

Propagación de errores en medidas indirectas: comparación de métodos analíticos y métodos numéricos

Jorge Mifsut Benet

Universitat de València

14 de julio de 2021



❶ Introducción

Métodos analíticos

Métodos de Montecarlo

❷ Implementación en casos sencillos

Cálculo de la aceleración de la gravedad con un péndulo

Área y volumen de un cilindro

❸ Implementación en casos complejos

Órbita de un satélite

El atractor de Lorentz

❹ Tiempos de cálculo

❺ Conclusiones

Introducción

La importancia de la expresión de la incertidumbre

- *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (2008), Joint Committee for Guides in Metrology (ISO, IUPAC, BIPM...)
- *Measurement Uncertainty Analysis Principles And Methods*, NASA Measurement Quality Assurance Handbook, NASA-HDBK-8739.19-3
- *Uncertainty in Industrial Practice: A Guide to Quantitative Uncertainty Management* (2008), Etienne de Rocquigny, Nicolas Devictor, Stefano Tarantola, Wiley & Sons

Hipótesis iniciales

-

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

1 función 1 variable:

$$\mu_y = f(\mu_x), \quad \sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\mu_x} \right)^2 \sigma_x^2$$

1 función n variables:

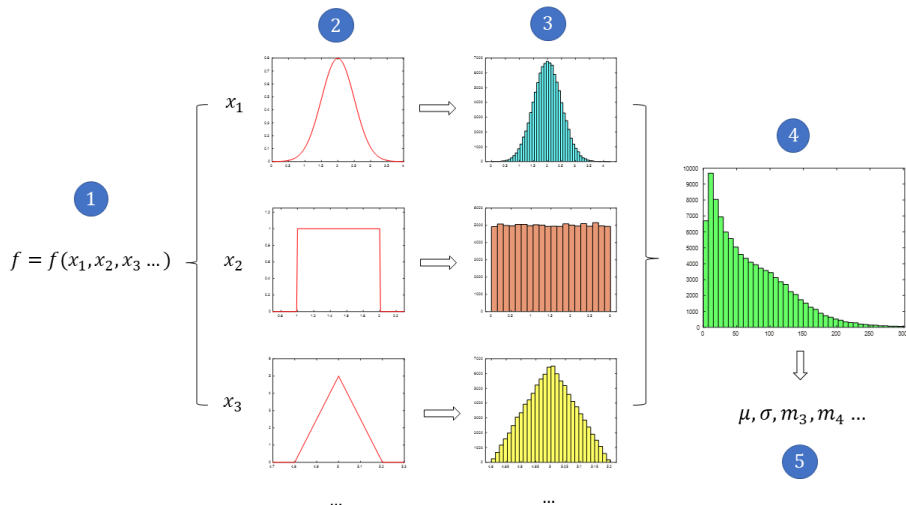
$$\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^{(j)}} \right)^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}} \frac{\partial f}{\partial x^{(k)}} \sigma_{jk}$$

m funciones de n variables:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{bmatrix} \quad C_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$$

$$\Rightarrow C_Y = J \cdot C_X \cdot J^T$$

Métodos de Montecarlo



Cálculo de la aceleración de la gravedad con un péndulo

Método analítico

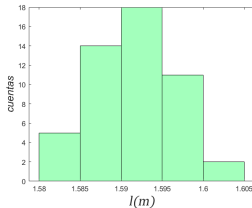
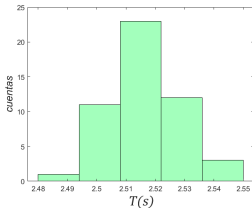
Aceleración de la gravedad:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

La propagación de errores por el método analítico:

$$\sigma(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} \sigma(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \sigma(T)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T} \sigma(l)\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 l}{T^3} \sigma(T)\right)^2}$$

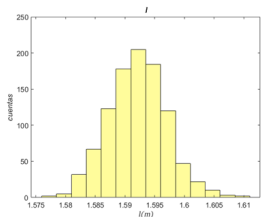
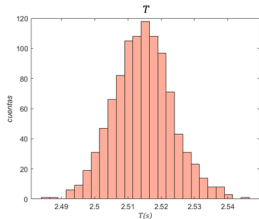
Datos experimentales para el método analítico:



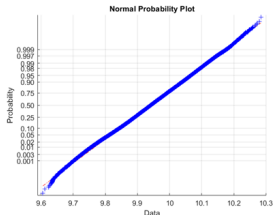
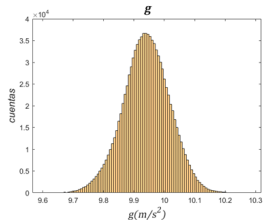
Cálculo de la aceleración de la gravedad con un péndulo

Método de Montecarlo

Distribuciones de entrada



Distribución de salida



Cálculo de la aceleración de la gravedad con un péndulo

Comparación de ambos métodos (caso de aceleración de la gravedad)

	Montecarlo	Analítica	Discrepancia
$\bar{x}(\text{m/s}^2)$	9.9410	9.9371	0.03 %
$\sigma(\text{m/s}^2)$	0.0762	0.0928	18 %
$Med(\text{m/s}^2)$	9.9413	-	-
Curtosis	3.0730	-	-
Asimetría	0.0179	-	-

En términos del intervalo de confianza al 95 %:

$$g_{\text{analítica}} = \mathbf{9.94} \pm 0.03 \quad \text{m/s}^2$$

$$g_{\text{Montecarlo}} = \mathbf{9.94} \pm 0.02 \quad \text{m/s}^2$$

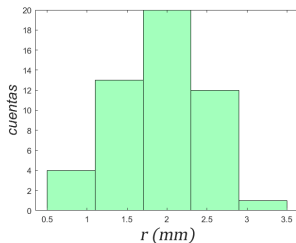
Área y volumen de un cilindro

Método analítico

$$V = \pi r^2 h; \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Se tratan tres casos para la correlación entre las variables:

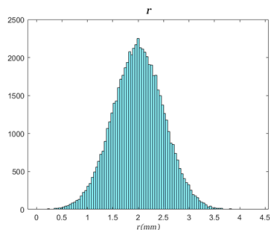
- Variables independientes ($\rho_{rh} = 0$)
- **Variables totalmente correlacionadas** ($\rho_{rh} = 1$) $\Rightarrow h(r) = 2r$
- Caso intermedio ($\rho_{rh} = 0.5$)



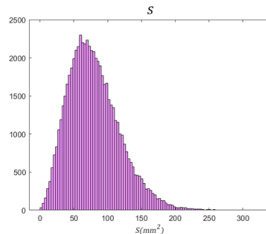
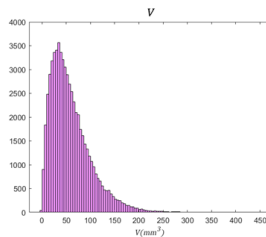
Área y volumen de un cilindro

Método de Montecarlo

Distribución de entrada



Distribuciones de salida



Área y volumen de un cilindro

Comparación de ambos métodos

Resultados:

	V (mm ³)			S (mm ²)		
	Montecarlo	Analítica	Discrep.	Montecarlo	Analítica	Discrep.
\bar{x}	59.705	61.752	3 %	80.119	86.486	8 %
σ	42.438	47.951	13 %	38.341	44.772	16 %
Med.	50.166	-	-	75.299	-	-
Curt.	6.418	-	-	3.784	-	-
Asim.	1.473	-	-	0.7564	-	-

$$V_{analítico} = 61 \pm 14 \text{ mm}^3$$

$$S_{analítica} = 87 \pm 12 \text{ mm}^2$$

$$V_{Montecarlo} = 60 \pm 12 \text{ mm}^3$$

$$S_{Montecarlo} = 80 \pm 10 \text{ mm}^2$$

Implementación en casos complejos

Dos casos:

- Órbita de un satélite

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$$

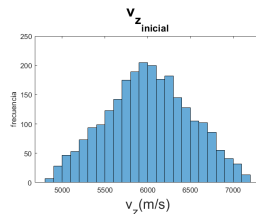
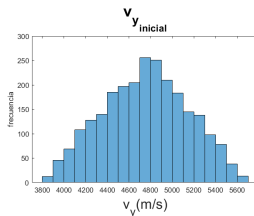
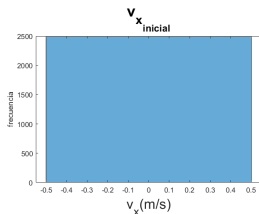
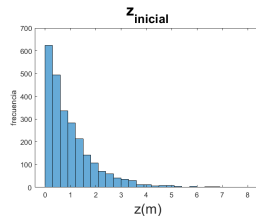
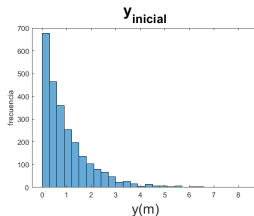
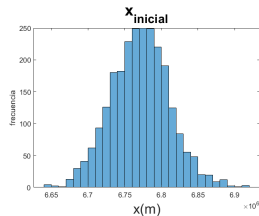
- Sistema del atractor de Lorentz (caso **extremo**)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

El método analítico de propagación de errores descrito en la introducción **no** es directamente **aplicable** en estos casos.

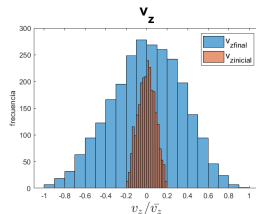
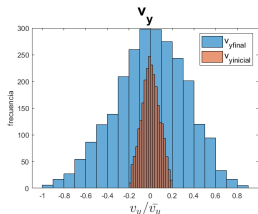
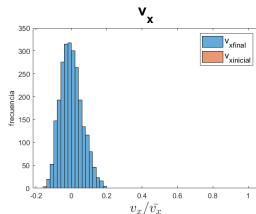
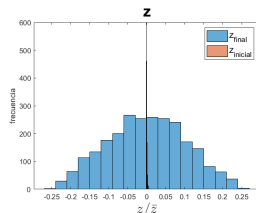
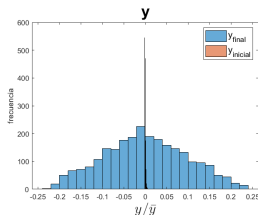
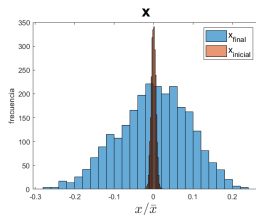
Órbita de un satélite

Condiciones iniciales



El cono de probabilidad de la trayectoria

Comparación del estado inicial y el estado final



Resultados

Posición y velocidad inicial y final con un 95 % de confianza:

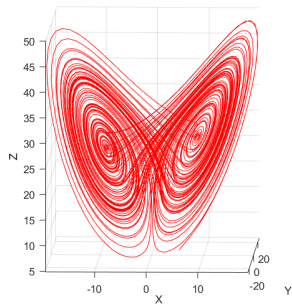
$$x(t_0) = 6771.8 \pm \mathbf{1.1 \text{ km}}; \quad y(t_0) = (102 \pm 3) \cdot \mathbf{10^{-5} \text{ km}}; \quad z(t_0) = (101 \pm 3) \cdot \mathbf{10^{-5} \text{ km}}$$

$$x(t_f) = 2177 \pm \mathbf{5 \text{ km}}; \quad y(t_f) = 4015 \pm \mathbf{10 \text{ km}}; \quad z(t_f) = 5072 \pm \mathbf{14 \text{ km}}$$

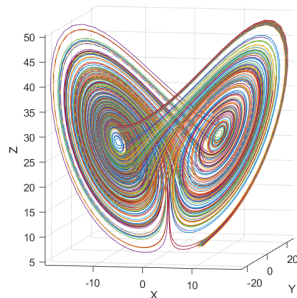
$$v_x(t_0) = 0 \pm \mathbf{0 \text{ m/s}}; \quad v_y(t_0) = 4758 \pm \mathbf{11 \text{ m/s}}; \quad v_z(t_0) = 6007 \pm \mathbf{14 \text{ m/s}}$$

$$v_x(t_f) = -7317 \pm \mathbf{12 \text{ m/s}}; \quad v_y(t_f) = 14537 \pm \mathbf{13 \text{ m/s}}; \quad v_z(t_f) = 1848 \pm \mathbf{17 \text{ m/s}}$$

El atractor de Lorentz



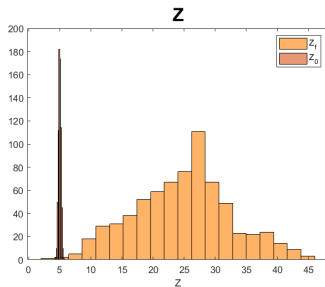
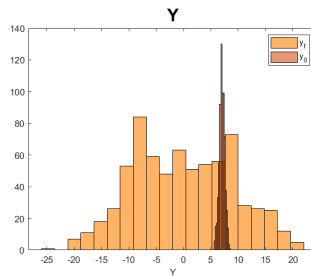
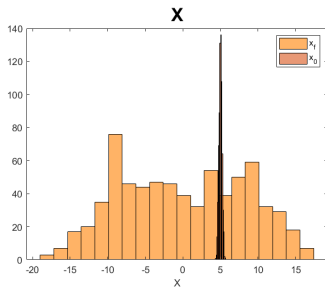
(d) Condiciones iniciales puntuales



(e) CI con distribuciones de $M = 10$ números aleatorios

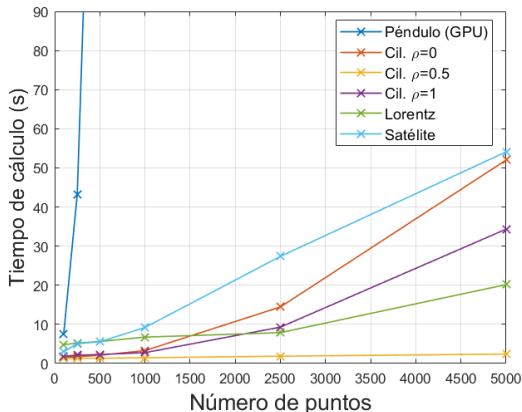
Posiciones de cada uno de los $M = 40$ puntos en la iteración 4000 y en los siguientes 3 pasos

Comparación del estado inicial y el estado final



Tiempos de cálculo

Intel Core i7 8GB RAM, NVIDIA GeForce 940MX



- Con $N^m \Rightarrow$ **inviabile** \Rightarrow aproximación: $N \times m$

Conclusions

It is important to discern which is the best method to carry out error propagation in each given case

- Acceleration of gravity with a simple pendulum \Rightarrow similar results, both methods are equivalent
- Volume and surface area of a cylinder \Rightarrow notable discrepancies between both methods
- Complex cases with differential equations \Rightarrow only Montecarlo is applicable, dispersion of points in final state is significantly higher

Conclusion: Montecarlo is the most advisable method for the propagation of uncertainty in indirect measurements, as long as the high computational cost in memory and calculation time can be accepted.

Due to high calculation times MC has been implemented as $N \times m$ instead of N^m