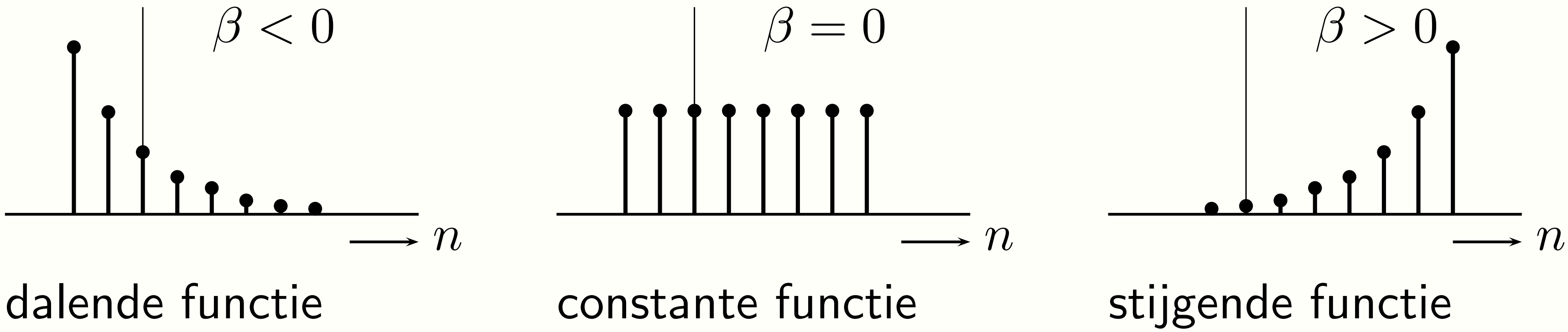
# Fourier-bouwstenen

e-macht, sinus en cosinus zijn bouwstenen digitale signalen

Reële e-macht $x[n] = Ae^{\beta n}$ met $A$ en $\beta$ reëel



# Fourier-bouwstenen

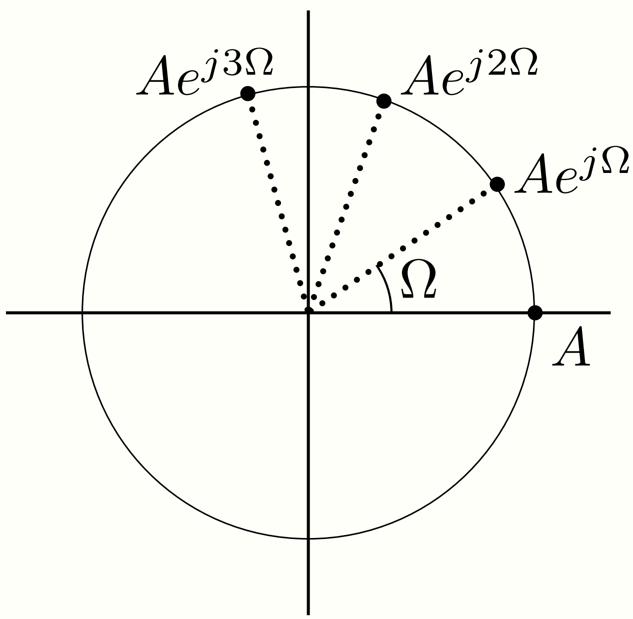
Meestal signaal beginnen bij $n = 0$

$$x[n] = Ae^{\beta n} \text{ als } n \geq 0$$

$$x[n] = 0 \text{ als } n < 0$$

# Complexe e-macht

$$x[n] = Ae^{jn\Omega} = A\cos(n\Omega) + Aj\sin(n\Omega)$$



# $\cos$ als complexe e-macht

$$x_1[n] = Ae^{jn\Omega} = A\cos(n\Omega) + Aj\sin(n\Omega)$$

$$x_2[n] = Ae^{-jn\Omega} = A\cos(n\Omega) - Aj\sin(n\Omega)$$

$$\overline{\hphantom{x_2[n] = Ae^{-jn\Omega} = A\cos(n\Omega) - Aj\sin(n\Omega)}}\ +$$

$$Ae^{jn\Omega} + Ae^{-jn\Omega} = 2A\cos(n\Omega)$$

$$\cos(n\Omega) = \frac{e^{jn\Omega} + e^{-jn\Omega}}{2}$$

# $\sin$ als complexe e-macht

$$x_1[n] = Ae^{jn\Omega} = A\cos(n\Omega) + Aj\sin(n\Omega)$$

$$x_2[n] = Ae^{-jn\Omega} = A\cos(n\Omega) - Aj\sin(n\Omega)$$

-

$$Ae^{jn\Omega} - Ae^{-jn\Omega} = 2Aj\sin(n\Omega)$$

$$\sin(n\Omega) = \frac{e^{jn\Omega} - e^{-jn\Omega}}{2j}$$

# Complexe e-macht

$\cos$ te schrijven als som complex geconjugeerde e-machten

$\sin$ te schrijven als verschil complex geconj. e-machten

$$\cos(n\Omega) \leftrightarrow \sin(n\Omega) \leftrightarrow e^{jn\Omega}$$

# Voor welke $\Omega$ is $Ae^{jn\Omega}$ periodiek?

Als voor zekere $N$ geldt:

$$Ae^{jn\Omega} = Ae^{j(n+N)\Omega} = Ae^{jn\Omega} \cdot e^{jN\Omega}$$

Als geldt: $e^{jN\Omega} = 1 = e^{j2\pi k}$

Dus als geldt: $N\Omega = 2\pi k$

Als $\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{k}{N} \Rightarrow$ rationaal (te schrijven als breuk)

Hetzelfde geldt voor $\sin(n\Omega)$ en $\cos(n\Omega)$

# Opgaven

Welke van de volgende sinussen zijn periodiek?

1. $\sin(\frac{\pi}{9}n)$ $\quad \frac{\Omega}{\pi} = \frac{\pi/9}{\pi} = \frac{1}{9} \Rightarrow$ ja
2. $\sin(\frac{4\pi}{9}n)$ $\quad \frac{\Omega}{\pi} = \frac{4\pi/9}{\pi} = \frac{4}{9} \Rightarrow$ ja
3. $\sin(n)$ $\quad \frac{\Omega}{\pi} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow$ nee
4. $\sin(0.02\pi n)$ $\quad \frac{\Omega}{\pi} = \frac{0.02\pi}{\pi} = 0.02 \Rightarrow$ ja
5. $\sin(\sqrt{2}\pi n)$ $\quad \frac{\Omega}{\pi} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\pi} = \sqrt{2} \Rightarrow$ nee

# Meerduidigheid bij digitale signalen

$$x[n] = e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j(\Omega+k\cdot 2\pi)n}$$

$$\Omega \leftrightarrow \Omega \pm 2\pi \leftrightarrow \Omega \pm 4\pi \leftrightarrow \ldots$$

$\Omega$ steeds groter $\longrightarrow$ $N = \frac{2\pi}{\Omega}$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Omega$ | $0$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $1\frac{1}{4}\pi$ | $1\frac{1}{2}\pi$ | $1\frac{3}{4}\pi$ | $2\pi$ | $\Omega$ |
| $N$ | - | $8$ | $4$ | $\frac{8}{3}$ | $2$ | $\frac{8}{3}$ | $4$ | $8$ | - | $N$ |

$\longleftarrow$ $N$ steeds groter $\longrightarrow$

$N = \frac{2\pi}{3/4\pi} = 8/3$, in $6\pi$ dus 8 keer

# Grootste digitale frequentie

$\pi$ is grootste frequentie digitale signalen

$0 = 2\pi = 4\pi = \ldots$ is laagste frequentie

Rest van frequenties er tussen in

Dus bouwstenen $\cos(\Omega n) \leftrightarrow \sin(\Omega n) \leftrightarrow e^{\pm j\Omega n}$

hebben frequentie tussen $0$ en $2\pi$

$0 \leftrightarrow \pi$ hetzelfde (gespiegeld) $\pi \leftrightarrow 2\pi$

# Discrete complexe e-macht en fundamentele frequentie

$x[n] = e^{j\Omega n}$ Wanneer periodiek?

Als $\Omega = m\frac{2\pi}{N}$ of $\frac{\Omega}{\pi}$ rationaal

Als $x[n]$ periodiek met periode $N$ (aantal sampels/periode),

dan fundamentele frequentie is $\frac{2\pi}{N}$

Harmonische componenten zij veelvouden van $\frac{2\pi}{N}$:

$$x[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

# Tijdharmonische discrete signalen

$\varphi_1[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ is periodiek met periode $N$ ($\Omega = \frac{2\pi}{N}$)

$\varphi_2[n] = e^{j2\frac{2\pi}{N}n}$ is periodiek met periode $N = \frac{2\pi}{2 \cdot 2\pi/N} = \frac{N}{2}$

$\varphi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ is periodiek met periode $N = \frac{2\pi}{k \cdot 2\pi/N} = \frac{N}{k}$

frequentie van $\varphi_k[n]$ is $k \cdot \frac{2\pi}{N} = k \cdot \Omega$

Alle $\varphi_k[n]$ hebben gemeenschappelijke periode: $N$

Harmonische frequenties veelvouden van $\frac{2\pi}{N}$: $\quad k \cdot \frac{2\pi}{N}$

# Hoeveel $\varphi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$?

$$\varphi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}} \cdot e^{j2\pi n} = \varphi_k[n]$$

Er zijn dus $N$ verschillende $\varphi_k[n]$: $k = 0, 1, \ldots, N-1$

Harmonische signalen $\varphi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ alle periode $N$

Fourier: elk periodiek signaal (periode $N$) kan geschreven worden als som van harmonische signalen $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ :

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \text{ synthese-vergelijking}$$

# Fourier-reeks representatie van periodiek signaal

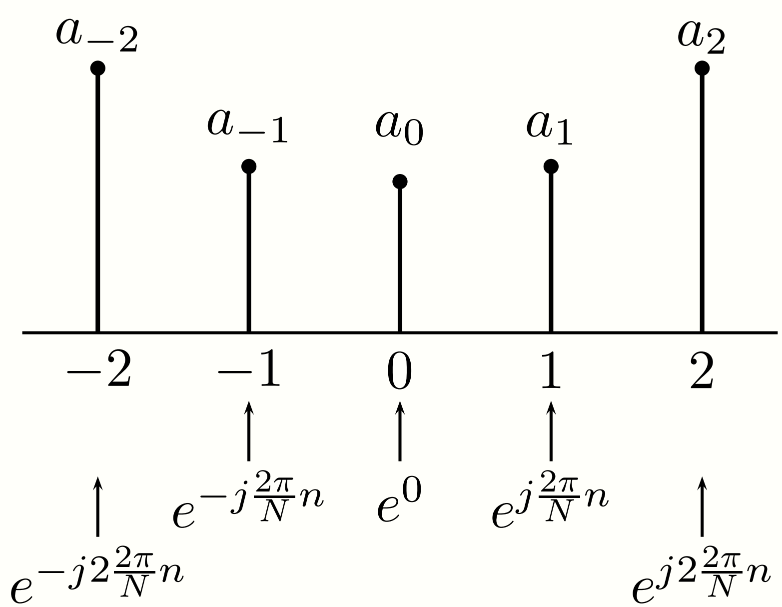
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{N}n} + a_2 e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + a_3 e^{j3\frac{2\pi}{N}n} + \ldots a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n}$$

Fundamentele frequentie $\frac{2\pi}{N}$

Coëfficiënten $a_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$

Dit is een eindige reeks (namelijk $N$ termen)




$$x[n] = \ldots a_{-2}e^{-j2\frac{2\pi}{N}n} + a_{-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + a_0 + a_1e^{j\frac{2\pi}{N}n} + a_2e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + \ldots$$

periode $N$: $a_0 = a_N$, $a_1 = a_{N+1}$, $a_2 = a_{N+2}$, $\ldots$, $a_{-1} = a_{N-1}$

complex geconjugeerd: $a_{-k} = a_k^*$, d.w.z $|a_{-k}| = |a_k|$

# Fourier-reeks representatie

| | | |
|---|---|---|
| $k = 0$ | $a_0$ | constant |
| $k = \pm 1$ | $a_1 e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ | 1ste harmonische |
| | $a_{-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$ | |
| $k = \pm 2$ | $a_2 e^{j2\frac{2\pi}{N}n}$ | 2de harmonische |
| | $a_{-2} e^{-j2\frac{2\pi}{N}n}$ | |
| | $\ldots$ | |
| $k = \pm(N-1)$ | $a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n}$ | (N-1)de harmonische |
| | $a_{-N+1} e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}n}$ | |

# Voorbeeld 1

$(x[n]) : 1, 2, 3, 4$ met $N = 4$

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{N}n} + a_2 e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + a_3 e^{j3\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{4}n} + a_2 e^{j2\frac{2\pi}{4}n} + a_3 e^{j3\frac{2\pi}{4}n} =$$

$$a_0 + a_1 e^{j\frac{\pi}{2}n} + a_2 e^{j\pi n} + a_3 e^{j3\frac{\pi}{2}n}$$

Bepaal $a_0$, $a_1$, $a_2$ en $a_3$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$ analyse-vergelijking

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$a_k = \frac{1}{4}(x[0]e^{0} + x[1]e^{-jk\frac{\pi}{2}1} + x[2]e^{-jk\frac{\pi}{2}2} + x[3]e^{-jk\frac{\pi}{2}3}) =$$

$$\frac{1}{4}(1 + 2e^{-jk\frac{\pi}{2}} + 3e^{-jk\pi} + 4e^{-jk\frac{3\pi}{2}})$$

$$a_0 = \frac{1}{4}(1 + 2e^0 + 3e^0 + 4e^0) = \frac{1}{4} \times 10 = 2.5$$

$$a_1 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\pi} + 4e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1-2j-3+4j}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j2\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j2\pi} + 4e^{-j2\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1-2+3-4}{4} = -0.5$$

$$a_3 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j3\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j3\pi} + 4e^{-j3\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1+2j-3-4j}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$$

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j\frac{\pi}{2}n} + a_2 e^{j\pi n} + a_3 e^{j3\frac{\pi}{2}n} =$$

$$2.5 + \frac{-1+j}{2} e^{j\frac{\pi}{2}n} - 0.5 e^{j\pi n} + \frac{-1-j}{2} e^{j3\frac{\pi}{2}n}$$

Dit is de Fourier-reeks representatie van $(x[n]) : 1, 2, 3, 4$

Constante term: $2.5$

1ste harmonische $\Omega = \frac{\pi}{2}$ met factor $\frac{-1+j}{2}$

2de harmonische $2\Omega = \pi$ met factor $-0.5$

3de harmonische $3\Omega = \frac{3\pi}{2}$ met factor $\frac{-1-j}{2}$

# Coëfficiënten zijn complex-geconjugeerd

$a_0 = 2.5$, $a_1 = \frac{-1+j}{2}$, $a_2 = -0.5$, $a_3 = \frac{-1-j}{2}$

$a_1$ en $a_3$ complex-geconjugeerd

$$\frac{-1+j}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{-1-j}{2}e^{j3\frac{\pi}{2}n} = -\frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}) + \frac{j}{2}(e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}) =$$

$$-(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}+e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2}) - (\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}-e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2j}) = -\cos(\frac{\pi}{2}n) - \sin(\frac{\pi}{2}n)$$

$$x[n] = 2.5 - 0.5e^{j\pi n} - \cos(\frac{\pi}{2}n) - \sin(\frac{\pi}{2}n)$$

# Voorbeeld 2

Wat is Fourier-reeks representatie van $\cos$?

cosinus opsplitsen in e-machten:

$\cos(n\Omega) = \frac{e^{jn\Omega}+e^{-jn\Omega}}{2}$

$x[n] = \cos\frac{2\pi}{5}n = \frac{e^{j\frac{2\pi}{5}n}+e^{-j\frac{2\pi}{5}n}}{2} = 0.5e^{j\frac{2\pi}{5}n} + 0.5e^{-j\frac{2\pi}{5}n}$

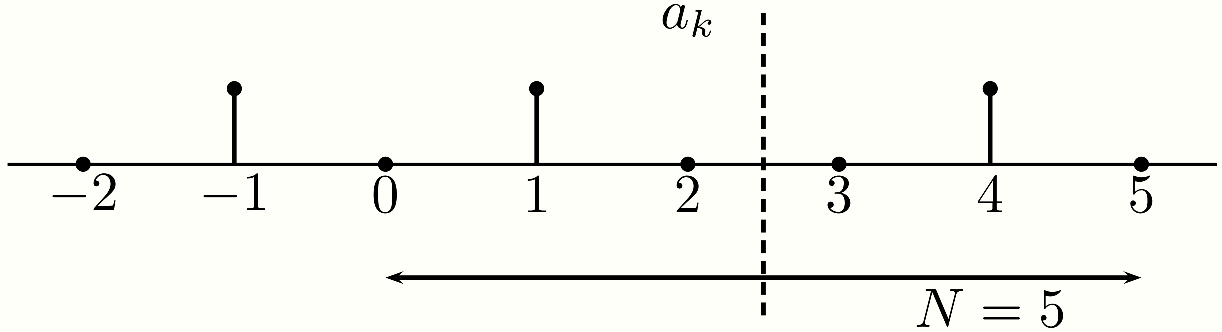
$N = 5$, fundamentele frequentie $\Omega = \frac{2\pi}{5}$

$a_1 = 0.5$, $a_{-1} = a_4 = 0.5$, $a_0 = 0$, $a_2 = a_3 = 0$

Het lijnen spectrum van

$$x[n] = \cos\frac{2\pi}{5}n = 0.5e^{j\frac{2\pi}{5}n} + 0.5e^{-j\frac{2\pi}{5}n}$$

met periode $N = 5$



# Voorbeeld 3

Gegeven $x[n]$ met periode $N = 7$:

$(x[n]) : 2, 1, -2, 3, -1, -1, 1$

Wat is de Fourier reeks?

Fundamentele frequentie $\Omega = \frac{2\pi}{7}$

Welke frequenties kunnen in $x[n]$ zitten?

$0, \frac{2\pi}{7}, 2 \times \frac{2\pi}{7}, 3 \times \frac{2\pi}{7}, \ldots, 6 \times \frac{2\pi}{7}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=0}^{6} a_k e^{jk\frac{2\pi}{7}n} =$$

$$a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{7}n} + a_2 e^{j2\frac{2\pi}{7}} + \ldots + a_6 e^{j6\frac{2\pi}{7}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= 0.4 \\ a_1 &= 0.3 - 0.1j \\ a_2 &= 0.7 + 0.3j \\ a_3 &= -0.3 - 0.6j \end{aligned}}$$

7 waarden

$$a_4 = -0.3 + 0.6j$$

$$a_5 = 0.7 - 0.3j$$

$$a_6 = 0.3 + 0.1j$$

# Voorbeeld 4

Gegeven $x[n] = \sin\frac{3\pi}{50}n$, dan is periode $N = 100$

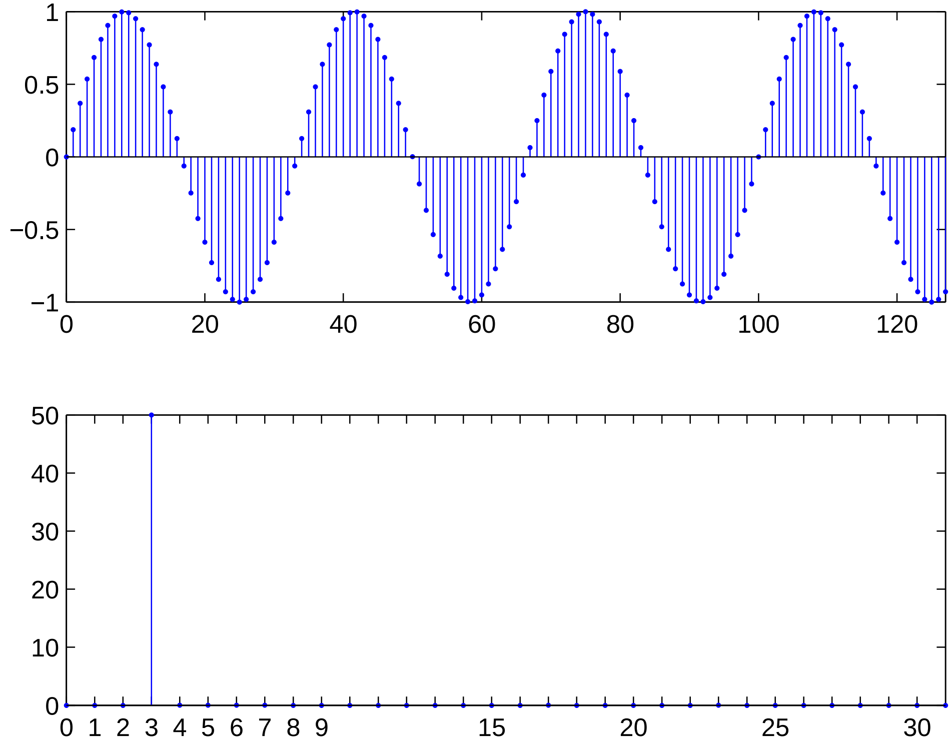
Fourierreeks heeft 100 coëfficiënten: $a_0, a_1, \ldots, a_{99}$

$x[n] = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{100}n} + a_2 e^{j2\frac{2\pi}{100}n} + a_3 e^{j3\frac{2\pi}{100}n} + \ldots$

fundamentele (grond) frequentie $\Omega_o = \frac{2\pi}{100}$

Welke frequentie zit er in?

$\frac{3\pi}{50} = \frac{6\pi}{100} = 3\frac{2\pi}{100} = 3\Omega_o$, dus $a_3$ groot




Figuur 1: sinus met frequentie $\frac{3\pi}{50}$

# FFT met fundamentele frequentie $\frac{2\pi}{128}$

De Fast Fourier Transform gebruikt een vaste periode, en dus een vaste fundamentele frequentie

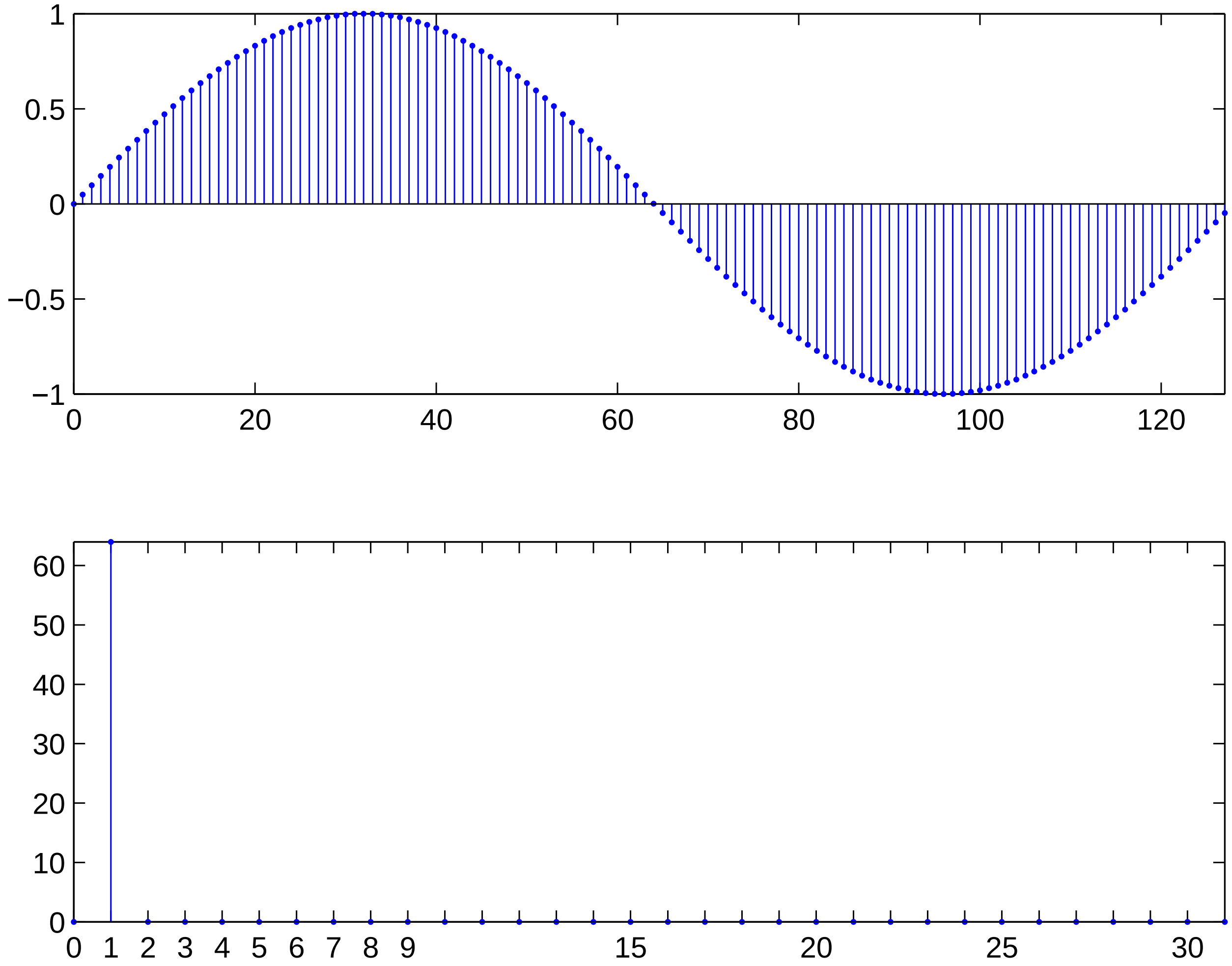
Vaak wordt al periode een macht van $2$ gebruikt, b.v. 128:

$FFT(x, 128)$ gebruikt dus als fundamentele periode $\frac{2\pi}{128}$

Dat betekent dat de coëfficiënten veelvouden van $\frac{2\pi}{128}$ wegen

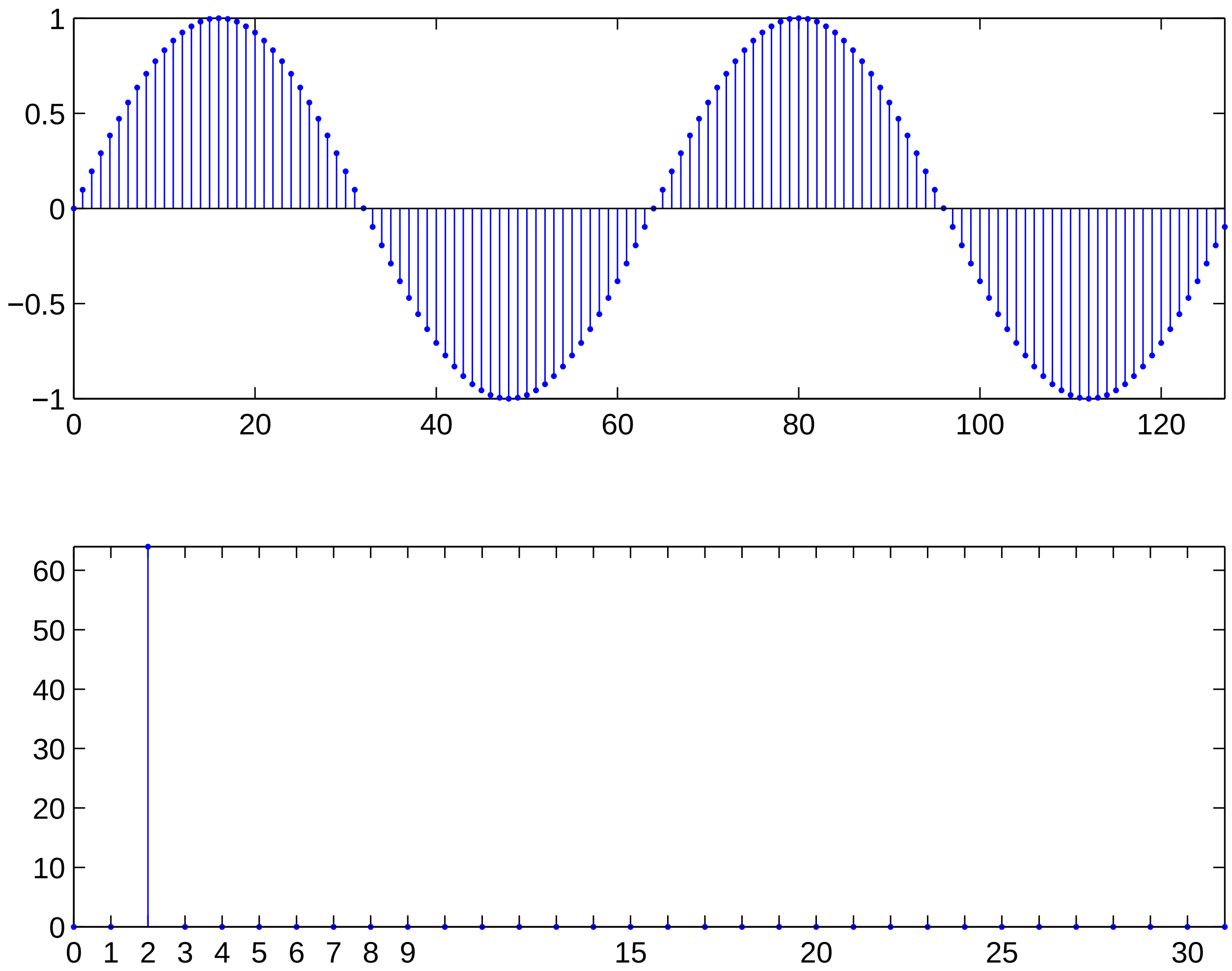
Fast Fourier Transform $FFT(x, 128) \rightarrow a_0, a_1, \ldots, a_{127}$

$x[n] = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{128}n} + a_2 e^{j2\frac{2\pi}{128}n} + a_3 e^{j3\frac{2\pi}{128}n} + \ldots$



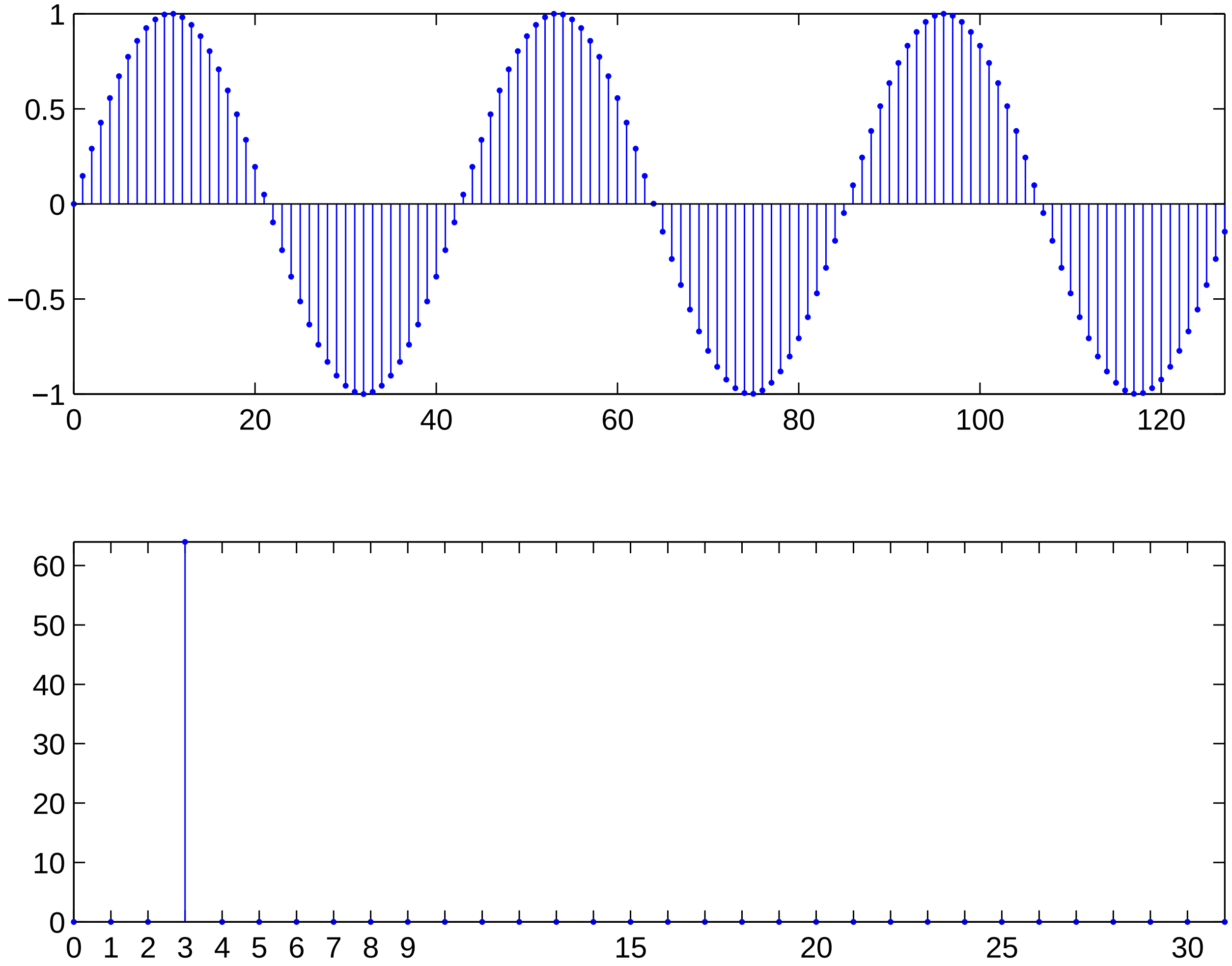

 

Figuur 2: Een sinus met frequentie $\frac{2\pi}{128}$ en $FFT(x, 128)$



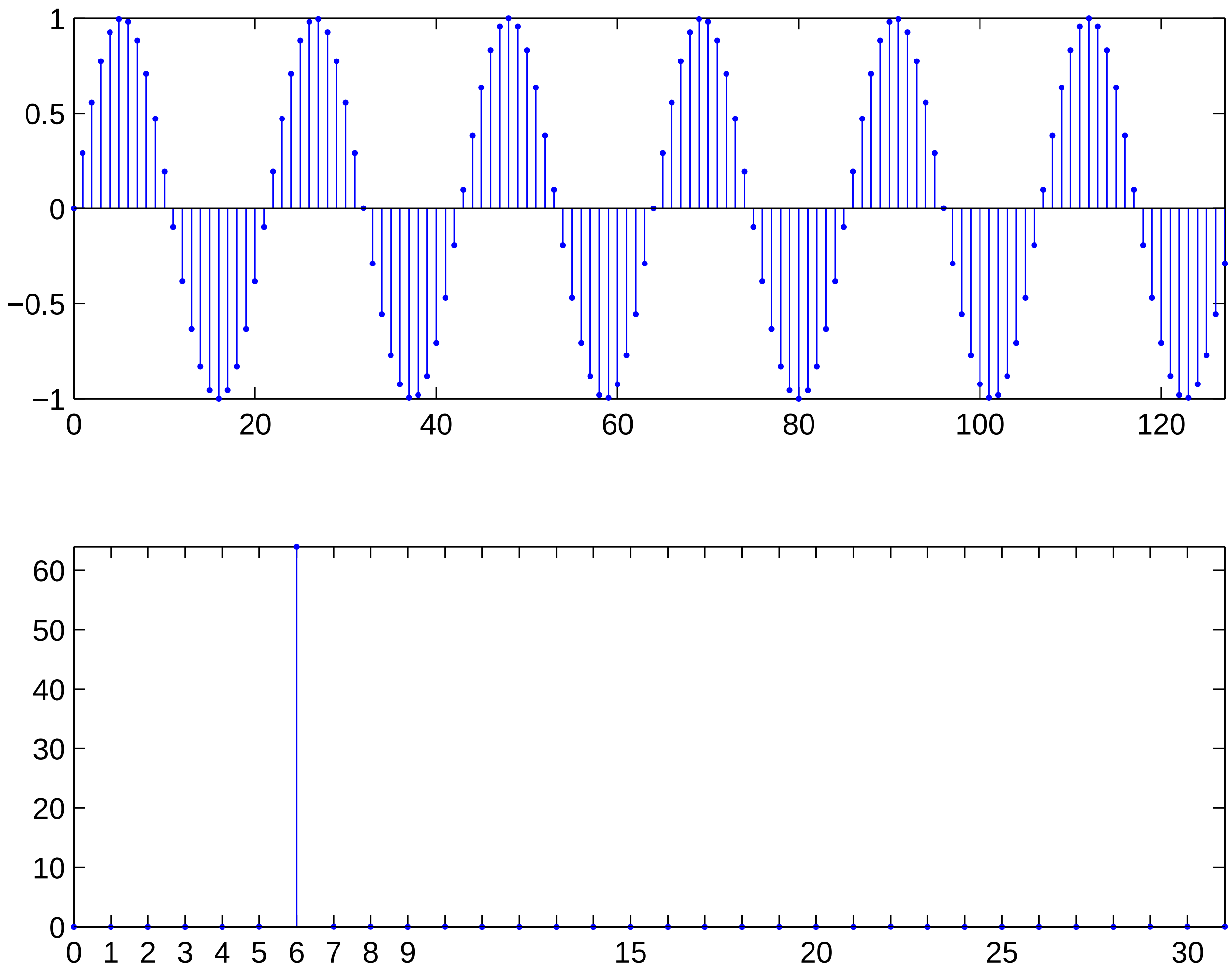
Figuur 3: Een sinus met frequentie $2 \times \frac{2\pi}{128}$ en $FFT(x, 128)$







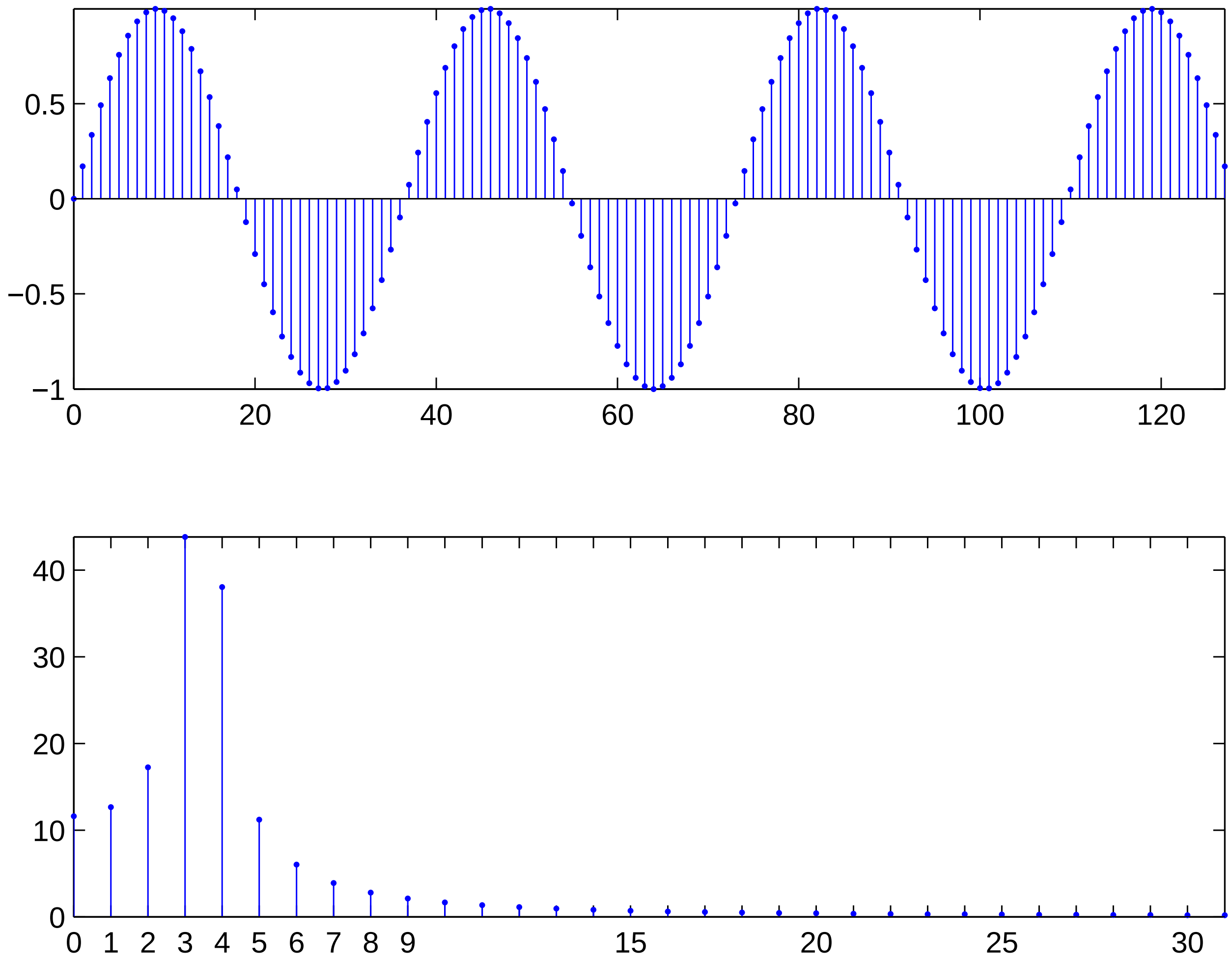

Figuur 4: Een sinus met frequentie $3 \times \frac{2\pi}{128}$ en $FFT(x, 128)$








Figuur 5: Een sinus met frequentie $6 \times \frac{2\pi}{128}$ en $FFT(x, 128)$







Figuur 6: Een sinus met frequentie $3.5 \times \frac{2\pi}{128}$ en $FFT(x, 128)$

# FFT met fundamentele frequentie $\frac{2\pi}{128}$

Gegeven $x[n] = \sin\frac{3\pi}{50}n$, periode $N = 100$

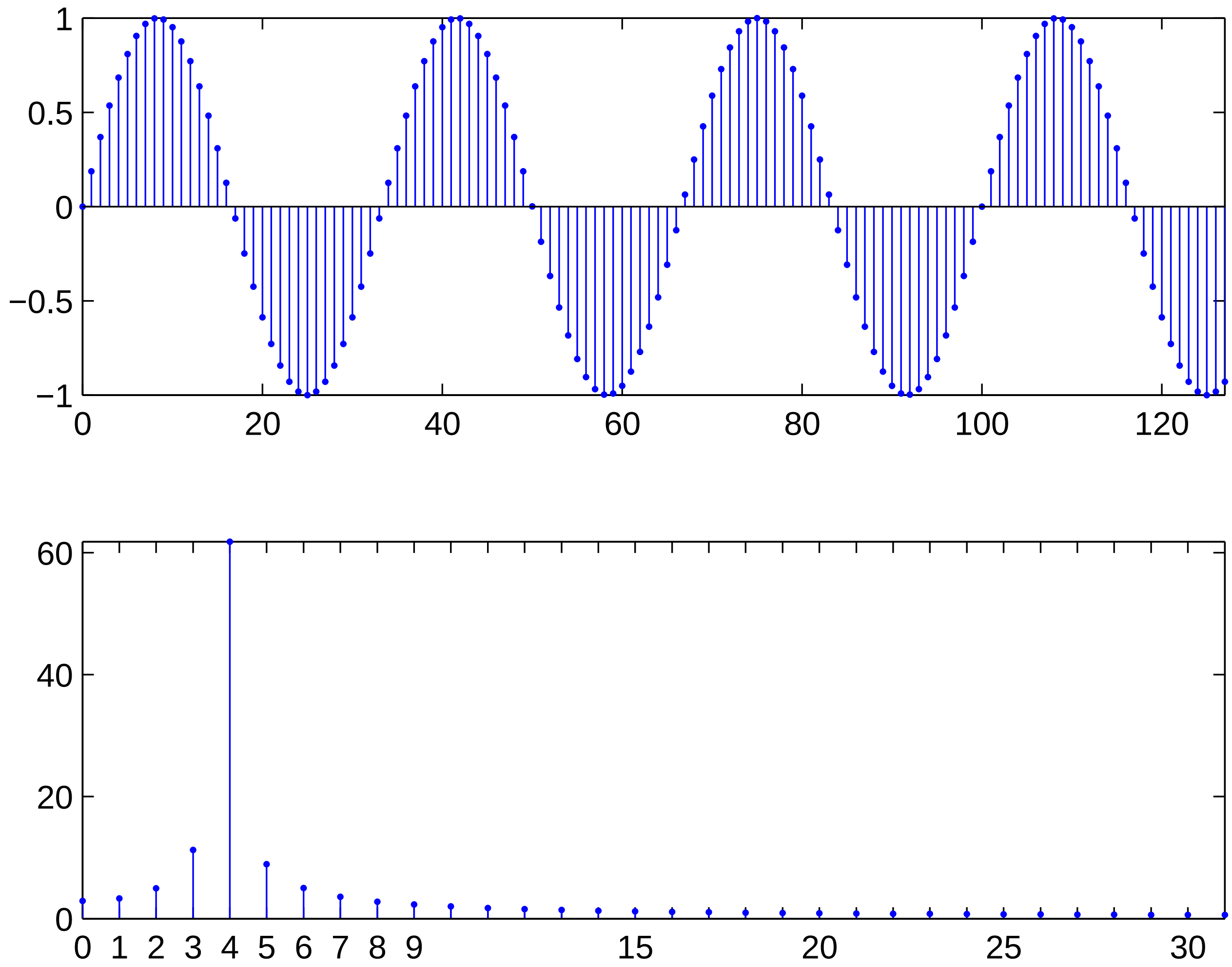
Fast Fourier Transform $FFT(x, 128) \rightarrow a_0, a_1, \ldots, a_{127}$

$x[n] = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{128}n} + a_2 e^{j2\frac{2\pi}{128}n} + a_3 e^{j3\frac{2\pi}{128}n} + \ldots$

fundamentele (grond) frequentie $\Omega_o = \frac{2\pi}{128} = \frac{\pi}{64} = \frac{25\pi}{1600}$

Welke frequentie zit er in? $\frac{3\pi}{50} = \frac{96\pi}{1600}$

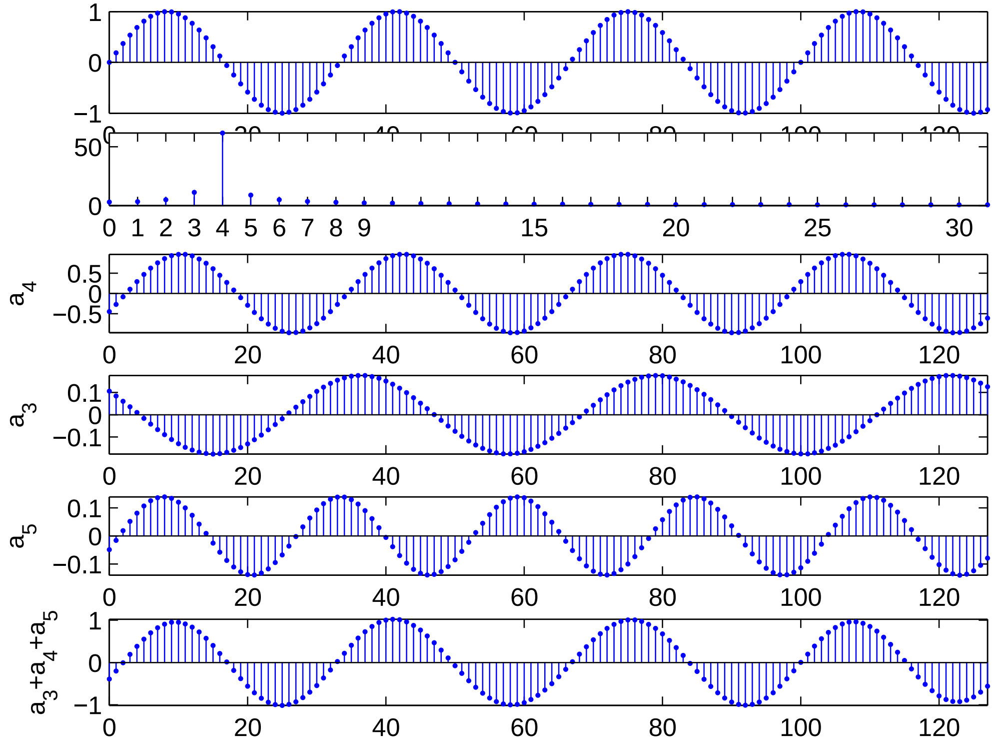
$3\Omega_0 = \frac{75\pi}{1600} < \frac{96\pi}{1600} < \frac{100\pi}{1600} = 4\Omega_o$ Daarom $a_3$ en $a_4$ groot,
rest $a_k$ veel kleiner



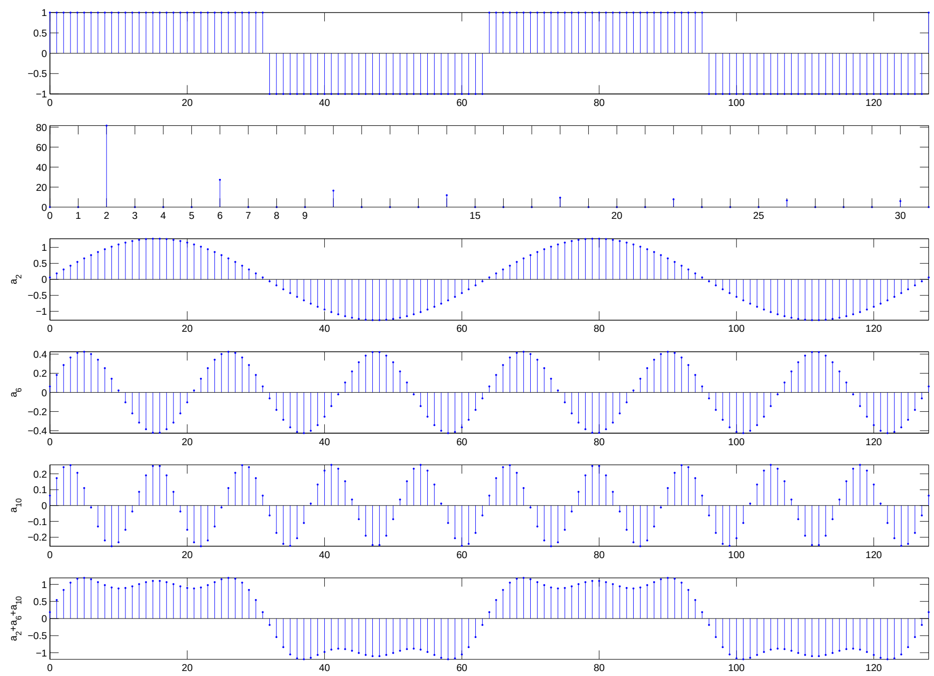




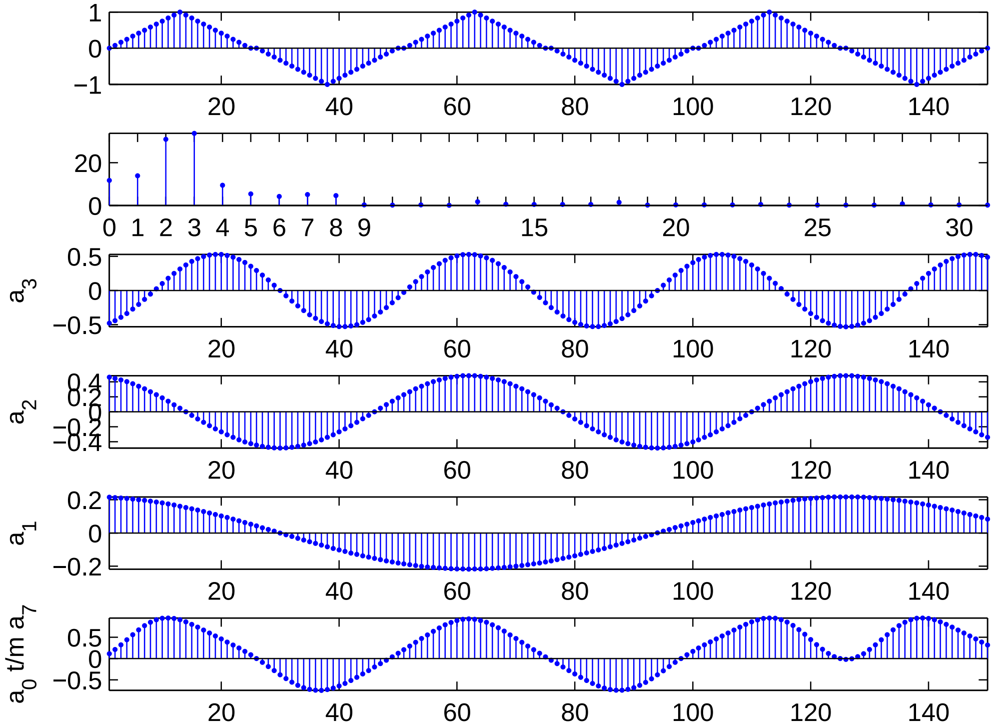

Figuur 7: sinus met frequentie $\frac{3\pi}{50}$ en $FFT(x, 128)$




Figuur 8: sinus met frequentie $\frac{3\pi}{50}$ en $a_4\times$ 4de harmonische, $a_3\times$ 3de harmonische, $a_5\times$ 5de harmonische




Figuur 9: blok met fundamentele frequentie $\frac{2\pi}{64}$ en $a_2\times$ 2de harmonische, $a_6\times$ 6de harmonische, $a_{10}\times$ 10de harmonische




Figuur 10: helling met $a_3\times$ 3de harmonische, $a_2\times$ 2de harmonische, $a_1\times$ 1ste harmonische

# Opgave practicum

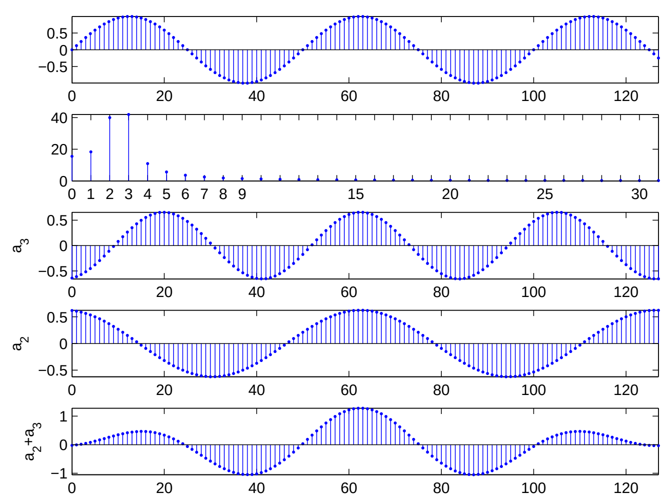
Genereer sinus met frequentie $f = 20Hz$ en $1000$ samples per seconde. Wat is de fundamentele frequentie $\Omega$ van de gesampelde sinus? En wat is de periode $N$?

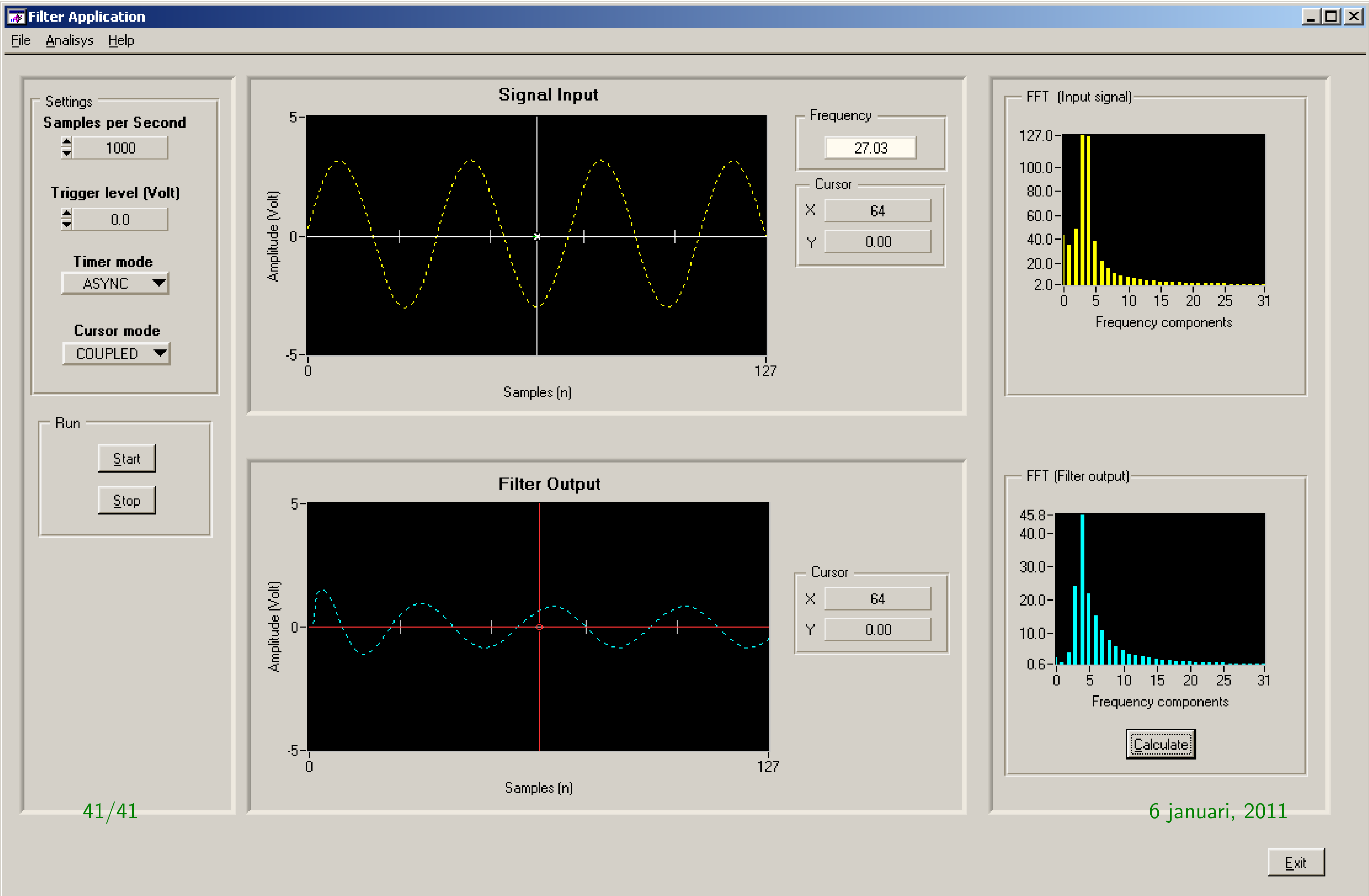
$\Omega = 2\pi * f * T_s = 2\pi * 20 * 0.001 = \frac{2\pi}{50} (= \frac{128\pi}{3200})$ en $N = 50$

De FFT gebruikt als basisfrequentie $\frac{2\pi}{128} (= \frac{50\pi}{3200})$ en veelvouden daarvan. Bij welke veelvouden ligt de frequentie van de sinus het dichtst in de buurt?

$2 * \frac{50\pi}{3200} < \frac{128\pi}{3200} < 3 * \frac{50\pi}{3200}$

Bekijk de FFT van deze sinus. Verklaar de piek in het frequentiespectrum. Deze sinus wordt samengesteld door de 2de en 3de harmonische van $\frac{2\pi}{128}$.




Filter Application
File
Analisys
Help
Settings
Samples per Second
1000
Trigger level (Volt)
0.0
Timer mode
ASYNC
Cursor mode
COUPLED
Run
Start
Stop
Signal Input
Amplitude (Volt)
5
0
-5
0
127
Samples (n)
Frequency
27.03
Cursor
X
64
Y
0.00
Filter Output
Amplitude (Volt)
5
0
-5
0
127
Samples (n)
Cursor
X
64
Y
0.00
FFT (Input signal)
127.0
100.0
80.0
60.0
40.0
20.0
2.0
0 5 10 15 20 25 31
Frequency components
FFT (Filter output)
45.8
40.0
30.0
20.0
10.0
0.6
0 5 10 15 20 25 31
Frequency components
Calculate
Exit