Lineaire DSP systemen

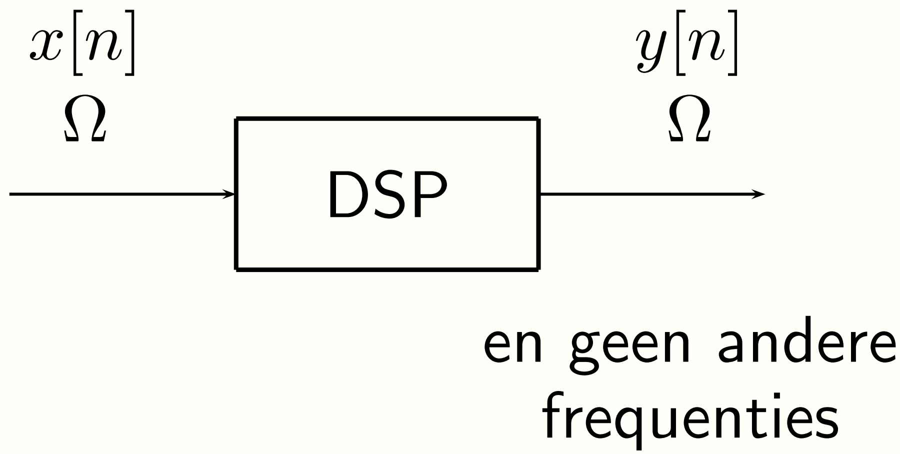
$x_1[n]$ $\quad$ $y_1[n]$

$x_2[n]$ $\quad$ $y_2[n]$

$x_1[n] + x_2[n]$ $\quad$ $y_1[n] + y_2[n]$

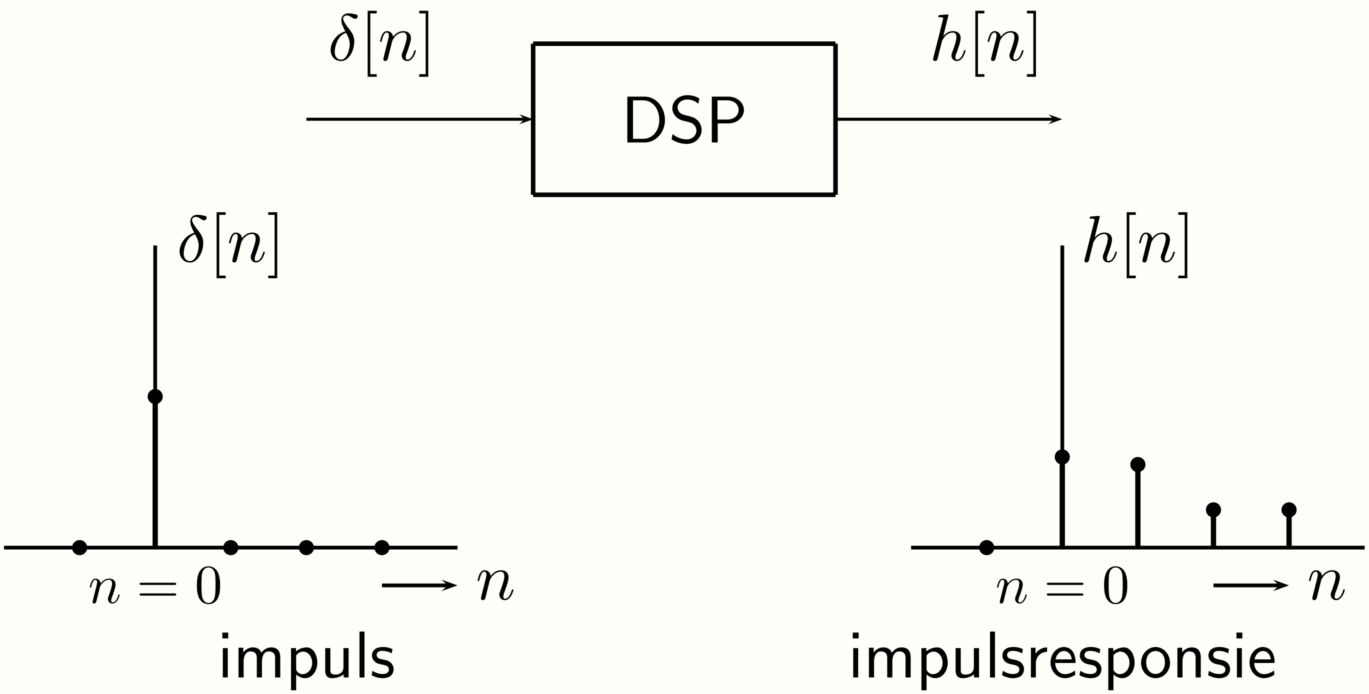
$ax_1[n]$ $\quad$ $ay_1[n]$

Behoud van frequentie



Het uitgangssignaal kan alleen die frequenties bevatten die het ingangssignaal heeft

Beschrijven van DSP



Impulsresponsie

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{y[n] = 1.5y[n-1] - 0.85y[n-2] + x[n]} \longrightarrow h[n]$$

$$h[n] = 1.5h[n-1] - 0.85h[n-2] + \delta[n]$$

$$h[0] = 1.5h[-1] - 0.85h[-2] + \delta[0] = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$h[1] = 1.5h[0] - 0.85h[-1] + \delta[1] = 1.5 + 0 + 0 = 1.5$$

$$h[2] = 1.5h[1] - 0.85h[0] + \delta[2] = 2.25 - 0.85 + 0 = 1.4$$

$\ldots$ $h[n]$ karakteriseert filter, is zelf digitaal signaal!!!

Opgave

$y[n] = 0.5y[n-1] + 0.5x[n]$, wat is $h[n]$?

$h[n] = 0.5h[n-1] + 0.5\delta[n]$

$h[0] = 0.5h[-1] + 0.5\delta[0] = 0 + 0.5 = 0.5$

$h[1] = 0.5h[0] + 0.5\delta[1] = 0.25 + 0 = 0.25$

$h[2] = 0.5h[1] + 0.5\delta[2] = 0.125 + 0 = 0.125$

$h[3] = 0.5h[2] + 0.5\delta[3] = 0.0625 + 0 = 0.0625$

Differentievergelijkingen

niet-recursief

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

niet-recursieve vergelijking voor impulsresponsie

$$h[n] = b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + b_2 \delta[n-2]$$

$$h[0] = b_0$$

$$h[1] = b_1$$

$$h[2] = b_2$$

Differentievergelijkingen

recursief

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

recursieve vergelijking voor impulsresponsie

$$h[n] = a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2] + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + b_2 \delta[n-2]$$

$$h[0] = b_0 \delta[0] = b_0$$

$$h[1] = a_1 h[0] + b_1 = a_1 b_0 + b_1$$

$$h[2] = a_1 h[1] + a_2 h[0] + b_2 = a_1^2 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + b_2$$

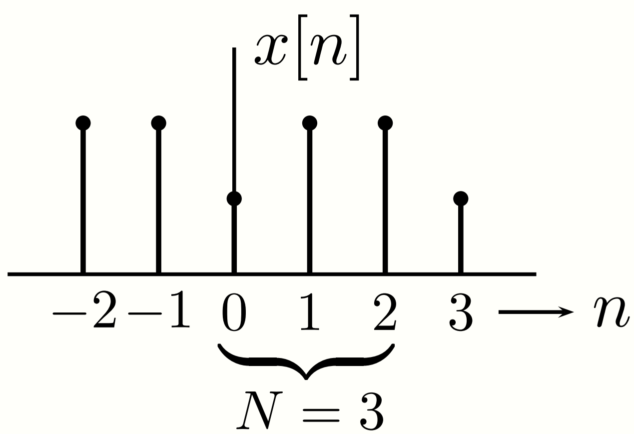
Periode N, grondfrequentie $\frac{2\pi}{N}$

Fourier reeks

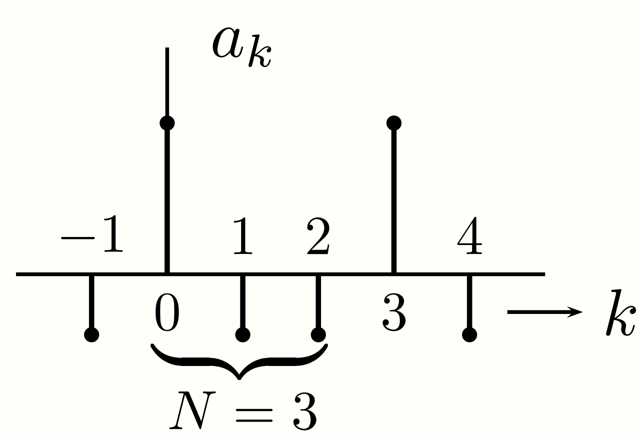
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Fourier coefficienten

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

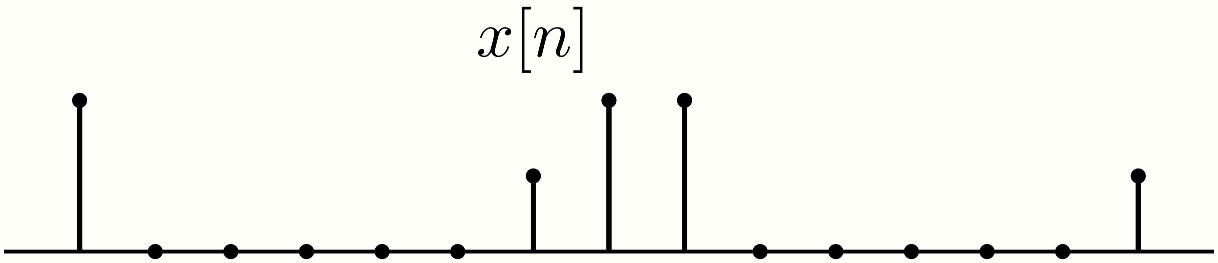


tijddomein



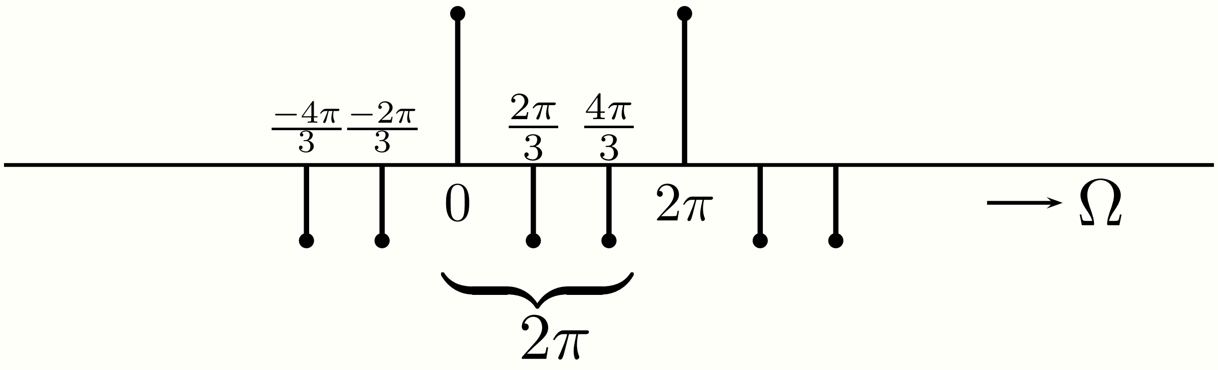
frequentiedomein

N groter maken

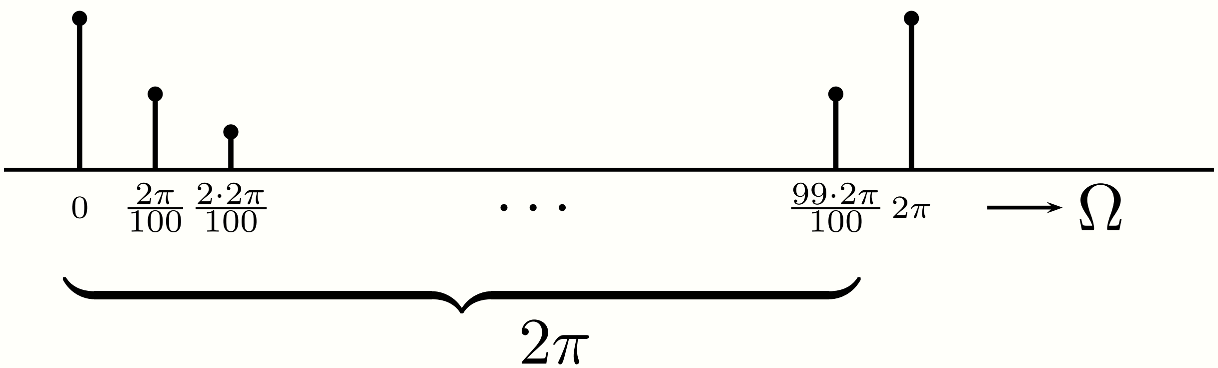


$\Omega = \frac{2\pi}{N}$ wordt heel klein, $k\Omega = k\frac{2\pi}{N}$ hele kleine stappen

$$N = 3 \text{ en } \Omega = \frac{2\pi}{3}$$



$$N = 100 \text{ en } \Omega = \frac{2\pi}{100}$$



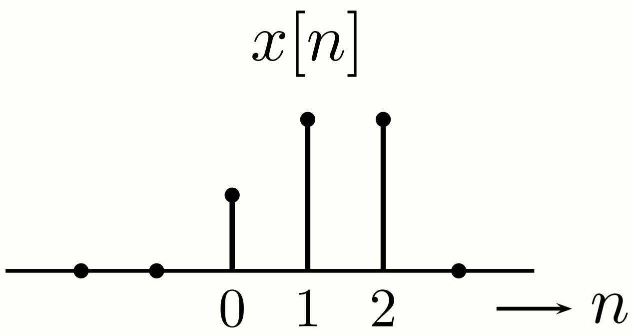
Niet periodiek

Fourier integraal

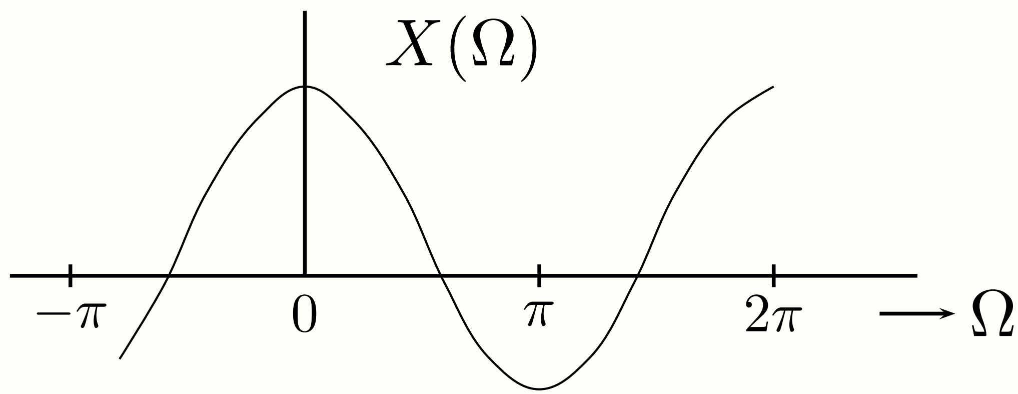
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Fourier transformatie

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

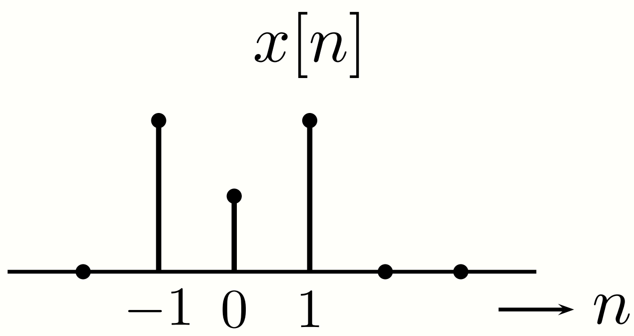


niet-periodiek signaal



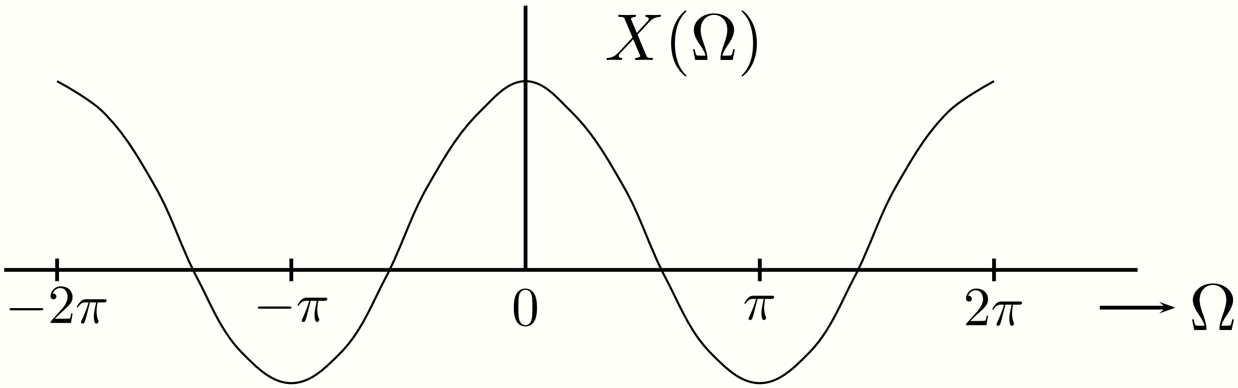
continu spectrum

Voorbeeld 1



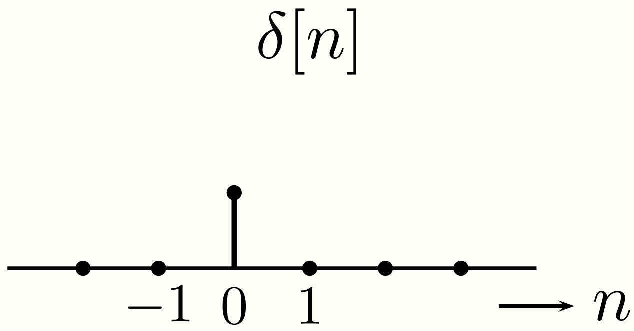
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n} = 2e^{-j\Omega} + 1 + 2e^{j\Omega} = 1 + 4\cos\Omega$$

periodiek met periode 2π, even $x[n] \Rightarrow$ reëel

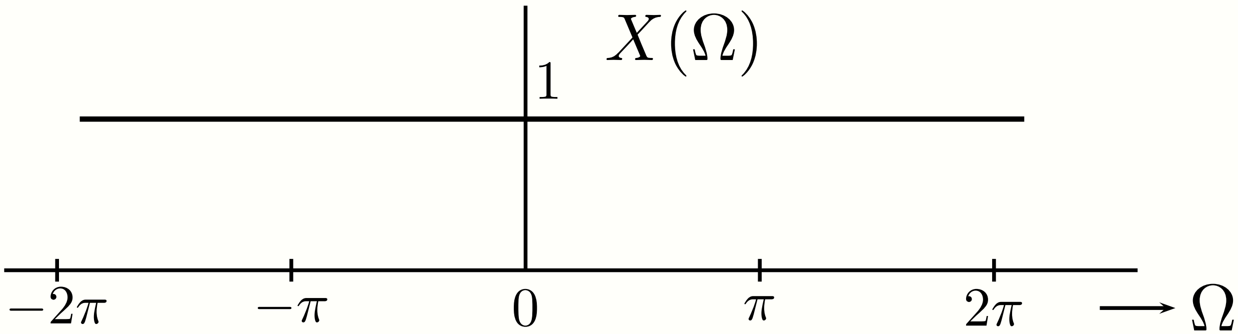


$X(\Omega) = 1 + 4\cos\Omega$ frequentiedichtheidsfunctie

Voorbeeld 2



$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega \cdot 0} = 1$$



$X(\Omega) = 1$, $\delta[n]$ bevat evenveel van alle frequenties

het spectrum is wit

Digitaal filter gegeven door $h[n]$

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{filter}} \longrightarrow h[n]$$

tijddomein

$$\begin{array}{lll}
x[n] & h[n] & y[n] = x[n] \star h[n] \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
X(\Omega) & H(\Omega) & Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)
\end{array}$$

frequentiedomein

$h[n]$ karakteriseert filter

Voorbeeld

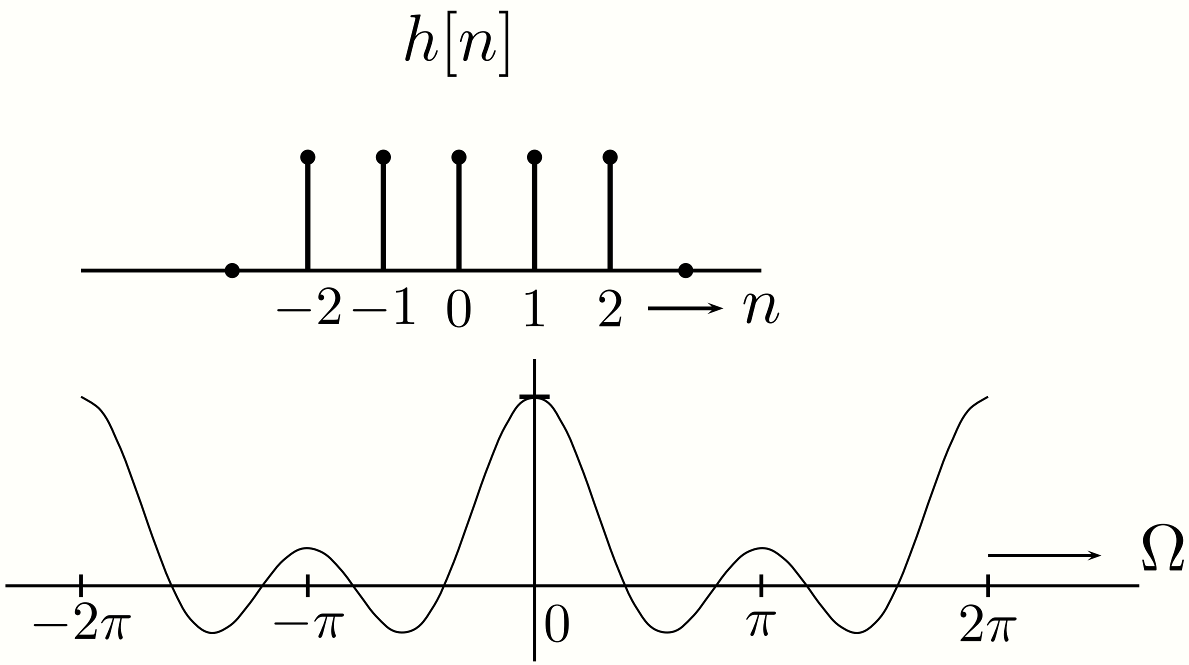
$$h[n] = 0.2(\delta[n-2] + \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1] + \delta[n+2])$$

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} =$$

$$0.2(e^{-j2\Omega} + e^{-j\Omega} + 1 + e^{j\Omega} + e^{j2\Omega}) =$$

$$0.2(1 + 2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega)$$

Laagdoorlaatfilter



$$H(\Omega) = 0.2(1 + 2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega)$$

Differentievergelijking $\rightarrow H(\Omega)$

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega}}{1 - a_1 e^{-j\Omega} - a_2 e^{-j2\Omega}}$$

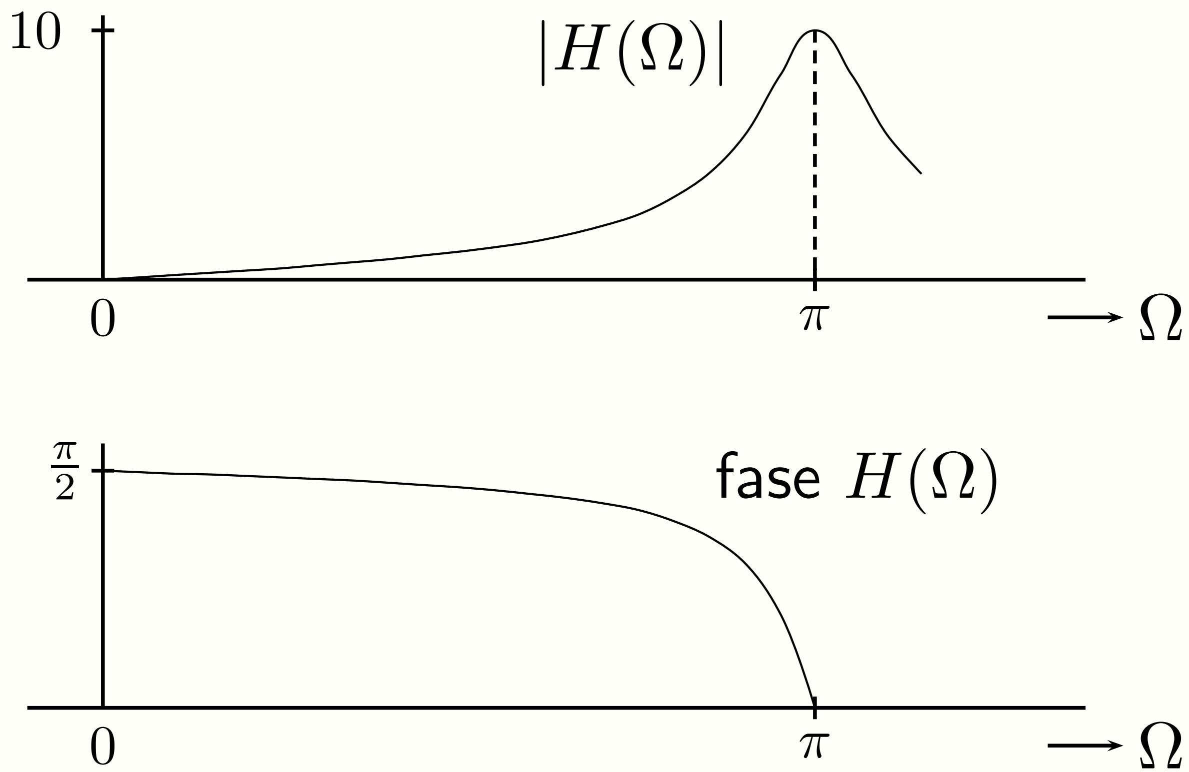
Voorbeeld 1: Hoogdoorlaatfilter

$$y[n] = -0.8y[n-1] + x[n] - x[n-1]$$

$$b_0 = 1, b_1 = -1, a_1 = -0.8$$

$$H(\Omega) = \frac{1-e^{-j\Omega}}{1+0.8e^{-j\Omega}} = \frac{1-\cos\Omega+j\sin\Omega}{1+0.8\cos\Omega-0.8j\sin\Omega}$$

Voorbeeld 1: Hoogdoorlaatfilter



Voorbeeld 2: Banddoorlaatfilter

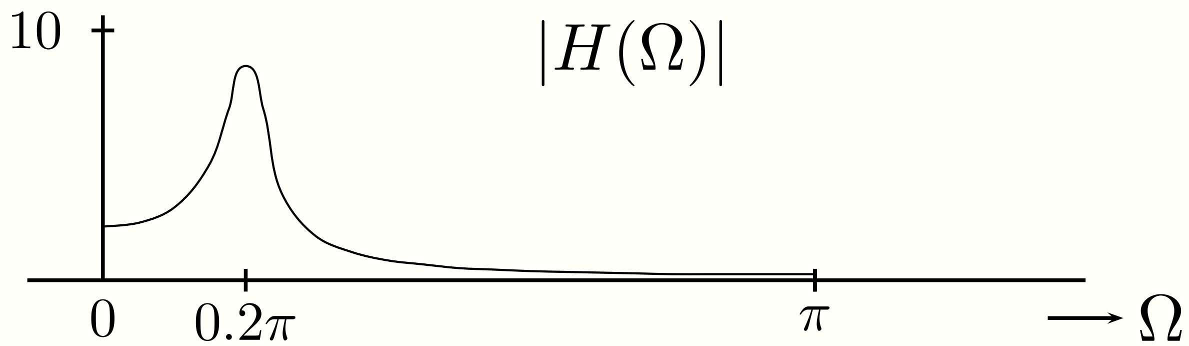
$$y[n] = 1.5y[n-1] - 0.85y[n-2] + x[n]$$

$$b_0 = 1, a_1 = 1.5, a_2 = -0.85$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-1.5e^{-j\Omega}+0.85e^{-j2\Omega}}$$

Voorbeeld 2: Banddoorlaatfilter

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 1.5e^{-j\Omega} + 0.85e^{-j2\Omega}}$$



Voorbeeld 3: Bandsperfilter

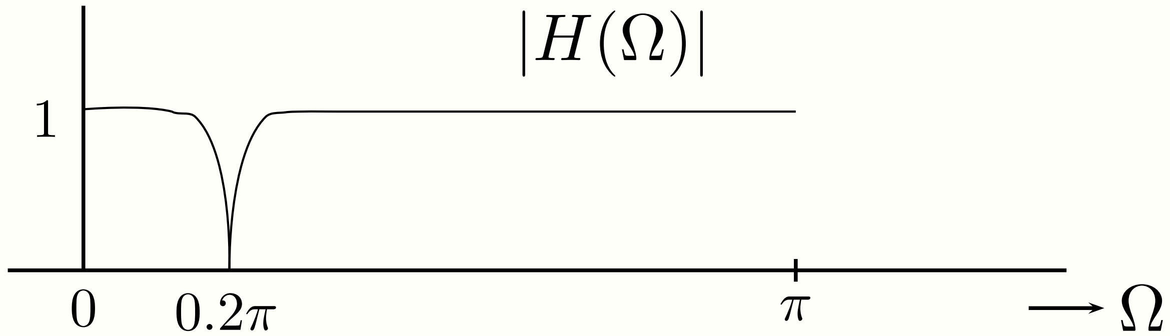
$y[n] = 1.8y[n-1] - 0.9y[n-2] + x[n] - 1.9x[n-1] + x[n-2]$

$b_0 = 1, b_1 = -1.9, b_2 = 1, a_1 = 1.8, a_2 = -0.9$

$H(\Omega) = \frac{1-1.9e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}}{1-1.8e^{-j\Omega}+0.9e^{-j2\Omega}}$

Voorbeeld 3: Bandsperfilter

$$H(\Omega) = \frac{1-1.9e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}}{1-1.8e^{-j\Omega}+0.9e^{-j2\Omega}}$$



Wat kunnen we nu?

We kunnen van differentievergelijking naar frequentierespons en terug

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

$$\updownarrow$$

$$H(\Omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega}}{1 - a_1 e^{-j\Omega} - a_2 e^{-j2\Omega}}$$

Maar hoe komen we nu aan de coëfficiënten?

Daarvoor gebruiken we de overdrachtsfunctie $H(z)$

Overdrachtsfunctie $H(z)$

Vul in: $z = e^{j\Omega}$ in $H(\Omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega}}{1 - a_1 e^{-j\Omega} - a_2 e^{-j2\Omega}}$

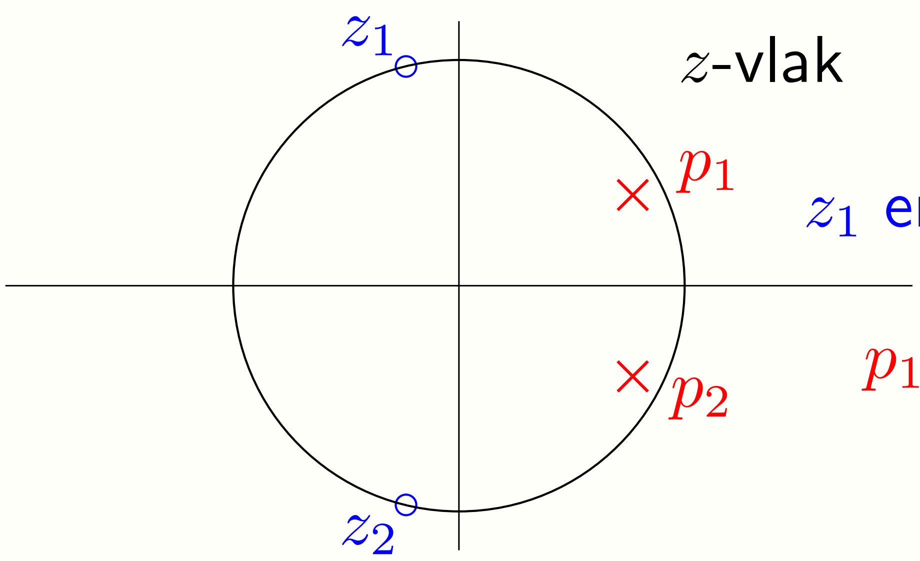
Overdrachtsfunctie: $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$

Beschouw deze functie in het complexe z-vlak

Daarvoor gebruiken we de nulpunten van de teller en de noemer

Overdrachtsfunctie $H(z)$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2} = K \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$



z_1 en z_2 nulpunten

p_1 en p_2 polen

Overdrachtsfunctie $H(z)$

$H(z)$ wordt volledig bepaald door nulpunten en polen

D.w.z. de coëfficiënten a_i en b_i bepaald door nulpunten en polen

Dus om a_i en b_i te vinden moeten we de nulpunten en polen handig kiezen

$H(z)$ wordt bij een pool heel groot

$H(z)$ wordt bij een nulpunt heel klein

$H(z) \leftrightarrow H(\Omega)$

Frequentierespons $H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$

Dus $H(\Omega)$ door langs eenheidscirkel te kijken

Als nulpunt in de buurt eenheidscirkel: $H(\Omega)$ klein

Als pool in de buurt eenheidscirkel: $H(\Omega)$ groot

$H(\Omega)$ klein: verzwakking bijbehorende frequentie

$H(\Omega)$ groot: versterking bijbehorende frequentie

Ontwerp filter

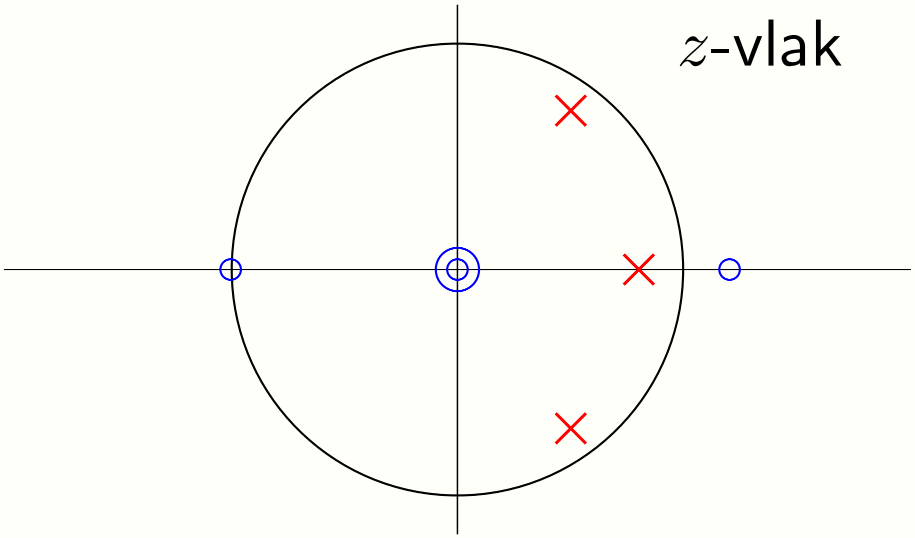
Ontwerpen filter met nulpunten en polen

Hieruit de a_i en b_i berekenen

Deze gebruiken in differentievergelijking

Opgave 1

$H(z) = \frac{z^2(z-1.2)(z+1)}{(z-0.5+0.7j)(z-0.5-0.7j)(z-0.8)}$ Teken nulpunten en polen



Opgave 1

Welke frequentie hoort er bij nulpunten en polen?

$z^2 = 0$ doet niet mee

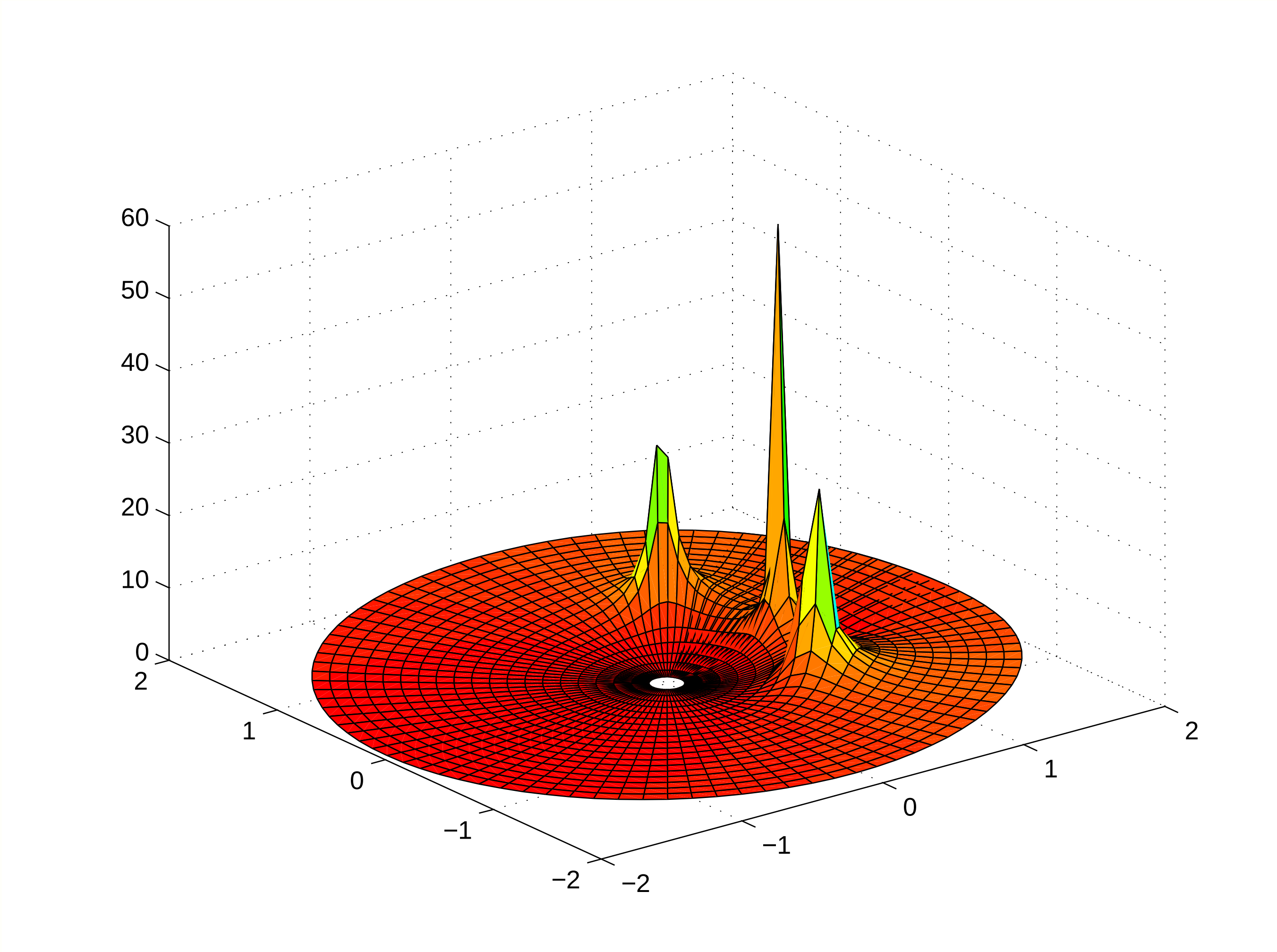
$z = 1.2 \leftrightarrow \Omega = 0$

$z = -1 \leftrightarrow \Omega = \pi$

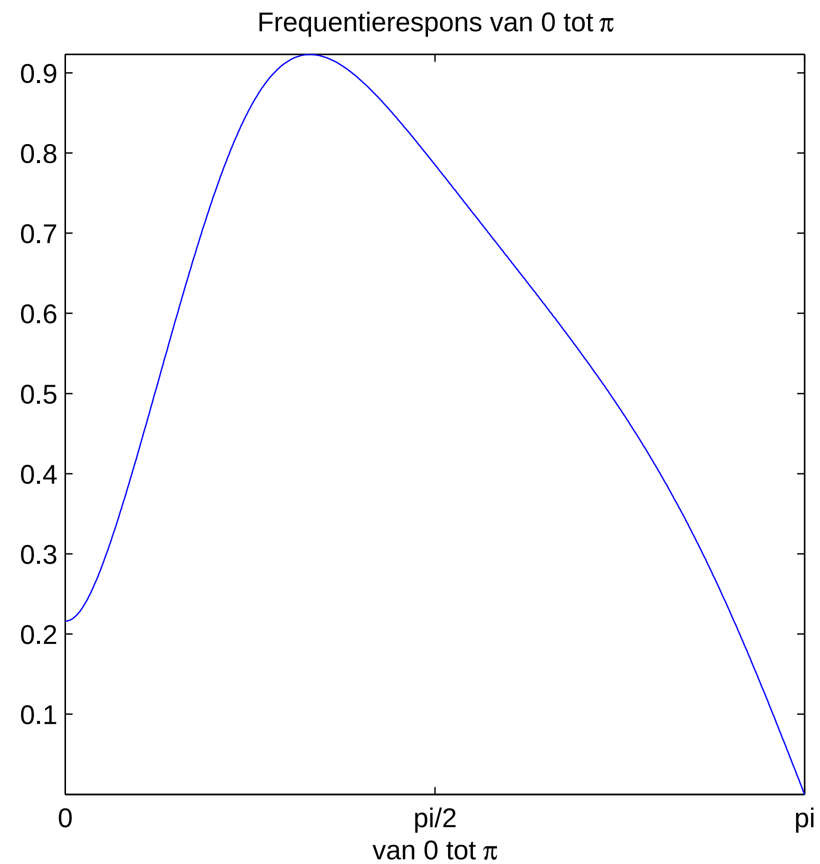
$p = 0.8 \leftrightarrow \Omega = 0$

$p = 0.5 + 0.7j \leftrightarrow \Omega = 54.5^o$

$p = 0.5 - 0.7j \leftrightarrow \Omega = -54.5^o$



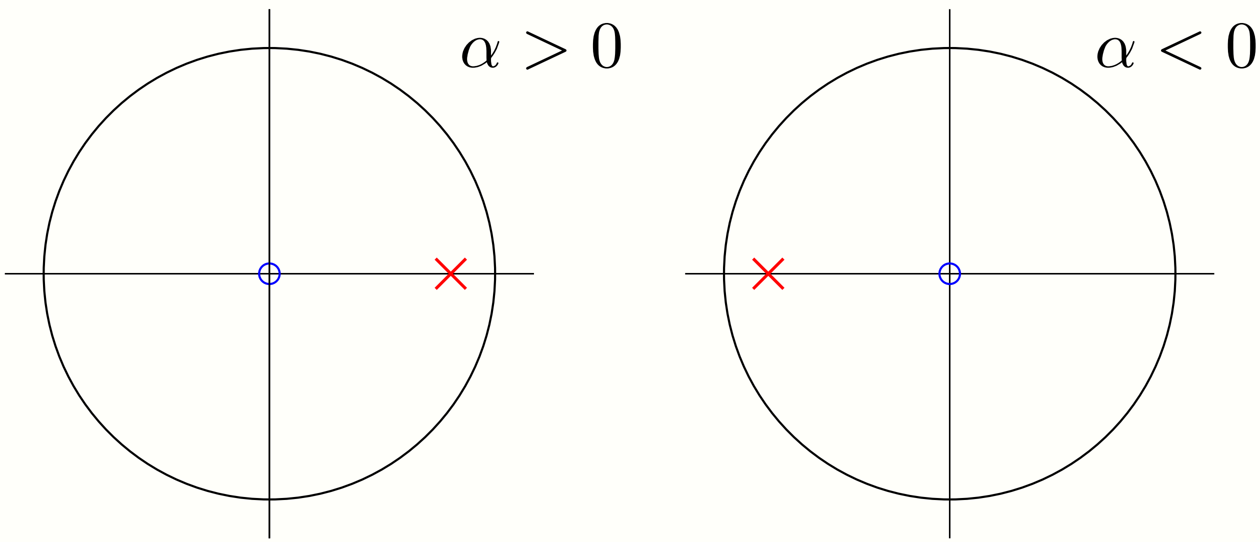
Figuur 1: absolute waarde van $H(z)$

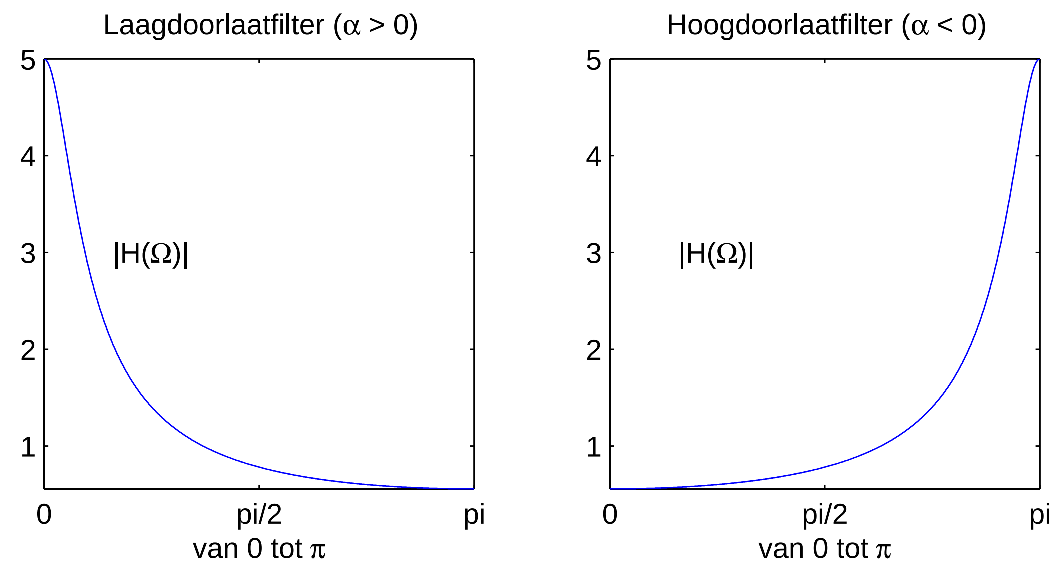


Figuur 2: absolute waarde van $H(\Omega)$

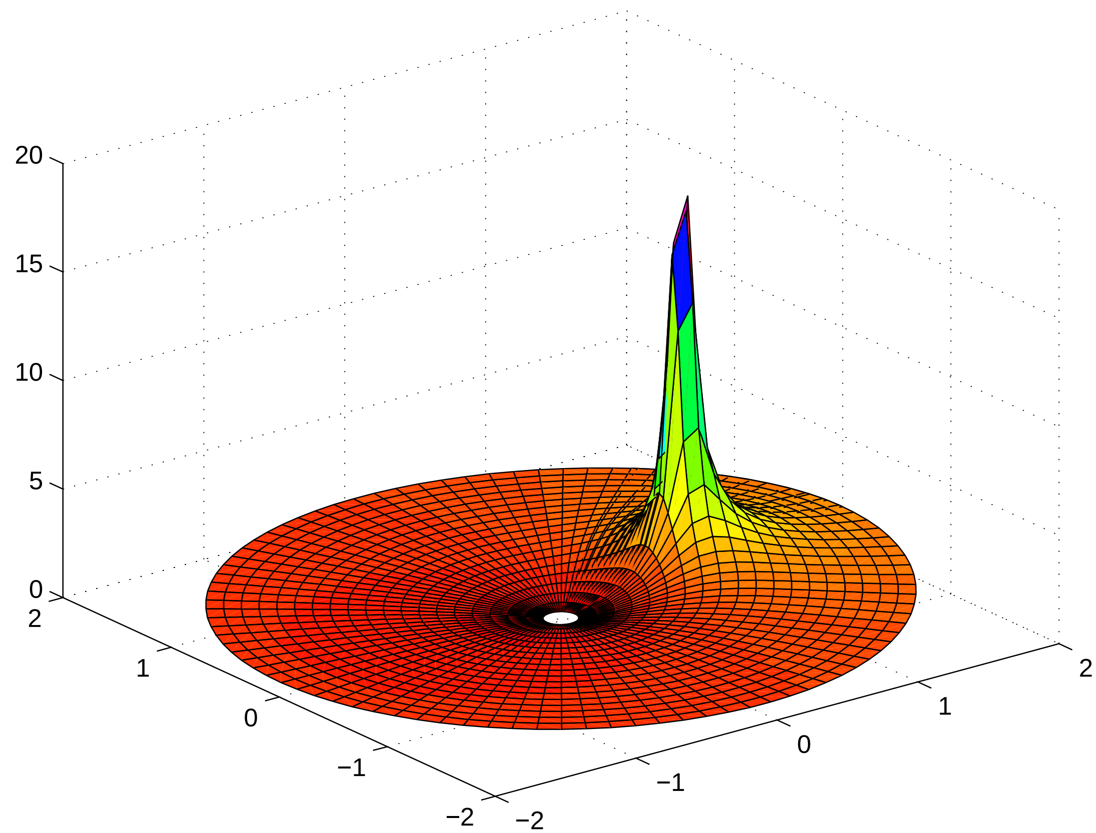
1ste orde systeem

$H(z) = \frac{z}{z-\alpha}$ met reëel nulpunt, pool

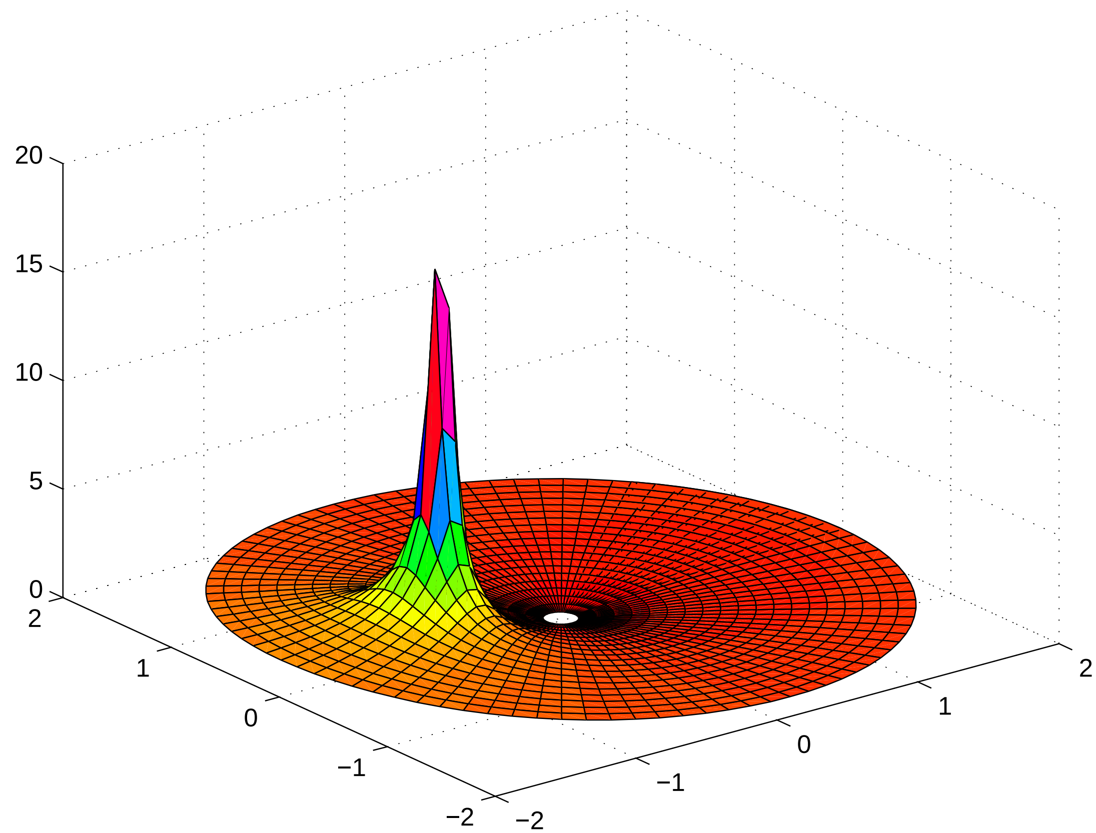




Figuur 3: Laag- en hoogdoorlaatfilter



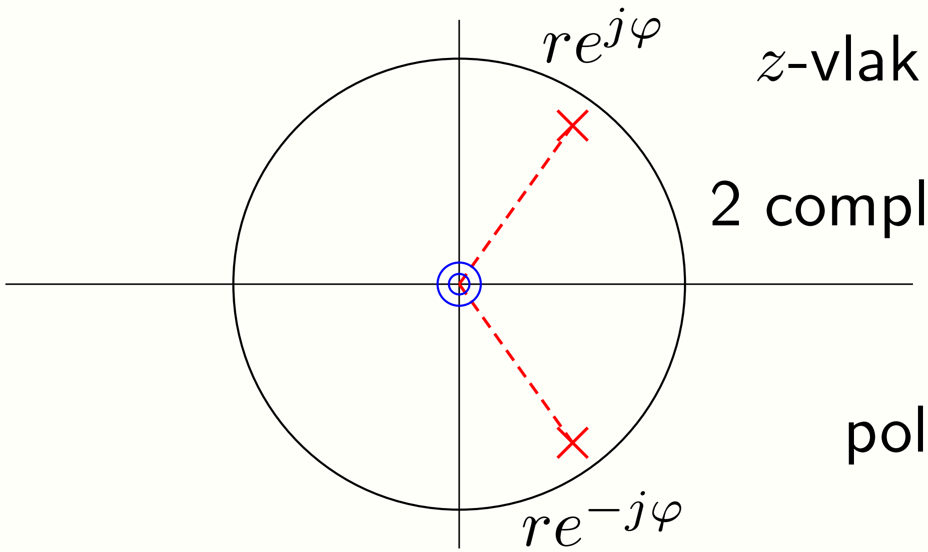
Figuur 4: Laagdoorlaatfilter, $\alpha > 0$



Figuur 5: Hoogdoorlaatfilter, $\alpha < 0$

2de orde systeem

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - re^{j\varphi})(z - re^{-j\varphi})}$$



z-vlak

2 complex geconjugeerde polen

polen niet op de rand

2de orde systeem

Wat is de differentievergelijking?

$$(z - re^{j\varphi})(z - re^{-j\varphi}) = z^2 - re^{j\varphi}z - re^{-j\varphi}z + r^2 =$$

$$z^2 - 2rz\cos\varphi + r^2$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2rz\cos\varphi + r^2} = \frac{1}{1 - 2r\cos\varphi z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$b_0 = 1,\ a_1 = 2r\cos\varphi,\ a_2 = r^2$$

$$y[n] = 2r\cos\varphi y[n-1] - r^2 y[n-2] + x[n]$$

$H(z) \leftrightarrow$ differentievergelijking

2de orde $H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}} = \frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^2-a_1z-a_2} \Leftrightarrow$

$y[n]-a_1y[n-1]-a_2y[n-2] = b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]$

1ste orde $H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}}{1-a_1z^{-1}} = \frac{b_0z+b_1}{z-a_1} \Leftrightarrow$

$y[n] - a_1y[n-1] = b_0x[n] + b_1x[n-1]$

Laatste voorbeeld

Ontwerp filter met:

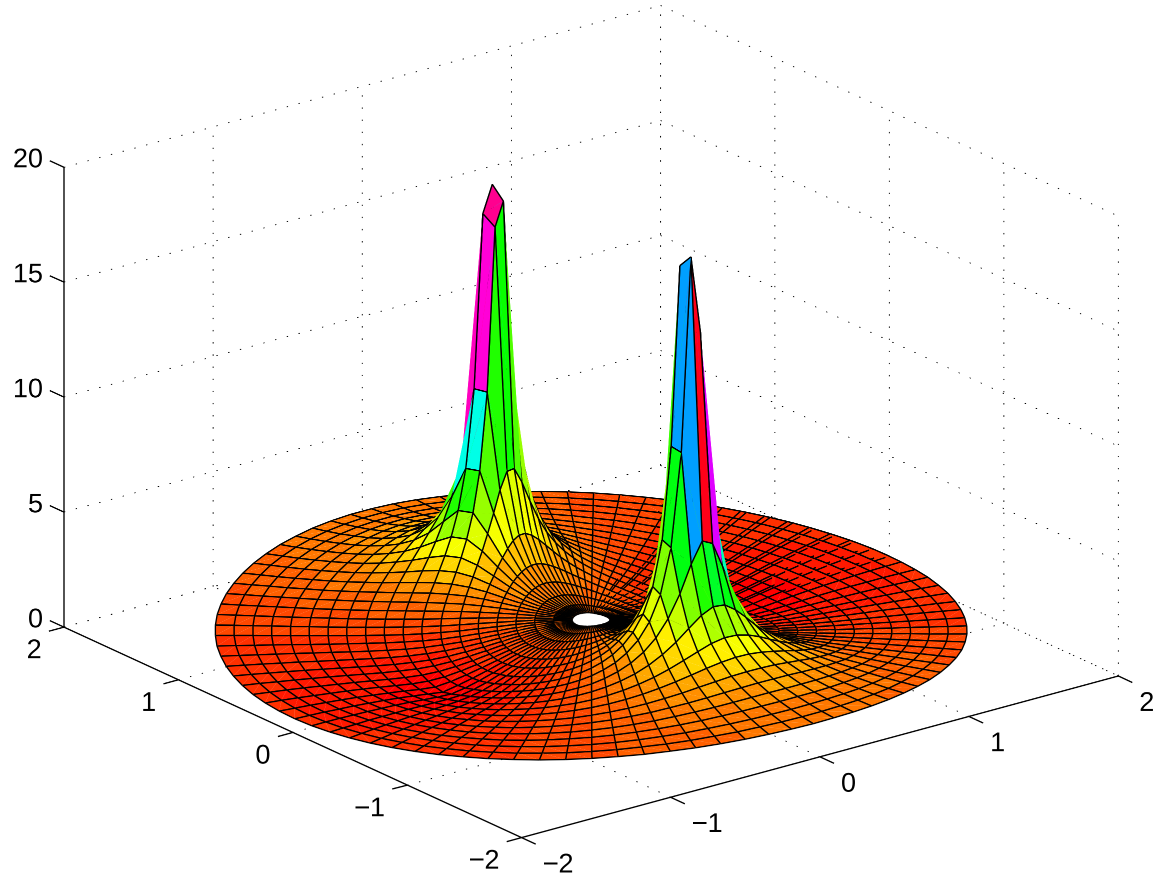
twee nulpunten op $z = \pm 1$

twee polen $z = \pm 0.85j$

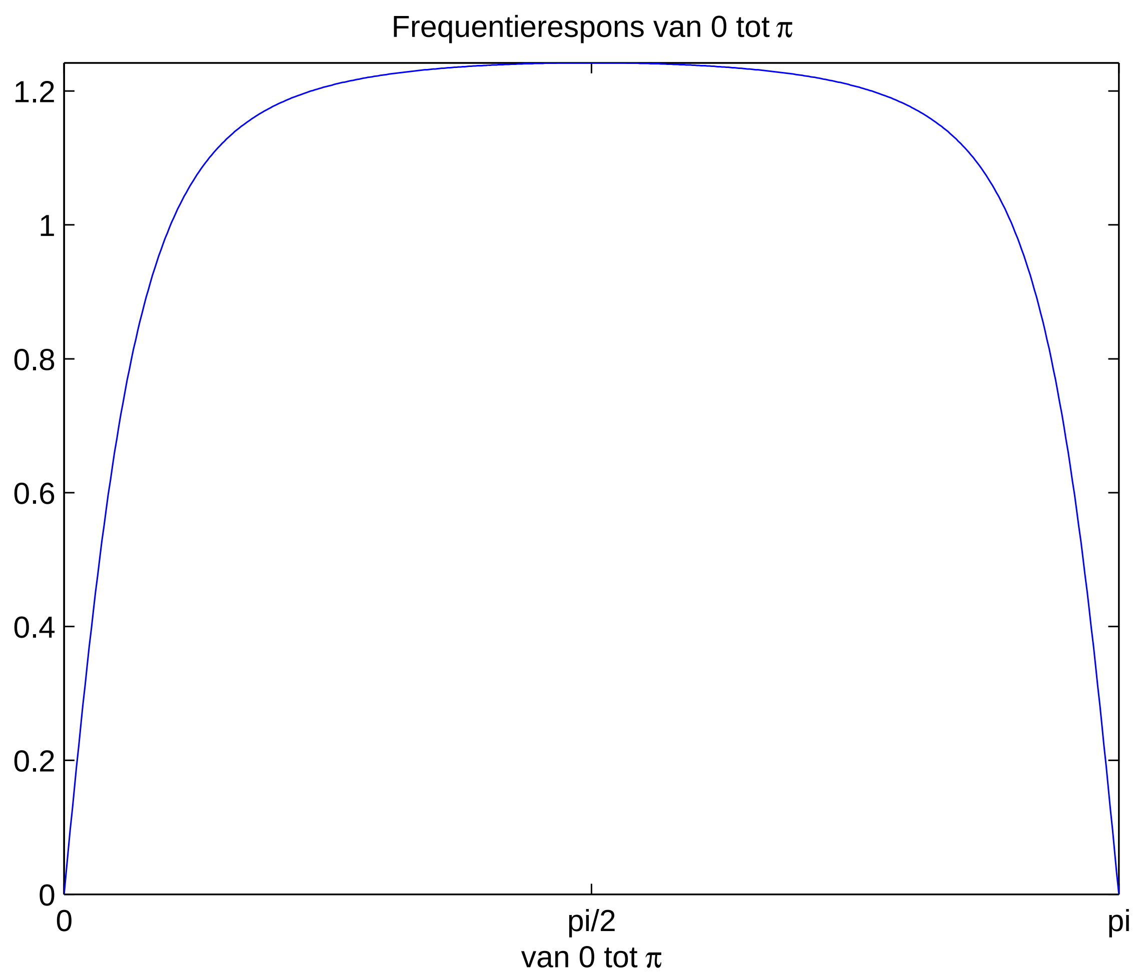
$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-0.85j)(z+0.85j)} = \frac{z^2-1}{z^2+0.7225}$

$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -1$ en $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -0.7225$

$y[n] = -0.7225y[n-2] + x[n] - x[n-2]$



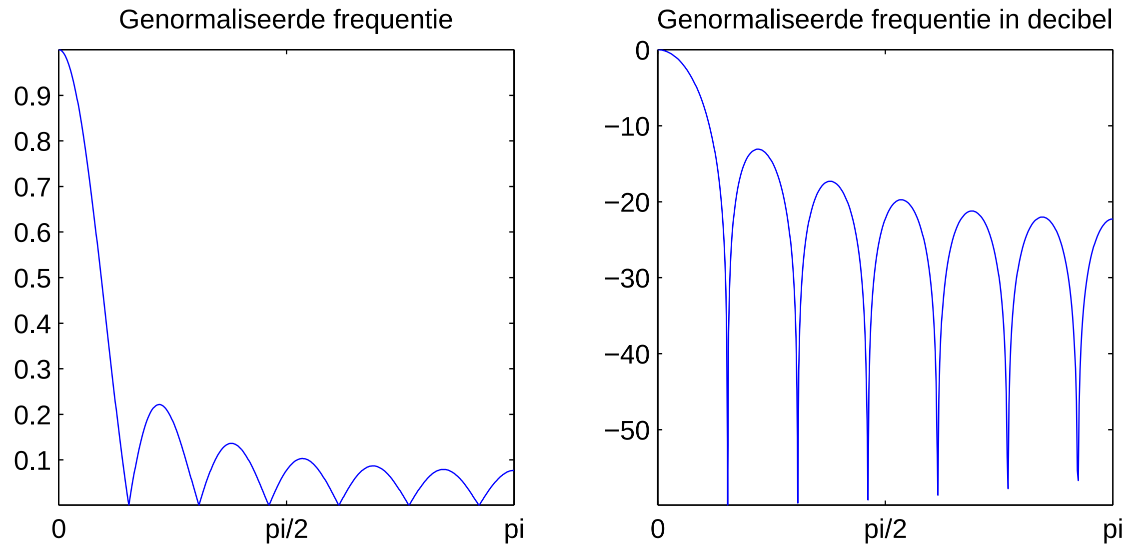
Figuur 6: $|H(z)|$



Figuur 7: $|H(\Omega)|$

Logaritmische schaal: decibel

Amplitude G	$20\log_{10} G(dB)$
100	40
10	20
1	0
0.1	-20
0.01	-40
0.001	-60



Figuur 8: Genormaliseerde frequentie vs frequentie in dB