

# Statistisk analyse av usikkerhet - Fordeling av observasjoner og Poissonfordeling

Lars Berggren og Jorid Holmen

10. januar 2022

## Sammendrag

I denne labøvelsen har vi målt radioaktivitet. Først skal vi måle fra bakgrunnstråling og deretter stråling fra en radioaktiv strålekilde. Målet med øvelsen er å finne ut om det følger en poissonfordeling eller en normalfordeling. Ved endt forsøk fant vi ut at bakgrunnstråling følger en poissonfordeling og kilden kan følge både en normalfordeling og poissonfordeling.

## 1 Innledning

En radioaktiv kjerne sender ut stråling, men vi vet ikke når den gjør det og hvor mange ganger den gjør det. Sannsynligheten for at den gjør det i det hele tatt er liten, men ved mange atomkjerner blir sannsynligheten større.

I forsøket skal vi måle radioaktivitet flere ganger, både bakgrunnstråling og stråling fra en radioaktiv kilde, for å få en fordeling av måleresultater. Da vil vi få en fordelingsfunksjon, slik som Poissonfordelingen og normalfordeling.

Poissonfordeling oppstår som regel under bakgrunnstråling. Når forventet antall hendelser i et tidsrom øker, i dette tilfelle er det når stråling fra radioaktivitet øker, da går fordeling mot normalfordelingen.

Vi regner ut diverse statistiske størrelser, slik som standardavvik, for å teste om målingene våre følger de fordelingsfunksjonene vi forutser.

## 2 Teori og apparatur

### 2.1 Radioaktivitet

Det som er et kjennetegn for radioaktive stoffer, er at de sender ut ioniserende stråling fra atom-

kjernen. Dette medfører at det blir dannet ioner i mediet, som den radioaktive strålingen beveger seg igjennom. Radioaktiv stråling finnes i tre ulike former; alfa-, beta- og gammastråling [2].

Når strålingen er av typen alfastråling, så har to protoner og to nøytroner blitt bundet sammen til en alfapartikkel, og sendt ut fra atomkjernen. En alfapartikkel har like mange protoner og nøytroner som en heliumkjerne, derfor er en alfapartikkel en heliumkjerne. Denne typen radioaktiv stråling har liten gjennomtrengningsevne, og stoppes av for eksempel et tynt papirark. Dette gjør at alfapartikler stoppes i det ytterste hudlaget til mennesker, når de blir eksponert for alfastråling.

Betastråling er en annen type radioaktiv stråling. Denne strålingen kommer av at atomkjernen utsender elektroner eller positroner, som henholdsvis er negativt og positivt ladete elektroner. Rekkevidden til betastråling avhenger av energien i strålingen. Den kan være fra noen centimeter til noen meter i luft.

Gammastråling er elektromagnetisk stråling. Når en atomkjerne avgir energi uten at masse-tall eller atomnummer er forandret, så vil denne energien sendes ut i form av fotoner. Utsendte fotoner svekkes lite når den går gjennom et medi-

um, derfor klassifiseres gjennomtrengningsevnen til gammastråling som høy.

Radioaktiv stråling kan medføre stor skade for omgivelsene hvis omgivelsene blir eksponert for det. Derfor, så kan en radioaktiv strålekilde både være åpen og kapslet. For å hindre eksponering til omgivelsene, kan en kapsle inn et radioaktiv stoff i et beskyttet materiale, slik at en beskytter omgivelsene for eksponering, samtidig som en lar strålingen passere. I dette forsøket er Strontium-90 strålekilden, som er blitt kunstig fremstilt i en kapslet kilde. Strontium-90 emitterer betastråling.

Omgivelsene kan også sende ut radioaktiv stråling. For eksempel kan dette være kosmisk stråling fra verdensrommet, eller radioaktiv stråling fra jord, bergarter og andre materialer som naturlig inneholder radioaktive stoffer. Denne typen stråling kalles bakgrunnsstråling [2].

## 2.2 Geiger-Müller-teller

En Geiger-Müller-teller (GM-teller) brukes til å måle radioaktiv stråling. Det er et måleinstrument som består av gassfylte Geiger-Müller-rør (GM-rør), som disse er koblet til en høyspenningskilde via to elektroder, og et elektronisk telleverk [3].

Det er et elektrisk felt som oppstår i GM-røret. Den ioniserende radioaktivestrålingen går gjennom GM-røret og treffer atomer i gassen, som frigjør elektroner. På grunn av det elektriske feltet blir elektronene akselerert og trekkes mot den ene elektroden. Akselerasjonen fører til at flere elektroner går mot elektroden. Dette fører til en strømpuls, og denne blir brukt til å telle og å måle strålingsintensiteten [3].

## 2.3 Normalfordelt data

Forskjellige typer målinger har forskjellige fordelinger. Mange har en symmetrisk form som vi kaller for normalfordelingen. Kurven blir også kalt for Gauss kurve [1]. For normalfordelt data kan vi regne ut standardavviket  $\sigma_v$  ved hjelp av likning 1, der  $v_i$  er telleraten for måling nummer  $i$ ,  $\bar{v}$  er gjennomsnittet for  $v$  og  $N$  er antall målinger.

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2}{N - 1}} \quad (1)$$

Standardavviket til gjennomsnittet kan skrives som i likning 2. Måleresultatet blir da  $\bar{v} \pm \sigma_{\bar{v}}$  [1].

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{N}} \quad (2)$$

## 2.4 Poissonfordelingen

Poissonfordelingen er gitt ved 3. Denne likningen inneholder  $\nu$  som er observert hendelse og  $\mu$  som er det beste estimat 4. Poissonfordelingen gir sannsynligheten for å observere  $\nu$  hendelser innenfor et tidsintervall  $T$ , med krav om at det forventede antallet hendelser i tidsintervallet er det beste estimatet,  $\mu$ . Standardavviket er gitt ved kvadratroten av  $\mu$  5 og standardfeilen er gitt i likning 6.

$$P_{\mu}(\nu) = \frac{\mu^{\nu}}{\nu!} e^{-\mu} \quad (3)$$

$$\mu = \bar{v} \quad (4)$$

$$\sigma_{\nu} = \sqrt{\mu} \quad (5)$$

$$\sigma_{\mu} = \frac{\sigma_{\nu}}{\sqrt{N}} \quad (6)$$

## 2.5 Kji-kvadrat-test

Kji-kvadrat-test blir brukt til å finne ut om måleresultatene følger den fordelingen som er antatt. Formelen til  $X^2$  er vist i likning 7, der  $O_k$  er hvor mange ganger vi observerer at måleverdi  $k$  dukker opp, og  $E_k$  er det vi antar at  $k$  dukker opp.

$$X^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \quad (7)$$

$X^2$  er et mål på avviket mellom det vi observerer og det vi antar, og jo større  $X^2$ , jo mindre er sjansen for at fordelingen er den vi antar. For å finne sannsynligheten for at fordelingen er riktig må vi finne  $X^2$ , gitt i likning 8, og frihetsgraden  $df$ , vist i likning 9, der  $n$  er totalt antall

måleverdier og  $c$  er antall parametere som brukes på å regne ut  $E_k$ .

$$\tilde{X}^2 = X^2/df \quad (8)$$

$$df = n - c \quad (9)$$

### 3 Metode

Vi begynner ved å måle bakgrunnstrålingen. Hver måling har en varighet på 10 sekunder og skal gjøres 200 ganger. Det som blir målt er antall pulser som kommer fra GM-røret.

Deretter skal dette gjentas når en strålekilde er plassert i nærheten av GM-røret. Problemet med dette er at nå blir også bakgrunnstrålingen lest. For å fikse på dette bruker vi likning 10, der  $\bar{V}_{total}$  er gjennomsnittlig stråling når kilden er i nærheten, og  $\bar{V}_{bakgrunn}$  er stråling uten kilden.

$$\bar{V}_{kilde} = \bar{V}_{total} - \bar{V}_{bakgrunn} \quad (10)$$

Usikkerheten  $\delta\bar{V}_{kilde}$  for  $\bar{V}_{kilde}$  vil da være gitt ved likning 11.

$$\delta\bar{V}_{kilde} = \sqrt{\delta\bar{V}_{total}^2 + \delta\bar{V}_{bakgrunn}^2} \quad (11)$$

### 4 Resultater og beregninger

Utrekninger kan vi se i tabell 1.

Tabell 1: Gjennomsnitt, standardavvik og standardfeil beregnet ved antatt normalfordeling og antatt poissonfordeling

Normalfordeling	Uten kilde	Med kilde
Gjennomsnitt $\bar{v}$	4.27	4751.89
Standardavvik $\sigma_v$	2.22	52.45
Standardfeil $\sigma_{\bar{v}}$	0.157	3.71
Måleresultat	$4.27 \pm 0.157$	$4752 \pm 3.71$
Poissonfordeling	Uten kilde	Med kilde
Beste estimat $\mu$	4.27	4752.19
Standardavvik $\sigma_\nu$	2.07	68.93
Standardfeil $\sigma_\mu$	0.146	4.87
Måleresultat	$4.27 \pm 2.07$	$4752 \pm 68.93$

Tabell 2: Måleresultat ved korrigerings for bakgrunnstråling

	Normalfordeling	Poissonfordeling
$\bar{V}_{kilde}$	4747.62	4748
$\delta\bar{V}_{kilde}$	3.71	68.96
$V_{kilde}$	$4747.62 \pm 3.71$	$4748 \pm 68.96$

Vi finner måleresultatene slik som beskrevet i Metode (3) og vi ser resultatene i tabell 2.

I tabell 3 ser man resultatene fra kji-kvadrat-testene. Ved å bruke resultatene går vi i tabell D i [1, appx. D] og finner ut at sannsynligheten for poissonfordeling for målingene uten kilde er mellom 88% og 98%. Siden Kjikvadrattesten er nærmere 0.4 enn 0.2, antar vi at sannsynligheten er på ca. 90%. Sannsynligheten for normalfordeling for målingene med kilde er mellom 45% og 55%. Siden Kjikvadrattesten er nærmere 0.8 enn 0.6, antar vi en sannsynlighet på ca. 47%.

	Poissonfordeling uten kilde	Normalfordeling med kilde
$X^2$	2.1372	1.5031
$df$	6	2
$\tilde{X}^2$	0.3562	0.7516

Tabell 3: Caption

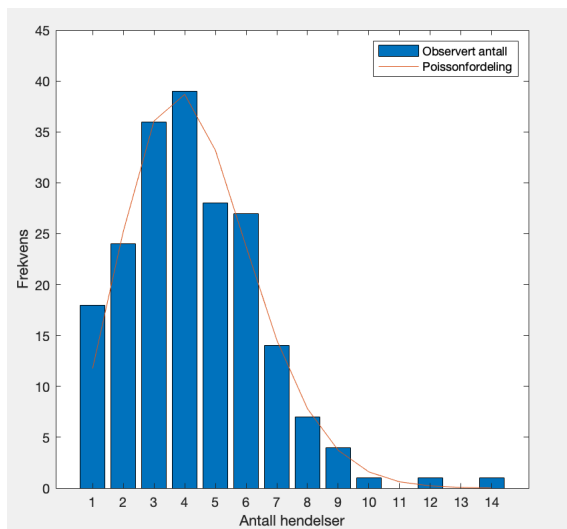
I figur 1 kan vi se fordelingen av observasjonene uten kilde og hvordan poissonfordelingen er i forhold. I figur 2 kan vi se fordelingen av observasjonene med kilde.

### 5 Diskusjon

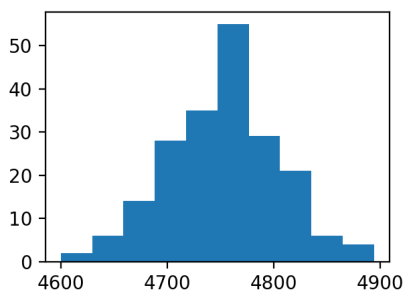
Resultatene av de forskjellige standardavvikene og standardfeilene er ganske like.

Uten kilde er mest sannsynlig en Poissonfordeling, som er i overensstemmelse med teorier om at bakgrunnstråling ofte følger Poissonfordelingen.

Kjikvadrattesten med kilde, viste at det var ca. 47% sannsynlighet for at fordelingen fulgte Gausskurven. Hvis en bruker resultatene fra Kjikvadrat-testen uten kilde som signifikansnivå, så kan vi ikke konkludere om resultatene med kilde følger Gausskurven. Allikevel, eksisterer det en



Figur 1: Histogrammer av fordelingen av observasjonene uten kilde og poissonfordelingen.



Figur 2: Histogrammer av fordelingen av observasjonene med kilde

teori om at poissonfordeling går mot normalfordeling når  $N$  blir stor nok. Da er det nærliggende å tro at resultatene ville blitt normalfordelt, hvis  $N$  var tilstrekkelig stor.

Det er blitt beskrevet at Geiger-Müller-telleren har problemer med å registrere gammafotoner. Sannsynligheten for at et gammafoton skal bli registrert er på størrelsesorden 1%. Siden alfa- og betastrålingen har begrenset rekkevidde, er det mulig å anta at det for det meste er gammastråling som går gjennom GM-røret. 1% sannsynlighet for at et gammafoton skal bli registrert er derfor relativt liten. Forsøket krever derfor flere målinger enn  $N = 200$ , for å se om vi kommer nærmere 100%, slik at en har grunnlag for å konkludere om målingen går mot normalfordeling.

## 6 Konklusjon

Rapportens forfattere konkluderer med at ca 90% sannsynlighet for at målingene uten kilde følger poissonfordelingen er tilstrekkelig for å kunne gi en konklusjon. Konklusjonen er dermed at målingene uten kilde følger poissonfordelingen.

Målingene med kilden har ca. 47% sannsynlighet for å være normalfordelt. Rapportens forfattere konkluderer med at dette ikke er tilstrekkelig for å kunne gi en konklusjon på målingens fordeling. Grunnen til at en ikke kommer til en konklusjon er etter all sannsynlighet på grunn av ustyret i målingen. Som beskrevet i diskusjonen 5 har GM-telleren problemer med å registrere gammastråling. Derfor kreves det flere forsøk der en har ulikt antall målinger, for å se om størrelsen på  $N$  har betydning for fordelingen.

## Referanser

- [1] John R. Taylor. *An Introduction To Error Analysis, second edition*. University Science Books, 55D Gate Five Road, Sausalito, CA 94965, 2nd edition, 1997.
- [2] Trygve Holtebekk, Tor Bjørnstad. radioaktivitet, 2020. [Online; accessed 07. 01, 2022].
- [3] Trygve Holtebekk, Tor Bjørnstad, Jacob Linder. Geiger-müller-teller, 2019. [Online; accessed 07. 01, 2022].

Uten kilde	Med kilde
5	4778
6	4684
4	4816
4	4748
3	4745
2	4806
4	4711
5	4794
2	4824
7	4723
3	4717
14	4751
4	4719
6	4734
4	4666
3	4754
3	4761
2	4673
3	4769
3	4769
9	4824
3	4784
5	4826
4	4756
3	4673
6	4821
4	4703
4	4720
6	4680
4	4705
2	4819
6	4730
3	4789
6	4644
6	4774
7	4756
4	4740
5	4795
7	4777
1	4725
9	4692
5	4666
2	4766
3	4776
7	4769

Uten kilde	Med kilde
5	4637
5	4724
2	4796
4	4678
6	4734
5	4766
8	4715
12	4724
3	4824
3	4766
3	4711
4	4741
3	4735
5	4703
2	4808
6	4704
3	4754
3	4748
1	4760
7	4775
3	4843
5	4730
5	4805
1	4691
4	4690
6	4764
1	4849
3	4726
5	4780
6	4868
0	4784
5	4763
6	4814
2	4814
4	4774
7	4726
3	4751
3	4764
6	4842
2	4770
2	4859
3	4739
2	4689
7	4638
3	4833

Uten kilde	Med kilde
2	4749
4	4672
8	4733
1	4754
4	4723
6	4752
0	4680
1	4680
6	4825
3	4705
4	4808
9	4774
7	4743
5	4781
2	4711
3	4715
5	4748
5	4725
0	4650
7	4815
6	4771
6	4744
3	4763
5	4733
5	4812
8	4729
9	4877
6	4694
5	4823
5	4751
4	4732
4	4740
1	4789
3	4894
5	4728
7	4805
1	4803
4	4793
3	4795
4	4712
4	4758
4	4726
2	4767
5	4777
2	4788

Uten kilde	Med kilde
4	4778
2	4764
4	4756
4	4600
7	4754
1	4758
6	4739
8	4633
4	4780
5	4766
4	4803
4	4708
3	4680
7	4760
6	4765
2	4614
2	4775
3	4703
3	4717
4	4787
2	4715
7	4774
6	4755
3	4755
6	4693
4	4641
3	4682
2	4664
1	4868
4	4703
6	4819
2	4769
5	4751
5	4749
4	4730
4	4701
0	4823
2	4734
3	4800
2	4790
6	4781
3	4697
5	4798
4	4831
8	4728

Uten kilde	Med kilde
4	4839
6	4728
4	4773
8	4748
6	4699
1	4843
4	4770
6	4729
3	4790
7	4671
4	4823
1	4752
1	4739
1	4709
8	4787
3	4796
5	4752
2	4762
10	4708
5	4761