

$$(1) \quad S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)(x_i - m)^T$$

$$(2) \quad m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

element  $jk$  of  $\sum_{i=1}^n (x_i - m)(x_i - m)^T$

$$= \sum_{i=1}^n (x_{ij} - m_j)(x_{ik} - m_k)$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_{ij}x_{ik} - m_k x_{ij} - m_j x_{ik} + m_j m_k)$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik} \right) + \sum_{i=1}^n (-m_k x_{ij} - m_j x_{ik} + m_j m_k)$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik} \right) + (-m_k \sum_{i=1}^n x_{ij} - m_j \sum_{i=1}^n x_{ik} + n m_j m_k)$$

$\sum_{i=1}^n x_{ij} = n m_j$   $\xrightarrow{(2) \Rightarrow}$   $= \left( \sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik} \right) + (-m_k n m_j - m_j n m_k + n m_j m_k)$

$$= \left( \sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik} \right) - n (m_k m_j + m_k m_j - m_k m_j)$$

$\text{then } (AA^T)_{ij} = A_i A_j \Rightarrow$   $= \left( \sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik} \right) - n (m_j m_k)$

$$= \left( \sum_{i=1}^n x_i x_i^T \right) - n (m m^T)$$

$$\Rightarrow S = \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i x_i^T \right) - n m m^T}{n-1}$$