^{+}, \pi_n^{+}\right]\right) \tag{21}$$

где a_j^{+}, b_j^{+}, c_j^{+} - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества, определяемые по формуле (17) пункта 4.3, $\pi_j^{+} = \left\{\left(\min \pi_{ij}\middle| j \in I\right), \left(\max \pi_{ij}\middle| j \in J\right)\right\}$.

Отрицательно-идеальное определяется следующим способом:

$$A^{-} = (v_1^{-}, ...v_n^{-}) = \left(\left[a_1^{-}, b_1^{-}, c_1^{-}, \pi_1^{-}\right], ..., \left[a_n^{-}, b_n^{-}, c_n^{-}, \pi_n^{-}\right]\right) \tag{22}$$

где a_j^{-}, b_j^{-}, c_j^{-} - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества, определяемые по формуле (18) пункта 4.3, $\pi_j^{-} = \left\{\left(\max \pi_{ij}\middle| j \in I\right), \left(\min \pi_{ij}\middle| j \in J\right)\right\}$.

5.4.1 Вычисление расстояний до идеальных решений с использованием α-срезов

Для реализации дальнейших шагов отметим, что оценки идеальных решений A^{+} и A^{-}, а также значения во взвешенной матрице являются нечеткими множествами AIFS. Чтобы определить расстояния между нечеткими множествами AIFS, аналогично пункту 4.4.1, преобразуем их к обычным интервалам.

Определим преобразование нечеткого множества AIFS в обычный интервал (см. пункт 7.7).

Теперь опираясь на вышеуказанные вычисления, преобразуем нечеткие множества A_j^{+}, A_j^{-} и v_{ij}, для $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$, в обычные интервалы и выполним шаг 3.4. или 2.4, дополнительно преобразуя A_j^{+} и A_j^{-} в числа, как показано в пункте 7.5.

5.4.2 Вычисление расстояний до идеальных решений без использования α-срезов

Аналогично пункту 4.4.2 определим вычисление расстояний до идеальных решений без использования α-срезов.

Расстояние до положительно-идеального решения находится одним из следующих способов:

$$d_i^+ = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^+ - a_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^+ - b_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^+ - c_{ij}^v)^2 + \frac{1}{100}\sum_{j=1}^{n}(\pi_j^+ - \pi_{ij}^v)^2\right)}$$

или

$$d_i^+ = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^+ - a_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^+ - b_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^+ - c_{ij}^v)^3 + \frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{n}(\pi_j^+ - \pi_{ij}^v)^3\right)}$$

где $a_j^+, b_j^+, c_j^+, \pi_j^+$ определены в формуле (21).

Расстояние до отрицательно-идеального решения находится одним из следующих способов:

$$d_i^- = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^- - a_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^- - b_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^- - c_{ij}^v)^2 + \frac{1}{100}\sum_{j=1}^{n}(\pi_j^- - \pi_{ij}^v)^2\right)}$$

или

$$d_i^- = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^- - a_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(b_j^- - b_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}(c_j^- - c_{ij}^v)^3 + \frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{n}(\pi_j^- - \pi_{ij}^v)^3\right)}$$

где $a_j^-, b_j^-, c_j^-, \pi_j^-$ определены в формуле (22).

5.5 Вычисление коэффициентов относительной близости к положительно-идеальному решению

На данном этапе ситуация аналогична пункту 4.4, так что можно воспользоваться шагами приведенными в этом пункте для вычисления коэффициентов относительной близости к положительно-идеальному решению.

6. Вычисление с нечеткими множествами IT2FS

Существует и более сложные по структуре типы нечетких множеств, одним из которых является IT2FS или интервальные нечеткие множества 2-го типа. Они отличаются от T1FS тем, что функцию принадлежности можно задать не одной функцией, четко определяющей принадлежность каждого аргумента множеству, а двумя функциями, которые ограничивают интервал значения принадлежности аргумента к данному нечеткому множеству.

Также как и в случае с T1FS, для упрощения вычислений и способа дать оценку соответсвия альтернативы критерию, определим, что нечеткие множества IT2FS могут задаваться следующим образом:

$$t = [[\underline{a}, \overline{a}], b, [\underline{c}, \overline{c}]]$$

или

$$t = \left[[\underline{a}, \overline{a}], b, c, [\underline{d}, \overline{d}]\right]$$

где числа задают точки изгиба функции принадлежности, а интервалы - границы функции принадлежности.

Дальнейшие шаги алгоритма аналогичны шагам, приведенным в пунктах 4.1 - 4.5. Однако, распишем некоторые отличия в вычислениях в случае с треугольной формой функции принадлежности (для трапеции формулы будут аналогичны).

6.1 Нормализация нечетких множеств IT2FS в матрице

Нечеткие множества IT2FS нормализуются одним из следующих способов:

$$n_{ij} = \left[\left[\underline{a^n_{ij}}, \overline{a^n_{ij}}\right], b^n_{ij}, \left[\underline{c^n_{ij}}, \overline{c^n_{ij}}\right]\right] = \left[\left[\frac{\underline{a_{ij}}}{k}, \frac{\overline{a_{ij}}}{k}\right], \frac{b_{ij}}{k}, \left[\frac{\underline{c_{ij}}}{k}, \frac{\overline{c_{ij}}}{k}\right]\right]$$

или

$$n_{ij} = \left[\left[\frac{\underline{a_{ij}}}{\max\ \overline{c_{ij}}}, \frac{\overline{a_{ij}}}{\max\ \overline{c_{ij}}}\right], \frac{b_{ij}}{\max\ \overline{c_{ij}}}, \left[\frac{\underline{c_{ij}}}{\max\ \overline{c_{ij}}}, \frac{\overline{c_{ij}}}{\max\ \overline{c_{ij}}}\right]\right] \text{ если } j \in I \tag{22}$$

$$n_{ij} = \left[\left[\frac{\min\ \underline{a_{ij}}}{\overline{c_{ij}}}, \frac{\min\ \underline{a_{ij}}}{\underline{c_{ij}}}\right], \frac{\min\ \underline{a_{ij}}}{b_{ij}}, \left[\frac{\min\ \underline{a_{ij}}}{\overline{a_{ij}}}, \frac{\min\ \underline{a_{ij}}}{\underline{a_{ij}}}\right]\right] \text{ если } j \in J$$

где $k = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\underline{a_{ij}}^2 + \overline{c_{ij}}^2)}$, $\left[\underline{a^n_{ij}}, \overline{a^n_{ij}}\right], b^n_{ij}, \left[\underline{c^n_{ij}}, \overline{c^n_{ij}}\right]$ - границы и вершины нормализованного нечеткого множества, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

6.2 Вычисление взвешенной матрицы

Нечеткие множества во взвешенной матрице вычисляются аналогично пункту 4.2 простым перемножением всех чисел, задающих нечеткое множество IT2FS, на значение веса критерия.

6.3 Определение положительно-идеального и отрицтельно-идеального решений

В данном случае идеальные решения будут состоять из нечетких множеств T1FS, которые вычисляются следующим образом:

$$A^+ = (v_1^+, ...v_n^+) = \left(\left[a_1^+, b_1^+, c_1^+\right], ..., \left[a_n^+, b_n^+, c_n^+\right]\right) \tag{23}$$

где $a_j^+ = \left\{\left(\max\ \overline{a^v_{ij}}\middle| j \in I\right), \left(\min\ \underline{a^v_{ij}}\middle| j \in J\right)\right\}$, $b_j^+ = \left\{\left(\max\ b^v_{ij}\middle| j \in I\right), \left(\min\ b^v_{ij}\middle| j \in J\right)\right\}$, $c_j^+ = \left\{\left(\max\ \overline{c^v_{ij}}\middle| j \in I\right), \left(\min\ \underline{c^v_{ij}}\middle| j \in J\right)\right\}$, $\left[\underline{a^v_{ij}}, \overline{a^v_{ij}}\right], b^v_{ij}, \left[\underline{c^v_{ij}}, \overline{c^v_{ij}}\right]$ - вершины и пределы функции принадлежности нечеткого множества IT2FS во взвешенной матрице, представляющего оценку соответствия i-ой альтернативы j-ому критерию, для $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$,

I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

Отрицательно-идеальное определяется следующим способом:

$$A^- = (v_1^-, ...v_n^-) = \left(\left[a_1^-, b_1^-, c_1^-\right], ..., \left[a_n^-, b_n^-, c_n^-\right]\right) \tag{24}$$

где $a_j^- = \left\{ \left(\min \underline{a_{ij}^v} \middle| j \in I \right), \left(\max \overline{a_{ij}^v} \middle| j \in J \right) \right\}$, $b_j^- = \left\{ \left(\min b_{ij}^v \middle| j \in I \right), \left(\max b_{ij}^v \middle| j \in J \right) \right\}$, $c_j^- = \left\{ \left(\min \underline{c_{ij}^v} \middle| j \in I \right), \left(\max \overline{c_{ij}^v} \middle| j \in J \right) \right\}$, $\left[\underline{a_{ij}^v}, \overline{a_{ij}^v}\right], b_{ij}^v, \left[\underline{c_{ij}^v}, \overline{c_{ij}^v}\right]$ - вершины и пределы функции принадлежности нечеткого множества IT2FS во взвешенной матрице, представляющего оценку соответствия i-ой альтернативы j-ому критерию, для $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$, I - множество критериев, описывающих преимущества, а J - множество критериев, описывающих затраты.

6.4.1 Вычисление расстояний до идеальных решений с использованием α-срезов

Данный шаг аналогичен шагу 4.4.1, однако, теперь во взвешенной матрице у нас оценки заданы не с помощью нечеткого множества T1FS, а IT2FS. Поэтому, чтобы преобразовать оценки в интервалы, воспользуемся преобразованием IT2FS в интервал с помощью α-срезов, описанным в пункте 7.8. Нечеткие множества T1FS, заданные в положительно и отрицательно идеальных решениях, перобразуются в интервал согласно пункту 7.4. В итоге мы получаем ситуацию, идентичную пункту 4.4.1 - все оценки заданы интервалами, и теперь можно воспользоваться пунктами 2.4 или 3.4 для вычисления расстояний альтернатив до идеальных решений.

6.4.2 Вычисление расстояний до идеальных решений без использования α-срезов

Аналогично с T1FS, определим второй способ подсчета расстояний без использования α-срезов.

Расстояния до положительно-идеального решения находим одним из следующих способов:

$$d_i^+ = \sqrt{\frac{1}{5}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a^+ - \underline{a_{ij}^v}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}(a^+ - \overline{a_{ij}^v})^2 + \sum_{j=1}^{n}(b^+ - b_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(c^+ - \underline{c_{ij}^v}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}(c^+ - \overline{c_{ij}^v})^2\right)}$$

или

$$d_i^+ = \sqrt[3]{\frac{1}{5}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a^+ - \underline{a_{ij}^v}\right)^3 + \sum_{j=1}^{n}(a^+ - \overline{a_{ij}^v})^3 + \sum_{j=1}^{n}(b^+ - b_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}\left(c^+ - \underline{c_{ij}^v}\right)^3 + \sum_{j=1}^{n}(c^+ - \overline{c_{ij}^v})^3\right)}$$

где a^+, b^+, c^+ определены в формуле (23).

Расстояния до отрицательно-идеального решения находим одним из следующих способов:

$$d_i^- = \sqrt{\frac{1}{5}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a^- - \underline{a_{ij}^v}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}(a^- - \overline{a_{ij}^v})^2 + \sum_{j=1}^{n}(b^- - b_{ij}^v)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(c^- - \underline{c_{ij}^v}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}(c^- - \overline{c_{ij}^v})^2\right)}$$

или

$$d_i^- = \sqrt[3]{\frac{1}{5}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a^- - \underline{a_{ij}^v}\right)^3 + \sum_{j=1}^{n}(a^- - \overline{a_{ij}^v})^3 + \sum_{j=1}^{n}(b^- - b_{ij}^v)^3 + \sum_{j=1}^{n}\left(c^- - \underline{c_{ij}^v}\right)^3 + \sum_{j=1}^{n}(c^- - \overline{c_{ij}^v})^3\right)}$$

где a^-, b^-, c^- определены в формуле (24).

6.5 Вычисление коэффициентов относительной близости к положительно-идеальному решению

Так как состояние на данном этапе идентично состоянию на шаге 4.5, то для вычисления коэффициентов относительной близости можно воспользоваться теми же инструкциями, что и в пункте 4.5.

7. Представление типов

В случае, если оценки в матрице заданы разными типами, то все оценки перед началом вычислений приводятся к старшему типу в матрице, согласно данному ранжированию (от младшего к старшему): Числа → Интервалы → T1FS → AIFS → IT2FS.

7.1 Из числа в интервал

Число x представляется в виде интервала i следующим путем:

$$i = [\underline{i}, \overline{i}] = [x, x]$$

7.2 Из числа в T1FS

Число x представляется в виде нечеткого множества типа T1FS t следующим путем:

$$t = [a, b, c] = [x, x, x]$$

или

$$t = [a, b, c, d] = [x, x, x, x]$$

7.3 Из интервала в T1FS

Интервал $i = [\underline{i}, \overline{i}]$ представляется в виде нечеткого множества типа T1FS t следующим путем:

$$t = [a, b, c, d] = [\underline{i}, \underline{i}, \overline{i}, \overline{i}]$$

7.4 Из T1FS в интервал

Определим преобразование нечетких множеств T1FS в обычные интервалы. Сделаем это при помощи α-срезов.

α-срез - это прямая вида $y = \alpha$, параллельная оси X и пересекающая нечеткое множество в некоторых точках.

Возьмем количество α-срезов, равным n. Обозначим точки пересечения функции принадлежности и α-среза как s и f. Нетрудно вычислить, что для функции принадлежности в виде треугольника имеем:

$$s = a + \alpha \cdot (b - a)\ ,\ f = c - \alpha \cdot (c - b)$$

где a, b, c - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества.

Если функция принадлежности задается трапецией, тогда:

$$s = a + \alpha \cdot (b - a)\ ,\ f = d - \alpha \cdot (d - c)$$

где a, b, c, d - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества.

В результате, интервал, полученный из нечеткого множества, вычисляется следующим образом:

$$i = \left[\underline{i}, \overline{i}\right] = \left[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \cdot s_i), \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \cdot f_i)\right]$$

где α_i - значения i-ого α-среза, s_i, f_i - точки пересечения i-ого α-среза и функции принадлежности.

7.5 Из интервала в число

Интервал $i = \left[\underline{i}, \overline{i}\right]$ преобразуется в число x следующим образом:

$$x = \frac{\underline{i} + \overline{i}}{2}$$

7.6 Из T1FS в T1FS

Если нечеткое множество T1FS имеет функцию принадлежности в виде треугольника, то его можно представить как нечеткое множество T1FS с функцией принадлежности в виде трапеции следующим образом:

$$t_1 = [a, b, c] \rightarrow t_2 = [a, b, b, c]$$

7.7 Из AIFS в интервал

Определим преобразование нечетких множеств AIFS в обычные интервалы. Сделаем это при помощи α-срезов. Возьмем количество α-срезов, равным n. Обозначим точки пересечения функции принадлежности и α-среза как s и f. Нетрудно вычислить, что для функции принадлежности в виде треугольника имеем:

$$s = a + \frac{\alpha}{1 - \pi} \cdot (b - a)\ ,\ f = c - \frac{\alpha}{1 - \pi} \cdot (c - b)\ \forall \alpha \leq 1 - \pi$$

где a, b, c - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества, π - коэффициент сомнения.

Если функция принадлежности задается трапецией, тогда:

$$s = a + \frac{\alpha}{1-\pi} \cdot (b-a)\ ,\ f = d - \frac{\alpha}{1-\pi} \cdot (d-c)\ \forall \alpha \leq 1-\pi$$

где a, b, c, d - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества, π - коэффициент сомнения.

$$\forall \alpha > 1-\pi :\ s = f = 0$$

Тогда интервал, полученный из нечеткого множества, вычисляется следующим образом:

$$i = [\underline{i}, \overline{i}] = \left[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \cdot s_i), \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \cdot f_i)\right]$$

где α_i - значения i-ого α-среза, s_i, f_i - точки пересечения i-ого α-среза и функции принадлежности.

7.8 Из IT2FS в интервал

Определим преобразование нечетких множеств IT2FS в обычные интервалы. Сделаем это при помощи α-срезов. Возьмем количество α-срезов, равным n. Обозначим точки пересечения функции принадлежности и α-среза как $[\underline{s}, \overline{s}]$ и $\left[\underline{f}, \overline{f}\right]$. Нетрудно вычислить, что для функции принадлежности в виде треугольника имеем:

$$\underline{s} = \underline{a} + \alpha \cdot (b - \underline{a})\ ,\ \overline{s} = \overline{a} + \alpha \cdot (b - \overline{a})$$

$$\underline{f} = \underline{c} - \alpha \cdot (\underline{c} - b)\ ,\ \overline{f} = \overline{c} - \alpha \cdot (\overline{c} - b)$$

где a, b, c - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества.

Если функция принадлежности задается трапецией, тогда:

$$\underline{s} = \underline{a} + \alpha \cdot (b - \underline{a})\ ,\ \overline{s} = \overline{a} + \alpha \cdot (b - \overline{a})$$

$$\underline{f} = \underline{d} - \alpha \cdot (\underline{d} - c)\ ,\ \overline{f} = \overline{d} - \alpha \cdot (\overline{d} - c)$$

где a, b, c, d - точки изгиба функции принадлежности нечеткого множества.

Тогда интервал, полученный из нечеткого множества IT2FS, вычисляется следующим образом:

$$i = [\underline{i}, \overline{i}] = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \cdot \frac{\underline{s_i} + \overline{s_i}}{2}\right), \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \cdot \frac{\underline{f_i} + \overline{f_i}}{2}\right)\right]$$

где α_i - значения i-ого α-среза, $\underline{s_i}, \overline{s_i}, \underline{f_i}, \overline{f_i}$ - точки пересечения i-ого α-среза и функции принадлежности.

7.9 Из T1FS в IT2FS

Нечеткое множество T1FS представляется в виде нечеткого множества AIFS следующим преобразованием:

$$t_{T1FS} = [a, b, c] \Rightarrow t_{AIFS} = t_{T1FS} = [a, b, c, \pi = 0]$$

7.10 Из T1FS в IT2FS

Нечеткое множество T1FS представляется в виде нечеткого множества IT2FS следующим преобразованием:

$$t_{T1FS} = [a, b, c] \Rightarrow t_{IT2FS} = t_{T1FS} = [[a, a], b, [c, c]]$$

7.11 Из AIFS в IT2FS

Нечеткое множество AIFS представляется в виде нечеткого множества IT2FS следующим преобразованием:

$$f_{AIFS} = [a, b, c, \pi] \Rightarrow t_{IT2FS} = f_{AIFS} = [[a - \delta_1, a + \delta_1], b, [c - \delta_2, c + \delta_2]]$$

где $\delta_1 = \frac{\pi(b-a)}{2(1-\pi)}$, $\delta_2 = \frac{\pi(c-b)}{2(1-\pi)}$

8. Агрегация матриц

Оценки соответствия альтернатив и значения весов критериев могут задаваться несколькими людьми (экспертами). В таком случае необходимо агрегировать полученные от всех участников данные и объединить в единую оценку. Также у разных участников (экспертов), могут быть разные веса («значимости») их оценок, которые определяют вклад их данных в агрегированный результат.

Агрегировать оценки нескольких людей можно по-разному - два возможных способа описаны ниже. Перед началом вычислений все значения во всех матрицах участников (экспертов) приводятся к старшему типу, представленному среди их оценок.

8.1 Агрегация на первоначальном этапе

Если у нас есть k разных матриц с оценками соответствия $X^k = (x_{ij}^k)$, представленных разными людьми, у которых есть веса («значимости») $P = (p_1, ..., p_k)$, то можно агрегировать эти матрицы перед началом всех вычислений в одну, с которой будут проводиться дальнейшие вычисления, а именно:

$$X = (x_{ij}),\ x_{ij} = \sum_{t=1}^{k} p_t \cdot x_{ij}^t$$

или, если $p^t = \left[\underline{p^t}, \overline{p^t}\right]$ заданы в виде интервалов, то

$$X = (x_{ij}),\ x_{ij} = \sum_{t=1}^{k} \frac{\underline{p^t} + \overline{p^t}}{2} \cdot x_{ij}^t$$

где X - итоговая агрегированная матрица, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Аналогично вектора весов критериев $W^k = (w_1^k, ..., w_n^k)$, заданные разными людьми (экспертами), можно агрегировать следующим способом:

$$W = (w_1, ..., w_n),\ w_i = \sum_{t=1}^{k} = p_t \cdot w_i^t$$

или, если $p^t = \left[\underline{p^t}, \overline{p^t}\right]$ заданы в виде интервалов, то

$$W = (w_1, ..., w_n),\ w_i = \sum_{t=1}^{k} = \frac{\underline{p^t} + \overline{p^t}}{2} \cdot w_i^t$$

где W - итоговый вектор весов критериев, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Если оценки соответствия альтернатив или веса критериев заданы интервалами, то произведения на веса («значимости») оценок участников (экспертов) вычисляются в соответствии с формулами (9) и (10) из пункта 2.2. Сумму двух интервалов определим следующим образом:

$$[\underline{a}, \overline{a}] + \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \left[\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\right]$$

Если оценки соответствия альтернатив или веса критериев заданы нечеткими множествами, то произведения на веса («значимости») оценок участников (экспертов) вычисляются в соответствии с формулами (13-16) из пункта 4.2. Сумма двух нечетких множеств определим следующим образом:

$$[a_1, b_1, c_1] + [a_2, b_2, c_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2]$$

или

$$[a_1, b_1, c_1, d_1] + [a_2, b_2, c_2, d_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2]$$

8.2 Агрегация расстояний

Как описано в [7], агрегировать данные разных участников (экспертов) можно, посчитав взвешенную сумму вычисленных расстояний до идеальных решений из данных каждого участника (эксперта), которая вычисляется аналогично подходу из пункта 8.1. На основе агрегированных расстояний до идеальных решений высчитываются коэффициенты относительной близости в соответствии с пунктами 1.5 или 3.5.

2 SMART

Метод SMART является одним из самых простых методов многокритериального принятия решений. Суть алгоритма заключается в вычислении взвешенной матрицы, а затем взвешенной суммы по каждой альтернативе. Альтернативы ранжируются по взвешенным суммам.

Первые 2 этапа, нормализация и вычисление взвешенной матрицы, в точности повторяют вычисления, данные в описании метода TOPSIS выше.

2.1 Вычисление взвешенной суммы

После того, как мы получили взвешенную матрицу с взвешенными оценками, остается просуммировать все оценоки по альтернативам в взвешенной матрице.

Определение суммы для разных типов оценок приведены ниже:

Числа:

$$s = x_1 + x_2$$

Интервалы:

$$s = \left[\underline{x_1} + \underline{x_2}, \overline{x_1} + \overline{x_2}\right]$$

Нечеткие множества T1FS:

$$s = [a_{x_1} + a_{x_2}, b_{x_1} + b_{x_2}, c_{x_1} + c_{x_2}]$$

Нечеткие множества AIFS:

$$s = [a_{x_1} + a_{x_2}, b_{x_1} + b_{x_2}, c_{x_1} + c_{x_2}, \pi_{x_1} + \pi_{x_2}]$$

Нечеткие множества IT2FS:

$$s = \left[\left[\underline{a_{x_1}} + \underline{a_{x_2}}, \overline{a_{x_1}} + \overline{a_{x_2}}\right], b_{x_1} + b_{x_2}, \left[\underline{c_{x_1}} + \underline{c_{x_2}}, \overline{c_{x_1}} + \overline{c_{x_2}}\right]\right]$$

2.2 Ранжирование

Ранжирование взвешенных сумм может производиться двумя способами:

1. Приведение всех взвешенных сумм к типу чисел, как описано в пункте 7, и дальнейшее ранжирование альтернатив по данным числам.

2. Приведение всех взвешенных сумм к типу интервалов, как описано в пункте 7, и дальнейшее ранжирование альтернатив по данным интервалам на основе алгоритма А. Сенгупты.

2.3 Агрегация матриц

Агрегация оценок нескольких экспертов можно производиться на этапе формирования матрицы решений, согласно вычислениям, данным в пункте 8.1, либо же агрегироваться могут посчитанные отдельно для каждого участника взвешенные суммы, применяя те же формулы из пункта 8.1.

Список литературы

[1] «Fuzzy Multiple Attribute Decision Making», Chen, Hwang, 1992
[2] «Discussion on Normalization Methods of Interval Weights», Yimeng Sui, Zhenyuan Wang, 2016, «Science Journal of Applied Mathematics and Statistics», DOI: https://doi.org/10.11648/j.sjams.20160405.19
[3] «Extension of TOPSIS for decision-making problems with interval data: Interval efficiency», G.R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, A.R. Davoodi, 2008, DOI: https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.07.009
[4] «On Comparing Interval Numbers: A Study on Existing Ideas», Atanu Sengupta, Tapan Kumar Pal, Part of the «Studies in Fuzziness and Soft Computing» book series (STUDFUZZ, volume 238)
[5] «Fuzzy TOPSIS: A General View», Nadaban Sorin, Simona Dzitac, Ioan Dzitac, 2016, «Information Technology and Quantitative Management»
[6] «An Algorithmic Method to Extend TOPSIS for Decision Making Problems with Interval Data.», Jahanshahloo G.R., Lofti F.H., Izadikhah M, 2006, «Applied Mathematics and Computation», DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.08.048
[7] «An extension of TOPSIS for group decision making», Shih H.S., Shyur H.J., Lee E.S., 2007, «Mathematical and Computer Modelling», DOI: https://doi.org/10.1016/j.mcm.2006.03.023
[8] «A historical account of types of fuzzy sets and their relationships», Bustince H., Barrenechea E., Pagola M., Fernandez J., Xu Z., Bedregal B., Montero J., Hagras H., Herrera F., B. De Baets, 2016, «IEEE Transactions on Fuzzy Systems», DOI:https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2015.2451692